8 Introduction aux polynômes et à la décomposition en éléments simples

Nous avons précédemment rencontré des identités telles que $\forall x \notin \{0,-1\}$, $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$.
Une telle écriture permet, entre autres, de déterminer aisément une primitive de la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $x \mapsto \dfrac{1}{x(x+1)}$: il s'agit de $x \mapsto \ln(x) - \ln(x+1) = \ln \dfrac{x}{x+1}$.
De telles décompositions apparaissent fréquemment lorsque nous considérons le quotient de deux fonctions polynomiales, et le but de ce chapitre est essentiellement de se familiariser avec les techniques permettant de trouver ces décompositions. Rien ou presque ne sera démontré ici, et toute la théorie est repoussée à un chapitre ultérieur.

Le seul but de ce chapitre est de vous donner des méthodes pratiques pour calculer ce que nous allons nommer une décomposition en éléments simples, car nous en aurons besoin prochainement pour calculer des primitives de quotients de polynômes, mais aussi car vous les utiliserez en S.I.

8.1 Polynômes

8.1.1 Définitions

La définition qui suit d'un polynôme est très provisoire, et correspond plutôt à ce que nous avons nommé une fonction polynomiale. Mais nous verrons que dans ce contexte, les deux définitions sont équivalentes.

Définition 8.1 – On appelle **polynôme** toute fonction P définie sur $\mathbf{R}$ de la forme $P : x \mapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, avec $n \in \mathbf{N}$ et $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$.
Si $a_n \neq 0$, on dit alors P est de **degré** n, et on note $\deg(P) = n$.
Par convention, on décrète que le polynôme nul[1] est de degré égal à $-\infty$.
Si P est de degré n, son coefficient en x^n (ici a_n) est appelé **coefficient dominant** de P.

[1] La fonction nulle.

Remarques. ▸ On note généralement X plutôt que x la variable dont dépend P.
Plus rigoureusement, si on note X la fonction id : $x \mapsto x$, alors la fonction $x \mapsto x^2 + 3x + 1$ est en fait égale à $X^2 + 3X + 1$.
▸ Le degré d'un polynôme est donc la plus grande puissance de X qui apparaît précédée d'un coefficient non nul dans l'expression de P, et ce coefficient est le coefficient dominant.
Par exemple $P = -2X^3 + 3X + 1$ est de degré 3 et de coefficient dominant -2. De même, $Q = X^3 + 4X^2$ est de degré 3 et de coefficient dominant 1.
Et $P + 2Q = 8X^2 + 3X + 1$ est de degré 2 et de coefficient dominant 8.

Remarque — On constate sur cet exemple que le degré d'une somme peut être strictement inférieur aux degrés des deux polynômes de la somme.

▸ Un polynôme est de degré inférieur ou égal à 0 si et seulement si il est constant. Plus précisément, les polynômes constants non nuls sont de degré 0 et le polynôme nul est de degré $-\infty$.
▸ Toutes les puissances de X qui apparaissent sont des entiers positifs. Et donc le simple fait d'écrire $\sqrt{x} = x^{1/2}$ ou $\dfrac{1}{x} = x^{-1}$ ne suffit pas à affirmer que la racine et l'inverse sont des fonctions polynomiales.

Remarque — D'ailleurs on peut prouver que ces deux fonctions **ne sont pas** polynomiales.

Proposition 8.2 (Unicité des coefficients) : *Si $P : x \mapsto a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ et $Q : x \mapsto b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$ sont égales*[2]*, alors pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = b_k$.*
Autrement dit deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients.

[2] C'est-à-dire prennent la même valeur en tout $x \in \mathbf{R}$.

Démonstration. Supposons P et Q égales, et supposons par l'absurde qu'il existe $k \in [\![0, n]\!]$ tels que $a_k \neq b_k$.
Notons i le plus grand $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $a_k \neq b_k$.
Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $0 = P(x) - Q(x) = (a_i - b_i)x^i + (a_{i-1} - b_{i-1})x^{i-1} + \cdots + (a_0 - b_0)$.

Détails Pour $k \geqslant i$, $a_k - b_k = 0$, par définition de i.

Soit encore : pour tout $x \in \mathbf{R}$, $0 = x^i \left[\underbrace{(a_i - b_i)}_{\neq 0} + \dfrac{a_{i-1} - b_{i-1}}{x} + \cdots + \dfrac{a_0 - b_0}{x^i}\right]$.
Si $i > 0$, alors le membre de droite tend vers $\pm\infty$ (suivant le signe de $a_i - b_i$) lorsque $x \to +\infty$, ce qui est absurde.
Et si $i = 0$, on obtient tout simplement $0 = a_0 - b_0 \Leftrightarrow a_0 = b_0$, contredisant la définition de i.
On en déduit donc que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = b_k$. □

Remarque. Ceci justifie donc qu'on parle **du** degré de P : il n'y a pas ambiguïté sur ce degré, qui est défini de manière unique puisqu'il n'y a qu'un seul moyen d'écrire f comme somme de termes de la forme a_kx^k.
Et de même, on parle donc **du** coefficient de degré k de P.

Réel/complexe Notons qu'un polynôme à coefficients réels peut avoir des racines complexes, par exemple i est racine de $X^2 + 1$.

Définition 8.3 – Soit P un polynôme, et soit $a \in \mathbf{C}$. Si $P(a) = 0$, on dit que a est une **racine** de P.

Il est aisé de constater que la somme de deux polynômes est encore un polynôme, et que le coefficient de degré k de $P + Q$ est la somme des coefficients de degrés k de P et Q.
De même, le produit de deux polynômes est également un polynôme.
Il faut alors travailler un peu plus pour exprimer les coefficients de $P \times Q$ en fonction de ceux de P et Q : notons $P = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_kX^k$. Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} P(x)Q(x) &= \left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n\right)\left(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n\right) \\ &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots + a_nb_nx^{2n}. \end{aligned}$$

On prouve alors que le coefficient de degré p de PQ est $\sum_{k=0}^{p} a_kb_{p-k}$.

Ceci peut se prouver sans les pointillés ci-dessus, mais c'est moins agréable[3] : pour tout $x \in \mathbf{R}$,

[3] Et probablement moins convaincant.

$$\begin{aligned} P(x)Q(x) &= \left(\sum_{k=0}^{n} a_kx^k\right)\left(\sum_{k=0}^{p} b_kx^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{p} a_kb_ix^{k+i} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n+p}\sum_{k+i=\ell} a_kb_ix^{k+i} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n+p}\left(\sum_{k+i=\ell} a_kb_i\right)x^\ell \\ &= \sum_{\ell=0}^{n+p}\left(\sum_{k=0}^{\ell} a_kb_{\ell-k}\right)x^\ell. \end{aligned}$$

Détails Il s'agit d'une sommation par paquets, où on a écrit

$$I = [\![0, n]\!] \times [\![0, p]\!]$$

sous la forme $\bigcup_{\ell=0}^{p+n} I_\ell$ où

$$I_\ell = \{(k, i) \in I \mid k + i = \ell\}.$$

8.1.2 Division euclidienne des polynômes

La division euclidienne des entiers relatifs vous est familière depuis longtemps : c'est celle avec les restes que vous avez apprise au primaire et revue en terminale.
La division de a par b est de la forme $a = bq + r$, où q est un entier appelé quotient de a par b et r est un entier tel que $0 \leqslant r < |b|$, qu'on appelle le reste de la division de a par b.
Ainsi, $151 = 11 \times 13 + 8$ est la division euclidienne de 151 par 13 : son quotient vaut 11 et son reste vaut 8.
Une telle division existe aussi pour les polynômes :

Remarque
Il s'agit aussi de la division euclidienne de 151 par 11, mais dans ce cas, le quotient vaut 13.

Théorème 8.4 : *Soient A et B deux polynômes non nuls. Alors il existe un unique couple (Q, R) de polynômes avec $\deg(R) < \deg(B)$ tel que $A = BQ + R$.*
On dit alors que Q est le quotient de A par B et que R est le reste de la division euclidienne de A par B.
Si $R = 0$, on dit que B divise A.

Une fois n'est pas coutume, repoussons la preuve à plus tard, et essayons de comprendre comment trouver une telle division. Le principe est essentiellement le même que pour la division euclidienne des entiers, et nous allons également «poser» les divisions. Contentons nous d'un exemple commenté : la division euclidienne de $3X^4 - 5X^3 + X - 1$ par $X^2 - X + 2$.

On commence par chercher par quel monôme multiplier $X^2 - X + 2$ pour faire apparaître un polynôme dont le terme de plus haut degré est $3X^4$. Il s'agit évidemment de $3X^2$.
On calcule alors $3X^2 \times (X^2 - X + 2)$.

$$\begin{array}{ccccc|ccc}
\boxed{3X^4} & -5X^3 & & +X & -1 & X^2 & -X & +2 \\ \cline{6-8}
3X^4 & -3X^3 & +6X^2 & & & \boxed{3X^2} & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lccccc|ccc}
(1) & 3X^4 & -5X^3 & & +X & -1 & X^2 & -X & +2 \\ \cline{7-9}
(2) & 3X^4 & -3X^3 & +6X^2 & & & 3X^2 & & \\ \cline{2-6}
(1)-(2) & & -2X^3 & -6X^2 & +X & -1 & & &
\end{array}$$

On soustrait les deux lignes précédentes.

On recommence...

$$\begin{array}{ccccc|ccc}
3X^4 & -5X^3 & & +X & -1 & X^2 & -X & +2 \\ \cline{6-8}
3X^4 & -3X^3 & +6X^2 & & & 3X^2 & \boxed{-2X} & \\ \cline{1-5}
& \boxed{-2X^3} & -6X^2 & +X & -1 & & & \\
& -2X^3 & +2X^2 & -4X & & & & \\ \cline{2-5}
& & -8X^2 & +5X & -1 & & &
\end{array}$$

Jusqu'à obtenir un polynôme de degré strictement inférieur à celui du diviseur.
On s'arrête alors ici.

$$\begin{array}{ccccc|ccc}
3X^4 & -5X^3 & & +X & -1 & X^2 & -X & +2 \\ \cline{6-8}
3X^4 & -3X^3 & +6X^2 & & & 3X^2 & -2X & \boxed{-8} \\ \cline{1-5} \cline{6-8}
& -2X^3 & -6X^2 & +X & -1 & & & \\
& -2X^3 & +2X^2 & -4X & & & & \\ \cline{2-5}
& & \boxed{-8X^2} & +5X & -1 & & & \\
& & -8X^2 & +8X & -16 & & & \\ \cline{3-5}
& & & \boxed{-3X} & \boxed{+15} & & &
\end{array}$$

Le quotient est alors ici.

Et le reste est là.

La division euclidienne de $3X^4 - 5X^3 + X - 1$ par $X^2 - X + 2$ est donc

$$3X^4 - 5X^3 + X - 1 = (3X^2 - 2X - 8)(X^2 - X + 2) + (-3X + 15).$$

Son quotient est $3X^2 - 2X - 8$ et son reste est $-3X + 15$.

Corollaire 8.5 (Factorisation par les racines) – *Soit P un polynôme de degré $n \geqslant 1$, et soit $\alpha \in \mathbf{R}$ une racine de P. Alors il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que $P = (X-\alpha)Q$.*

Démonstration. Réalisons la division euclidienne de P par $X-\alpha$: il existe Q, R deux polynômes avec $\deg R < \deg(X-\alpha)$ tels que $P = (X-\alpha)Q + R$.
Mais puisque $\deg(X-\alpha) = 1$, $\deg R < 1$, donc R est une constante. Notons λ cette constante.
En évaluant en $X = \alpha$, il vient $P(\alpha) = (\alpha-\alpha)Q(\alpha) + \lambda \Leftrightarrow 0 = \lambda$.
Et donc $P = (X-\alpha)Q$. Puisque le degré d'un produit est la somme des degrés, nécessairement $\deg Q = n-1$. □

Notons que la division euclidienne nous permet alors de trouver Q aisément, sans avoir à résoudre de système. Par exemple, 1 est une racine évidente de $X^4-2X^3+2X^2-2X+1$ et donc en réalisant la division euclidienne de $X^4-2X^3+2X^2-2X+1$ par $X-1$, on obtient :

$$\begin{array}{rrrrr|l}
X^4 & -2X^3 & +2X^2 & -2X & +1 & \quad X-1 \\ \cline{6-6}
X^4 & -X^3 & & & & X^3-X^2+X-1 \\ \cline{1-5}
 & -X^3+2X^2 & -2X & +1 & & \\
 & -X^3 & +X^2 & & & \\ \cline{2-5}
 & & X^2 & -2X & +1 & \\
 & & X^2 & -X & & \\ \cline{3-5}
 & & & -X & +1 & \\
 & & & -X & +1 & \\ \cline{4-5}
 & & & & +0 &
\end{array}$$

Et donc $X^4-2X^3+2X^2-2X+1 = (X-1)(X^3-X^2+X-1)$.

Corollaire 8.6 – *Un polynôme de degré $n \in \mathbf{N}^*$ possède au plus n racines .*

Démonstration. Par récurrence sur $n \geqslant 1$, prouvons $\mathscr{P}(n)$: «tout polynôme de degré n possède au plus n racines réelles».
Si P est de degré 1, alors il possède exactement une racine réelle.
Supposons que tout polynôme de degré n possède au plus n racines, et soit P un polynôme de degré $n+1$.
Alors soit P ne possède pas de racines réelles, auquel cas il n'y a rien à dire.
Soit P possède une racine réelle λ. Et alors il existe Q polynôme de degré n tel que $P = (X-\lambda)Q$.
Mais un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul, donc les racines de P sont λ et les racines de Q.
Puisque Q possède au plus n racines réelles, P en possède au plus $n+1$.
Par le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. □

Détails
L'unique racine de $aX+b$ est $-\frac{b}{a}$.

Remarque
Notons que si λ est déjà une racine de Q, alors P possède au plus n racines distinctes.

Corollaire 8.7 – *Le seul polynôme qui possède une infinité de racines est le polynôme nul.*

Démonstration. Un polynôme non nul ne possède qu'un nombre fini de racines. □

Corollaire 8.8 – *Si P et Q sont deux polynômes de degré au plus n qui coïncident en $n+1$ valeurs, alors ils sont égaux.*
En particulier, deux polynômes qui coïncident en une infinité de valeurs sont égaux.

Démonstration. Soient P, Q deux polynômes de degré au plus n, et soient $x_0, x_1, \dots, x_n$ des réels deux à deux distincts tels que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $P(x_i) = Q(x_i)$.
Alors $x_0, x_1, \dots, x_n$ sont des racines de $R = P - Q$, qui est un polynôme de degré au plus n.
Possédant strictement plus de racines que son degré, c'est qu'il est nul, donc $R = 0 \Leftrightarrow P = Q$. □

En particulier, deux polynômes qui coïncident sur $\mathbf{N}$ ou sur un segment $[a, b]$ avec $a < b$ sont égaux.

8.1.3 Factorisation en produit d'irréductibles

Encore une fois, donnons une définition provisoire sur laquelle nous reviendrons plus tard.

Définition 8.9 – Un polynôme à coefficients réels est dit **irréductible** s'il est de degré 1 ou de degré 2 sans racines réelles (donc de discriminant strictement négatif).
Autrement dit, un polynôme irréductible est un polynôme de la forme $aX + b$, $(a, b) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$, ou de la forme $aX^2 + bX + c$, où $a \neq 0$ et $b^2 - 4ac < 0$.

Les polynômes irréductibles sont alors les «briques élémentaires» à partir desquelles on peut former tous les polynômes, comme l'affirme le théorème suivant (lui aussi admis pour l'instant).

Théorème 8.10 : *Tout polynôme se décompose de manière unique comme produit de facteurs irréductibles. Ainsi, pour tout polynôme P s'écrit*

$$P = a\prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)^{n_i} \times \prod_{j=1}^{q}(X^2 + b_jX + c_j)^{m_j}$$

où a est un réel non nul, $\lambda_1, \dots, \lambda_p, b_1, c_1, \dots, b_q, c_q$ sont des réels, $n_1, \dots, n_p, m_1, \dots, m_q$ sont des entiers strictement positifs et pour tout $j \in [\![1, q]\!]$, $b_j^2 - 4c_j < 0$.
Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près, et s'appelle la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles.

Remarques. ▸ Il est aisé de se convaincre que a est le coefficient dominant de P, et que les λ_i sont les racines réelles de P.
Dans le cas où $n_i > 1$, on dit que λ_i est une racine multiple de P (racine double si $n_i = 2$, racine triple si $n_i = 3$, etc).
▸ Ce théorème est l'analogue du théorème qui affirme que tout nombre entier se décompose de manière unique en produit de nombres premiers.
Les nombres premiers étaient alors définis comme les entiers qui ne s'écrivaient pas comme produit d'entiers plus petits.
Nous (re)-définirons plus tard les polynômes irréductibles comme étant les polynômes qui ne sont pas produit de deux polynômes de degré inférieur.
La définition que nous venons de donner de polynômes irréductibles cache en fait un résultat fortement non trivial, à savoir que tout polynôme à coefficients réels peut se décomposer en produit de polynômes de degré 1 ou 2.

⚠ Il n'y a pas de méthode générale pour trouver à coup sûr la décomposition d'un polynôme en produit de facteurs irréductibles. Par exemple, je serais bien embêté de donner la décomposition de $X^5 - 5X - 1$ en produit de facteurs irréductibles.
Bien que je puisse prouver à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires que ce polynôme possède exactement trois racines, je ne sais pas calculer la valeur exacte de ces racines.
Et donc je peux dire qu'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, a, b$ tels que
$X^5 - 5X - 1 = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3)(X^2 + aX + b)$, mais sans savoir calculer les valeurs exactes de ces réels.

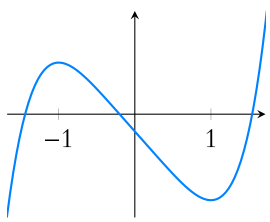

FIGURE 8.1– $x \mapsto x^5 - 5x - 1$.

Exemple 8.11

Soit $P = 2X^5 - 4X^4 - 2X^3 + 4X^2$.
Alors $P = 2X^2(X^3 - 2X^2 - X + 2)$. On constate alors aisément que 1 est racine évidente et donc que $P = 2X^2(X-1)(X^2 - X - 2)$.
Il ne s'agit pas encore de la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P puisque $X^2 - X - 2$ n'est pas irréductible : il s'écrit sous la forme $(X-2)(X+1)$.
Donc la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles est
$P = 2X^2(X-1)(X+1)(X-2)$.

8.2 Décomposition en éléments simples

Définition 8.12 – On appelle **fraction rationnelle** toute fonction $f : \mathcal{D}_f \to \mathbf{R}$ pour laquelle il existe deux polynômes P et Q, avec $Q \neq 0$ et tels que :

1. $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbf{R} \mid Q(x) \neq\}$
2. $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

Le degré de la fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$ est alors par définition égal à $\deg(P) - \deg(Q)$.

Bien défini ? Nous prouverons en fin d'année que même s'il n'y a pas unicité de P et Q tels que $f = \frac{P}{Q}$, la différence $\deg(P) - \deg(Q)$ ne dépend pas du choix de tels P et Q.

Les points où $\dfrac{P}{Q}$ n'est pas défini sont les racines de Q, qu'on appelle aussi les **pôles** de $\dfrac{P}{Q}$. On parle de pôle simple pour une racine simple de Q, de pôle double pour une racine double de Q, etc.

Exemple 8.13

$\dfrac{1}{X^2+1}$ est une fraction rationnelle de degré -2.
$\dfrac{X^3+X}{(X-1)(X-2)}$ est une fraction rationnelle de degré $3-2=1$.

Dans tout ce qui suit, nous ne intéresserons qu'aux fractions rationnelles dont le degré est strictement négatif, c'est-à-dire de la forme $\dfrac{P}{Q}$, avec $\deg Q > \deg P$.
Si jamais ce n'est pas le cas on commencera par effectuer la division euclidienne du numérateur par le dénominateur.
Plus précisément, si $P = AQ + R$ est la division euclidienne de P par Q, alors

$$\frac{P}{Q} = \frac{AQ+R}{Q} = A + \frac{R}{Q} \text{ avec } \deg R < \deg Q.$$

Dans tout ce qui suit, nous supposons donc $\deg P < \deg Q$.
Notons que, quitte à effectuer des simplifications, on peut supposer que P et Q n'ont pas de facteurs irréductibles communs.
Par exemple,

$$\frac{X^2+X-2}{X^3-4X^2+5X-2} = \frac{(X-1)(X+2)}{(X-2)(X-1)^2} = \frac{X+2}{(X-1)(X-2)}.$$

Il existe alors une décomposition de $\dfrac{P}{Q}$ comme somme d'éléments, dits **éléments simples**, de la forme $\dfrac{a}{(X-\lambda)^m}$ ou $\dfrac{cX+d}{(X^2+aX+b)^m}$, où X^2+aX+b est irréductible (c'est-à-dire vérifie $a^2-4b<0$).
Les fractions rationnelles de la forme $\dfrac{a}{(X-\lambda)^m}$ sont appelées **éléments simples de première espèce** et les fractions de la forme $\dfrac{cX+d}{(X^2+aX+b)^m}$ sont appelées **éléments simples**

de seconde espèce.

Une fois encore, les énoncés précis viendront plus tard, essayons plutôt de comprendre sur des exemples sous quelle forme chercher la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle.

La règle générale, qui est à peu près tout ce que vous devez retenir, est que les éléments simples qui apparaissent dans la décomposition ont pour dénominateurs des puissances des facteurs irréductibles de Q, avec des puissances qui n'excédent pas celles qui apparaissent dans la décomposition en facteurs irréductibles de Q.

Exemples 8.14

- $\dfrac{X^2+2X+1}{(X-1)(X+2)^2} = \dfrac{P}{Q}$ possède une décomposition en éléments simples de la forme
$$\frac{X^2+2X+1}{(X-1)(X+2)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+2} + \frac{c}{(X+2)^2}.$$
En effet, le facteur $X-1$ apparaît à la puissance 1 dans la décomposition de Q, et donc il n'y aura qu'un terme en $\dfrac{1}{X-1}$ dans la décomposition de $\dfrac{P}{Q}$.
De même, $X+2$ apparaît à la puissance 2 dans Q, et donc la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P}{Q}$ ne contient que des termes en $\dfrac{1}{X+2}$ et en $\dfrac{1}{(X+2)^2}$.
- $\dfrac{X^3-3X+1}{(X+1)^3(X+4)(X^2+1)^2}$ possède une décomposition en éléments simples de la forme
$$\frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2} + \frac{c}{(X+1)^3} + \frac{d}{X+4} + \frac{eX+f}{X^2+1} + \frac{gX+h}{(X^2+1)^2}.$$

Une fois admise l'existence d'une telle décomposition, la vraie question est «comment trouver les valeurs des coefficients $a, b, c, \dots$ dans les écritures ci-dessus ?»

Il existe plusieurs méthodes, plus ou moins efficaces suivant les cas.
Commençons par la méthode «naïve», qui fonctionne à tous les coups, mais peut conduire à des calculs laborieux : la mise au même dénominateur.

Exemple 8.15

Nous venons de dire qu'il existe des réels a, b, c tels que
$$\frac{X^2+2X+1}{(X-1)(X+2)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+2} + \frac{c}{(X+2)^2}.$$
Mais
$$\begin{aligned}\frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+2} + \frac{c}{(X+2)^2} &= \frac{a(X+2)^2 + b(X-1)(X+2) + c(X-1)}{(X-1)(X+2)^2}\\ &= \frac{a(X^2+4X+4) + b(X^2+X-2) + cX - c}{(X-1)(X+2)^2}\\ &= \frac{(a+b)X^2 + (4a+b+c)X + (4a-2b-c)}{(X-1)(X+2)^2}.\end{aligned}$$
Et donc pour avoir $\dfrac{X^2+2X+1}{(X-1)(X+2)^2} = \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{X+2} + \dfrac{c}{(X+2)^2}$, il suffit d'avoir
$$(a+b)X^2 + (4a+b+c)X + (4a-2b-c) = X^2+2X+1 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 1\\ 4a+b+c = 2\\ 4a-2b-c = 1\end{cases}.$$

Système
Ce système vient de l'identification des coefficients en X^2, en X et du coefficient constant.
Puisque nous avons admis qu'une telle décomposition existe, il est sûr que ce système admet des solutions (et en fait une unique solution).

Il ne reste donc qu'à résoudre le système :

$$\begin{cases} a+\ b \quad\ = 1 \\ 4a+\ b+c=2 \\ 4a-2b-c=1\end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-4L_1\\ L_3\leftarrow L_3-4L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a+\ b \quad\ = 1 \\ \quad -3b+c=-2 \\ \quad -6b-c=-3\end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3-2L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a+\ b \quad\ = 1 \\ \quad -3b+\ c=-2 \\ \qquad\quad -3c=1\end{cases}$$

On trouve alors une unique solution, qui est $a=\frac{4}{9}$, $b=\frac{5}{9}$, $c=-\frac{1}{3}$.

Cette méthode, bien que fonctionnant toujours, peut vite s'avérer laborieuse en termes de calculs, et mener à des systèmes qui comportent de nombreuses inconnues[4].
Une autre méthode consiste à multiplier par $(X-\lambda)^m$, puis à évaluer la relation obtenue en $X=\lambda$.

[4] Et donc de gros risques d'erreurs de calcul !

Exemple 8.16

Il existe a,b,c tels que $\dfrac{3X^2-3X-2}{(X+1)^2(X-3)} = \dfrac{a}{X-3}+\dfrac{b}{X+1}+\dfrac{c}{(X+1)^2}$ $(\star)$.
En multipliant $(\star)$ par $X-3$, il vient

$$\frac{3X^2-3X-2}{(X+1)^2} = a+\frac{b(X-3)}{X+1}+\frac{c(X-3)}{(X+1)^2}.$$

En prenant alors $X=3$, il ne reste que

$$\frac{27-9-2}{(3+1)^2} = a+\frac{0}{3+1}+\frac{0}{(3+1)^2} \Leftrightarrow a=1.$$

De même, en multipliant la relation $(\star)$ par $(X+1)^2$, il vient

$$\frac{3X^2-3X-2}{X-3} = \frac{a(X+1)^2}{X-3}+b(X+1)+c.$$

En évaluant en $X=-1$, on a donc

$$\frac{3+3-2}{-4} = \frac{0}{-4}+0+c \Leftrightarrow c=-1.$$

Toutefois cela ne nous permet pas d'obtenir la valeur de b, et multiplier $(\star)$ par $X+1$ ne saurait suffire. En effet, cela nous conduirait à

$$\frac{3X^2-3X-2}{(X+1)(X-3)} = \frac{a(X+1)}{X-3}+b+\frac{c}{X+1},$$

relation qui ne peut être évaluée en $X=-1$ puisqu'il reste des $X+1$ aux dénominateurs.
En revanche, s'il ne nous manque que b, nous pouvons utiliser la première méthode de mise au même dénominateur :

$$\frac{3X^2-3X-2}{(X+1)^2(X-3)} = \frac{(X+1)^2+b(X+1)(X-3)-(X-3)}{(X+1)^2(X-3)} = \frac{(1+b)X^2+(1-2b)X+4-3b}{(X+1)^2(X-3)}.$$

Et alors l'identification de n'importe quel coefficient du numérateur nous conduit à $b=2$.
Ainsi, la décomposition cherchée est $\dfrac{3X^2-3X-2}{(X+1)^2(X-3)} = \dfrac{1}{X-3}+\dfrac{2}{X+1}-\dfrac{1}{(X+1)^2}$.

Remarque
Ce problème apparaît dans le cas de pôles multiples.
Cette méthode est donc particulièrement adaptée pour les pôles simples.

Une objection (tout à fait légitime) que j'entends parfois est la suivante : la fonction $x\mapsto \dfrac{3x^2-3x-2}{(x+1)^2(x-3)}$ n'est pas définie en 3, de même que la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x-3}$.
Donc même après multiplication par $x-3$, elle n'est pas définie en 3, et donc que veut dire «évaluer en $X=3$» ?

Remarque
Si vous ne vous êtes pas posé la question, ne lisez pas la réponse et passez à la suite.

Et en effet, faute de définition précise de fraction rationnelle, il est dur de donner une réponse satisfaisante.
Mais vous pouvez dans ce cas remplacer «multiplier la relation $(\star)$ par $X-3$ puis l'évaluer en $X=3$» par «multiplier $(\star)$ par $X-3$ puis faire tendre X vers 3».
Cette fois, la fonction $x \mapsto (x-3)\dfrac{3x^2-3x-2}{(x+1)^2(x-3)}$ est définie sur $\mathbf{R}\setminus\{3\}$, et sur cet ensemble elle coïncide avec $x \mapsto \dfrac{3x^2-3x-2}{(x+1)^2}$. Qui lorsque x tend vers 3, tend vers $\dfrac{3\times 3^2-3\times 3-2}{(3+1)^2}$, qui est bien la quantité que nous avions trouvée en «évaluant en $X=3$».

La méthode que nous venons de décrire peut aussi fonctionner lorsque λ est une racine **complexe** d'un facteur irréductible de degré 2 du dénominateur.

Exemple 8.17

Il existe a,b,c tels que $\dfrac{X^2+4X-7}{(X^2+4)(X+1)} = \dfrac{a}{X+1}+\dfrac{bX+c}{X^2+4} \quad (\star)$.
Déjà, en multipliant cette relation par $X+1$, puis en évaluant en $X=-1$, il vient $a=-2$.
D'autre part, les racines complexes de X^2+4 sont $2i$ et $-2i$.
Et donc en multipliant $(\star)$ par X^2+4, il vient

$$\frac{X^2+4X-7}{(X+1)} = \frac{-2(X^2+4)}{X+1}+bX+c.$$

Et donc en évaluant en $X=2i$, on obtient

$$\frac{-11+8i}{1+2i} = 2bi+c.$$

Soit encore $2bi+c = \dfrac{-11+8i}{1+2i} = \dfrac{(-11+8i)(1-2i)}{5} = \dfrac{5+30i}{5} = 1+6i$.
Puisque b et c sont des réels, il vient donc $c=1$ et $b=3$.
Et par conséquent, $\dfrac{X^2+4X-7}{(X^2+4)(X+1)} = \dfrac{-2}{X+1}+\dfrac{3X+1}{X^2+4}$.

Une autre méthode consiste à multiplier la fraction de départ par X, puis à faire tendre X vers $+\infty$, ce qui peut faire apparaître des relations[5] simples entre les différents coefficients de la décomposition en éléments simples.

[5] Et donc permet de réduire le nombre d'inconnues.

Exemple 8.18

Il existe des réels a,b,c tels que $\dfrac{-3X+16}{(X+3)(X-2)^2} = \dfrac{a}{X+3}+\dfrac{b}{(X-2)}+\dfrac{c}{(X-2)^2}$.
En multipliant cette relation par $X+3$ et en évaluant en $X=-3$, il vient $a=1$.
Puis en multipliant $(\star)$ par X, on obtient

$$\frac{-3X^2+16X}{(X+3)(X-2)^2} = \frac{X}{X+3}+\frac{bX}{X-2}+\frac{cX}{(X-2)^2}.$$

Mais lorsque $X\to+\infty$, il vient

$$\lim_{X\to+\infty}\frac{-3X^2+16X}{(X+3)(X-2)^2} = \lim_{X\to+\infty}\frac{X^2\left(-3+\frac{16}{X}\right)}{X^3\left(1+\frac{3}{X}\right)\left(1-\frac{2}{X}\right)^2} = 0.$$

Et de même, $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\frac{X}{X+3} = \lim_{X\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{3}{X}} = 1$, $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\frac{bX}{X-2} = \lim_{X\to+\infty}\frac{b}{1-\frac{2}{X}} = b$ et $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\frac{cX}{(X-2)^2} = 0$.

Rédaction
J'ai tout bien rédigé ici, mais nous formaliserons bientôt un fait avec lequel vous devez déjà être familier : la limite en $\pm\infty$ d'un quotient de polynômes est la limite du quotient des termes de plus haut degré.
Si vous êtes familiers avec ceci, alors il n'est pas nécessaire de détailler ce type de calcul de limite.

Et par conséquent, par identification des limites, $1 + b = 0 \Leftrightarrow b = -1$.
Enfin, en multipliant $(\star)$ par $(X-2)^2$, et en évaluant en $X = 2$, on trouve $c = \dfrac{10}{5} = 2$.
Et donc $\dfrac{-3X+16}{(X+3)(X-2)^2} = \dfrac{1}{X+3} - \dfrac{1}{X-2} + \dfrac{2}{(X-2)^2}$.

Et pour conclure, notons que l'évaluation de la relation de départ en n'importe quel X qui n'est pas un pôle de la fraction de départ donnera une relation liant les coefficients de la décomposition en éléments simples.

Exemple 8.19

Il existe des réels a, b et c tels que $\dfrac{2X^2+11X+1}{(X-3)(X^2+X+1)} = \dfrac{a}{X-3} + \dfrac{bX+c}{X^2+X+1} \quad (\star)$.
En multipliant $(\star)$ par $X-3$ et en évaluant en $X = 3$, il vient $a = \dfrac{52}{13} = 4$.
En multipliant $(\star)$ par X et en faisant tendre vers $+\infty$, il vient $2 = a + b \Leftrightarrow b = -2$.
Enfin, en évaluant $(\star)$ en $X = 0$, on obtient

$$-\frac{1}{3} = \frac{a}{-3} + c \Leftrightarrow c = 1.$$

Nous nous contentons de ces exemples. L'important pour l'instant sera :

1. de savoir sous quelle forme se présente la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle de degré négatif.
2. d'utiliser à bon escient ces différentes méthodes afin de déterminer, avec le moins de calculs possibles[6].

Un chapitre ultérieur justifiera l'existence et même l'unicité de la décomposition en éléments simples, l'étendra aux fractions rationnelles à coefficients complexes, et donnera également quelques autres astuces permettant de simplifier la détermination de la décomposition en éléments simples.

[6] Personne ne vous reprochera d'avoir fait «trop» de calculs... à condition que ceux-ci mènent au bon résultat !