Ensembles 6

6.1 Ensembles

6.1.1 Définition

Nous ne donnerons pas[1] de définition rigoureuse de ce qu'est un ensemble, et nous contenterons de l'«intuition» suivante : un **ensemble** E est une «collection» d'objets, qui sont appelés les **éléments de** E.
Si x est un élément de E, on note alors $x \in E$. Au contraire, si x n'est pas un élément de E, on note $x \notin E$.

[1] Ni cette année ni l'an prochain.

Des ensembles peuvent être formés d'objets très divers : les plus fréquemment rencontrés sont des ensembles de nombres ($\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{R}_+^*$, etc), mais on peut également considérer l'ensemble $\mathscr{P}$ des fonctions paires, ou l'ensemble E des élèves de MP2I.
Il existe deux manières de définir un ensemble :

— en **extension**, en donnant la liste de tous ses éléments. Par exemple $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ou $F = \left\{\pi, \sqrt{2}, -e\right\}$.
Notons qu'alors, l'ordre dans lequel on donne les éléments n'a aucune importance, $\{0, 4, 3, 2, 1\}$ et $\{4, 3, 2, 1, 0\}$ désignent tous les deux l'ensemble noté E ci-dessus.
On ne peut définir ainsi que des ensembles finis[2].

— en **compréhension**, en donnant une propriété P qui caractérise tous les éléments de l'ensemble E, c'est-à-dire une propriété que tous les éléments de E vérifient, et qu'ils sont les seuls à vérifier.
On note alors $\{x \mid P(x)\}$ l'ensemble des objets x qui vérifient la propriété P.
Par exemple, $\left\{x \in \mathbf{R} \mid \sqrt{x^2} = x\right\}$ désigne $\mathbf{R}_+$. En pratique, on note plutôt $\{x \in E \mid P(x)\}$ l'ensemble des éléments de E qui vérifient la propriété P.
Par exemple $\{n \in \mathbf{N} \mid \exists p \in \mathbf{N},\ n = 2p\}$ désigne l'ensemble des entiers pairs.
Cet ensemble peut également se noter $\{2p,\ p \in \mathbf{N}\}$ ou encore $\{2p\}_{p\in\mathbf{N}}$.
Plus généralement, si $f : E \to F$ est une application[3] entre deux ensembles E et F, alors $\{f(x), x \in E\}$ désigne l'ensemble $\{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\}$.

[2] Puisqu'il serait compliqué d'écrire **tous** les éléments d'un ensemble infini...

[3] La définition en sera donnée un peu plus loin, tenez-vous en à l'intuition d'une fonction qui à un élément de E associe un élément de F.

⚠ Pour un ensemble défini par exemple par $E = \{n \in \mathbf{N} \mid \exists p \in \mathbf{N},\ n = 2p\}$, il faudra faire très attention au quantificateur existentiel lorsqu'on manipule plusieurs éléments de cet ensemble.
Ainsi, si n et m sont deux éléments de E, alors il existe un entier $p_1 \in \mathbf{N}$ tel que $n = 2p_1$ et il existe un entier $p_2 \in \mathbf{N}$ tel que $m = 2p_2$.
Mais p_1 et p_2 n'ont aucune raison d'être égaux, raison pour laquelle il est impératif de les noter différemment (et pas par exemple de les appeler bêtement p tous les deux).
Le même risque existe avec la notation $E = \{2p,\ p \in \mathbf{N}\}$.

Remarque
En réalité le risque est peut être même plus grand avec cette notation, car le quantificateur existentiel n'y apparaît pas directement (bien qu'il soit sous-entendu).

Un même ensemble peut être défini de différentes manières, et on a par exemple

$$\begin{aligned}\{-1, 1\} &= \left\{x \in \mathbf{R} \mid x^4 = 1\right\} = \left\{z \in \mathbf{C} \mid z^2 = 1\right\} = \{(-1)^n,\ n \in \mathbf{N}\}\\ &= \left\{n \in \mathbf{Z} \mid \forall m \in \mathbf{N}, (m \text{ divise } n) \Rightarrow (m = 1)\right\}.\end{aligned}$$

Définition 6.1 – ► On admet[4] qu'il existe un unique ensemble, appelé **ensemble vide**, et qui ne contient aucun élément, qu'on note $\emptyset$.
► Un ensemble de la forme $\{x\}$ qui ne contient qu'un élément x est appelé un **singleton**.

[4] Lorsqu'on veut développer une théorie axiomatique des ensembles, c'est en réalité un axiome qu'il faut ajouter : l'existence d'un ensemble ne contenant aucun élément.

Remarques. ▸ Puisque $\emptyset$ ne contient aucun élément, une proposition du type $\exists x \in \emptyset,\ P(x)$ est toujours fausse.
Et donc une proposition de la forme $\forall x \in \emptyset,\ P(x)$ est toujours vraie. En effet, sa négation est $\exists x \in \emptyset,\ \neg P(x)$, qui est est fausse.
▸ On ne confondra pas $\{x\}$, qui est un ensemble, et x, qui est un élément de cet ensemble. On a toujours $x \in \{x\}$, et ce quel que soit x.

Exemple 6.2

La propriété $\forall x \in \emptyset, \forall y \in \emptyset, \forall z \in \mathbf{R},\ x \leqslant z \leqslant y \Rightarrow z \in \emptyset$ est vraie.
Et donc l'ensemble vide est un intervalle.

6.1.2 Inclusion, égalité, ensemble de parties

Définition 6.3 – Soient E et F deux ensembles. On dit que F est **inclus** dans E si $\forall x \in F,\ x \in E$. On note alors $F \subset E$.
On dit également que F est **une partie de** E, ou **un sous-ensemble de** E.

Autrement dit
F est inclus dans E si tout élément de F est également un élément de E.

Cette définition peut aussi se reformuler de la manière suivante : $F \subset E$ si et seulement si $\forall x,\ x \in F \Rightarrow x \in E$.

Rédaction : cela signifie notamment que pour prouver que $F \subset E$, une rédaction correcte commencera **toujours** par «Soit $x \in F$», pour terminer par «... donc $x \in E$».
Remarque. Notons qu'on a toujours $E \subset E$.
On a également $\emptyset \subset E$ car $\forall x \in \emptyset,\ x \in E$ est vraie.

Remarque
Ce point permet de prouver l'unicité de l'ensemble vide : s'il en existe deux alors ils sont inclus l'un dans l'autre, et sont égaux.

Exemples 6.4

▸ On a les inclusions classiques suivantes : $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.
▸ $\{x \in \mathbf{R} \mid x = x^2 + 1\} \subset \mathbf{R}_+$. En effet, si x est un réel tel que $x = x^2 + 1$, puisque $x^2 + 1 \geqslant 0$, $x \geqslant 0$ et donc $x \in \mathbf{R}_+$.
▸ Pour tout ensemble E, la proposition $\forall x \in \emptyset,\ x \in E$ est vraie. Et donc $\emptyset \subset E$, quel que soit l'ensemble E.
Par exemple, l'ensemble de l'exemple précédent s'écrit encore $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - x + 1 = 0\}$. Or, cette équation ne possède pas de solutions réelles[5] et donc $\{x \in \mathbf{R} \mid x = x^2 + 1\} = \emptyset$, de sorte que l'inclusion précédente n'est autre que $\emptyset \subset \mathbf{R}_+$.

Remarque
Notons que nous n'avons pas eu besoin de déterminer explicitement les éléments de $\{x \in \mathbf{R} \mid x = x^2 + 1\}$ pour prouver l'inclusion.

[5] Car son discriminant est $-3 < 0$.

Attention à ne pas confondre inclusion et appartenance, les deux symboles $\in$ et $\subset$ ne s'utilisent pas dans le même contexte !
Si E est un ensemble, si F est une partie de E, alors un élément $x \in E$ **peut** appartenir (ou non) à F, mais pas être inclus dans F.
Par exemple, $-2 \in \mathbf{Z}$, mais il est hors de question d'écrire $\cancel{-2 \subset \mathbf{Z}}$.
De même, une autre partie G de E peut être **incluse** dans F, mais pas lui appartenir.
Ainsi, $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$, mais on ne peut pas écrire $\cancel{\mathbf{N} \in \mathbf{Z}}$.
En revanche, on a $\{-2\} \subset \mathbf{Z}$.

Insistons un peu !
Je ne suis pas en train de dire que $-2 \subset \mathbf{Z}$ est faux (et donc que $-2 \not\subset \mathbf{Z}$ est vrai), mais que ça n'a pas de sens !

Proposition 6.5 (Transitivité de l'inclusion) : *Si A, B et C sont trois ensembles tels que $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$.*

Démonstration. Soit $x \in A$. Alors $x \in B$. Mais puisque $B \subset C$, alors $x \in C$.
Et donc nous venons de prouver que $\forall x \in A,\ x \in C$, donc $A \subset C$. □

Définition 6.6 (Égalité d'ensembles) – Deux ensembles A et B sont dits égaux si ils ont les mêmes éléments, c'est-à-dire si $\forall x,\ x \in A \Leftrightarrow x \in B$. On note alors $A = B$.

Remarque. C'est cette définition de l'égalité qui justifie un principe bien connu : il ne sert à rien d'écrire plusieurs fois un élément x lorsqu'on définit un ensemble E. Soit x est dans E, soit il ne l'est pas, mais il ne peut pas l'être plusieurs fois.
Par exemple, $\{1,2\} = \{1,1,2\}$ puisque tout élément de $\{1,2\}$ est dans $\{1,1,2\}$ et tout élément de $\{1,1,2\}$ (qui vaut donc 1 ou 2) est dans $\{1,2\}$.

Puisqu'une inclusion $A \subset B$ correspond à une implication $x \in A \Rightarrow x \in B$, l'équivalence correspond aux deux implications $x \in A \Rightarrow x \in B$ et $x \in B \Rightarrow x \in A$.
Et donc $A = B \Leftrightarrow (A \subset B)$ **et** $(B \subset A)$.
Ceci nous donne donc deux méthodes pour prouver que deux ensembles A et B sont égaux :

1. soit procéder par double inclusion en prouvant $A \subset B$ et $B \subset A$
2. soit procéder directement par équivalences, en prouvant que $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

Exemples 6.7

▶ Montrons par double inclusion que si $a < b$, alors

$$[a,b] = \underbrace{\{(1-t)a + bt,\ t \in [0,1]\}}_{=F}.$$

• Soit $t \in [0,1]$. Alors $(1-t)a+bt = a+t(b-a)$, qui est compris entre $(1-t)a+ta = a$ et $(1-t)b+tb = b$.
Donc tout élément de F est dans $[a,b]$: $F \subset [a,b]$.
• Inversement, si $x \in [a,b]$, il nous faut montrer que $x \in F$ et donc qu'il existe un réel $t \in [0,1]$ tel que $x = (1-t)a+bt$.
Or, $x = (1-t)a+bt \Leftrightarrow x-a = t(b-a) \Leftrightarrow t = \dfrac{x-a}{b-a}$.
Si $x \in [a,b]$, alors $0 \leqslant x-a \leqslant b-a \Rightarrow \dfrac{x-a}{b-a} \in [0,1]$.
Et donc il existe $t \in [0,1]$ (qui vaut $\dfrac{x-a}{b-a}$) tel que $x = (1-t)a+bt \in F$.
Ainsi, $[a,b] \subset F$.
Par double inclusion, on en déduit que $[a,b] = F$.
▶ Montrons par équivalence que si A et B sont deux points distincts du plan, alors l'ensemble $E = \{M \mid MA = MB\}$ est la droite D orthogonale à $\overrightarrow{AB}$ et passant par le milieu I de $[AB]$.
Soit donc M un point du plan. Alors

$$\begin{aligned}
M \in E &\Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow MA^2 = MB^2\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 = \overrightarrow{MB}^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 0\\
&\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) = 0\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{BA}\cdot\left(\overrightarrow{MI} + \cancel{\overrightarrow{IA}} + \overrightarrow{MI} + \cancel{\overrightarrow{IB}}\right) = 0\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MI} = 0\\
&\Leftrightarrow M \in D.
\end{aligned}$$

Et donc ceci prouve directement que $D = E$.

> **Médiatrice**
> Vous aurez probablement reconnu deux caractérisations de la médiatrice de $[AB]$.

Remarque. Deux ensembles A et B sont différents si $\exists x \in A,\ x \notin B$ **ou** $\exists x \in B,\ x \notin A$.
Autrement dit s'il existe un élément qui est dans l'un des deux ensembles mais pas dans l'autre.

Définition 6.8 (Ensemble des parties de E) – Soit E un ensemble. On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E, c'est-à-dire l'ensemble des ensembles inclus dans E.
Autrement dit, on a $F \in \mathscr{P}(E)$ si et seulement si $F \subset E$.

> ⚠ **Attention !**
> $\mathscr{P}(E)$ est un ensemble dont les éléments sont eux-mêmes des ensembles !

Exemples 6.9

▶ Puisque pour tout ensemble E, $\emptyset \subset E$, on a toujours $\emptyset \in \mathscr{P}(E)$.
▶ De même, on a toujours $E \in \mathscr{P}(E)$, et si $x \in E$, alors $\{x\} \in \mathscr{P}(E)$.
▶ Si $E = \{x\}$ est un singleton, alors $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{x\}\}$.
▶ Si $E = \{a, b\}$ possède deux éléments, alors $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.
▶ Si $E = \{1, 2, 3\}$, alors

$$\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

▶ On a $\mathscr{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Donc $\mathscr{P}(\emptyset)$ est un singleton.
Et par suite, $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.
Et donc $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset))) = \big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\big\}$.

6.1.3 Opérations sur les ensembles

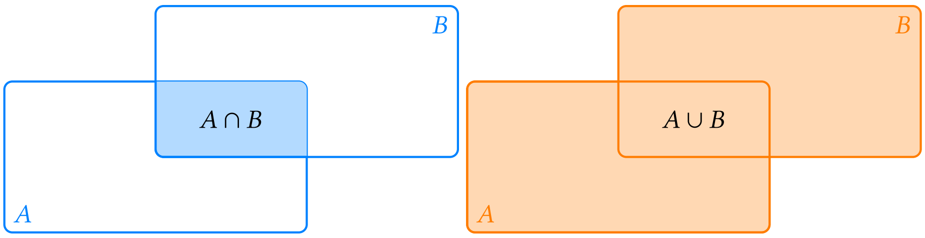
Définition 6.10 – Soient E et F deux ensembles. Alors on appelle

1. **union de** E **et** F, et on note $E \cup F$ l'ensemble des éléments qui sont dans E **ou** dans F. Autrement dit

$$x \in E \cup F \Leftrightarrow (x \in E) \textbf{ ou } (x \in F).$$

2. **intersection de** E **et** F, et on note $E \cap F$ l'ensemble des éléments qui sont dans E **et** dans F. Autrement dit

$$x \in E \cap F \Leftrightarrow (x \in E) \textbf{ et } (x \in F).$$



Exemples 6.11

▶ Si $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{2, 3, 4\}$, alors $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ et $A \cap B = \{2, 3\}$.
▶ $\mathbf{R}_+^* \cup \mathbf{R}_- = \mathbf{R}$ et $\mathbf{R}_+^* \cap \mathbf{R}_- = \emptyset$.
▶ On a toujours $A \cup \emptyset = A$ et $A \cap \emptyset = A$.

Remarque. Notons qu'on a toujours $A \cap B \subset A \subset A \cup B$ et $A \cap B \subset B \subset A \cup B$.

Définition 6.12 – Deux ensembles A et B sont dits **disjoints** si $A \cap B = \emptyset$.
Dans ce cas, et seulement dans ce cas, on note parfois $A \sqcup B$ (ou $A \coprod B$) au lieu de $A \cup B$.

Il faut bien comprendre que $A \sqcup B$ n'est pas un nouvel objet : c'est l'union de A et B, donc l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B.
Le noter ainsi est juste un moyen de se souvenir que A et B sont disjoints, et donc que tout élément de $A \sqcup B$ est dans un et un seul des deux ensembles A et B.

Proposition 6.13 : *Soient A, B et C trois ensembles. Alors*
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Terminologie
On dit que l'intersection est distributive par rapport à l'union (c'est le premier point) et que l'union est distributive par rapport à l'intersection (c'est le second point).

Démonstration. Prouvons le premier point, le second étant laissé en exercice. On a :

$$\begin{aligned}
x \in (A \cup B) \cap C &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \textbf{ et } x \in C \\
&\Leftrightarrow (x \in A \textbf{ ou } x \in B) \textbf{ et } x \in C \\
&\Leftrightarrow (x \in A \textbf{ et } x \in C) \textbf{ ou } (x \in B \textbf{ et } x \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \cap C) \textbf{ ou } (x \in B \cap C) \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C).
\end{aligned}$$

Et donc $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. □

Définition 6.14 – Soient E et I deux ensembles. On suppose que pour tout $i \in I$, on se donne A_i une partie de E. Alors on note
1. $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \in E \mid \exists i \in I,\ x \in A_i\}$ l'ensemble des éléments qui sont dans **au moins l'un** des A_i.
2. $\displaystyle\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \in E \mid \forall i \in I,\ x \in A_i\}$ l'ensemble des éléments qui sont dans **tous** les A_i.

Autrement dit
On a
$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I,\ x \in A_i$$
et
$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I,\ x \in A_i.$$

Remarque. Notons que pour $I = \emptyset$, on a $\displaystyle\bigcap_{i \in I} A_i = E$ et $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = \emptyset$.

Remarque
Ceci est un tout petit peu perturbant, puisque pour une fois, on n'a pas
$$\bigcap_{i \in I} A_i \subset \bigcup_{i \in I} A_i.$$
Cela dit, il y a peu de chances qu'on s'intéresse vraiment au cas $I = \emptyset$.

Dans le cas où $I = [\![a, b]\!]$, on note souvent $\displaystyle\bigcap_{i=a}^{b} A_i$ au lieu de $\displaystyle\bigcap_{i \in [\![a,b]\!]} A_i$, et de même pour les unions.
De même, si $I = \mathbf{N}$, on note souvent $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ au lieu de $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbf{N}} A_n$.

Exemple 6.15

Considérons un point du plan M fixé, et pour $n \in \mathbf{N}$, on note D_n le disque de centre M et de rayon $\dfrac{1}{n}$.
Alors $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} D_n = \bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} D_n = \{M\}$.
Il est clair que M appartient à tous les D_n et donc à l'intersection des D_n.
Inversement, soit P un point du plan distinct de M, et soit r la longueur du segment MP (=la distance de M à P). Alors, pour $n > \dfrac{1}{r}$, on a $\dfrac{1}{n} < r$, et donc $P \notin D_n$. Par conséquent, $P \notin \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} D_n$.

Par contraposée, on a donc $P \in \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} D_n \Rightarrow P = M$, soit encore $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} D_n \subset \{M\}$.

On en déduit que $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} D_n = \{M\}$.

Inclusion
On a donc prouvé que
$$\{M\} \subset \bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} D_n.$$

La proposition ci-dessous généralise la proposition 6.13.

Proposition 6.16 : *Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles et si B est un ensemble, on a*

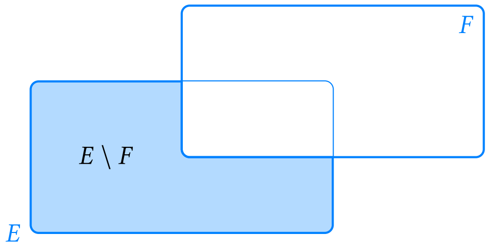
$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\cap B = \bigcup_{i\in I}(A_i\cap B) \quad et \quad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)\cup B = \bigcap_{i\in I}(A_i\cup B)\,.$$

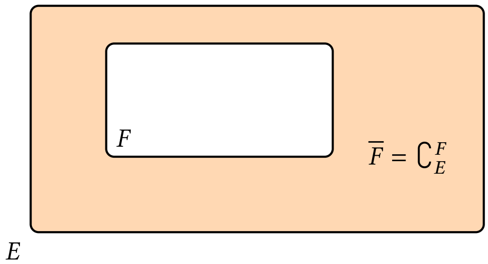
Définition 6.17 –

1. Soient E et F deux ensembles. La **différence ensembliste** de E et F est l'ensemble noté $E\setminus F$ (lire «E privé de F» ou «E moins F») formé des éléments qui appartiennent à E, mais n'appartiennent pas à F. Donc
$$x\in E\setminus F \Leftrightarrow (x\in E \textbf{ et } x\notin F).$$
2. Dans le cas particulier où $F\subset E$, l'ensemble $E\setminus F$ est appelé **complémentaire de F dans E** et noté $\complement_E^F$ (ou $\complement_E F$). Dans le cas où il n'y a pas d'ambiguïté sur ce qu'est E, on abrège souvent en «complémentaire de F» et on note $\overline{F}$ au lieu de $\complement_E^F$.

Ambiguïté ?

Le «gros ensemble» E dans lequel on considère le complémentaire n'est pas toujours très clair et a donc parfois besoin d'être précisé.
Par exemple, sans précisions, dur de savoir si la notation $\overline{\mathbf{N}}$ désigne $\mathbf{Z}\setminus\mathbf{N}$, $\mathbf{Q}\setminus\mathbf{N}$, $\mathbf{R}\setminus\mathbf{N}$ ou encore $\mathbf{C}\setminus\mathbf{N}$.





Remarques. Si A est une partie de E, on a toujours $E=A\cup\overline{A}$ et $A\cap\overline{A}=\emptyset$.
Et de même $\complement_E^E=\emptyset$ et $\complement_E^{\emptyset}=E$.
De plus, si A et B sont des parties d'un même ensemble E, alors $A\setminus B = A\cap\overline{B} = A\cap\complement_E^B$.

Proposition 6.18 (Propriétés du complémentaire) : *Soit E un ensemble. Alors :*

1. *Pour toute partie A de E, $\overline{\overline{A}}=A$.*
2. *Pour toutes parties A et B de E, $A\subset B\Leftrightarrow \overline{B}\subset\overline{A}$.*

Démonstration. 1) Soit $x\in E$. Alors

$$x\in\overline{\overline{A}} \Leftrightarrow \textbf{non}(x\in\overline{A}) \Leftrightarrow \textbf{non}(\textbf{non}(x\in A)) \Leftrightarrow x\in A.$$

Donc $\overline{\overline{A}}=A$.
2) Soient A et B deux parties de E telles que $A\subset B$. Alors, $\forall x\in E$, $(x\in A\Rightarrow x\in B)$.
Par contraposition, $x\notin B\Rightarrow x\notin A$, soit encore $x\in\overline{B}\Rightarrow x\in\overline{A}$.
Donc $\overline{B}\subset\overline{A}$. On a donc prouvé que

$$\forall A\in\mathscr{P}(E), \forall B\in\mathscr{P}(E), A\subset B\Rightarrow \overline{B}\subset\overline{A}.$$

Et alors si $\overline{B}\subset\overline{A}$, en appliquant ce qui précède, $\overline{\overline{A}}\subset\overline{\overline{B}}\Leftrightarrow A\subset B$. □

Exemple 6.19

Soient A, B deux parties d'un ensemble E. Prouvons que $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$.
Comme souvent sur ce type d'exercices, deux options s'offrent à nous : revenir à la définition d'inclusion et manipuler des éléments de nos ensembles, ou utiliser les propriétés déjà prouvées sur les ensembles.

Première méthode :
▸ Supposons $A \cap B = \emptyset$, et soit $x \in A$. Alors on ne peut avoir $x \in B$, faute de quoi $x \in A \cap B = \emptyset$. Donc $x \notin B$, si bien que $x \in \overline{B}$.
Et donc $\forall x \in A,\ x \in \overline{B}$, donc $A \subset \overline{B}$.
▸ Supposons que $A \cap \overline{B}$. Supposons par l'absurde que $A \cap B \neq \emptyset$, et soit $x \in A \cap B$.
Alors $x \in A$, donc $x \in \overline{B}$. Et par ailleurs, $x \in A \cap B$, donc $x \in B$.
Ainsi, on a à la fois $x \in B$ et $x \notin B$, ce qui est absurde.
Par conséquent, $A \cap B = \emptyset$.

Par double implication, on a donc $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$.

Remarque

Pour pouvoir prendre un élément dans $A \cap B$, il faut supposer que celui-ci est non vide, et donc qu'un tel x existe bien.

Deuxième méthode :
▸ Supposons $A \cap B = \emptyset$. Alors

$$A = A \cap E = A \cap (B \cup \overline{B}) = \underbrace{(A \cap B)}_{=\emptyset} \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap \overline{B} \subset \overline{B}.$$

▸ Supposons $A \subset \overline{B}$. Alors

$$A \cap B \subset \overline{B} \cap B = \emptyset$$

et donc $A \cap B = \emptyset$.
Donc par double implication $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$.

Proposition 6.20 (Lois de De Morgan) : *Soit E un ensemble.*

1. *Si A et B sont deux parties de E, alors*

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \text{ et } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

2. *Plus généralement, si les $A_i, i \in I$ sont des parties de E, alors*

$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i} \text{ et } \overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}.$$

En français

Le complémentaire de l'union est l'intersection des complémentaires, et le complémentaire de l'intersection est l'union des complémentaires.

Démonstration. Prouvons directement le second point : soit $x \in E$. Alors

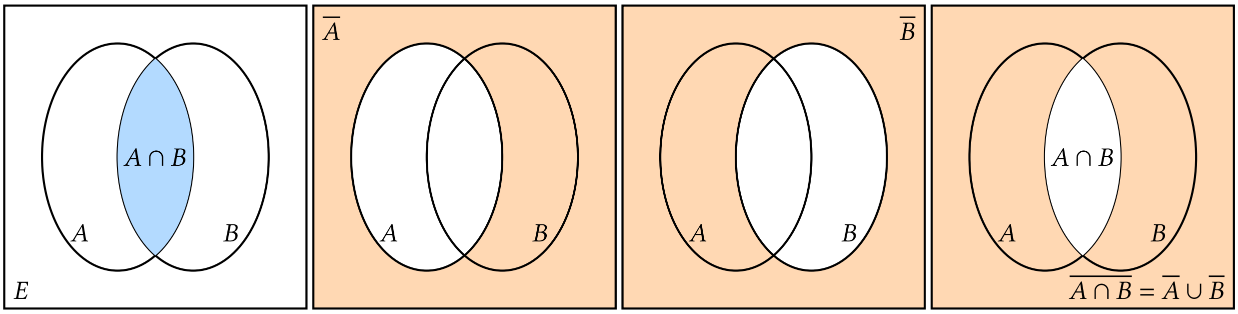
$$\begin{aligned} x \notin \bigcup_{i\in I} A_i &\Leftrightarrow \textbf{non}(\exists i \in I, x \in A_i) \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I,\ x \notin A_i \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I,\ x \in \overline{A_i} \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}. \end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned} x \notin \bigcap_{i\in I} A_i &\Leftrightarrow \textbf{non}(\forall i \in I, x \in A_i) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in I,\ x \notin A_i \\ &\Leftrightarrow \exists x \in I,\ x \in \overline{A_i} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}.$$

□



Définition 6.21 – Soit E un ensemble, et soit A un ensemble de parties de E (c'est-à-dire une partie de $\mathscr{P}(E)$). On dit que A est un **recouvrement disjoint de** E si :

- $\displaystyle\bigcup_{X\in A} X = E$,
- les A_i sont deux à deux disjoints, c'est-à-dire que

$$\forall X \in A, \forall Y \in A,\ X \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow X = Y.$$

Notons que la contraposée de cette proposition est aussi

$$\forall X \in A, \forall Y \in A,\ X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = \emptyset.$$

Si de plus $\forall X \in A, X \neq \emptyset$, on dit que A est une partition de E.

Remarque

Cette contraposée, bien que plus intuitive est souvent plus difficile à prouver car il est souvent difficile d'utiliser $X \neq Y$.

Exemples 6.22

► Si $A \in \mathscr{P}(E)$ alors $\{A, \overline{A}\}$ est un recouvrement disjoint de E. Si de plus $A \neq \emptyset$ et $A \neq E$, alors c'est une partition de E.
En effet, ni A ni $\overline{A}$ ne sont vides[6], $A \cup \overline{A} = E$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

► L'ensemble des trinômes de colle constitue une partition de l'ensemble des élèves de MP2I.
En effet, aucun trinôme n'est vide, tous les élèves sont dans un trinôme (donc l'union des trinômes est toute la classe), et deux trinômes distincts n'ont pas d'élève en commun (puisque chaque élève est dans un seul trinôme).

► Pour $t \in [0,1[$, notons $A_t = \{x \in \mathbf{R} \mid x - \lfloor x \rfloor = t\}$.
Alors $\{A_t, t \in [0,1[\}$ est une partition de $\mathbf{R}$.
En effet, pour tout $t \in [0,1[$, $A_t \neq \emptyset$ puisque $t \in A_t$.
Si $x \in \mathbf{R}$, alors $t = x - \lfloor x \rfloor \in [0,1[$ et $x \in A_t$.
Donc $\mathbf{R} \subset \displaystyle\bigcup_{t\in[0,1[} A_t$, et l'inclusion réciproque étant évidente[7], on a bien l'égalité $\mathbf{R} = \displaystyle\bigcup_{t\in[0,1[} A_t$.
Reste à prouver que les A_t sont deux à deux disjoints.De plus, soient t_1, t_2 deux éléments de $[0,1[$ tels que $A_{t_1} \cap A_{t_2} \neq \emptyset$. Alors il existe $x \in A_{t_1} \cap A_{t_2}$, et donc

$$t_1 = x - \lfloor x \rfloor = t_2.$$

Nous venons donc de prouver que $A_{t_1} \cap A_{t_2} \neq \emptyset \Rightarrow t_1 = t_2$.

[6] $\overline{A} \neq \emptyset$ car $A \neq E$.

Autrement dit

A_t est l'ensemble des réels dont la partie décimale est t.

[7] Une union de parties de $\mathbf{R}$ est dans $\mathbf{R}$.

6.1.4 Lien entre logique et ensemble

Coté logique	Côté ensembles	En détails
Implication	Inclusion	$A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$
Équivalence	Égalité	$A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
Conjonction (**et**)	Intersection	$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A$ **et** $x \in B)$
Disjonction (**ou**)	Union	$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A$ **ou** $x \in B)$
Négation	Complémentaire	$x \in \overline{A} \Leftrightarrow$ **non**$(x \in A)$

⚠ Malgré ces analogies, on fera bien attention à ce qu'on écrit, en particulier au fait qu'un ensemble n'est pas une proposition logique. Et donc on n'écrira pas **non** A, où A est un ensemble.
En revanche, $x \in A$ est bien une proposition logique, et on peut donc écrire **non**$(x \in A)$.

6.1.5 Produit cartésien d'ensembles

Définition 6.23 – Un **couple** est la donnée de deux objets dans un ordre déterminé.
Le couple formé des éléments a et b, dans cet ordre, est noté (a, b).
Deux couples (a, b) et (c, d) sont égaux si et seulement si $a = c$ et $b = d$.

Remarque. La définition précédente est bien entendu imprécise, mais devrait nous suffire, en gardant à l'esprit que la seule chose vraiment importante est que deux couples sont égaux si et seulement si ils sont formés des mêmes éléments, dans le même ordre.
Si on souhaite définir rigoureusement le couple (a, b), on peut poser $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$.
Je vous laisse alors le soin de vérifier que $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$.

⚠ On ne confondra pas le couple (x, y) et l'ensemble $\{x, y\}$, qui sont deux éléments de nature différente.
En particulier, l'ordre des éléments d'un couple est important $\big((1, 2) \neq (2, 1)\big)$, alors que dans un ensemble, l'ordre n'a aucune importance $\big(\{1, 2\} = \{2, 1\}\big)$.

Définition 6.24 (Produit cartésien de deux ensembles) – Si E et F sont deux ensembles, on note $E \times F$ l'ensemble des **couples** (x, y) tels que $x \in E$ et $y \in F$. On dit que $E \times F$ est le **produit cartésien de** E **et** F.
Si $E = F$, on note alors E^2 au lieu de $E \times F$.

Exemples 6.25

Puisque $\emptyset$ ne contient aucun élément, $\emptyset \times \emptyset$ est encore l'ensemble vide. Et plus généralement, $\emptyset \times E = E \times \emptyset = \emptyset$, quel que soit l'ensemble E.
L'ensemble $\mathbf{R}^2$ est l'ensemble des couples de deux réels, c'est-à-dire l'ensemble des points (x, y) avec $x \in \mathbf{R}$ et $y \in \mathbf{R}$.
$\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ = \{(x, y), x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}_+\}$.
Si $I = [a, b]$ et $J = [c, d]$ sont deux segments de $\mathbf{R}$, alors $I \times J = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, a \leqslant x \leqslant b$ et $c \leqslant y \leqslant d\}$ est un pavé de $\mathbf{R}^2$.

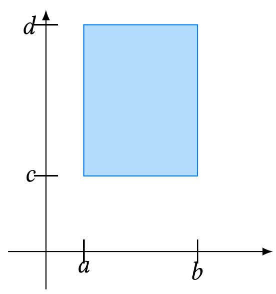


FIGURE 6.1– $[a, b] \times [c, d]$.

On notera qu'il revient au même d'écrire $\forall x \in E, \forall y \in F,\ P(x, y)$ et $\forall (x, y) \in E \times F,\ P(x, y)$.
Et de même, $\forall x, y \in E,\ P(x, y)$ est équivalent à $\forall (x, y) \in E^2,\ P(x, y)$.

Définition 6.26 – Pour $n \in \mathbf{N}^*$, un **n-uplet** d'objets est la donnée de n objets dans un ordre déterminé.
On note $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ le n-uplet formé des objets $x_1, \dots, x_n$, dans cet ordre.
Dex n-uplets $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ sont égaux si et seulement si $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = y_i$.

Définition 6.27 (Produit cartésien de n ensembles) – Si $E_1, E_2, \dots, E_n$ sont des ensembles non vides, on note $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ ou encore $\prod_{i=1}^{n} E_i$ l'ensemble formé des **n-uplets** $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tels que $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_n \in E_n$.
Si $E_1 = E_2 = \dots = E_n$, on note E^n au lieu de $E \times E \times \dots \times E$.

Notons que deux éléments $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ de $E_1 \times \dots \times E_n$ sont égaux si et seulement si

$$x_1 = y_1 \text{ et } x_2 = y_2 \text{ et } \dots \text{ et } x_n = y_n.$$

Remarquons que si E, F, G sont trois ensembles, alors un élément de $(E \times F) \times G$ est un couple formé d'un élément de $E \times F$ (lui-même un couple) et d'un élément de G.
Autrement dit, il est de la forme $((x, y), z)$, avec $x \in E, y \in F$ et $z \in G$.
On l'identifiera alors au triplet $(x, y, z) \in E \times F \times G$, de sorte qu'on ne fera pas de différence entre $(E \times F) \times G$ et $E \times F \times G$ (ou encore $E \times (F \times G)$).
Et de même pour des produits de plus de trois ensembles.

Identification
Cette identification est légitime puisqu'à chaque triplet (x, y, z) de $E \times F \times G$ correspond **un unique** élément $((x, y), z)$ de $(E \times F) \times G$.

Exemple 6.28

Soit $E = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$, et soit $F = [a, b] \subset \mathbf{R}$.
Alors $E \times F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1 \text{ **et** } a \leqslant z \leqslant b\}$. C'est un cylindre de $\mathbf{R}^3$.

6.2 Introduction à la notion d'application entre ensembles

6.2.1 Définitions

Définition 6.29 – Une **application** est un triplet de la forme $f = (E, F, \Gamma)$, où E et F sont deux ensembles non vides et Γ est une partie de $E \times F$ telle que

$$\forall x \in E, \exists! y \in F, \ (x, y) \in \Gamma.$$

On dit que f est une application de E dans F, E est appelé ensemble de départ de f et F est appelé l'ensemble d'arrivée de F.
Si $(x, y) \in \Gamma$, on note $y = f(x)$.
L'ensemble $\Gamma = \{(x, f(x)), \ x \in E\}$ est appelé **graphe de f**.

Explication
Cela revient à dire que **tout** élément de l'ensemble de départ admet une **unique** image par f.

Pour une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, alors le graphe de f est exactement ce dont on a l'habitude : l'ensemble des couples (x, y) où $y = f(x)$.
Et la condition sur l'existence et l'unicité d'une image a déjà été évoquée au chapitre 2 : elle signifie que toute droite verticale rencontre le graphe en un unique point.
En particulier, deux applications f et g sont égales si et seulement si :

- elles ont le même ensemble de départ
- elles ont le même ensemble d'arrivée
- pour tout élément x de leur ensemble de départ, $f(x) = g(x)$.

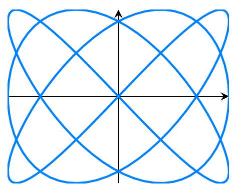


Figure 6.2– Une partie de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ qui n'est pas le graphe d'une application.

Remarque. Le second point (l'égalité des ensembles d'arrivée) est le moins naturel.
En effet, si l'on s'en tient à la définition, les deux applications $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$ et $g : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$ ne sont pas égales car elles n'ont pas le même ensemble d'arrivée[8].
Nous verrons qu'en pratique, nous omettrons ce point dans la plupart des cas, nous en

[8] Mais pourtant elles ont même ensemble de départ, et prennent partout les mêmes valeurs.

reparlerons lorsque nous définirons la corestriction.

En revanche, il y a un cadre où il est totalement légitime d'ignorer ce second point, c'est celui des fonctions numériques[9], à savoir les fonctions qui ont pour ensembles de départ et d'arrivée des parties de $\mathbf{R}$.
Dans ce cas, on considérera toujours (là aussi, un peu abusivement) que leur ensemble d'arrivée est $\mathbf{R}$, et donc les deux fonctions f et g ci-dessus seront considérées égales.

[9] C'est-à-dire celles qui ont été étudiées chapitre 3, qui à un réel associent un autre réel.

Exemples 6.30

En pratique, nous ne définirons jamais une application en se donnant un triplet, et comme pour les fonctions numériques, nous utiliserons la notation $f : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$.
Donnons tout de même quelques exemples d'applications qui ne sont pas des fonctions numériques, mais avec des ensembles de départ et/ou d'arrivée plus exotiques.

▸ $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathscr{P}(\mathbf{C}) \\ A & \longmapsto & \{z \in A \mid |z| = 1\} \end{array} \right.$, qui à un ensemble (inclus dans $\mathbf{C}$) associe un autre ensemble.

Géométriquement — $f(A)$ est l'intersection de A avec le cercle trigonométrique.

▸ $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\mathbf{N}^*) & \longrightarrow & \mathbf{C}^* \\ A & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } A = \emptyset \\ e^{i\frac{2\pi}{\min A}} & \text{si } A \neq \emptyset \end{cases} \end{array} \right.$.

▸ $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{Q} & \longrightarrow & \mathbf{Z} \\ \frac{p}{q} & \longmapsto & p \end{array} \right.$ n'est pas bien définie, le rationnel 2 s'écrit à la fois $\frac{2}{1}$ et $\frac{4}{2}$, donc son image n'est pas uniquement définie.
En revanche l'application qui à un rationnel associe le numérateur de son écriture irréductible est bien définie.

▸ Un cas très particulier[10] est celui où E est l'ensemble vide.
Dans ce cas, $E \times F = \emptyset$, et donc $\mathscr{P}(E \times F) = \{\emptyset\}$. Puisque la proposition $\forall x \in \emptyset, \exists! y \in F, (x, y) \in \emptyset$ est vraie , $\emptyset$ satisfait bien la définition d'application.
Autrement dit, il existe une unique application de $\emptyset$ dans n'importe quel ensemble F, qu'on appelle l'**application vide**.

[10] Et en pratique peu intéressant...

Rappel — Toute proposition du type $\forall x \in \emptyset, P(x)$ est vraie.

En revanche, lorsque $E \neq \emptyset$, et $F = \emptyset$, alors pour toute partie Γ de $E \times F = \emptyset$, l'assertion $\forall x \in E, \exists! y \in \emptyset, (x, y) \in \Gamma$ est fausse, si bien qu'il n'existe pas d'application de E dans $\emptyset$.

Définition 6.31 (Identité) – Soit E un ensemble. On appelle **identité de** E l'application $\mathrm{id}_E : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$.

Les notions d'image et d'antécédent, déjà rencontrées pour les fonctions numériques se généralisent sans difficulté à toutes les applications.

Définition 6.32 (Image, antécédent) – Soit $f : E \to F$ une application. Soient $x \in E$ et $y \in F$. Si $y = f(x)$, on dit que y est **l'image de** x **par** f, et que x est **un antécédent de** y **par** f.
On appelle **image de** f l'ensemble

$$\mathrm{Im}\, f := \{f(x),\ x \in E\} = \{y \in F \mid \exists x \in E,\ y = f(x)\}.$$

Notons que c'est une partie de F, et qu'elle est formée des éléments de F qui possèdent au moins un antécédent par f.

⚠ L'image d'un élément de l'ensemble de départ est toujours unique, par définition d'une application.

En revanche, un élément de l'ensemble d'arrivée peut ne pas posséder d'antécédents, ou en posséder plusieurs. On prendra donc bien garde à dire **un** antécédent de y et surtout pas[11] l'antécédent de y par f.

Par exemple, si on considère l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$, alors 0 possède un unique antécédent par f qui est 0, 1 possède deux antécédents par f qui sont -1 et 1 et -1 ne possède aucun[12] antécédent par f.

[11] Sauf si pour une raison ou une autre, on sait déjà qu'un tel antécédent est unique.

[12] Le carré d'un nombre réel ne peut être négatif.

Exemple 6.33

Soit f l'application définie sur l'ensemble des élèves de MP2I, à valeurs dans $[\![1, 16]\!]$, qui à un étudiant associe le numéro de son groupe de colle.
Alors $f(\text{Cylian}) = 2$, de sorte que 2 est l'image de Cylian, et donc Cylian est un antécédent de 2.
Notons que Zao est aussi un antécédent de 2.

Définition 6.34 – Soient E et F deux ensembles. L'ensemble de toutes les applications de E dans F est noté $\mathscr{F}(E, F)$ ou F^E.

Notation
La notation F^E sera motivée plus tard, lorsque nous compterons le nombre d'éléments de $\mathscr{F}(E, F)$ dans le cas où E et F sont finis. Attention au fait que c'est l'espace de départ qui est en exposant.

Exemple 6.35

Il est tout à fait possible de considérer des applications elles-mêmes définies sur des ensembles d'applications. Par exemple, si on note $\mathscr{D}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables, il est possible de considérer l'application $D : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{D}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathscr{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array} \right.$, qui à une fonction associe sa dérivée.
Notons alors $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 0 \end{array} \right.$ la fonction nulle sur $\mathbf{R}$.
Une fonction dérivable f est alors un antécédent de h par D si et seulement si $f' = h$, soit si et seulement si f' est nulle. Ce qui est le cas si et seulement si f est constante.

Définition 6.36 – Si I et E sont deux ensembles, on note parfois $(a_i)_{i \in I}$ au lieu de $a : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ i & \longmapsto & a(i) \end{array} \right.$, et on parle alors de **famille d'éléments de E indexée par I** au lieu de parler d'application.

En particulier, une suite, qui est une famille indicée par $\mathbf{N}$ n'est rien d'autre qu'une application de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$ (ou dans $\mathbf{C}$ pour les suites complexes).
On préfère alors largement[13] la notation $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ à $u : n \mapsto u(n)$.
L'ensemble des suites réelles est donc noté $\mathscr{F}(\mathbf{N}, \mathbf{R})$, ou encore $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

[13] Par habitude...

6.2.2 Composition d'applications

Définition 6.37 – Soient E, F, G trois ensembles, et soient $f \in \mathscr{F}(E, F)$ et $g \in \mathscr{F}(F, G)$ deux applications. On appelle composée de g et f, et on note $g \circ f$ l'application de E dans G définie par :

$$\forall x \in E,\ (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Remarque
Si on veut que la composition ait bien un sens, il faut nécessairement que l'espace d'arrivée de f soit l'espace de départ de g, afin qu'on puisse bien appliquer g à $f(x)$.

⚠ Le sens dans lequel on effectue la composition est important : même dans les cas où $g \circ f$ et $f \circ g$ sont toutes les deux bien définies[14], en règle générale ces deux applications ne sont pas égales.

Par exemple, si $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x + 2\pi \end{array} \right.$, alors $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$(g \circ f)(x) = g(\sin(x)) = \sin(x) + 2\pi \neq \sin(x + 2\pi) = \sin(g(x)) = (f \circ g)(x).$$

[14] C'est-à-dire lorsque $G = E$, soit

$$f : E \to F$$

et $g : F \to E$.

Notons qu'on a toujours, pour $f : E \longrightarrow F$,

$$\mathrm{id}_F \circ f = f \circ \mathrm{id}_E = f.$$

Terminologie

On dit que id est un élément neutre pour la composition.

Dans le cas particulier où l'espace de départ et l'espace d'arrivée de f sont égaux, alors on peut composer f avec elle-même. Puis composer cette composée avec f, etc.

Définition 6.38 – Soit E un ensemble et soit $f : E \longrightarrow E$.
On pose alors $f^0 = \mathrm{id}_E$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $f^{n+1} = f \circ f^n$.
Autrement dit, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$.

Cette notation a un léger inconvénient, c'est qu'elle peut être confondue avec le produit (pour peu que E soit un ensemble dans lequel on a une notion de produit). Lorsqu'il y risque de confusion, on note parfois $f^{\circ n}$ au lieu de f^n.

Il est alors très facile de se convaincre que pour tous $k, n \in \mathbf{N}$, $f^k \circ f^n = f^n \circ f^k = f^{k+n}$.
En revanche, lorsqu'on compose trois applications ou plus, l'ordre dans lequel la composition est effectuée n'a pas d'importance, comme le prouve la proposition suivante :

Proposition 6.39 (Associativité de la composition) : *Soient $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow H$ trois applications. Alors $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.*

Démonstration. Commençons par noter que $h \circ (g \circ f)$ et $(h \circ g) \circ f$ ont toutes deux E comme espace de départ et H comme espace d'arrivée. Pour le reste, la preuve est identique à celle qui a été donnée pour les fonctions numériques. $\square$

Nous nous contentons de ces quelques définitions pour l'instant, et reviendrons dans un chapitre ultérieur sur l'étude générale des applications.