

FONCTIONS CIRCULAIRES

5.1 NOTION DE CONGRUENCE

Définition 5.1 – Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. On dit que deux réels x et y sont **congrus modulo** α s'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $x = y + k\alpha$.

On note alors $x \equiv y \pmod{\alpha}$ ou $x \equiv y [\alpha]$.

Ainsi, $\{y \in \mathbf{R} \mid y \equiv x [\alpha]\} = \{x + k\alpha, k \in \mathbf{Z}\}$.

On note parfois cet ensemble $x + \alpha\mathbf{Z}$, où $\alpha\mathbf{Z} = \{k\alpha, k \in \mathbf{Z}\}$.

Autrement dit

x et y sont congrus modulo α si leur différence est un multiple entier de α .

Exemples 5.2

► Un entier n est pair si et seulement si il est congru à 0 modulo 2, c'est-à-dire si et seulement si il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $n = 2k$.

► De même, n est impair si et seulement si il est congru à 1 modulo 2.

► Un angle est défini modulo 2π , c'est-à-dire que deux angles sont égaux si et seulement si leurs mesures sont égales modulo 2π .

Par exemple, $7\pi \equiv \pi [2\pi]$, et $\frac{11\pi}{2} \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.

Notons qu'il est possible de «diviser» par $\lambda \neq 0$ dans des congruences, à condition de diviser également ce qui se trouve dans le modulo.

Plus précisément, pour $a, b \in \mathbf{R}$, $\alpha, \lambda \in \mathbf{R}^*$, on a $a \equiv b [\alpha]$ et si et seulement si $\frac{a}{\lambda} \equiv \frac{b}{\lambda} [\frac{\alpha}{\lambda}]$.

En effet, on a

$$a \equiv b [\alpha] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z}, a = b + k\alpha \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z}, \frac{a}{\lambda} = \frac{b}{\lambda} + k\frac{\alpha}{\lambda} \Leftrightarrow \frac{a}{\lambda} \equiv \frac{b}{\lambda} [\frac{\alpha}{\lambda}].$$

5.2 FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

5.2.1 Sinus et cosinus

Les fonctions sinus et cosinus ne seront définies proprement qu'en deuxième année, via les formules suivantes¹

$$\cos(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

$$\sin(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots$$

Cette année, nous nous en tiendrons à l'intuition que vous en avez acquise au lycée, reposant sur la notion d'angles dans des triangles rectangles.

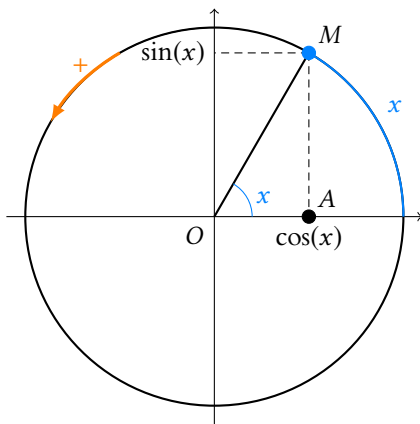
Dans toute la suite, (O, \vec{i}, \vec{j}) est un repère orthonormé du plan.

Définition 5.3 – On appelle **cercle trigonométrique** le cercle \mathcal{C} de centre $(0, 0)$ et de rayon 1. Autrement dit, $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$.

¹ Qui ne sont ni à comprendre ni à connaître pour l'instant !

Définition 5.4 – Soit $x \in \mathbf{R}$, et soit M l'unique point de \mathcal{C} tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = x$.

On appelle alors **cosinus** de x et on note $\cos(x)$ l'abscisse de M .
De même, on appelle **sinus** de x et on note $\sin(x)$ l'ordonnée de M .



Rappelons que ceci correspond bien² à la trigonométrie de collège : le triangle OAM est rectangle en A , et son hypoténuse est de longueur 1 puisque M est sur le cercle trigonométrique.

Par conséquent,

$$\cos(x) = \cos(\widehat{AOM}) = \frac{OA}{OM} = OA$$

et de même

$$\sin(x) = \sin(\widehat{AOM}) = \frac{AM}{OM} = AM.$$

² Au moins dans le cas où $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Proposition 5.5 (Paramétrisation du cercle trigonométrique) : Si $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ vérifie $x^2 + y^2 = 1$ (c'est-à-dire si $(x, y) \in \mathcal{C}$), alors il existe un unique $t \in]-\pi, \pi]$ tel que $(x, y) = (\cos t, \sin t)$.

Démonstration. Il est évident qu'un tel t existe : c'est la mesure principale de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ où M est le point de coordonnées (x, y) .

Nous admettons l'unicité, puisqu'elle nécessite de disposer d'une définition rigoureuse de π , ce que nous n'avons pas encore. \square

Remarque. On a choisi de prendre $t \in]-\pi, \pi]$, mais on aurait également pu prendre $t \in [0, 2\pi[$, ou encore dans n'importe quel intervalle de longueur 2π ouvert d'un côté et fermé de l'autre.

Corollaire 5.6 – Soit $r > 0$ et soit $\mathcal{C}_r = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, x^2 + y^2 = r^2\}$. Alors pour tout $(x, y) \in \mathcal{C}_r$, il existe un unique $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.

Démonstration. Soit $(x, y) \in \mathcal{C}_r$. Alors $(x', y') = (\frac{x}{r}, \frac{y}{r})$ est sur \mathcal{C} puisque

$$x'^2 + y'^2 = \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = 1.$$

Et donc il existe un unique $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que

$$(x', y') = (\cos \theta, \sin \theta) \Leftrightarrow (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

\square

Ceci est à la base des coordonnées dites **polaires** qu'on utilise notamment en physique : tout point (x, y) de \mathbf{R}^2 différent de O est sur un unique cercle de centre O (celui de rayon $\sqrt{x^2 + y^2}$).

Et donc il existe un unique couple $(r, \theta) \in \mathbf{R}_+^* \times]-\pi, \pi]$ tel que $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.

Autrement dit, au lieu de repérer un point par son abscisse et son ordonnée comme on en a l'habitude, on peut se donner un rayon³ et un angle.

C'est d'ailleurs le principe de la représentation exponentielle des nombres complexes que nous (re)verrons au chapitre suivant.

π ?

Notons que le nombre π n'a jamais été défini proprement (si ce n'est que c'est le demi-périmètre d'un cercle de rayon 1, mais qu'est-ce qu'un périmètre ?).

Là aussi, vous aurez l'occasion d'en reparler l'an prochain, π pouvant être défini comme étant le plus petit réel positif dont le cosinus vaut -1 .

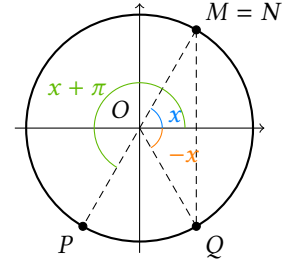
³ La distance du point à l'origine.

Proposition 5.7 : Les fonctions \sin et \cos sont 2π -périodiques, et pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ et $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$.
De plus, \cos est paire et \sin est impaire.

Démonstration. Puisqu'un angle de 2π correspond à un tour complet du cercle, le point M de \mathcal{C} tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = x$ et le point N de \mathcal{C} tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{ON}) = x + 2\pi$ sont confondus. Ils ont donc même abscisse et même ordonnée : $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.

De même, un angle de π correspond à un demi-tour du cercle. Et donc si P est le point de \mathcal{C} tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{OP}) = x + \pi$, alors P est le symétrique de M par rapport à l'origine. Et donc $\cos(x + \pi) = x_P = -\cos(x)$ et $\sin(x + \pi) = y_P = -\sin(x)$.

Enfin, si Q est le point de \mathcal{C} tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{OQ}) = -x$, alors Q est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses. Et donc en particulier, il a même abscisse que M (de sorte que $\cos(-x) = \cos(x)$) et son ordonnée est l'opposée de celle de M (et donc $\sin(-x) = -\sin(x)$). \square



Proposition 5.8 : Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $\cos^2 x + \sin^2(x) = 1$.

Démonstration. Soit M le point de \mathcal{C} tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = x$, et soit A le point de coordonnées $(\cos x, 0)$. Alors OMA est un triangle rectangle en A , dont l'hypoténuse OM est de longueur⁴ 1. Puisque $AM = \sin x$, par le théorème de Pythagore, on a

$$OA^2 + MP^2 = OM^2 \Leftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

\square

Remarque. Notons que si l'on sait dériver \sin et \cos (voir ci-dessous), la formule se retrouve en dérivant $x \mapsto \cos^2(x) + \sin^2(x)$. On obtient alors une fonction constante, qui vaut 1 en 0 et donc en tout $x \in \mathbf{R}$.

⁴ Car $M \in \mathcal{C}$.

Corollaire 5.9 – Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$.

Démonstration. Puisque $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) \leq 1$, on a bien $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, et de même pour $\sin(x)$. \square

Proposition 5.10 (Dérivées des fonctions trigonométriques) : Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur \mathbf{R} , avec

$$\sin' = \cos \text{ et } \cos' = -\sin.$$

Démonstration. Admis (pour l'instant). \square

Puisqu'on sait que $\cos(x) \geq 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z}, x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ et que $\sin(x) \geq 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z}, x \in [2k\pi, (2k + 1)\pi]$, alors nous en déduisons facilement les sens de variations de \cos et \sin .

Terminons enfin par une inégalité classique

Proposition 5.11 : Pour tout réel x , on a $|\sin(x)| \leq |x|$.

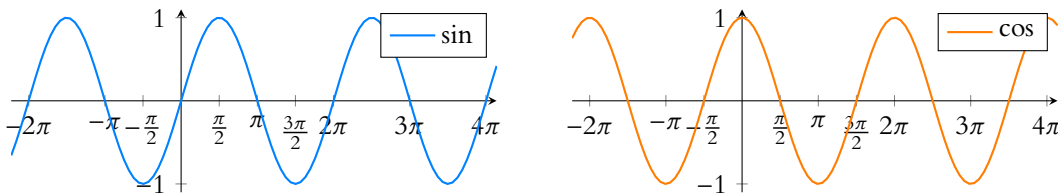


FIGURE 5.1 – Les fonctions sin et cos.

Démonstration. Commençons par noter que si $|x| \geq 1$, l'inégalité est évidente, puisque $|\sin(x)| \leq 1 \leq |x|$.

Autrement dit, il reste à prouver l'inégalité pour $x \in [-1, 1]$.

Sur $[0, 1]$, définissons une fonction f par : $\forall x \in [0, 1], f(x) = x - \sin(x)$.

Alors f est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout $x \in [0, 1], f'(x) = 1 - \cos(x) \geq 0$.

Donc f est croissante. Puisque par ailleurs, $f(0) = 0$, on en déduit que pour tout $x \in [0, 1], f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \sin(x) \leq x$.

Puisque par ailleurs, $[0, 1] \subset [0, \pi]$, pour tout $x \in [0, 1], \sin(x) \geq 0$, et donc

$$|\sin(x)| = \sin(x) \leq x = |x|.$$

Pour $x \in [-1, 0]$, on a alors $-x \in [0, 1]$, si bien que

$$|\sin(x)| = |-\sin(-x)| \leq |-x| = |x|.$$

□

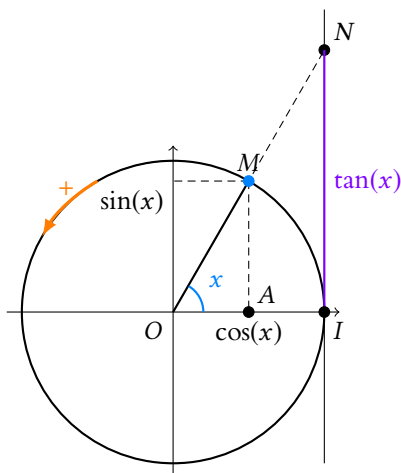
5.2.2 Fonction tangente

Définition 5.12 – On appelle **tangente** et on note \tan la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$ par

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Remarque

L'ensemble de définition de la tangente est précisément l'ensemble des points où le cosinus ne s'annule pas, et donc où le quotient possède un sens.



Notons, comme sur la figure ci-contre, l'intersection de la droite (OM) avec la droite d'équation $x = 1$.

Alors \vec{OM} et \vec{ON} sont colinéaires, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\vec{ON} = \lambda \vec{OM} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ y_N \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}.$$

Mais alors $\lambda = \frac{1}{\cos x}$ et donc

$$y_N = \lambda \sin(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x.$$

Ainsi, géométriquement, $\tan(x)$ est la distance⁵ IN .

⁵ Algébrique, c'est-à-dire avec un éventuel signe.

Proposition 5.13 : La fonction tangente est impaire, π -périodique, dérivable sur son ensemble de définition et

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, (\tan)'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

Démonstration. Notons $\mathcal{D} = \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$.

La fonction tan est impaire car quotient d'une fonction impaire (le sinus) par une fonction paire (le cosinus).

Pour $x \in \mathcal{D}$, on a encore $x + \pi \in \mathcal{D}$, et

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x).$$

Enfin, tan est dérivable sur \mathcal{D} car quotient de fonctions dérivables⁶, et

$$\forall x \in \mathcal{D}, \tan'(x) = \frac{\cos(x) \cos(x) - (-\sin(x)) \sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Enfin, notons que $1 + \tan^2(x) = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$. \square

Remarque. La dérivée de tan est positive partout où elle est définie.

On n'en déduira pas pour autant que tan est croissante sur son ensemble de définition, mais uniquement qu'elle l'est sur chacun des intervalles contenus dans son intervalle de définition (et en particulier sur les $\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$).

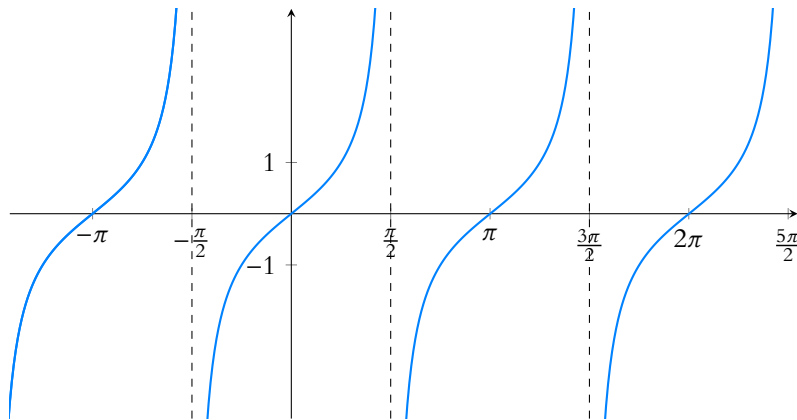


FIGURE 5.2 – La fonction tangente.

La fonction cotangente n'est pas au programme, mais vous pourriez être amenés à la rencontrer dans des exercices.

Définition 5.14 – On appelle **cotangente**, et on note cotan la fonction définie sur $\mathbf{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbf{Z}\} = \mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z}$ par

$$\cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$



On n'a pas $\cotan = \frac{1}{\tan}$ car ces deux fonctions n'ont pas le même domaine de définition.

En revanche, il est vrai que si $x \notin \frac{\pi}{2}\mathbf{Z} = \left\{ k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\}$, alors $\cotan(x) = \frac{1}{\tan(x)}$.

Nous ne donnons aucune formule pour la cotangente, mais toutes ses propriétés (et notamment sa dérivée) se retrouvent à partir de la définition.

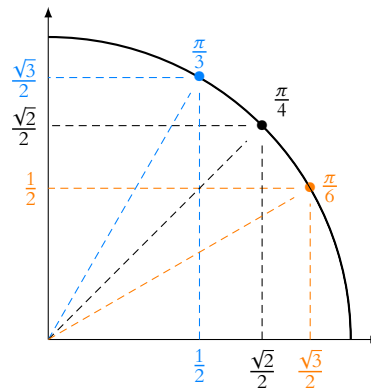
5.2.3 Valeurs remarquables

Les valeurs suivantes sont à connaître par cœur, on n'hésitera pas à s'aider d'un cercle trigonométrique si besoin.

⁶ Dont le dénominateur ne s'annule pas sur \mathcal{D} .

Remarque
 $x \notin \frac{\pi}{2}\mathbf{Z}$ est la condition pour que $\tan(x)$ et $\cotan(x)$ soient tous deux définis.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	\times



Pour 0 et $\frac{\pi}{2}$, c'est évident.

Pour $x = \frac{\pi}{4}$, il s'agit de remarquer que le point M de \mathcal{C} tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{4}$ est sur la première bissectrice, et donc que son sinus et son cosinus sont égaux.

Étant positifs et liés par la relation $\cos^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{4} = 1$, il ne peuvent que valoir $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Pour $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$, une preuve sera donnée en TD.

Notons que combinées aux formules usuelles⁷, ces valeurs permettent d'obtenir les sinus, cosinus et tangentes de tous les angles multiples de $\frac{\pi}{6}$ ou de $\frac{\pi}{4}$.

⁷ Rappelées ci-dessous.

Exemple 5.15

$$\cos\left(-5\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(5\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\sin\left(\frac{16\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{3} + 4\pi\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

5.3 FORMULES USUELLES

Lemme 5.16. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$ et $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$.

Démonstration. Traitons le cas où $x \in [0, \pi]$, le cas général s'en déduira par les formules⁸ pour $\cos(x + \pi)$ et $\sin(x + \pi)$ et la 2π -périodicité.

Si $x = \frac{\pi}{2}$, c'est évident, et de même si $x = 0$.

Supposons donc $\cos(x) \neq 0$ et $\sin(x) \neq 0$.

Alors le point $M \in \mathcal{C}$ tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = x$ est sur la droite (OM) qui a pour vecteur normal $\vec{u} = \begin{pmatrix} -\tan x \\ 1 \end{pmatrix}$.

Et donc si N est le point de \mathcal{C} tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{ON}) = x + \frac{\pi}{2}$ alors \overrightarrow{ON} et \vec{u} sont colinéaires.

Donc il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\overrightarrow{ON} = \lambda \begin{pmatrix} -\tan(x) \\ 1 \end{pmatrix}$.

Alors, puisque $N \in \mathcal{C}$, $\lambda^2 \tan^2(x) + \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda^2(1 + \tan^2(x)) = 1 \Leftrightarrow \lambda^2 = \cos^2 x$.

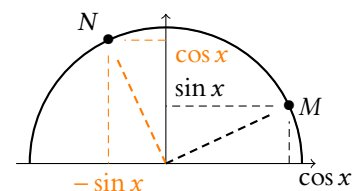
Et donc $\lambda = \pm \cos x$, de sorte que l'abscisse de N est soit $-\sin(x)$ (si $\lambda = \cos(x)$), soit $\sin(x)$ (si $\lambda = -\cos(x)$).

Mais si $x \in [0, \pi]$, $x + \frac{\pi}{2} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ possède un cosinus négatif.

Puisque $\sin(x) \geq 0$, on a donc $\lambda = \cos(x)$.

Et ainsi, $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$ et $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$. \square

⁸ Déjà prouvées.



Rappel

$$1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}.$$

Proposition 5.17 (Formules d'addition) : Soient $a, b \in \mathbf{R}$. Alors

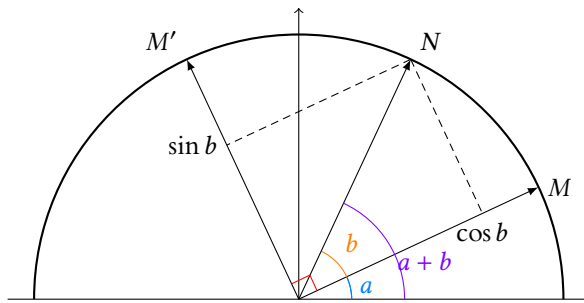
- ▶ $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- ▶ $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- ▶ $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- ▶ $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

Démonstration. Soit (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère orthonormé, et considérons les points M et N du cercle trigonométrique \mathcal{C} tels que $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = a$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{ON}) = a + b$.

On a alors $\overrightarrow{OM} = \cos(a)\vec{i} + \sin(a)\vec{j}$ et $\overrightarrow{ON} = \cos(a + b)\vec{i} + \sin(a + b)\vec{j}$.

Notons alors M' le point de \mathcal{C} tel que $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2}$, de sorte que $(O, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ est un repère orthonormé.

On a alors $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = b$, et donc les coordonnées de N dans le repère $(O, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ sont $(\cos b, \sin b)$.



Et par conséquent,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ON} &= \cos(b)\overrightarrow{OM} + \sin(b)\overrightarrow{OM'} \\ &= \cos(b) (\cos(a)\vec{i} + \sin(a)\vec{j}) + \sin(b) \left(\cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right)\vec{j} \right) \\ &= \cos(b) (\cos(a)\vec{i} + \sin(a)\vec{j}) + \sin(b) (-\sin(a)\vec{i} + \cos(a)\vec{j}) \\ &= (\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b))\vec{i} + (\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b))\vec{j}. \end{aligned}$$

Mais par unicité⁹ des coordonnées de N dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , on a donc

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \text{ et } \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

Les deux autres égalités s'obtiennent en changeant b en $-b$ et en utilisant la parité (resp. l'imparité) du cosinus (resp. du sinus). \square

Notons qu'on retrouve alors des formules déjà rencontrées précédemment :

Corollaire 5.18 – Pour $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned} \cos(x + \pi) &= -\cos(x), \quad \sin(x + \pi) = -\sin(x) \\ \cos(\pi - x) &= -\cos(x), \quad \sin(\pi - x) = \sin(x) \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin(x), \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin(x), \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \end{aligned}$$

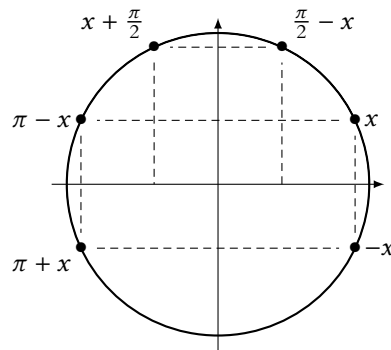
⁹ Un vecteur s'écrit de manière **unique** comme un multiple de \vec{i} plus un multiple de \vec{j} .

Remarque

◀ Ce n'est rien d'autre que le lemme 5.16.

Démonstration. Il suffit d'appliquer les formules de la proposition précédente. \square

Remarques. ► Il n'est pas question d'apprendre toutes ces formules par cœur : une fois de plus, elles se retrouvent facilement avec un cercle trigonométrique.



► Notons en particulier que

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) = \sin'(x) \text{ et } \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x) = \cos'(x).$$

Et donc dériver sinus ou cosinus, c'est déphaser de $\frac{\pi}{2}$. Ceci permet aisément de calculer les dérivées successives de sin ou cos :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}, \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Proposition 5.19 (Formules d'addition : cas de la tangente) : Soient a, b deux réels. Sous réserve que toutes les tangentes suivantes existent¹⁰, on a

$$\begin{aligned} \text{► } \tan(a + b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \\ \text{► } \tan(a - b) &= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \end{aligned}$$

Démonstration. 1) On a

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} = \frac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b} \frac{\frac{\sin a \cos b}{\cos a \cos b} + \frac{\cos a \sin b}{\cos a \cos b}}{\frac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b} - \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}} = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

La formule 2) s'en déduit aisément en changeant b en $-b$ et en utilisant l'imparité de la tangente. □

Proposition 5.20 (Formules de duplication) : Pour $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x \\ \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x. \end{aligned}$$

Démonstration. On a $\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$. Mais $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Donc

$$\cos(2x) = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2 \cos^2 x - 1.$$

Et de même, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ et donc $\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2 x$.

Enfin, $\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin(x) \cos(x) + \cos(x) \sin(x) = 2 \cos x \sin x$. □

Corollaire 5.21 – Pour $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \text{ et } \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

Astuce

Si vous voulez les retrouver sur un dessin comme ci-dessous, surtout ne prenez pas un angle proche de $\frac{\pi}{4}$, vous ne sauriez alors plus distinguer $\sin x$ de $\cos x$. Prendre x proche de 0 (par exemple environ $\frac{\pi}{6}$) est plus sage.

En particulier

La dérivée 4^{ème} de sin (resp. de cos) est sin (resp. cos). En effet,

$$\begin{aligned} \sin^{(4)}(x) &= \sin\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sin(x + 2\pi) \\ &= \sin(x). \end{aligned}$$

¹⁰ C'est-à-dire si ni a , ni b , ni $a + b$ (ou $a - b$ pour la seconde formule) ne soient congrus à $\frac{\pi}{2}$ modulo π .

Démonstration. Immédiat en utilisant les formules pour $\cos(2x)$. \square

Exemples 5.22

► Les formules précédentes sont particulièrement intéressantes lorsqu'il s'agit de trouver une primitive de \cos^2 (ou de \sin^2).

En effet, une primitive de $x \mapsto \cos(2x)$ est $x \mapsto \frac{\sin(2x)}{2}$, de sorte qu'une primitive de \cos^2 est $x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}$.

► Résolvons l'équation $\cos^4(x) - \sin^4(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

On sait que $\cos^4(x) - \sin^4(x) = (\cos^2(x) + \sin^2(x))(\cos^2(x) - \sin^2(x))$.

Or, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ et $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$.

Donc au final, il s'agit de résoudre $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, de sorte que x est solution si et seulement si $2x \equiv \pm \frac{\pi}{6} [2\pi] \Leftrightarrow x \equiv \pm \frac{\pi}{12} [\pi]$.

Remarque

Rappelons que si dériver un produit est chose facile, il est bien plus dur d'intégrer un produit.
On ne dispose pas de formule générale pour intégrer u^2 (mais seulement pour $u'u^2$).

Proposition 5.23 (Formules de l'arc moitié) : Soit $x \notin \pi + 2\pi\mathbf{Z}$. Notons alors $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Alors

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

et si $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}$, alors $\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$.

Démonstration. On a $\cos(x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = \frac{2}{1+\tan^2(x/2)} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

De même, $\sin(x) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}t = \frac{2t}{1+t^2}$.

Enfin, si $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}$, alors $\cos(x) \neq 0$ et donc

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{2t}{1-t^2}.$$

\square

Proposition 5.24 (Formules de développement) : Si a et b sont deux réels, alors

$$1. \cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

$$2. \sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

$$3. \sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

Démonstration. Il suffit de développer le membre de droite à l'aide des formules d'addition. Prouvons par exemple la dernière :

$$\begin{aligned} \sin(a+b) + \sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) \\ &= 2\sin(a)\cos(b). \end{aligned}$$

Donc en divisant par 2, on a le résultat souhaité. \square

Les formules qui suivent ne sont pas explicitement au programme, et donc pas à connaître par cœur, mais il faut savoir les retrouver si nécessaire.

Remarque

Ces formules sont en fait hors programme, mais le programme officiel mentionne qu'il faut savoir les retrouver, donc tenir le raisonnement ci-contre.

Corollaire 5.25 (Formules de factorisation) – Si p et q sont deux réels, alors

- ▶ $\cos p + \cos q = 2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right)$
- ▶ $\cos p - \cos q = -2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \sin \left(\frac{p-q}{2} \right)$
- ▶ $\sin p + \sin q = 2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right)$

Terminologie

Ces formules, ainsi que celles de la proposition précédente sont appelées **formules de Simpson**.

Démonstration. Les preuves étant une fois de plus très similaires, nous ne prouvons que la première formule.

Notons que pour cela, il suffit de développer le membre de droite à l'aide des formules de développement, et de constater qu'on obtient bien $\cos p + \cos q$.

Mais pour savoir les retrouver, mieux vaut comprendre leur origine : on a reconnu le lien avec les formules de développement, et on sait déjà que

$$2 \cos(a) \cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b).$$

On aimerait donc trouver deux réels a et b tels que $\begin{cases} a+b=p \\ a-b=q \end{cases}$

Ce système¹¹ possède une unique solution, qui est $a = \frac{p+q}{2}$, $b = \frac{p-q}{2}$, d'où la formule annoncée. \square

¹¹ D'inconnues a et b .

Remarque. On ne donne pas de formule pour $\sin p - \sin q$, mais il suffit de changer q en $-q$ dans la dernière formule.

Exemple 5.26

Soit $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}^*$ et r non congru à 0 modulo 2π .

Essayons de calculer $S_n = \sum_{k=0}^n \cos(x+kr)$.

On a alors

$$\begin{aligned} S_n \sin \frac{r}{2} &= \sum_{k=0}^n \cos(x+kr) \sin \frac{r}{2} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{2} \left(\sin \left(x+kr + \frac{r}{2} \right) - \sin \left(x+kr - \frac{r}{2} \right) \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{2} \left(\sin \left(x+kr + \frac{r}{2} \right) - \sin \left(x+(k-1)r + \frac{r}{2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin \left(x+nr + \frac{r}{2} \right) - \sin \left(x - \frac{r}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

Mais alors, en utilisant la formule pour $\sin(p) - \sin(q)$, il vient

$$S_n \sin \frac{r}{2} = \cos \left(x + \frac{nr}{2} \right) \sin \left(\frac{n+1}{2} r \right).$$

Et enfin, comme $\frac{r}{2} \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, $\sin \frac{r}{2} \neq 0$ et donc, $S_n = \frac{\cos \left(x + \frac{nr}{2} \right) \sin \left(\frac{n+1}{2} r \right)}{\sin \frac{r}{2}}$.

Remarque

Si $r \equiv 0 \pmod{2\pi}$, alors il est facile de constater que cette somme vaut $(n+1) \cos(x)$.

Somme télescopique.

5.4 ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

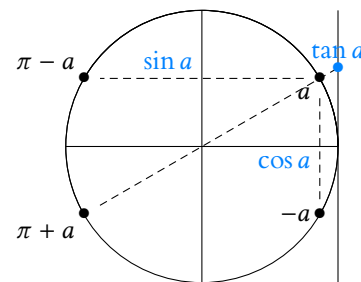
Proposition 5.27 : On a

$$\cos(a) = \cos(b) \Leftrightarrow a \equiv b \quad [2\pi] \text{ ou } a \equiv -b \quad [2\pi].$$

Et de même,

$$\sin(a) = \sin(b) \Leftrightarrow a \equiv b \quad [2\pi] \text{ ou } a \equiv \pi - b \quad [2\pi].$$

Enfin, on a $\tan a = \tan b$ si et seulement si $a \equiv b \quad [\pi]$.



¹² Croissante.

Démonstration. Prouvons le résultat pour le cosinus.

Commençons par supposer que $a, b \in [-\pi, \pi]$.

Sur $[0, \pi]$, la fonction \cos est strictement décroissante, continue, avec $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$, donc elle réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.

Et de même, \cos réalise une bijection¹² de $[-\pi, 0[$ sur $[-1, 1[$.

Ainsi, tout réel de $[-1, 1[$ possède exactement deux antécédents par \cos dans $[-\pi, \pi]$: un dans $[-\pi, 0[$ et un dans $[0, \pi]$.

En particulier si $a \in [-\pi, \pi]$ est non nul (de sorte que $\cos a \neq 1$), alors nous connaissons déjà deux antécédents de $\cos a$ par \cos : ce sont a et $-a$ (car $\cos(-a) = \cos(a)$).

Ce sont donc les seuls, de sorte que pour $b \in [-\pi, \pi]$, on a $\cos b = \cos a \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$.

Si $\cos(a) = 1 \Leftrightarrow a = 0$, alors $\cos(b) = 1$ si et seulement si $b = 0$. Donc si et seulement si $a = b$, qui s'écrit encore $a = b$ ou $a = -b$ puisque $-0 = 0$.

Dans le cas général, pour $a \in \mathbf{R}$, il existe un unique $k \in \mathbf{Z}$ tel que $a + 2k\pi \in]-\pi, \pi]$.

En effet, on a

$$-\pi < a + 2k\pi \leq \pi \Leftrightarrow -\pi - a < 2k\pi \leq -a + \pi \Leftrightarrow -\frac{a}{2\pi} - \frac{1}{2} < k \leq -\frac{a}{2\pi} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow k \leq -\frac{a}{2\pi} + \frac{1}{2} < k + 1.$$

Donc cette double inégalité est vraie si et seulement si $k = \lfloor -\frac{a}{2\pi} + \frac{1}{2} \rfloor$.

Si a et b sont deux réels tels que $\cos a = \cos b$, alors il existe $(k_1, k_2) \in \mathbf{Z}^2$ tels que $a + 2k_1\pi \in]-\pi, \pi]$ et $b + 2k_2\pi \in]-\pi, \pi]$, et $\cos(a + 2k_1\pi) = \cos(a) = \cos(b) = \cos(b + 2k_2\pi)$.

Et donc par ce qui précède, $a + 2k_1\pi = a + 2k_2\pi$ ou $a + 2k_1\pi = -b - 2k_2\pi$.

Donc nécessairement, $a \equiv b \quad [2\pi]$ ou $a \equiv -b \quad [2\pi]$.

Enfin, si $a \equiv b \quad [2\pi]$, alors il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $a = b + 2k\pi$, et donc $\cos(a) = \cos(b + 2k\pi) = \cos(b)$.

Et de même, si $a \equiv -b \quad [2\pi]$, alors $\cos(a) = \cos(-b) = \cos(b)$.

Donc nous avons bien prouvé que pour $a, b \in \mathbf{R}$,

$$\cos(a) = \cos(b) \Leftrightarrow a \equiv b \quad [2\pi] \text{ ou } a \equiv -b \quad [2\pi].$$

Pour le sinus, il suffit de noter que $\sin(a) = \sin(b) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$.

Et donc si et seulement si

$$\frac{\pi}{2} - a \equiv \frac{\pi}{2} - b \quad [2\pi] \text{ ou } \frac{\pi}{2} - a \equiv -\frac{\pi}{2} + b \quad [2\pi] \Leftrightarrow a \equiv \quad [2\pi] \text{ ou } b \equiv \pi - a \quad [2\pi].$$

Enfin, pour la tangente, notons qu'elle est π -périodique, et donc qu'il suffit de savoir résoudre $\tan x = \tan a$ pour $a, x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Mais sur cet intervalle, la tangente est strictement croissante, donc ne prend qu'une seule fois la valeur $\tan a$, en $x = a$.

□

Exemple 5.28

On a $\cos(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{5\pi}{6}$ si et seulement si

$$2x \equiv \frac{5\pi}{6} \quad [2\pi] \text{ ou } 2x \equiv -\frac{5\pi}{6} \quad [2\pi].$$

Soit encore si et seulement si

$$x \equiv \frac{5\pi}{12} \quad [\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{-5\pi}{12} \quad [\pi].$$

Pour résoudre des inéquations trigonométriques, on n'hésitera pas à s'aider d'un cercle, sans oublier de travailler modulo 2π . Dans ce cas, on n'écrira pas des inégalités modulo 2π (ce dont nous n'avons jamais donné de définition), et on reviendra à la définition de congruence («il existe un entier k tel que ...»)

Exemple 5.29

Résolvons l'inéquation $\cos(x) > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

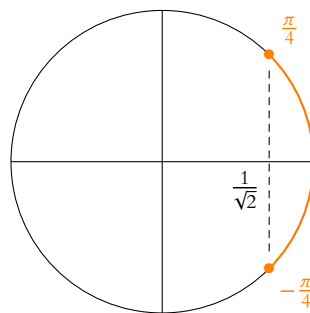
Puisque la fonction \cos est 2π -périodique, il suffit de la résoudre dans un intervalle de longueur 2π , puis de procéder à des translations de 2π .

Pour $x \in]-\pi, \pi]$, on a¹³

$$\cos(x) > \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[.$$

Et donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est

$$\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left] -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right[.$$



¹³ Ne justifions rien, ça se «voit» sur le cercle. Si on voulait le justifier rigoureusement, il faudra sûrement étudier les variations de \cos sur $] -\pi, \pi]$, ce qui n'est pas bien difficile, mais dont on se passera volontiers.

Proposition 5.30 (Transformation de $a \cos x + b \sin x$) : Soient a et b deux réels. Alors il existe un réel φ tel que

$$\forall x \in \mathbf{R}, a \cos(x) + b \sin(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi).$$

Interprétation physique

La somme de deux signaux périodiques de même période est encore un signal périodique de même période. Son amplitude est $\sqrt{a^2 + b^2}$ et son déphasage vaut φ .

Démonstration. Si $a = b = 0$, alors il n'y a rien à dire, n'importe quelle valeur de φ convient. Sinon, on a

$$a \cos(x) + b \sin(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(x) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin(x) \right).$$

Mais $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$, donc il existe un réel¹⁴ φ tel que $\begin{cases} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \varphi \\ \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \varphi \end{cases}$.

¹⁴ Unique modulo 2π .

Et alors

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \varphi \cos x + \sin \varphi \sin x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi).$$

□

Exemples 5.31

Résolvons l'équation $\cos(x) + \sqrt{3} \sin(x) = -1$.

On a

$$\cos(x) + \sqrt{3} \sin(x) = 2 \left(\frac{1}{2} \cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(x) \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} \cos(x) + \sin \frac{\pi}{3} \sin(x) \right) = 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right).$$

Et donc

$$\begin{aligned}\cos x + \sqrt{3} \sin(x) = -1 &\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} \equiv \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi] \text{ ou } x - \frac{\pi}{3} \equiv \frac{-2\pi}{3} \quad [2\pi] \\ &\Leftrightarrow x = \pi \quad [2\pi] \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} \quad [2\pi].\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

5.5 FONCTIONS CIRCULAIRES RÉCIPROQUES

Vous avez sûrement déjà utilisé la touche \cos^{-1} de votre calculatrice, qui permet de retrouver un angle à partir de son cosinus.

Il ne s'agit pas de la bijection réciproque de \cos car celle-ci n'est pas bijective : comme toute fonction périodique, tout élément de son image possède une infinité d'antécédents. En revanche, en restreignant \cos à un intervalle plus petit, elle devient bijective, et donc il est possible d'introduire sa bijection réciproque.

5.5.1 Arc sinus et arc cosinus

Définition 5.32 – La fonction $\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$ réalise une bijection strictement croissante de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$.

On appelle alors **arc sinus** et on note Arcsin sa bijection réciproque :

$$\text{Arcsin} : \begin{cases} [-1, 1] & \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x & \longmapsto \text{Arcsin}(x) \end{cases}.$$

Démonstration. La fonction \sin est continue¹⁵ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, et elle y est strictement croissante car sa dérivée, qui est la fonction cosinus, est strictement positive sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Enfin, on a $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Donc par le théorème de la bijection, \sin réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$. \square

Remarque. Puisque \sin est strictement croissante, il en est de même de Arcsin . Et puisque \sin est impaire, il en est de même de Arcsin .

En effet, pour $x \in [-1, 1]$, on a

$$\sin(-\text{Arcsin}(x)) = -\sin(\text{Arcsin}(x)) = -x.$$

Puisque $-\text{Arcsin}(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, c'est l'unique antécédent de $-x$ par \sin dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$: c'est $\text{Arcsin}(-x)$.

⚠ On n'a pas, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\text{Arcsin}(\sin(x)) = x$.

Ceci n'est vrai que pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

En effet, nous n'avons pas dit que Arcsin est la bijection réciproque de \sin sur \mathbf{R} tout entier¹⁶, mais uniquement la bijection réciproque de \sin restreinte à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

En revanche, pour $x \in [-1, 1]$, on a bien $\sin(\text{Arcsin}(x)) = x$, car $\text{Arcsin}(x)$ est bien dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

On retiendra que pour $(x, \theta) \in \mathbf{R}^2$, on a

$$\theta = \text{Arcsin}(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \theta = x \\ \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}.$$

¹⁵ Car dérivable.

Rappel

Une dérivée qui s'annule uniquement en un nombre fini de points n'est pas un obstacle à la stricte monotonie.

¹⁶ Et pour cause, \sin ne peut pas être bijective sur \mathbf{R} puisqu'elle y est périodique, et prend donc une infinité de fois chaque valeur.

En effet, $\theta = \text{Arcsin}(x)$ si et seulement si il s'agit de l'antécédent¹⁷ de x par \sin dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

La seconde condition, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est absolument indispensable, on ne peut pas se contenter de $\sin \theta = x$. En effet, il existe une infinité de réels dont le sinus vaut x , ce sont tous les nombres congrus à $\text{Arcsin } x$ ou à $\pi - \text{Arcsin}(x)$ modulo 2π .

¹⁷ Nécessairement unique.

Exemples 5.33

► Calculons $\text{Arcsin}\left(\sin \frac{18\pi}{7}\right)$.

$$\text{Arcsin}\left(\sin \frac{18\pi}{7}\right) = \text{Arcsin}\left(\sin \frac{4\pi}{7}\right) = \text{Arcsin}\left(\sin\left(\pi - \frac{4\pi}{7}\right)\right) = \text{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)\right).$$

Puisque $\frac{3\pi}{7} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que $\text{Arcsin}\left(\sin \frac{18\pi}{7}\right) = \frac{3\pi}{7}$.

► Certaines valeurs de la fonction Arcsin doivent être connues sans hésitation, en lien avec les valeurs remarquables de la fonction sinus.

Par exemple, $\text{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{2}$, $\text{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$ et $\text{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Remarque

C'est le même principe que lorsqu'on dit que

$$x = \sqrt{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = a \\ x \geq 0 \end{cases}.$$

La première condition implique que $x = \pm\sqrt{a}$, mais il faut la seconde pour décider de la valeur exacte de x .

Proposition 5.34 : La fonction Arcsin est dérivable sur $] -1, 1[$, et

$$\forall x \in] -1, 1[, (\text{Arcsin})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration. Les propriétés générales des dérivées des bijections réciproques prouvent que Arcsin est dérivable là où $\sin' \circ \text{Arcsin}$ ne s'annule pas.

C'est-à-dire sur l'ensemble des $x \in] -1, 1[$ tels que $\cos(\text{Arcsin } x) \neq 0$.

Mais $\text{Arcsin}(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, et donc $\cos(\text{Arcsin}(x)) = 0 \Leftrightarrow \text{Arcsin}(x) = \pm\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Et donc Arcsin est dérivable sur $] -1, 1[$ et pour $x \in] -1, 1[$, $(\text{Arcsin})'(x) = \frac{1}{\cos(\text{Arcsin}(x))}$.

Il s'agit donc de calculer $\cos(\text{Arcsin}(x))$.

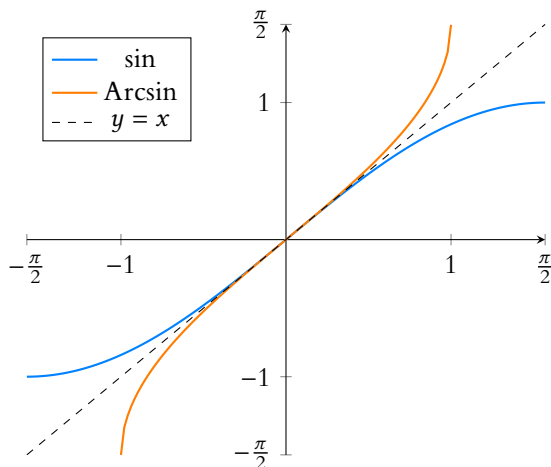
Or, nous savons que pour $x \in] -1, 1[$, $\sin(\text{Arcsin}(x)) = x$.

Et donc $\cos^2(\text{Arcsin}(x)) = 1 - \sin^2(\text{Arcsin}(x)) = 1 - x^2$.

Or, $\text{Arcsin}(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et donc $\cos(\text{Arcsin}(x)) \geq 0$.

On en déduit donc que $\forall x \in] -1, 1[$, $\cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{\cos^2(\text{Arcsin}(x))} = \sqrt{1-x^2}$.

Et donc $\forall x \in] -1, 1[$, $(\text{Arcsin})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. □



Notons que la fonction \sin possédant des tangentes horizontales en $\pm \frac{\pi}{2}$, Arcsin possède des tangente verticales en ± 1 .

Définition 5.35 – La fonction $\cos_{[0, \pi]}$ réalise une bijection strictement croissante de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.

On appelle alors **arc cosinus** et on note Arccos sa bijection réciproque :

$$\text{Arccos} : \begin{cases} [-1, 1] & \longrightarrow & [0, \pi] \\ x & \longmapsto & \text{Arccos}(x) \end{cases} .$$

Démonstration. La fonction \cos est continue car dérivable, et sur $[0, \pi]$, sa dérivée est $x \mapsto -\sin(x) \leq 0$.

De plus, cette dérivée s'annule uniquement en 0 et en π , donc $\cos_{[0, \pi]}$ est strictement décroissante.

Puisque $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$, par le théorème de la bijection, $\cos_{[0, \pi]}$ réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. \square

Remarque. Puisque $\cos_{[0, \pi]}$ est strictement décroissante, il en est de même de Arccos .

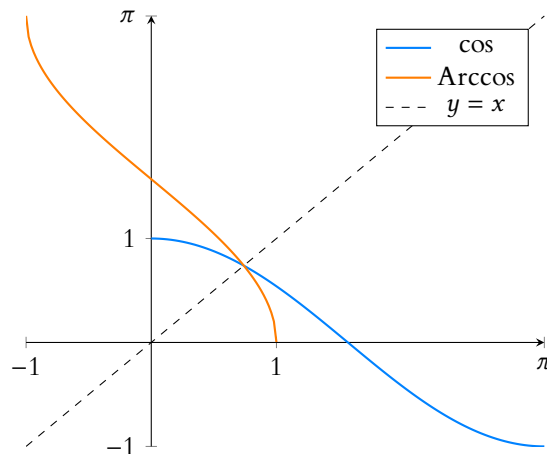
En revanche, la parité de \cos n'induit pas une parité de Arccos , par exemple car son ensemble de définition n'est pas symétrique !

Enfin, toutes les valeurs déjà connues pour le \cos se traduisent en termes d' Arccos .

Par exemple $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} = \text{Arccos} \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} = \text{Arccos} \left(-\frac{1}{2}\right)$.

Comme pour l'arcsinus, on a toujours, pour $x \in [-1, 1]$, $\cos(\text{Arccos}(x)) = x$, mais on pas toujours $\text{Arccos}(\cos(x)) = x$, ceci n'étant vrai que pour $x \in [0, \pi]$.

On retiendra que $\theta = \text{Arccos}(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos \theta \\ \theta \in [0, \pi] \end{cases} .$



Plus généralement

Une fonction paire n'est jamais bijective puisqu'elle prend au moins deux fois chaque valeur (à moins que son ensemble de définition soit réduit à $\{0\}$, ce qui est totalement inintéressant).

Exemple 5.36

Réolvons l'équation $\text{Arccos}(x) = \text{Arcsin} \frac{12}{13}$, d'inconnue $x \in [-1, 1]$.

Notons que $\text{Arcsin} \frac{12}{13} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On aura alors, pour $x \in [-1, 1]$,

$$\text{Arccos}(x) = \text{Arcsin} \frac{12}{13} \Leftrightarrow \cos(\text{Arccos } x) = \cos \left(\text{Arcsin} \left(\frac{12}{13} \right) \right) .$$

Mais $\cos^2 \left(\text{Arcsin} \left(\frac{12}{13} \right) \right) + \sin^2 \left(\text{Arcsin} \left(\frac{12}{13} \right) \right) = 1$ soit encore

Équivalence

L'équivalence n'est vraie que parce que les deux nombres $\text{Arccos}(x)$ et $\text{Arcsin} \left(\frac{12}{13} \right)$ sont dans $[0, \pi]$, intervalle sur lequel \cos est bijective.

$$\cos^2\left(\operatorname{Arcsin}\left(\frac{12}{13}\right)\right) = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{25}{169}.$$

Puisque $\operatorname{Arcsin}\frac{12}{13} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que $\cos\left(\operatorname{Arcsin}\frac{12}{13}\right) > 0$ et donc

$$\cos\left(\operatorname{Arcsin}\frac{12}{13}\right) = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}.$$

Par conséquent, $\operatorname{Arccos}(x) = \operatorname{Arcsin}\frac{12}{13} \Leftrightarrow x = \frac{5}{13}$.

Et donc, $\frac{5}{13}$ est l'unique solution de l'équation $\operatorname{Arccos}(x) = \operatorname{Arcsin}\frac{12}{13}$.

Remarque

Comme prouvé ici, ainsi que dans la preuve de la proposition 5.34, on a, pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$\begin{aligned} \cos(\operatorname{Arcsin}(x)) &= \sin(\operatorname{Arccos}(x)) \\ &= \sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

Il faut, sinon le savoir par cœur, être capable de le redémontrer.

Proposition 5.37 :

$$\forall x \in [-1, 1], \operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Démonstration. Soit $x \in [-1, 1]$. Alors

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(x)\right) = \sin(\operatorname{Arcsin}(x)) = x.$$

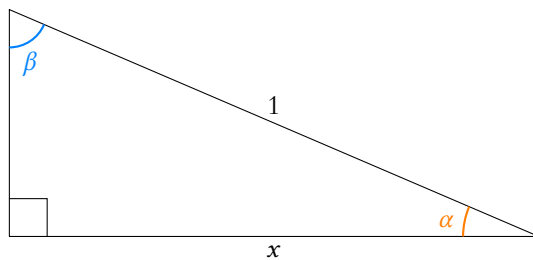
D'autre part, puisque $-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arcsin}(x) \leq \frac{\pi}{2}$, alors $0 \leq \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(x) \leq \pi$.

$$\text{Et donc } \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(x)\right) = x \\ \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(x) \in [0, \pi] \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(x) = \operatorname{Arccos}(x). \quad \square$$

Remarque. Cette relation a en fait une interprétation géométrique très simple si $x \in]0, 1[$. En effet, si l'on se place, comme dans la figure ci-dessous dans un triangle rectangle dont l'hypoténuse vaut 1 et l'un des côtés vaut x , on a $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

Mais $\cos \alpha = \frac{x}{1} = x$, de sorte que $\alpha = \operatorname{Arccos} x$ et de même, $\sin \beta = \frac{x}{1}$, et donc $\beta = \operatorname{Arcsin}(x)$.

Et donc $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} = \operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x$.



Corollaire 5.38 – La fonction Arccos est dérivable sur $] -1, 1[$ et pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$\operatorname{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration. Notons que ceci aurait pu être prouvé en reproduisant la preuve de la dérivabilité de Arcsin .

Mais en utilisant la relation précédente, pour tout $x \in] -1, 1[$, $\operatorname{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(x)$.

Et donc Arccos est dérivable sur $] -1, 1[$ car somme de deux fonctions dérivables, et sa dérivée est donnée pour tout $x \in] -1, 1[$ par $\operatorname{Arccos}'(x) = -\operatorname{Arcsin}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. \square

5.5.2 Arc tangente

Définition 5.39 – La fonction \tan réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur \mathbf{R} .

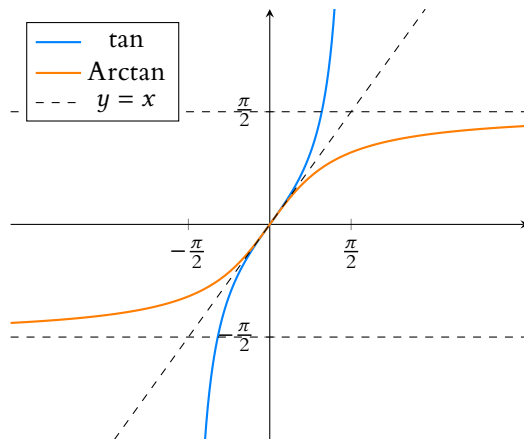
On appelle **arc tangente** et on note Arctan sa bijection réciproque :

$$\text{Arctan} : \begin{cases} \mathbf{R} & \longrightarrow &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ x & \longmapsto & \text{Arctan}(x) \end{cases}$$

Démonstration. La fonction \tan est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, avec $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$.

Donc par le théorème de la bijection, $\tan|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$ réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur \mathbf{R} . \square

! Bien que $\tan = \frac{\sin}{\cos}$, on n'a absolument pas $\text{Arctan} = \frac{\text{Arcsin}}{\text{Arccos}}$!



Une fois n'est pas coutume, on a, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\tan(\text{Arctan}(x)) = x$ mais $\text{Arctan}(\tan(x)) = x$ n'est vrai que pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Enfin, on retiendra que $\theta = \text{Arctan}(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tan \theta \\ \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{cases}$.

Exemple 5.40

Calculons $\theta = \text{Arctan} \frac{1}{3} + \text{Arctan} \frac{1}{7}$. On a

$$\tan \theta = \frac{\tan \text{Arctan} \frac{1}{3} + \tan \text{Arctan} \frac{1}{7}}{1 - \tan \text{Arctan} \frac{1}{3} \tan \text{Arctan} \frac{1}{7}} = \frac{\frac{10}{21}}{1 - \frac{1}{21}} = \frac{1}{2}.$$

Nous serions tentés d'en déduire que $\theta = \text{Arctan} \frac{1}{2}$, mais encore faut-il s'assurer que $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Mais puisque $0 \leq \frac{1}{3} < 1$, alors $0 \leq \text{Arctan} \frac{1}{3} < \frac{\pi}{4}$ et de même $0 < \text{Arctan} \frac{1}{7} < \frac{\pi}{4}$.

On en déduit donc que $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \\ \tan \theta = \frac{1}{2} \end{cases}$ et par conséquent $\theta = \text{Arctan} \frac{1}{2}$.

Proposition 5.41 : La fonction Arctan est strictement croissante sur \mathbf{R} , impaire, avec

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

De plus, elle est dérivable sur \mathbf{R} et $\forall x \in \mathbf{R}, \text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Démonstration. La stricte croissance découle de celle de \tan , de même que l'imparité.

En effet, si $x \in \mathbf{R}$, alors $\tan(-\text{Arctan}(x)) = -\tan(\text{Arctan}(x)) = -x$ et donc par application de l'arctangente, $-\text{Arctan}(x) = \text{Arctan}(-x)$.

Les limites découlent aussi de celles de la tangente.

Enfin, puisque $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ n'est jamais nul, Arctan est dérivable sur \mathbf{R} tout entier et pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{\tan'(\text{Arctan}(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\text{Arctan}(x))} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

□

Exemple 5.42

Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $\text{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \text{Arcsin}(x)$.

En effet, si $f : x \mapsto \text{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) - \text{Arcsin}(x)$, alors f est dérivable¹⁸ sur $] -1, 1[$, et sa dérivée est donnée par

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1-x^2 + x^2}{(1-x^2)^{3/2}} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0. \end{aligned}$$

Donc f est constante sur $] -1, 1[$, avec $f(0) = \text{Arctan}(0) - \text{Arcsin}(0) = 0$.

On en déduit que pour tout $x \in]-1, 1[$, $\text{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \text{Arcsin}(x)$.

¹⁸ Car composée de fonctions qui le sont.

Exercice

Retrouver ce résultat sans passer par les dérivées.

Proposition 5.43 : Pour $x \in \mathbf{R}^*$, on a

$$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Démonstration. Notons g la fonction définie sur \mathbf{R}^* par $g(x) = \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Alors g est dérivable car somme de composées de fonctions dérivables et

$$\forall x \in \mathbf{R}^*, g'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}.$$

Il serait alors tentant d'en déduire que g est constante, mais \mathbf{R}^* n'est pas un intervalle !

En revanche, \mathbf{R}_+^* est un intervalle sur lequel g est donc constante.

Or, $g(1) = \text{Arctan}(1) + \text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ de sorte que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $g(x) = \frac{\pi}{2}$.

De même, g est constante sur \mathbf{R}_-^* , égale à $g(-1) = -\frac{\pi}{2}$. □

Notons que cette formule a une interprétation géométrique très simple si $x > 0$: dans le triangle rectangle suivant, $\tan \alpha = \frac{1}{x}$ et donc $\alpha = \text{Arctan} \frac{1}{x}$ et $\tan \beta = x$ et donc $\beta = \text{Arctan}(x)$.
Or, il est évident que la somme des deux vaut $\frac{\pi}{2}$.

