FONCTIONS USUELLES

5

5.1 LOGARITHME, EXPONENTIELLE ET COMPAGNIE

⚠ Le but de cette partie est de définir une fois pour toutes un certain nombre de fonctions usuelles, notamment le logarithme et l'exponentielle, et de prouver leurs propriétés. Pour aborder sereinement cette partie, faites comme si vous n'aviez jamais entendu parler de ces fonctions, et faites semblant de les découvrir. Sans cela vous aller avoir l'impression de tourner en rond, et qu'on ne fait que redire des choses bien connues.

Les définitions de ces fonctions données ici sont définitives et n'ont pas vocation à être revues plus tard dans l'année.
En revanche, nous allons utiliser à plusieurs reprises le théorème de la bijection ainsi qu'un théorème de limites nommé théorème de la limite monotone[1], dont nous repoussons la preuve à plus tard.

[1] Dont vous connaissez déjà l'analogue pour les limites de suites.

5.1.1 Fonction logarithme

On admet[2] que toute fonction continue sur un intervalle I y admet des primitives.

[2] Une fois de plus temporairement...

> **Proposition 5.1 :** *La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ admet sur $\mathbf{R}_+^*$ une unique primitive qui s'annule en $x = 1$. On appelle **logarithme népérien** cette primitive, et on la note* $\ln$.

Démonstration. Commençons par prouver l'unicité d'une telle fonction : supposons que F_1 et F_2 soient deux primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, avec $F_1(1) = F_2(1) = 0$.
Alors nous savons qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $F_1(x) = F_2(x) + \lambda$. Et donc $F_1(1) = F_2(1) + \lambda \Leftrightarrow 0 = 0 + \lambda \Leftrightarrow \lambda = 0$.
Donc $F_1 = F_2$. Ceci prouve donc qu'il existe **au plus**[3] une fonction satisfaisant aux conditions requises.
Passons à présent à l'existence. Grâce au résultat admis ci-dessus, il existe une primitive de $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right.$. Soit F une primitive de f.
Alors pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $x \mapsto F(x) + \lambda$ est encore une primitive de f.
En particulier, c'est le cas[4] de $G : x \mapsto F(x) - F(1)$, qui vérifie alors $G(1) = F(1) - F(1) = 0$.
Et donc il existe bien une primitive de f qui s'annule en $x = 1$. $\square$

[3] Si on en a deux, ce sont les mêmes !

[4] Autrement dit, on a choisi de prendre $\lambda = F(1)$.

Remarque. Notons que ceci nous dit bien évidemment que $\ln' : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, et cette formule n'a sûrement pas besoin d'être prouvée : c'est la définition du logarithme.

> **Théorème 5.2 :** *Soient x et y deux réels strictement positifs. Alors*
>
> 1. $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
> 2. $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
> 3. $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
> 4. *pour tout $n \in \mathbf{Z}$,* $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

Démonstration. 1. Fixons y, et soit $f_y : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \ln(xy) \end{array} \right.$.

Alors f_y est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, et sa dérivée vérifie : $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$, $f_y'(x) = y\dfrac{1}{xy} = \dfrac{1}{x}$.

C'est donc une primitive sur $\mathbf{R}_+^*$ de $x \mapsto \frac{1}{x}$, de sorte qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f_y(x) = \ln(x) + \lambda$.
En particulier, pour $x = 1$, on trouve $f_y(1) = \ln(y) = \lambda$.
Et donc $\ln(xy) = f_y(x) = \ln(x) + \ln(y)$.

2. D'après le point 1), on a $0 = \ln(1) = \ln\left(x\frac{1}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

   Et donc $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.

3. On a $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x\frac{1}{y}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.

4. Pour $n \in \mathbf{N}$, la preuve se fait par récurrence sur n : $\ln(x^0) = \ln(1) = 0$ et

$$\ln\left(x^{n+1}\right) = \ln\left(x^n x\right) = \ln\left(x^n\right) + \ln(x) = n\ln(x) + \ln(x) = (n+1)\ln(x).$$

   Et si $n < 0$, alors $-n \in \mathbf{N}$, de sorte que

$$\ln(x^n) = \ln\left(\frac{1}{x^{-n}}\right) = -\ln\left(x^{-n}\right) = -(-n)\ln(x) = n\ln(x).$$

□

Proposition 5.3 : *La fonction* $\ln$ *est strictement croissante sur* $\mathbf{R}_+^*$, *et elle vérifie* $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, *et* $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$.

Plus tard
Le résultat que nous utilisons ici, relativement intuitif, se nomme le théorème de la limite monotone et sera prouvé dans quelques temps.

Démonstration. La stricte croissance vient évidemment du fait que la dérivée de $\ln$ est strictement positive sur $\mathbf{R}_+^*$.
Puisque $\ln$ est croissante, elle possède en $+\infty$ une limite, finie, ou égale à $+\infty$.
Or, on a $\ln(2^n) = n\ln(2)$. Mais par stricte croissance de $\ln$, $\ln(2) > \ln(1) \Leftrightarrow \ln(2) > 0$.
Et donc $\lim_{n\to+\infty} \ln(2^n) = +\infty$. Donc la limite de $\ln$ en $+\infty$ ne peut être une limite finie : $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

D'autre part, $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = \lim_{x\to 0^+} -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\frac{1}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, donc

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\lim_{X\to+\infty} \ln(X) = -\infty.$$

□

Notons que puisque $\ln(1) = 0$ et que $\ln$ est strictement croissante, $\ln(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1$ et $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Corollaire 5.4 – *La fonction* $\ln$ *réalise une bijection de* $\mathbf{R}_+^*$ *sur* $\mathbf{R}$.

Démonstration. Puisque $\ln$ est dérivable, donc continue, et strictement croissante[5], le théorème de la bijection s'applique : $\ln$ réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\left]\lim_{x\to 0^+} \ln(x), \lim_{x\to+\infty} \ln(x)\right[=]-\infty, +\infty[$. □

[5] Sa dérivée est strictement positive.

Terminons enfin avec une inégalité classique qu'il faut connaître et savoir utiliser à bon escient :

Proposition 5.5 : *Pour tout* $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

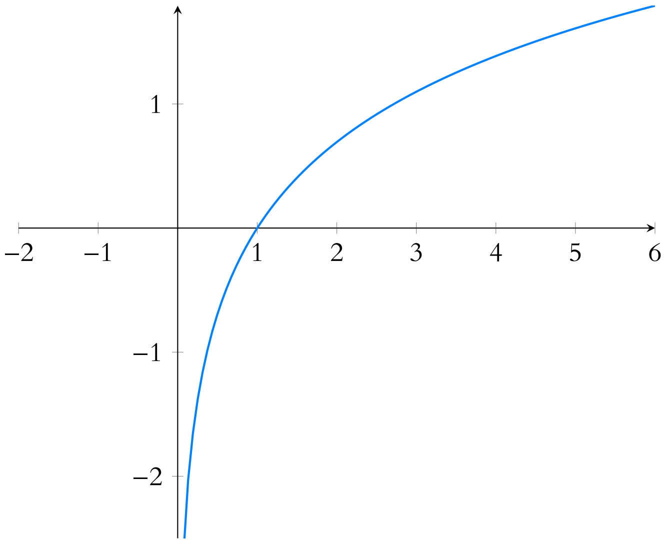
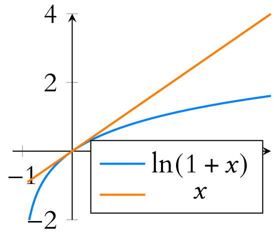


Figure 5.1 – Le graphe de la fonction ln.

Démonstration. Cette inégalité découle immédiatement de la concavité de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ (sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ qui est décroissante).
Elle signifie donc que sa courbe représentative est située en dessous de ses tangentes. Or en particulier, la tangente au point d'abscisse 0 est la droite d'équation

$$y = \frac{1}{1+0}(x-0) + \ln(1+0) \Leftrightarrow y = x.$$

Donc pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.



Toutefois, ceci repose sur des résultats admis pour l'instant, donc donnons-en une seconde preuve.
Soit $g : x \mapsto \ln(1+x) - x$. Alors g est dérivable sur $]-1, +\infty[$, avec pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x}$.
Donc g est croissante sur $]-1, 0[$ et décroissante sur $[0, +\infty[$, si bien qu'elle atteint un maximum en $x = 0$, égal à $g(0) = 0$.
Et donc pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $g(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) \leqslant x$. □

5.1.2 Fonction exponentielle

Définition 5.6 – Nous avons déjà dit que la fonction ln réalise une bijection de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$. On appelle **exponentielle**, et on note exp sa bijection réciproque, qui réalise donc une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}_+^*$.
On note généralement e^x au lieu de $\exp(x)$.

Remarque. Notons qu'en particulier, on a, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\ln(e^x) = x$ et pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $e^{\ln(x)} = x$.

Valeur approchée
Un calcul numérique nous donne

$$e \simeq 2.718...$$

Définition 5.7 – On note $e = \exp(1)$. C'est l'unique réel strictement positif dont le logarithme vaut 1.

Théorème 5.8 : *Pour $x, y \in \mathbf{R}$, on a*

1. $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
2. $e^{x+y} = e^x e^y$
3. $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$

Démonstration. 1. On a $\ln\left(\frac{1}{e^x}\right) = -\ln(e^x) = -x$. Donc en appliquant la fonction exponentielle aux deux membres de cette égalité, il vient donc

$$e^{-x} = \exp\left(\ln\left(\frac{1}{e^x}\right)\right) = \frac{1}{e^x}.$$

2. Puisque $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, on a $\ln\left(e^x e^y\right) = \ln\left(e^x\right) + \ln\left(e^y\right) = x + y$. Et donc en composant par l'exponentielle, $e^x e^y = e^{x+y}$.
3. Il suffit de noter que $e^{x-y} = e^{x+(-y)} = e^x e^{-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$.

□

Proposition 5.9 : *La fonction exponentielle est dérivable sur* $\mathbf{R}$, *et est égale à sa propre dérivée.*
De plus, on a $e^0 = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Démonstration. Puisque ln est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et que sa dérivée ne s'y annule pas, sa bijection réciproque exp est dérivable sur $\mathbf{R}$.
On a alors, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$(\exp)'(x) = \frac{1}{\ln'(e^x)} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x.$$

Et puisque $\ln(1) = 0$, on a donc[6] $e^0 = 1$.
Puisque exp est strictement croissante, elle possède une limite en $+\infty$, finie ou égale à $+\infty$.

Si elle avait une limite finie $\ell \in \mathbf{R}$, alors par croissance, on aurait, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $e^x \leqslant \ell$. Mais ceci contredit le fait que exp réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}_+^*$, et que par exemple $\ell + 1$ possède un antécédent par exp.
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Et alors $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{e^{-x}} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{e^X} = 0$. □

[6] Par définition d'une bijection réciproque.

Remarque
C'est encore une fois le théorème de la limite monotone mentionné plus haut, et provisoirement admis.

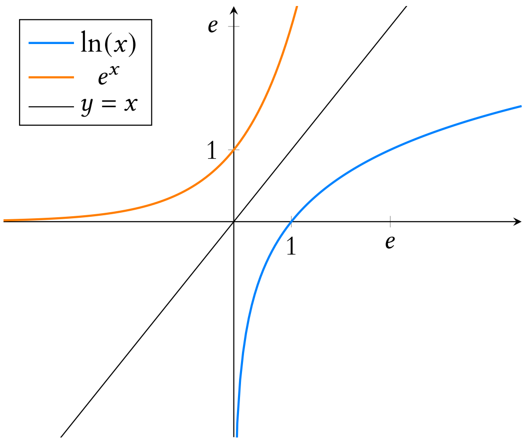
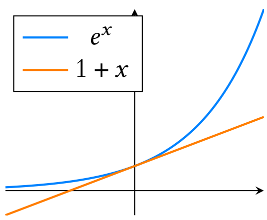


FIGURE 5.2 – Les graphes de ln et exp sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Terminons enfin par une inégalité classique :

Proposition 5.10 : *Pour tout* $x \in \mathbf{R}$, $e^x \geqslant x + 1$.



Démonstration. Nous pourrions là aussi évoquer la convexité de l'exponentielle, et noter que $y = x + 1$ est une équation de la tangente au graphe de exp en 0.
Mais plus simplement, pour $x \leqslant -1$, $x + 1 \leqslant 0 \leqslant e^x$.
Et pour $x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x \Leftrightarrow 1 + x \leqslant e^x$. □

5.1.3 Fonctions exponentielle et logarithme de base a.

Définition 5.11 – Si $a > 0$ est différent de 1, alors on appelle **logarithme de base** a la fonction $\log_a$ définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

Remarque. Vous avez déjà rencontré la fonction $\log_{10}$, (plus souvent notée log) en chimie en terminale.
Notons que la fonction $\log_e$ n'est autre que la fonction ln.

Il est alors facile de prouver que la fonction $\log_a$ a les mêmes propriétés que la fonction ln :

Proposition 5.12 : *Soit $a > 0$, $a \neq 1$. Alors :*

- *$\log_a$ réalise une bijection de $\mathbf{R}_+^*$ sur $\mathbf{R}$, vérifiant $\log_a(1) = 0$ et $\log_a(a) = 1$. De plus :*
  - *si $0 < a < 1$, alors $\log_a$ est strictement décroissante, avec $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a(x) = -\infty$.*
  - *si $a > 1$, alors $\log_a$ est strictement croissante, avec $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a(x) = +\infty$.*
- *pour tous réels strictement positifs x et y, $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ et $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$.*
- *pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbf{Z}$, $\log_a(x^n) = n\log_a(x)$.*

Limites
Notons qu'une fois qu'on sait qu'il s'agit d'une bijection dont on connaît l'intervalle image, et qu'on possède le sens de variation, les limites sont immédiates.

Démonstration. Prouvons seulement que $\log_a$ réalise bien une bijection de $\mathbf{R}_+^*$ sur $\mathbf{R}$, le reste est immédiat.
Soit donc $y \in \mathbf{R}$. Alors pour $x \in \mathbf{R}_+^*$, on a $\log_a(x) = y \Leftrightarrow \ln(x) = a\ln(y)$, et cette équation[7] possède une unique solution puisque ln réalise une bijection de $\mathbf{R}_+^*$ sur $\mathbf{R}$. Donc y possède un unique antécédent, donc $\log_a$ réalise bien une bijection de $\mathbf{R}_+^*$ sur $\mathbf{R}$. □

[7] D'inconnue x.

Définition 5.13 – Pour $a > 0$, $a \neq 1$, on appelle **exponentielle de base** a la bijection réciproque de $\log_a$.

Notons provisoirement cette fonction $\exp_a$, le temps d'étudier ses propriétés.
Remarquons que si $x \in \mathbf{R}$, alors $\exp_a(x)$ est tel que

$$\log_a(\exp_a(x)) = x \Leftrightarrow \ln(\exp_a(x)) = x\ln(a) \Leftrightarrow \exp_a(x) = e^{x\ln(a)}.$$

Les propriétés suivantes sont alors faciles à prouver :

Proposition 5.14 : *Soit $a > 0$,*

- *la fonction $\exp_a$ réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}_+^*$, avec $\exp_a(0) = 1$ et $\exp_a(1) = a$. De plus :*
  - *si $0 < a < 1$, alors $\exp_a$ est strictement décroissante avec $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp_a(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp_a(x) = 0$*
  - *si $a > 1$, alors $\exp_a$ est strictement croissante avec $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp_a(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp_a(x) = +\infty$*
- *pour tous réels x et y, $\exp_a(x+y) = \exp_a(x)\exp_a(y)$ et $\exp_a(x-y) = \dfrac{\exp_a(x)}{\exp_a(y)}$*
- *pour $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{Z}$, $\exp_a(nx) = (\exp_a(x))^n$.*

On notera désormais a^x au lieu de $\exp_a(x)$. Ceci est cohérent avec le fait que pour $n \in \mathbf{Z}$, $\exp_a(n) = (\exp_a(1))^n = a^n$, et que $\ln(a^x) = \ln(\exp_a(x)) = \ln(\exp(x\ln(a)) = x\ln(a)$.
Et alors, grâce aux propriétés de l'exponentielle, toutes les formules déjà connues sur les puissances entières (comme $a^{m+n} = a^m a^n$ et $(a^m)^n$) restent valables pour les puissances non entières de a.
Par exemple, pour $x, y \in \mathbf{R}$, on a

$$(a^x)^y = \exp(y\ln(a^x)) = \exp(y\ln(\exp(x\ln(a)))) = \exp(yx\ln(a)) = a^{xy}.$$

Remarque
Nous avons prouvé au passage que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\ln(a^x) = x\ln(a)$.

Enfin, remarquons que la dérivée de $x \mapsto a^x$ est $x \mapsto \ln(a)e^{x\ln(a)} = \ln(a)a^x$.

5.1.4 Fonctions puissances et racines $n^{\text{èmes}}$

Bien entendu, nous avons déjà rencontré les fonctions de la forme $x \mapsto x^n$, définie sur $\mathbf{R}$ pour $n \in \mathbf{N}$, ou sur $\mathbf{R}^*$ lorsque n est un entier négatif.
Mais il n'est pas nécessaire de se restreindre à des puissances entières :

Définition 5.15 – Soit $a \in \mathbf{R}$. On appelle fonction **puissance** a la fonction, que l'on notera par la suite f_a, définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f_a(x) = x^a = e^{a\ln(x)}$.

Comme mentionné plus haut, pour $a \in \mathbf{N}$, on retrouve la fonction puissance a usuelle : $f_a(x) = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{a \text{ fois}}$.
Et de même pour a un entier négatif.

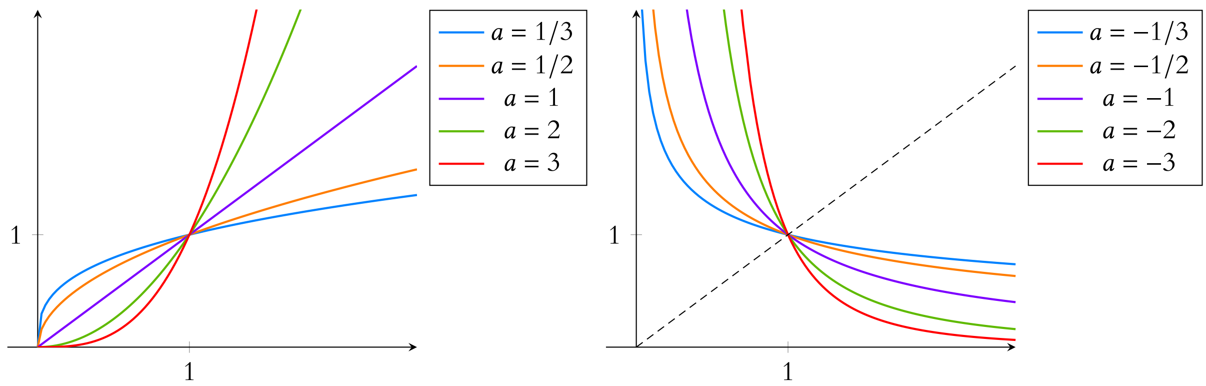


FIGURE 5.3 – Quelques fonctions puissances.

Proposition 5.16 : *Si a et b sont deux réels et si x et y sont deux réels strictement positifs, alors*

$$x^1 = x,\ x^0 = 1,\ x^{a+b} = x^a x^b,\ (xy)^a = x^a y^a.$$

Démonstration. Conséquences directes des propriétés du logarithme et de l'exponentielle. □

Proposition 5.17 : *Soit $a \in \mathbf{R}$. Alors :*

1. *f_a est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f_a'(x) = ax^{a-1}$.*
2. *si $a \neq 0$, alors f_a réalise une bijection de $\mathbf{R}_+^*$ sur lui-même, strictement croissante si $a > 0$ et strictement décroissante sinon.*
   De plus, $f_a^{-1} = f_{1/a}$.

Démonstration. 1. Pour la dérivabilité, il suffit noter que l'exponentielle et le logarithme sont dérivables (respectivement sur $\mathbf{R}$ et sur $\mathbf{R}_+^*$) et donc que par composition, la fonction f_a est également dérivable.

Et donc en dérivant, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$: $f_a'(x) = a\frac{1}{x}e^{a\ln(x)} = ax^{-1}x^a = ax^{a-1}$.

2. La dérivée de f_a est du signe de a, donc f_a est strictement croissante si $a > 0$ et strictement décroissante si $a < 0$.
De plus, pour $a > 0$, $\lim_{x\to 0^+} x^a = \lim_{x\to 0^+} e^{a\ln(x)} = 0$ et $\lim_{x\to +\infty} x^a = \lim_{x\to +\infty} e^{a\ln(x)} = +\infty$.
Donc par le théorème de la bijection, f_a réalise une bijection de $\mathbf{R}_+^*$ sur lui-même.
De même, si $a < 0$, alors $\lim_{x\to 0^+} e^{a\ln(x)} = +\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} e^{a\ln(x)} = 0$.
Donc par le théorème de la bijection, f_a réalise une bijection de $\mathbf{R}_+^*$ sur lui-même.
Enfin, on a, pour $x > 0$,

$$f_a(f_{1/a}(x)) = \left(x^{1/a}\right)^a = \exp\left(a\ln\left(x^{1/a}\right)\right) = \exp\left(a\frac{1}{a}\ln(x)\right) = x.$$

Donc $f_{1/a}(x)$ est l'unique antécédent de x par f_a : $(f_a)^{-1}(x) = f_{1/a}(x)$.

□

> **Variable !**
> On dérive ici par rapport à x (la base) et pas comme nous l'avons fait plus haut par rapport à la puissance !

La fonction f_a est a priori définie uniquement sur $\mathbf{R}_+^*$, mais si $a > 0$, on a $\lim_{x\to 0^+} f_a(x) = 0$, si bien que f_a se prolonge par continuité en 0 en posant $f_a(0) = 0$.
La question se pose alors de savoir si ce prolongement par continuité est dérivable en 0.
Mais pour $x > 0$, on a

$$\frac{f_a(x) - f_a(0)}{x} = \frac{x^a}{x} = x^{a-1} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } a-1 \geqslant 0 \Leftrightarrow a \geqslant 1 \\ +\infty & \text{si } a-1 < 0 \Leftrightarrow a < 1 \end{cases}$$

Donc f_a est dérivable en 0 si et seulement si $a \geqslant 1$, et dans ce cas, $f_a'(0) = 0$. Pour $a > 1$, on a donc $f_a'(0) = a0^{a-1}$, si bien que la formule obtenue ci-dessus pour la dérivée de f_a sur $\mathbf{R}_+^*$ reste valable en 0.

Notons en particulier que pour $n \in \mathbf{N}^*$, $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ est la bijection réciproque de la fonction $x \mapsto x^n$ restreinte à $\mathbf{R}_+$.
Et notamment, $x^{\frac{1}{2}}$ est la racine carrée de x.
Plus généralement, $x^{\frac{1}{n}}$ est appelé **racine** $n^{\text{ème}}$ de x, et on peut indifféremment le noter $x^{\frac{1}{n}}$ ou $\sqrt[n]{x}$.
La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est donc dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, et sa dérivée est $x \mapsto \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$.

> **Remarque**
> On a donc
> $$\sqrt[n]{x} = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ e^{\frac{1}{n}\ln(x)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Dans le cas particulier où $n \in \mathbf{N}$ est un entier **impair**, la fonction $f_n : x \mapsto x^n$ réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur lui-même (ce qui n'est pas le cas si n est pair).
Dans ce cas, elle possède une bijection réciproque sur $\mathbf{R}$ tout entier.
Cette fonction est encore notée $\sqrt[n]{\cdot}$, et donc pour $x \in \mathbf{R}$, $\sqrt[n]{x}$ est l'unique réel dont la puissance $n^{\text{ème}}$ vaut x.
Par exemple, $\sqrt[3]{-8} = -2$ puisque $(-2)^3 = -2^3 = -8$.
Mais attention, si $x < 0$, on n'a pas $\sqrt[n]{x} = e^{\frac{1}{n}\ln(x)}$.
On a alors toujours $\sqrt[n]{-1} = -1$ et pour $x < 0$, $\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}$.
Et bien entendu, on retrouve, pour tous réels x et y, $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$.

> **Remarque**
> En revanche, par imparité de $\sqrt[n]{\cdot}$, on a alors
> $$\sqrt[n]{x} = -e^{\frac{1}{n}\ln(-x)}.$$

5.1.5 Fonctions cosinus, sinus et tangente hyperbolique

On définit dans cette partie trois fonctions dites fonctions trigonométriques hyperboliques.
Elles sont ainsi nommées car historiquement elles furent introduites pour étudier des aires sous des portions de l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$, et qu'elles jouaient alors un rôle analogue à celui joué par les fonctions trigonométriques usuelles pour le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$.
Nous n'étudierons à aucun moment ce lien avec l'hyperbole, et ne chercherons donc pas à motiver les définitions suivantes :

Définition 5.18 – On appelle :

1. **cosinus hyperbolique** la fonction ch définie sur $\mathbf{R}$ par
$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$
2. **sinus hyperbolique** la fonction sh définie sur $\mathbf{R}$ par
$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$
3. **tangente hyperbolique** la fonction th définie sur $\mathbf{R}$ par
$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}.$$

Analogie

Les formules définissant ch et sh ressemblent fortement aux formules d'Euler pour cos et sin.

Proposition 5.19 : *Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a*
$$\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = e^x \quad \textit{et} \quad \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1.$$

Analogies

La première formule est un analogue de
$$\cos(x) + i\sin(x) = e^{ix}$$
et la seconde de
$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbf{R}$. On a
$$\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^x.$$
Par conséquent, par parité ch et imparité de sh, on a donc
$$\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) = \mathrm{ch}(-x) + \mathrm{sh}(-x) = e^{-x}$$
et donc
$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = (\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x))\,(\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)) = e^x e^{-x} = 1.$$
□

Proposition 5.20 :

1. *La fonction* ch *est paire, dérivable sur* $\mathbf{R}$ *et pour tout* $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$.
De plus, on a $\mathrm{ch}(0) = 1$, $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x) = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$.
2. *La fonction* sh *est impaire, dérivable sur* $\mathbf{R}$ *et pour tout* $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$.
De plus, on a $\mathrm{sh}(0) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$.
3. *La fonction* th *est impaire, dérivable sur* $\mathbf{R}$, *et pour tout* $x \in \mathbf{R}$,
$$\mathrm{th}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{th}^2(x).$$
De plus, on a $\mathrm{th}(0) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{th}(x) = -1$ *et* $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x) = 1$.

Démonstration. 1. Pour $x \in \mathbf{R}$, on a $\mathrm{ch}(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^x}{2} = \mathrm{ch}(x)$, donc ch est paire.
Elle est dérivable car somme de deux fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{ch}'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}(x)$.
Il est clair que $\mathrm{ch}(0) = \dfrac{e^0 + e^0}{2} = 1$ et lorsque $x \to +\infty$, $e^x \to +\infty$, $e^{-x} \to 0$ et donc $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$.
De même, lorsque $x \to -\infty$, $e^x \to 0$, $e^{-x} \to +\infty$ et donc $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{ch}\, x = +\infty$.

2. On a $\mathrm{sh}(-x) = \dfrac{e^{-x}-e^{x}}{2} = -\mathrm{sh}(x)$, donc sh est impaire. Par conséquent, $\mathrm{sh}(0) = 0$.
Puisque sh est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$, elle est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{sh}'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x)$.
Les limites ne posent pas de problèmes.

3. Puisque th est le quotient d'une fonction paire par une fonction impaire, elle est impaire, et donc $\mathrm{th}(0) = 0$.
Elle est dérivable car quotient de deux fonctions dérivables, et pour $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\mathrm{th}'(x) = \frac{\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}.$$

Mais d'autre part, ceci s'écrit encore

$$\mathrm{th}'(x) = \frac{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \frac{\mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{th}^2(x).$$

Enfin, pour les limites[8]

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(1-e^{-2x}\right)}{e^x\left(1+e^{-2x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = 1.$$

Et par imparité,

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{th}(x) = \lim_{x\to-\infty} -\mathrm{th}(-x) = -1.$$

□

[8] Qui a priori sont des formes indéterminées.

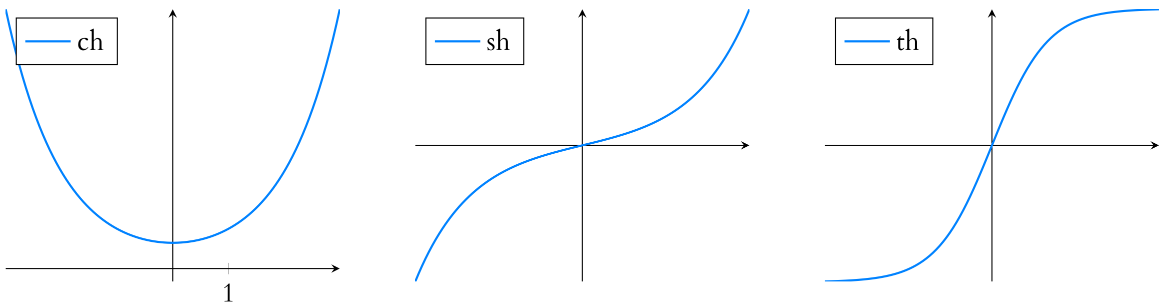


Figure 5.4 – Les fonction ch, sh et th.

Il est facile de constater que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x) > 0$.
Donc sh est strictement croissante. Puisqu'elle s'annule en 0, elle est strictement négative sur $\mathbf{R}_-^*$ et strictement positive sur $\mathbf{R}_+^*$.
Et donc $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$ est du signe de x, si bien que ch est strictement décroissante sur $\mathbf{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$.
Enfin, $\mathrm{th}' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2}$ reste positive, donc th est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

Autrement dit
$\mathrm{sh}(x)$ est du signe de x.

Rappelons que nous pouvons rien dire d'une somme d'exponentielles, et qu'on n'a surtout pas $e^a + e^b = e^{a+b}$.
Une astuce souvent utile pour manipuler des quantités de la forme $e^a \pm e^b$ est de factoriser par $e^{\frac{a+b}{2}}$, ce qui permet alors de faire apparaître des ch ou des sh.

Exemple 5.21

On a

$$\begin{aligned}\frac{e^a - e^b}{1+e^b} &= \frac{e^{\frac{a+b}{2}}\left(e^{a-\frac{a+b}{2}} - e^{b-\frac{a+b}{2}}\right)}{e^{b/2}\left(e^{-b/2}+e^{b-b/2}\right)} = \frac{e^{\frac{a+b}{2}}\left(e^{\frac{a-b}{2}} - e^{-\frac{a-b}{2}}\right)}{e^{b/2}\left(e^{b/2}+e^{-b/2}\right)}\\ &= \frac{e^{\frac{a+b}{2}}}{e^{b/2}}\frac{2\,\mathrm{sh}\left(\frac{a-b}{2}\right)}{2\,\mathrm{ch}\left(\frac{b}{2}\right)} = e^{a/2}\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\mathrm{ch}\left(\frac{b}{2}\right)}.\end{aligned}$$

5.1.6 Fonctions valeur absolue et partie entière

Proposition 5.22 : *La fonction $f : x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbf{R}$, dérivable sur $\mathbf{R}^*$, et sa dérivée est donnée par*

$$\forall x \in \mathbf{R}^*,\ f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Démonstration. Pour la dérivabilité sur $\mathbf{R}^*$, il s'agit de remarquer que sur $\mathbf{R}_+^*$, on a $f(x) = x$ et sur $\mathbf{R}_-^*$, $f(x) = -x$.
En particulier, ceci prouve la continuité de f sur $\mathbf{R}^*$. Ne reste donc que la continuité en 0 à prouver.
Mais $\lim\limits_{x\to 0^+} |x| = \lim\limits_{x\to 0^-} x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} |x| = \lim\limits_{x\to 0^-} -x = 0$, de sorte que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$.
Et donc f est continue sur $\mathbf{R}^*$. □

Proposition 5.23 : *La fonction $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est dérivable sur tout intervalle de la forme $]n, n+1[$, $n \in \mathbf{Z}$, et sa dérivée y est nulle.*

Démonstration. Sur l'intervalle $]n, n+1[$, la fonction f est constante égale à n, et donc y est dérivable, de dérivée nulle. □

Remarque. La fonction f est donc dérivable sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, et sa dérivée y est nulle, mais on n'en déduit pas pour autant qu'elle y est constante, car $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ n'est pas un intervalle !

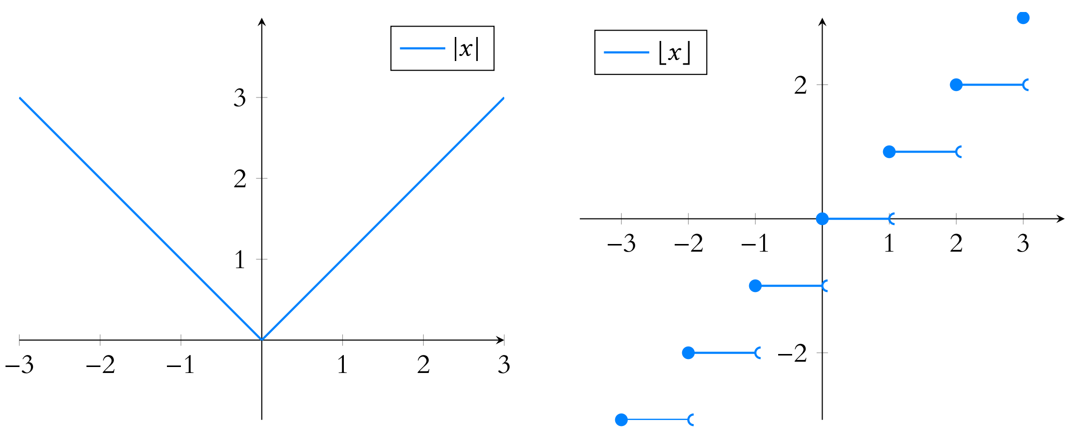


FIGURE 5.5 – Les fonctions valeur absolue et partie entière.

5.2 Fonctions trigonométriques

5.2.1 Notion de congruence

Définition 5.24 – Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. On dit que deux réels x et y sont **congrus modulo** α s'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $x = y + k\alpha$.
On note alors $x \equiv y \pmod{\alpha}$ ou $x \equiv y \ [\alpha]$.
Ainsi, $\{y \in \mathbf{R} \mid y \equiv x \ [\alpha]\} = \{x + k\alpha,\ k \in \mathbf{Z}\}$.
On note parfois cet ensemble $x + \alpha\mathbf{Z}$, où $\alpha\mathbf{Z} = \{k\alpha,\ k \in \mathbf{Z}\}$.

Autrement dit
x et y sont congrus modulo α si leur différence est un multiple **entier** de α.

Exemples 5.25

- Un entier n est pair si et seulement si il est congru à 0 modulo 2, c'est-à-dire si et seulement si il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $n = 2k$.
- De même, n est impair si et seulement si il est congru à 1 modulo 2.
- Un angle est défini modulo 2π, c'est-à-dire que deux angles sont égaux si et seulement si leurs mesures sont égales modulo 2π.
Par exemple, $7\pi \equiv \pi \ [2\pi]$, et $\dfrac{11\pi}{2} \equiv -\dfrac{\pi}{2} \ [2\pi]$.

Notons qu'il est possible de «diviser» par $\lambda \neq 0$ dans des congruences, à condition de diviser également ce qui se trouve dans le modulo.
Plus précisément, pour $a, b \in \mathbf{R}$, $\alpha, \lambda \in \mathbf{R}^*$, on a $a \equiv b \ [\alpha]$ et si et seulement si $\frac{a}{\lambda} \equiv \frac{b}{\lambda} \ [\frac{\alpha}{\lambda}]$.
En effet, on a

$$a \equiv b \quad [\alpha] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z},\ a = b + k\alpha \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z},\ \frac{a}{\lambda} = \frac{b}{\lambda} + k\frac{\alpha}{\lambda} \Leftrightarrow \frac{a}{\lambda} \equiv \frac{b}{\lambda} \quad [\frac{\alpha}{\lambda}].$$

5.2.2 Sinus et cosinus

Les fonctions sinus et cosinus ne seront définies proprement qu'en deuxième année, via les formules suivantes[9]

$$\cos(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots$$
$$\sin(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots$$

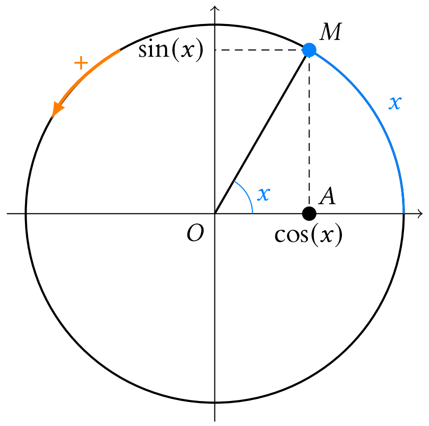
[9] Qui ne sont ni à comprendre ni à connaître pour l'instant !

Cette année, nous nous en tiendrons à l'intuition que vous en avez acquise au lycée, reposant sur la notion d'angles dans des triangles rectangles.

Dans toute la suite, $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.

Définition 5.26 – On appelle **cercle trigonométrique** le cercle $\mathscr{C}$ de centre $(0,0)$ et de rayon 1. Autrement dit, $\mathscr{C} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ x^2 + y^2 = 1\}$.

Définition 5.27 – Soit $x \in \mathbf{R}$, et soit M l'unique point de $\mathscr{C}$ tel que $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right) = x$.
On appelle alors **cosinus** de x et on note $\cos(x)$ l'abscisse de M.
De même, on appelle **sinus** de x et on note $\sin(x)$ l'ordonnée de M.



Rappelons que ceci correspond bien[10] à la trigonométrie de collège : le triangle OAM est rectangle en A, et son hypoténuse est de longueur 1 puisque M est sur le cercle trigonométrique.
Par conséquent,

$$\cos(x) = \cos\left(\widehat{AOM}\right) = \frac{OA}{OM} = OA$$

et de même

$$\sin(x) = \sin\left(\widehat{AOM}\right) = \frac{AM}{OM} = AM.$$

[10] Au moins dans le cas où $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Proposition 5.28 (Paramétrisation du cercle trigonométrique) : *Si $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ vérifie $x^2 + y^2 = 1$ (c'est-à-dire si $(x, y) \in \mathscr{C}$), alors il existe un unique $t \in]-\pi, \pi]$ tel que $(x, y) = (\cos t, \sin t)$.*

Démonstration. Il est évident qu'un tel t existe : c'est la mesure principale de l'angle $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}\right)$ où M est le point de coordonnées (x, y).
Nous admettons l'unicité, puisqu'elle nécessite de disposer d'une définition rigoureuse de π, ce que nous n'avons pas encore. □

π ?
Notons que le nombre π n'a jamais été défini proprement (si ce n'est que c'est le demi-périmètre d'un cercle de rayon 1, mais qu'est-ce qu'un périmètre ?).
Là aussi, vous aurez l'occasion d'en reparler l'an prochain, π pouvant être défini comme étant le plus petit réel positif dont le cosinus vaut -1.

Remarque. On a choisi de prendre $t \in]-\pi, \pi]$, mais on aurait également pu prendre $t \in [0, 2\pi[$, ou encore dans n'importe quel intervalle de longueur 2π ouvert d'un côté et fermé de l'autre.

Corollaire 5.29 – *Soit $r > 0$ et soit $\mathscr{C}_r = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ x^2 + y^2 = r^2\}$.*
Alors pour tout $(x, y) \in \mathscr{C}_r$, il existe un unique $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Démonstration. Soit $(x, y) \in \mathscr{C}_r$. Alors $(x', y') = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right)$ est sur $\mathscr{C}$ puisque

$$x'^2 + y'^2 = \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = 1.$$

Et donc il existe un unique $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que

$$(x', y') = (\cos\theta, \sin\theta) \Leftrightarrow (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

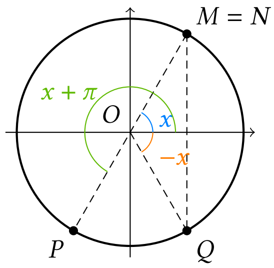
□

Ceci est à la base des coordonnées dites **polaires** qu'on utilise notamment en physique : tout point (x, y) de $\mathbf{R}^2$ différent de O est sur un unique cercle de centre O (celui de rayon $\sqrt{x^2 + y^2}$).
Et donc il existe un unique couple $(r, \theta) \in \mathbf{R}_+^* \times]-\pi, \pi]$ tel que $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.
Autrement dit, au lieu de repérer un point par son abscisse et son ordonnée comme on en a l'habitude, on peut se donner un rayon[11] et un angle.
C'est d'ailleurs le principe de la représentation exponentielle des nombres complexes que nous (re)verrons au chapitre suivant.

[11] La distance du point à l'origine.

Proposition 5.30 : *Les fonctions* sin *et* cos *sont 2π-périodiques, et pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ et $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$.*
De plus, cos *est paire et* sin *est impaire.*

Démonstration. Puisqu'un angle de 2π correspond à un tour complet du cercle, le point M de $\mathscr{C}$ tel que $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}\right) = x$ et le point N de $\mathscr{C}$ tel que $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{ON}\right) = x + 2\pi$ sont confondus.
Ils ont donc même abscisse et même ordonnée : $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$.



De même, un angle de π correspond à un demi-tour du cercle. Et donc si P est le point de $\mathscr{C}$ tel que $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OP}\right) = x + \pi$, alors P est le symétrique de M par rapport à l'origine.
Et donc $\cos(x+\pi) = x_P = -\cos(x)$ et $\sin(x+\pi) = y_P = -\sin(x)$.

Enfin, si Q est le point de $\mathscr{C}$ tel que $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OQ}\right) = -x$, alors Q est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.
Et donc en particulier, il a même abscisse que M (de sorte que $\cos(-x) = \cos(x)$) et son ordonnée est l'opposée de celle de M (et donc $\sin(-x) = -\sin(x)$). □

Proposition 5.31 : *Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $\cos^2 x + \sin^2(x) = 1$.*

Démonstration. Soit M le point de $\mathscr{C}$ tel que $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}) = x$, et soit A le point de coordonnées $(\cos x, 0)$.
Alors OMA est un triangle rectangle en A, dont l'hypoténuse OM est de longueur[12] 1.
Puisque $AM = \sin x$, par le théorème de Pythagore, on a

$$OA^2 + MP^2 = OM^2 \Leftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

□

[12] Car $M \in \mathscr{C}$.

Remarque. Notons que si l'on sait dériver sin et cos (voir ci-dessous), la formule se retrouve en dérivant $x \mapsto \cos^2(x) + \sin^2(x)$.
On obtient alors une fonction constante, qui vaut 1 en 0 et donc en tout $x \in \mathbf{R}$.

Corollaire 5.32 – *Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.*

Démonstration. Puisque $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) \leqslant 1$, on a bien $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$, et de même pour $\sin(x)$. □

Proposition 5.33 (Dérivées des fonctions trigonométriques) : *Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbf{R}$, avec*

$$\sin' = \cos \quad \text{et} \quad \cos' = -\sin.$$

Démonstration. Admis (pour l'instant). □

Puisqu'on sait que $\cos(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z}, x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ et que $\sin(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z}, x \in [2k\pi, (2k+1)\pi]$, alors nous en déduisons facilement les sens de variations de cos et sin.

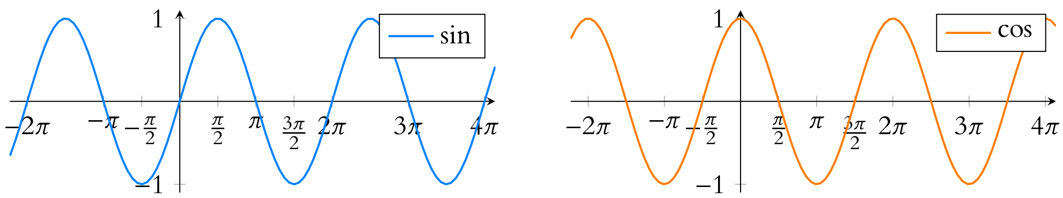


Figure 5.6 – Les fonctions sin et cos.

Terminons enfin par une inégalité classique

Proposition 5.34 : *Pour tout réel x, on a $|\sin(x)| \leqslant |x|$.*

Démonstration. Commençons par noter que si $|x| \geqslant 1$, l'inégalité est évidente, puisque $|\sin(x)| \leqslant 1 \leqslant |x|$.
Autrement dit, il reste à prouver l'inégalité pour $x \in [-1, 1]$.

Sur $[0, 1]$, définissons une fonction f par : $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) = x - \sin(x)$.
Alors f est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout $x \in [0, 1]$, $f'(x) = 1 - \cos(x) \geqslant 0$.
Donc f est croissante. Puisque par ailleurs, $f(0) = 0$, on en déduit que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \sin(x) \leqslant x$.
Puisque par ailleurs, $[0, 1] \subset [0, \pi]$, pour tout $x \in [0, 1]$, $\sin(x) \geqslant 0$, et donc

$$|\sin(x)| = \sin(x) \leqslant x = |x|.$$

Pour $x \in [-1, 0]$, on a alors $-x \in [0, 1]$, si bien que

$$|\sin(x)| = |-\sin(-x)| \leqslant |-x| = |x|.$$

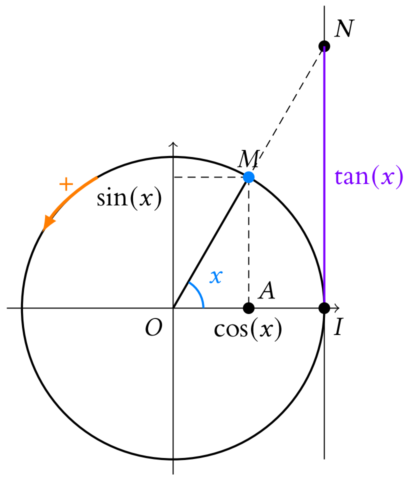
□

5.2.3 Fonction tangente

Définition 5.35 – On appelle **tangente** et on note tan la fonction définie sur $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\} = \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ par

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Remarque
L'ensemble de définition de la tangente est précisément l'ensemble des points où le cosinus ne s'annule pas, et donc où le quotient possède un sens.



Notons, comme sur la figure ci-contre, l'intersection de la droite (OM) avec la droite d'équation $x = 1$.
Alors $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ sont colinéaires, donc il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que

$$\overrightarrow{ON} = \lambda\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ y_N \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}.$$

Mais alors $\lambda = \dfrac{1}{\cos x}$ et donc

$$y_N = \lambda \sin(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x.$$

Ainsi, géométriquement, $\tan(x)$ est la distance[13] IN.

[13] Algébrique, c'est-à-dire avec un éventuel signe.

Proposition 5.36 : *La fonction tangente est impaire, π-périodique, dérivable sur son ensemble de définition et*

$$\forall x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\},\ (\tan)'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

Démonstration. Notons $\mathscr{D} = \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$.
La fonction tan est impaire car quotient d'une fonction impaire (le sinus) par une fonction

paire (le cosinus).
Pour $x \in \mathcal{D}$, on a encore $x+\pi \in \mathcal{D}$, et

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x).$$

Enfin, tan est dérivable sur $\mathcal{D}$ car quotient de fonctions dérivables[14], et

$$\forall x \in \mathcal{D},\ \tan'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) - (-\sin x)\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Enfin, notons que $1+\tan^2(x) = 1 + \dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$. □

[14] Dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$.

Remarque. La dérivée de tan est positive partout où elle est définie.
On n'en déduira pas pour autant que tan est croissante sur son ensemble de définition, mais uniquement qu'elle l'est sur chacun des intervalles contenus dans son intervalle de définition (et en particulier sur les $\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$).

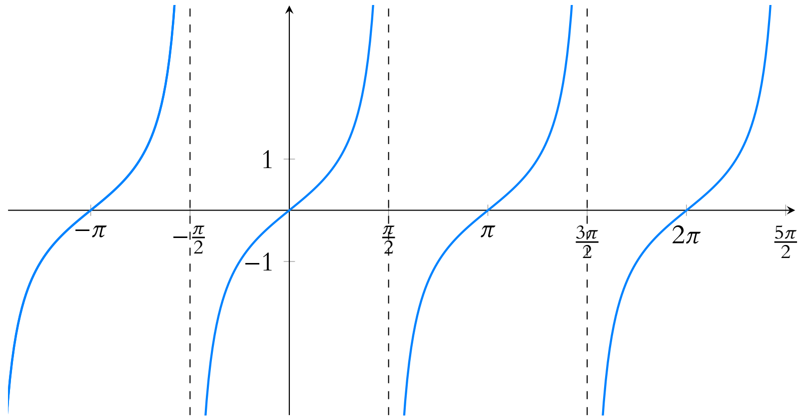


Figure 5.7 – La fonction tangente.

La fonction cotangente n'est pas au programme, mais vous pourriez être amenés à la rencontrer dans des exercices.

Définition 5.37 – On appelle **cotangente**, et on note cotan la fonction définie sur $\mathbf{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\} = \mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z}$ par

$$\text{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

⚠ On n'a pas $\text{cotan} = \dfrac{1}{\tan}$ car ces deux fonctions n'ont pas le même domaine de définition.
En revanche, il est vrai que si $x \notin \dfrac{\pi}{2}\mathbf{Z} = \left\{k\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}\right\}$, alors $\text{cotan}(x) = \dfrac{1}{\tan(x)}$.

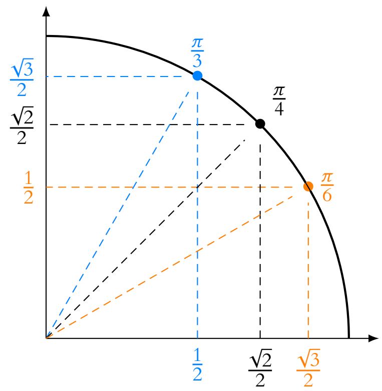
Remarque
$x \notin \frac{\pi}{2}\mathbf{Z}$ est la condition pour que $\tan(x)$ et $\text{cotan}(x)$ soient tous deux définis.

Nous ne donnons aucune formule pour la cotangente, mais toutes ses propriétés (et notamment sa dérivée) se retrouvent à partir de la définition.

5.2.4 Valeurs remarquables

Les valeurs suivantes sont à connaître par cœur, on n'hésitera pas à s'aider d'un cercle trigonométrique si besoin.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	×



Pour 0 et $\frac{\pi}{2}$, c'est évident.
Pour $x = \frac{\pi}{4}$, il s'agit de remarquer que le point M de $\mathscr{C}$ tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{4}$ est sur la première bissectrice, et donc que son sinus et son cosinus sont égaux.
Étant positifs et liés par la relation $\cos^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{4} = 1$, il ne peuvent que valoir $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Pour $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$, une preuve sera donnée en TD.

Notons que combinées aux formules usuelles[15], ces valeurs permettent d'obtenir les sinus, cosinus et tangentes de tous les angles multiples de $\frac{\pi}{6}$ ou de $\frac{\pi}{4}$.

[15] Rappelées ci-dessous.

Exemple 5.38

$$\cos\left(-5\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(5\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

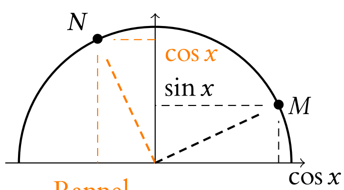
$$\sin\left(\frac{16\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{3} + 4\pi\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

5.2.5 Formules usuelles

Lemme 5.39. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$ et $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$.

Démonstration. Traitons le cas où $x \in [0, \pi[$, le cas général s'en déduira par les formules[16] pour $\cos(x + \pi)$ et $\sin(x + \pi)$ et la 2π-périodicité.
Si $x = \frac{\pi}{2}$, c'est évident, et de même si $x = 0$.
Supposons donc $\cos(x) \neq 0$ et $\sin(x) \neq 0$.
Alors le point $M \in \mathscr{C}$ tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = x$ est sur la droite (OM) qui a pour vecteur normal $\vec{u} = \begin{pmatrix} -\tan x \\ 1 \end{pmatrix}$.
Et donc si N est le point de $\mathscr{C}$ tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{ON}) = x + \frac{\pi}{2}$ alors $\overrightarrow{ON}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.
Donc il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\overrightarrow{ON} = \lambda \begin{pmatrix} -\tan(x) \\ 1 \end{pmatrix}$.
Alors, puisque $N \in \mathscr{C}$, $\lambda^2 \tan^2(x) + \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda^2(1 + \tan^2(x)) = 1 \Leftrightarrow \lambda^2 = \cos^2 x$.
Et donc $\lambda = \pm \cos x$, de sorte que l'abscisse de N est soit $-\sin(x)$ (si $\lambda = \cos(x)$), soit $\sin(x)$ (si $\lambda = -\cos(x)$).
Supposons par l'absurde que $\lambda = -\cos(x)$. Alors $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = x_N = \cos(x)\tan(x) = \sin(x)$.
Mais puisque $x \in [0, \pi]$, $x + \frac{\pi}{2} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ possède un cosinus négatif.
Ce qui contredit $\sin(x) > 0$. Donc nécessairement, $\lambda = \cos(x)$.
Et ainsi, $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$ et $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$. □

[16] Déjà prouvées.



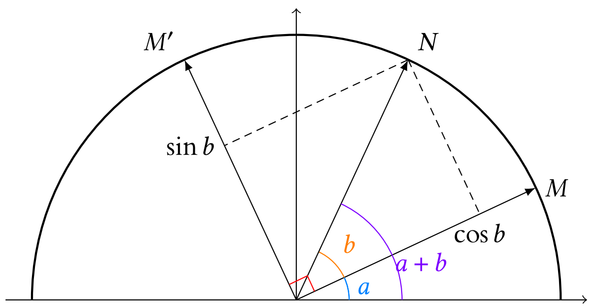
Rappel
$1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$.

Proposition 5.40 (Formules d'addition) : *Soient $a, b \in \mathbf{R}$. Alors*

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

Démonstration. Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé, et considérons les points M et N du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ tels que $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right) = a$ et $\left(\vec{i}, \overrightarrow{ON}\right) = a+b$.
On a alors $\overrightarrow{OM} = \cos(a)\vec{i} + \sin(a)\vec{j}$ et $\overrightarrow{ON} = \cos(a+b)\vec{i} + \sin(a+b)\vec{j}$.

Notons alors M' le point de $\mathscr{C}$ tel que $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) = \frac{\pi}{2}$, de sorte que $\left(O, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right)$ est un repère orthonormé.
On a alors $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right) = b$, et donc les coordonnées de N dans le repère $\left(O, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right)$ sont $(\cos b, \sin b)$.



Et par conséquent,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{ON} &= \cos(b)\overrightarrow{OM} + \sin(b)\overrightarrow{OM'} \\
&= \cos(b)\left(\cos(a)\vec{i} + \sin(a)\vec{j}\right) + \sin(b)\left(\cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + \sin\left(a+\frac{\pi}{2}\right)\vec{j}\right) \\
&= \cos(b)\left(\cos(a)\vec{i} + \sin(a)\vec{j}\right) + \sin(b)\left(-\sin(a)\vec{i} + \cos(a)\vec{j}\right) \\
&= (\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b))\,\vec{i} + (\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b))\,\vec{j}.
\end{aligned}$$

Mais par unicité[17] des coordonnées de N dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on a donc

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \ \text{ et } \ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

Les deux autres égalités s'obtiennent en changeant b en $-b$ et en utilisant la parité (resp. l'imparité) du cosinus (resp. du sinus). □

[17] Un vecteur s'écrit de manière **unique** comme un multiple de $\vec{i}$ plus un multiple de $\vec{j}$.

Notons qu'on retrouve alors des formules déjà rencontrées précédemment :

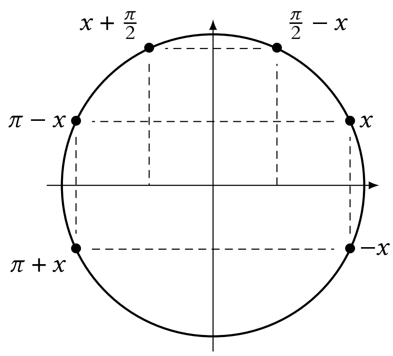
Corollaire 5.41 – *Pour $x \in \mathbf{R}$, on a*

$$\begin{aligned}
\cos(x+\pi) = -\cos(x),&\ \sin(x+\pi) = -\sin(x) \\
\cos(\pi - x) = -\cos(x),&\ \sin(\pi - x) = \sin(x) \\
\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x),&\ \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \\
\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x),&\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)
\end{aligned}$$

Remarque
Ce n'est rien d'autre que le lemme 5.39.

Démonstration. Il suffit d'appliquer les formules de la proposition précédente. □

Remarques. ► Il n'est pas question d'apprendre toutes ces formules par cœur : une fois de plus, elles se retrouvent facilement avec un cercle trigonométrique.



> **Astuce**
> Si vous voulez les retrouver sur un dessin comme ci-dessous, surtout ne prenez pas un angle proche de $\frac{\pi}{4}$, vous ne sauriez alors plus distinguer $\sin x$ de $\cos x$. Prendre x proche de 0 (par exemple environ $\frac{\pi}{6}$) est plus sage.

► Notons en particulier que

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) = \sin'(x) \text{ et } \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x) = \cos'(x).$$

Et donc dériver sinus ou cosinus, c'est déphaser de $\frac{\pi}{2}$. Ceci permet aisément de calculer les dérivées successives de sin ou cos :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \forall x \in \mathbf{R},\ \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

> **En particulier**
> La dérivée 4^{eme} de sin (resp. de cos) est sin (resp. cos). En effet,
> $$\begin{aligned}\sin^{(4)}(x) &= \sin\left(x+4\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \sin(x+2\pi)\\ &= \sin(x).\end{aligned}$$

Proposition 5.42 (Formules d'addition : cas de la tangente) : *Soient a, b deux réels. Sous réserve que toutes les tangentes suivantes existent[18], on a*

- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1-\tan a \tan b}$.
- $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \tan b}$.

[18] C'est-à-dire si ni a, ni b, ni $a+b$ (ou $a-b$ pour la seconde formule) ne soient congrus à $\frac{\pi}{2}$ modulo π.

Démonstration. 1) On a

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a\cos b + \cos a \sin b}{\cos a\cos b - \sin a \sin b} = \frac{\cos a\cos b}{\cos a \cos b}\,\frac{\frac{\sin a\cos b}{\cos a\cos b}+\frac{\cos a\sin b}{\cos a\cos b}}{\frac{\cos a\cos b}{\cos a\cos b}-\frac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}} = \frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}.$$

La formule 2) s'en déduit aisément en changeant b en $-b$ et en utilisant l'imparité de la tangente. □

Proposition 5.43 (Formules de duplication) : *Pour $x \in \mathbf{R}$, on a*

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x.$$

Démonstration. On a $\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos x\cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$.
Mais $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Donc

$$\cos(2x) = \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1.$$

Et de même, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ et donc $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$.
Enfin, $\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) = 2\cos x \sin x$. □

Corollaire 5.44 – *Pour $x \in \mathbf{R}$, on a*

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2} \quad \textit{et} \quad \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}.$$

Démonstration. Immédiat en utilisant les formules pour $\cos(2x)$ en fonction de $\cos^2(x)$ et $\sin^2(x)$.. □

Exemples 5.45

► Les formules précédentes sont particulièrement intéressantes lorsqu'il s'agit de trouver une primitive de $\cos^2$ (ou de $\sin^2$).
En effet, une primitive de $x \mapsto \cos(2x)$ est $x \mapsto \dfrac{\sin(2x)}{2}$, de sorte qu'une primitive de $\cos^2$ est $x \mapsto \dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin(2x)}{4}$.

► Résolvons l'équation $\cos^4(x) - \sin^4(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
On sait que $\cos^4(x) - \sin^4(x) = (\cos^2(x) + \sin^2(x))(\cos^2(x) - \sin^2(x))$.
Or, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ et $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$.
Donc au final, il s'agit de résoudre $\cos(2x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, de sorte que x est solution si et seulement si $2x \equiv \pm\dfrac{\pi}{6} \ [2\pi] \Leftrightarrow x \equiv \pm\dfrac{\pi}{12} \ [\pi]$.

Remarque
Rappelons que si dériver un produit est chose facile, il est bien plus dur d'intégrer un produit.
On ne dispose pas de formule générale pour intégrer u^2 (mais seulement pour $u'u^2$).

Proposition 5.46 (Formules de l'arc moitié) : *Soit $x \notin \pi + 2\pi\mathbf{Z}$. Notons alors $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Alors*

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

et si $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}$, alors $\tan(x) = \dfrac{2t}{1-t^2}$.

Remarque
Ces formules sont en fait hors programme, mais le programme officiel mentionne qu'il faut savoir les retrouver, donc tenir le raisonnement ci-contre.

Démonstration. On a $\cos(x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = \dfrac{2}{1+\tan^2(x/2)} - 1 = \dfrac{2}{1+t^2} - 1 = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.
De même, $\sin(x) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \dfrac{2}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}t = \dfrac{2t}{1+t^2}$.
Enfin, si $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}$, alors $\cos(x) \neq 0$ et donc

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{2t}{1-t^2}.$$

□

Plus simplement

$$\tan(x) = \tan(x+x) = \frac{\tan(x)+\tan(x)}{1-\tan(x)\tan(x)}.$$

Proposition 5.47 (Formules de linéarisation) : *Si a et b sont deux réels, alors*

1. $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$
2. $\sin a \sin b = \dfrac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$
3. $\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$

Démonstration. Il suffit de développer le membre de droite à l'aide des formules d'addition.
Prouvons par exemple la dernière :

$$\begin{aligned}\sin(a+b) + \sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)\\ &= 2\sin(a)\cos(b).\end{aligned}$$

Donc en divisant par 2, on a le résultat souhaité. □

5.2.6 Équations et inéquations trigonométriques

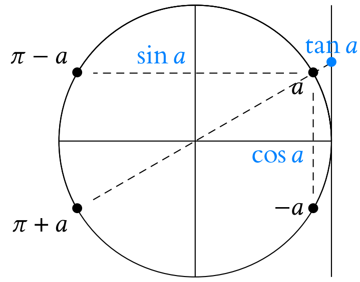
Proposition 5.48 : *On a*

$$\cos(a) = \cos(b) \Leftrightarrow a \equiv b \quad [2\pi] \textbf{ ou } a \equiv -b \quad [2\pi].$$

Et de même,

$$\sin(a) = \sin(b) \Leftrightarrow a \equiv b \qquad [2\pi] \textbf{ ou } a \equiv \pi - b \qquad [2\pi].$$

Enfin, on a $\tan a = \tan b$ *si et seulement si* $a \equiv b \ [\pi]$.



Démonstration. Prouvons le résultat pour le cosinus.

Commençons par supposer que $a, b \in [-\pi, \pi]$.
Sur $[0, \pi]$, la fonction cos est strictement décroissante, continue, avec $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$, donc elle réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.
Et de même, cos réalise une bijection[19] de $[-\pi, 0[$ sur $[-1, 1[$.
Ainsi, tout réel de $[-1, 1[$ possède exactement deux antécédents par cos dans $[-\pi, \pi]$: un dans $[-\pi, 0[$ et un dans $[0, \pi]$.
En particulier si $a \in [-\pi, \pi]$ est non nul (de sorte que $\cos a \neq 1$), alors nous connaissons déjà deux antécédents de $\cos a$ par cos : ce sont a et $-a$ (car $\cos(-a) = \cos(a)$).
Ce sont donc les seuls, de sorte que pour $b \in [-\pi, \pi]$, on a $\cos b = \cos a \Leftrightarrow a = b$ **ou** $a = -b$.
Si $\cos(a) = 1 \Leftrightarrow a = 0$, alors $\cos(b) = 1$ si et seulement si $b = 0$. Donc si et seulement si $a = b$, qui s'écrit encore $a = b$ **ou** $a = -b$ puisque $-0 = 0$.

Dans le cas général, pour $a \in \mathbf{R}$, il existe un unique $k \in \mathbf{Z}$ tel que $a + 2k\pi \in]-\pi, \pi]$.
En effet, on a

$$-\pi < a+2k\pi \leqslant \pi \Leftrightarrow -\pi-a < 2k\pi \leqslant -a+\pi \Leftrightarrow -\frac{a}{2\pi}-\frac{1}{2} < k \leqslant -\frac{a}{2\pi}+\frac{1}{2} \Leftrightarrow k \leqslant -\frac{a}{2\pi}+\frac{1}{2} < k+1.$$

Donc cette double inégalité est vraie si et seulement si $k = \left\lfloor -\frac{a}{2\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor$.
Si a et b sont deux réels tels que $\cos a = \cos b$, soient alors $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$ tels que $a + 2k_1\pi \in]-\pi, \pi]$ et $b + 2k_2\pi \in]-\pi, \pi]$, et $\cos(a + 2k_1\pi) = \cos(a) = \cos(b) = \cos(b + 2k_2\pi)$.
Et donc par ce qui précède, $a + 2k_1\pi = a + 2k_2\pi$ **ou** $a + 2k_1\pi = -b - 2k_2\pi$.
Donc nécessairement, $a \equiv b \ [2\pi]$ **ou** $a \equiv -b \ [2\pi]$.
Enfin, si $a \equiv b \ [2\pi]$, alors il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $a = b+2k\pi$, et donc $\cos(a) = \cos(b + 2k\pi) = \cos(b)$.
Et de même, si $a \equiv -b \ [2\pi]$, alors $\cos(a) = \cos(-b) = \cos(b)$.
Donc nous avons bien prouvé que pour $a, b \in \mathbf{R}$,

$$\cos(a) = \cos(b) \Leftrightarrow a \equiv b \quad [2\pi] \textbf{ ou } a \equiv -b \quad [2\pi].$$

Pour le sinus, il suffit de noter que $\sin(a) = \sin(b) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$.
Ce qui est le cas si et seulement si

$$\frac{\pi}{2} - a \equiv \frac{\pi}{2} - b \quad [2\pi] \textbf{ ou } \frac{\pi}{2} - a \equiv -\frac{\pi}{2} + b \quad [2\pi] \Leftrightarrow a \equiv \quad [2\pi] \textbf{ ou } b \equiv \pi - a \quad [2\pi].$$

Enfin, pour la tangente, notons qu'elle est π-périodique, et donc qu'il suffit de savoir résoudre $\tan x = \tan a$ pour $a, x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Mais sur cet intervalle, la tangente est strictement croissante, donc ne prend qu'une seule fois la valeur $\tan a$, en $x = a$.

□

[19] Croissante.

Exemple 5.49

On a $\cos(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{5\pi}{6}$ si et seulement si

$$2x \equiv \frac{5\pi}{6} \quad [2\pi] \text{ ou } 2x \equiv \frac{-5\pi}{6} \quad [2\pi].$$

Soit encore si et seulement si

$$x \equiv \frac{5\pi}{12} \quad [\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{-5\pi}{12} \quad [\pi].$$

Pour résoudre des inéquations trigonométriques, on n'hésitera pas à s'aider d'un cercle, sans oublier de travailler modulo 2π. Dans ce cas, on n'écrira pas des inégalités modulo 2π (ce dont nous n'avons jamais donné de définition), et on reviendra à la définition de congruence («il existe un entier k tel que ...»)

Exemple 5.50

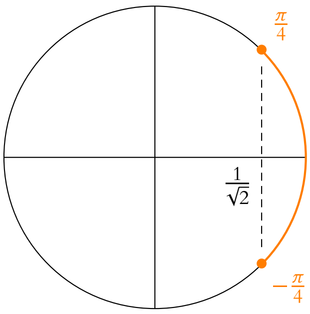
Résolvons l'inéquation $\cos(x) > \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Puisque la fonction cos est 2π-périodique, il suffit de la résoudre dans un intervalle de longueur 2π, puis de procéder à des translations de 2π.

Pour $x \in]-\pi, \pi]$, on a[20]

$$\cos(x) > \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[.$$

Et donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est

$$\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left]-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right[.$$



[20] Ne justifions rien, ça se «voit» sur le cercle. Si on voulait le justifier rigoureusement, il faudra sûrement étudier les variations de cos sur $]-\pi, \pi]$, ce qui n'est pas bien difficile, mais dont on se passera volontiers.

Proposition 5.51 (Transformation de $a\cos x + b\sin x$) : *Soient a et b deux réels. Alors il existe un réel φ tel que*

$$\forall x \in \mathbf{R},\ a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi).$$

Interprétation physique

La somme de deux signaux périodiques de même période est encore un signal périodique de même période. Son amplitude est $\sqrt{a^2+b^2}$ et son déphasage vaut φ.

Démonstration. Si $a = b = 0$, alors il n'y a rien à dire, n'importe quelle valeur de φ convient. Sinon, on a

$$a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(x) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(x)\right).$$

Mais $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, donc il existe un réel[21] φ tel que $\begin{cases} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi \end{cases}$.

Et alors

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\varphi\cos x + \sin\varphi\sin x) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi).$$

□

[21] Unique modulo 2π.

Exemples 5.52

Résolvons l'équation $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = -1$.
On a

$$\cos(x)+\sqrt{3}\sin(x) = 2\left(\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos(x) + \sin\frac{\pi}{3}\sin(x)\right) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

Et donc

$$\begin{aligned}\cos x + \sqrt{3}\sin(x) = -1 &\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} \equiv \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi] \text{ **ou** } x - \frac{\pi}{3} \equiv \frac{-2\pi}{3} \quad [2\pi]\\ &\Leftrightarrow x = \pi \quad [2\pi] \text{ **ou** } x = -\frac{\pi}{3} \quad [2\pi].\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \{\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$.

5.3 Fonctions circulaires réciproques

Vous avez sûrement déjà utilisé la touche $\cos^{-1}$ de votre calculatrice, qui permet de retrouver un angle à partir de son cosinus.
Il ne s'agit pas de **la** bijection réciproque de cos car celle-ci n'est pas bijective : comme toute fonction périodique, tout élément de son image possède une infinité d'antécédents.
En revanche, en restreignant cos à un intervalle plus petit, elle devient bijective, et donc il est possible d'introduire sa bijection réciproque.

5.3.1 Arc sinus et arc cosinus

Définition 5.53 – La fonction $\sin_{|\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}$ réalise une bijection strictement croissante de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$.
On appelle alors **arc sinus** et on note Arcsin sa bijection réciproque :

$$\text{Arcsin} : \left|\begin{array}{ccc}[-1,1] & \longrightarrow & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x & \longmapsto & \text{Arcsin}(x)\end{array}\right..$$

Démonstration. La fonction sin est continue[22] sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, et elle y est strictement croissante car sa dérivée, qui est la fonction cosinus, est strictement positive sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Enfin, on a $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
Donc par le théorème de la bijection, sin réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$. □

[22] Car dérivable.

Rappel
Une dérivée qui s'annule uniquement en un nombre fini de points n'est pas un obstacle à la **stricte** monotonie.

Remarque. Puisque sin est strictement croissante, il en est de même de Arcsin. Et puisque sin est impaire, il en est de même de Arcsin.
En effet, pour $x \in [-1, 1]$, on a

$$\sin(-\text{Arcsin}(x)) = -\sin(\text{Arcsin}(x)) = -x.$$

Puisque $-\text{Arcsin}(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, c'est l'unique antécédent de $-x$ par sin dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$: c'est $\text{Arcsin}(-x)$.

⚠ On n'a pas, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\text{Arcsin}(\sin(x)) = x$.
Ceci n'est vrai que pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
En effet, nous n'avons pas dit que Arcsin est la bijection réciproque de sin sur **R** tout

entier[23], mais uniquement la bijection réciproque de sin restreinte à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
En revanche, pour $x \in [-1, 1]$, on a bien $\sin(\text{Arcsin}(x)) = x$, car $\text{Arcsin}(x)$ est bien dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
On retiendra que pour $(x, \theta) \in \mathbf{R}^2$, on a

$$\theta = \text{Arcsin}(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\theta = x \\ \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}.$$

En effet, $\theta = \text{Arcsin}(x)$ si et seulement si il s'agit de l'antécédent[24] de x par sin **dans** $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
La seconde condition, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est absolument indispensable, on ne peut pas se contenter de $\sin\theta = x$. En effet, il existe une infinité de réels dont le sinus vaut x, ce sont tous les nombres congrus à $\text{Arcsin}\, x$ ou à $\pi - \text{Arcsin}(x)$ modulo 2π.

[23] Et pour cause, sin ne peut pas être bijective sur **R** puisqu'elle y est périodique, et prend donc une infinité de fois chaque valeur.

[24] Nécessairement unique.

Remarque

C'est le même principe que lorsqu'on dit que

$$x = \sqrt{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = a \\ x \geqslant 0 \end{cases}.$$

La première condition implique que $x = \pm\sqrt{a}$, mais il faut la seconde pour décider de la valeur exacte de x.

Exemples 5.54

- Calculons $\text{Arcsin}\left(\sin\frac{18\pi}{7}\right)$.

$$\text{Arcsin}\left(\sin\frac{18\pi}{7}\right) = \text{Arcsin}\left(\sin\frac{4\pi}{7}\right) = \text{Arcsin}\left(\sin\left(\pi - \frac{4\pi}{7}\right)\right) = \text{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)\right).$$

Puisque $\frac{3\pi}{7} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que $\text{Arcsin}\left(\sin\frac{18\pi}{7}\right) = \frac{3\pi}{7}$.

- Certaines valeurs de la fonction Arcsin doivent être connues sans hésitation, en lien avec les valeurs remarquables de la fonction sinus.

Par exemple, $\text{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{2}$, $\text{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$ et $\text{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Proposition 5.55 : *La fonction* Arcsin *est dérivable sur* $]-1, 1[$, *et*

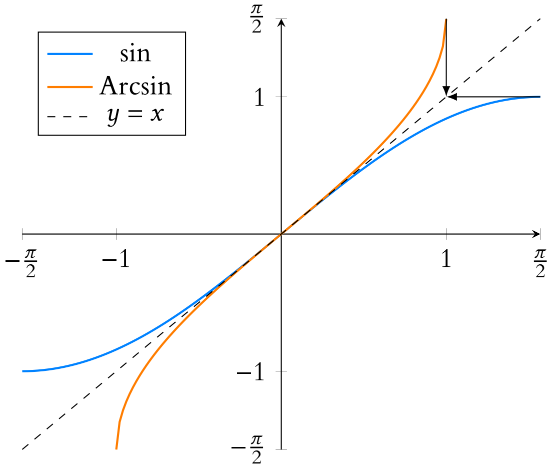
$$\forall x \in]-1, 1[,\ (\text{Arcsin})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration. Les propriétés générales des dérivées des bijections réciproques prouvent que Arcsin est dérivable là où $\sin' \circ \text{Arcsin}$ ne s'annule pas.
C'est-à-dire sur l'ensemble des $x \in]-1, 1[$ tels que $\cos(\text{Arcsin}\, x) \neq 0$.
Mais $\text{Arcsin}(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, et donc $\cos(\text{Arcsin}(x)) = 0 \Leftrightarrow \text{Arcsin}(x) = \pm\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \pm 1$.
Et donc Arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$ et pour $x \in]-1, 1[$, $(\text{Arcsin})'(x) = \frac{1}{\cos(\text{Arcsin}(x))}$.
Il s'agit donc de calculer $\cos(\text{Arcsin}(x))$.
Or, nous savons que pour $x \in [-1, 1]$, $\sin(\text{Arcsin}(x)) = x$.
Et donc $\cos^2(\text{Arcsin}(x)) = 1 - \sin^2(\text{Arcsin}(x)) = 1 - x^2$.
Or, $\text{Arcsin}(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et donc $\cos(\text{Arcsin}(x)) \geqslant 0$.
On en déduit donc que $\forall x \in [-1, 1]$, $\cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{\cos^2(\text{Arcsin}(x))} = \sqrt{1-x^2}$.
Et donc $\forall x \in]-1, 1[$, $(\text{Arcsin})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. □

⚠ Attention !

Si on n'avait pas précisé que $\cos(\text{Arcsin}(x)) \geqslant 0$, on aurait seulement

$$|\cos(\text{Arcsin}(x))| = \sqrt{\cos^2(\text{Arcsin}(x))} = \sqrt{1-x^2}.$$



Notons que la fonction sin possédant des tangentes horizontales en $\pm\frac{\pi}{2}$, Arcsin possède des tangente verticales en ± 1.

Définition 5.56 – La fonction $\cos_{|[0,\pi]}$ réalise une bijection strictement croissante de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$.
On appelle alors **arc cosinus** et on note Arccos sa bijection réciproque :

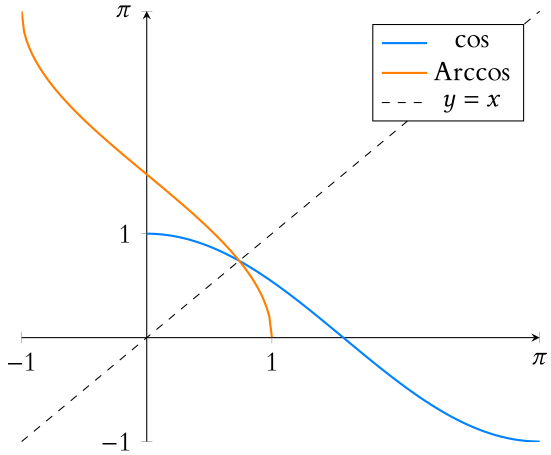
$$\text{Arccos} : \left| \begin{array}{rcl} [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ x & \longmapsto & \text{Arccos}(x) \end{array} \right. .$$

Démonstration. La fonction cos est continue car dérivable, et sur $[0,\pi]$, sa dérivée est $x \mapsto -\sin(x) \leqslant 0$.
De plus, cette dérivée s'annule uniquement en 0 et en π, donc $\cos_{|[0,\pi]}$ est strictement décroissante.
Puisque $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$, par le théorème de la bijection, $\cos_{|[0,\pi]}$ réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$. □

Remarque. Puisque $\cos_{|[0,\pi]}$, est strictement décroissante, il en est de même de Arccos.
En revanche, la parité de cos n'induit pas une parité de Arccos, par exemple car son ensemble de définition n'est pas symétrique !
Enfin, toutes les valeurs déjà connues pour le cos se traduisent en termes d'Arccos.
Par exemple $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} = \text{Arccos}\,\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} = \text{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)$.
Comme pour l'arcsinus, on a toujours, pour $x \in [-1,1]$, $\cos(\text{Arccos}(x)) = x$, mais on pas toujours $\text{Arccos}(\cos(x)) = x$, ceci n'étant vrai que pour $x \in [0,\pi]$.

On retiendra que $\theta = \text{Arccos}(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos\theta \\ \theta \in [0,\pi] \end{cases}$.

Plus généralement
Une fonction paire n'est jamais bijective puisqu'elle prend au moins deux fois chaque valeur (à moins que son ensemble de définition soit réduit à $\{0\}$, ce qui est totalement inintéressant).



Exemple 5.57

Résolvons l'équation $\operatorname{Arccos}(x) = \operatorname{Arcsin}\frac{12}{13}$, d'inconnue $x \in [-1,1]$.
Notons que $\operatorname{Arcsin}\frac{12}{13} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
On aura alors, pour $x \in [-1,1]$,

$$\operatorname{Arccos}(x) = \operatorname{Arcsin}\frac{12}{13} \Leftrightarrow \cos(\operatorname{Arccos} x) = \cos\left(\operatorname{Arcsin}\left(\frac{12}{13}\right)\right).$$

Mais $\cos^2\left(\operatorname{Arcsin}\left(\frac{12}{13}\right)\right) + \sin^2\left(\operatorname{Arcsin}\left(\frac{12}{13}\right)\right) = 1$ soit encore $\cos^2\left(\operatorname{Arcsin}\left(\frac{12}{13}\right)\right) = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{25}{169}$.
Puisque $\operatorname{Arcsin}\frac{12}{13} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que $\cos\left(\operatorname{Arcsin}\frac{12}{13}\right) > 0$ et donc $\cos\left(\operatorname{Arcsin}\frac{12}{13}\right) = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$.
Par conséquent, $\operatorname{Arccos}(x) = \operatorname{Arcsin}\frac{12}{13} \Leftrightarrow x = \frac{5}{13}$.
Et donc, $\frac{5}{13}$ est l'unique solution de l'équation $\operatorname{Arccos}(x) = \operatorname{Arcsin}\frac{12}{13}$.

Équivalence
L'équivalence n'est vraie que parce que les deux nombres $\operatorname{Arccos}(x)$ et $\operatorname{Arcsin}\left(\frac{12}{13}\right)$ sont dans $[0,\pi]$, intervalle sur lequel cos est bijective.

Proposition 5.58 :

$$\forall x \in [-1,1],\ \operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Démonstration. Soit $x \in [-1,1]$. Alors

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(x)\right) = \sin(\operatorname{Arcsin}(x)) = x.$$

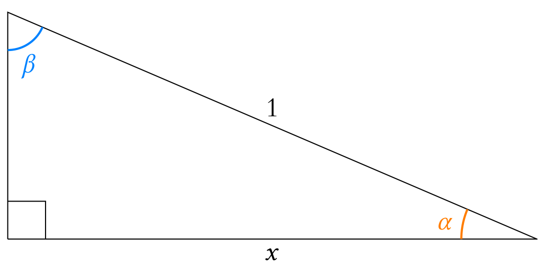
D'autre part, puisque $-\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{Arcsin}(x) \leqslant \frac{\pi}{2}$, alors $0 \leqslant \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(x) \leqslant \pi$.
Et donc $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(x)\right) = x \\ \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(x) \in [0,\pi] \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(x) = \operatorname{Arccos}(x).$ □

Remarque
Comme prouvé ici, ainsi que dans la preuve de la proposition 5.55, on a, pour tout $x \in [-1,1]$,

$$\cos(\operatorname{Arcsin}(x)) = \sin(\operatorname{Arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

Il faut, sinon le savoir par cœur, être capable de le redémontrer.

Remarque. Cette relation a en fait une interprétation géométrique très simple si $x \in]0,1[$.
En effet, si l'on se place, comme dans la figure ci-dessous dans un triangle rectangle dont l'hypoténuse vaut 1 et l'un des côtés vaut x, on a $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.
Mais $\cos\alpha = \frac{x}{1} = x$, de sorte que $\alpha = \operatorname{Arccos} x$ et de même, $\sin\beta = \frac{x}{1}$, et donc $\beta = \operatorname{Arcsin}(x)$.
Et donc $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} = \operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x$.



Corollaire 5.59 – *La fonction* Arccos *est dérivable sur* $]-1,1[$ *et pour tout* $x \in]-1,1[$,
$\operatorname{Arccos}'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Démonstration. Notons que ceci aurait pu être prouvé en reproduisant la preuve de la dérivabilité de Arcsin.
Mais en utilisant la relation précédente, pour tout $x \in]-1,1[$, $\operatorname{Arccos}(x) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(x)$.
Et donc Arccos est dérivable sur $]-1,1[$ car somme de deux fonctions dérivables, et sa dérivée est donnée pour tout $x \in]-1,1[$ par $\operatorname{Arccos}'(x) = -\operatorname{Arcsin}'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. □

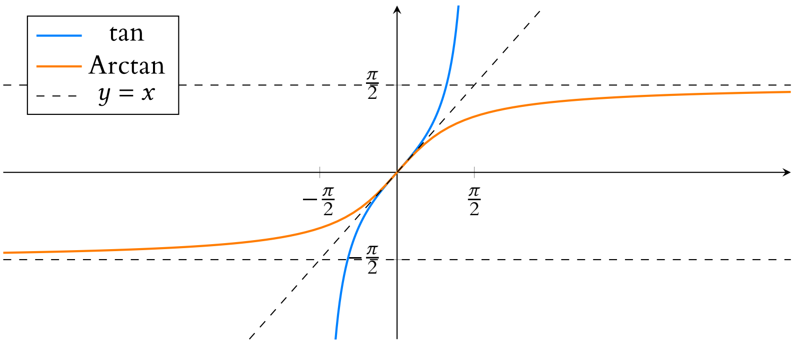
5.3.2 Arc tangente

Définition 5.60 – La fonction tan réalise une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbf{R}$.
On appelle **arc tangente** et on note Arctan sa bijection réciproque :

$$\operatorname{Arctan} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ x & \longmapsto & \operatorname{Arctan}(x) \end{array} \right.$$

Démonstration. La fonction tan est continue et strictement croissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, avec $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$.
Donc par le théorème de la bijection, $\tan_{|\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$ réalise une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbf{R}$. □

⚠ Bien que $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$, on n'a absolument pas $\operatorname{Arctan} = \dfrac{\operatorname{Arcsin}}{\operatorname{Arccos}}$!



Une fois n'est pas coutume, on a, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\tan(\operatorname{Arctan}(x)) = x$ mais $\operatorname{Arctan}(\tan(x)) = x$ n'est vrai que pour $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Enfin, on retiendra que $\theta = \operatorname{Arctan}(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tan\theta \\ \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$.

Exemple 5.61

Calculons $\theta = \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{3} + \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{7}$. On a

$$\tan\theta = \frac{\tan \operatorname{Arctan}\frac{1}{3} + \tan\operatorname{Arctan}\frac{1}{7}}{1 - \tan\operatorname{Arctan}\frac{1}{3}\tan\operatorname{Arctan}\frac{1}{7}} = \frac{\frac{10}{21}}{1 - \frac{1}{21}} = \frac{1}{2}.$$

Nous serions tentés d'en déduire que $\theta = \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{2}$, mais encore faut-il s'assurer que $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Mais puisque $0 \leqslant \frac{1}{3} < 1$, alors $0 \leqslant \operatorname{Arctan} \frac{1}{3} < \frac{\pi}{4}$ et de même $0 < \operatorname{Arctan} \frac{1}{7} < \frac{\pi}{4}$.

On en déduit donc que $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \\ \tan \theta = \frac{1}{2} \end{cases}$ et par conséquent $\theta = \operatorname{Arctan} \frac{1}{2}$.

Proposition 5.62 : *La fonction* Arctan *est strictement croissante sur* $\mathbf{R}$*, impaire, avec* $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2}$ *et* $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$.
De plus, elle est dérivable sur $\mathbf{R}$ *et* $\forall x \in \mathbf{R}$, $\operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Démonstration. La stricte croissance découle de celle de tan, de même que l'imparité.
En effet, si $x \in \mathbf{R}$, alors $\tan(-\operatorname{Arctan}(x)) = -\tan(\operatorname{Arctan}(x)) = -x$ et donc par application de l'arctangente, $-\operatorname{Arctan}(x) = \operatorname{Arctan}(-x)$.
Les limites découlent aussi de celles de la tangente.
Enfin, puisque $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ n'est jamais nul, Arctan est dérivable sur $\mathbf{R}$ tout entier et pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{\tan'(\operatorname{Arctan}(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(\operatorname{Arctan}(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

□

Exemple 5.63

Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \operatorname{Arcsin}(x)$.

En effet, si $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) - \operatorname{Arcsin}(x)$, alors f est dérivable[25] sur $]-1,1[$, et sa dérivée est donnée par

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)^{3/2}} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0. \end{aligned}$$

Donc f est constante sur $]-1, 1[$, avec $f(0) = \operatorname{Arctan}(0) - \operatorname{Arcsin}(0) = 0$.
On en déduit que pour tout $x \in]-1, 1[$, $\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \operatorname{Arcsin}(x)$.

[25] Car composée de fonctions qui le sont.

Exercice
Retrouver ce résultat sans passer par les dérivées.

Proposition 5.64 : *Pour* $x \in \mathbf{R}^*$, *on a*

$$\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \textit{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \textit{si } x < 0 \end{cases}$$

Démonstration. Notons g la fonction définie sur $\mathbf{R}^*$ par $g(x) = \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$.
Alors g est dérivable car somme de composées de fonctions dérivables et

$$\forall x \in \mathbf{R}^*, g'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}.$$

Il serait alors tentant d'en déduire que g est constante, mais $\mathbf{R}^*$ n'est pas un intervalle !
En revanche, $\mathbf{R}_+^*$ est un intervalle sur lequel g est donc constante.
Or, $g(1) = \text{Arctan}(1) + \text{Arctan}(1) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ de sorte que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $g(x) = \dfrac{\pi}{2}$.
De même, g est constante sur $\mathbf{R}_-^*$, égale à $g(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$. □

Notons que cette formule a une interprétation géométrique très simple si $x > 0$: dans le triangle rectangle suivant, $\tan\alpha = \dfrac{1}{x}$ et donc $\alpha = \text{Arctan}\,\dfrac{1}{x}$ et $\tan\beta = x$ et donc $\beta = \text{Arctan}(x)$.
Or, il est évident que la somme des deux vaut $\frac{\pi}{2}$.