35

Familles sommables

Le but de ce chapitre est de généraliser la notion de somme infinie à un cadre un peu plus général que celui des séries, par exemple considérer des sommes infinies de suites indexées par $\mathbf{Z}$, comme $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{1}{n^2+1}$, voire de sommes doubles infinies comme $\displaystyle\sum_{(n,p)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}} \frac{1}{n!p!}$.

Une raison parmi d'autres de vouloir définir de telles sommes vient des probabilités : cette année nous n'avons travaillé que sur des espaces finis, mais on peut aussi vouloir considérer des variables aléatoires qui prennent une infinité de valeurs. Par exemple : on lance un dé jusqu'à obtenir un «1» et on note X le nombre d'essais nécessaires. Alors $X(\Omega) = \mathbf{N}^*$.
Dès lors, pour définir l'espérance, il va nous falloir être capable de donner un sens à $\displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbf{P}(X = x)$, qui est une somme infinie.
Dans l'exemple ci-dessus, vous me direz[1] que cela a déjà été fait, et qu'il s'agit de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbf{P}(X = n)$, sous réserve que cette série converge.

[1] À juste titre.

D'accord, mais si on considère X et Y deux variables suivant la loi ci-dessus, et qu'on pose $Z = X - Y$. Alors Z est à valeurs dans $\mathbf{Z}$. Pour parler de son espérance, il va falloir être capable de donner un sens à $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}} n\mathbf{P}(Z = n)$.
Bien entendu, on doit pouvoir se dire qu'il suffit de couper en deux séries, par exemple $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbf{P}(Z = n) + \sum_{n=1}^{+\infty}(-n)\mathbf{P}(Z = -n)$.

Allons plus loin, toujours avec X et Y comme ci-dessus, posons $R = \dfrac{X}{Y}$. Cette fois R prend ses valeurs dans $\mathbf{Q}\cap\mathbf{R}_+^*$, et la somme infinie qui définirait l'espérance semble bien plus délicate à définir...

Enfin, une autre bonne raison de vouloir étudier de telles sommes est qu'on aimerait se détacher de l'ordre dans lequel sont sommés les termes dans une série : on considère $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_0+u_1+\cdots+u_n)$. Que se passe-t-il si on réordonne les termes de la suite ? Autrement dit, si $\sigma : \mathbf{N}\to\mathbf{N}$ est une permutation de $\mathbf{N}$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est-elle de même nature que $\sum u_n$, et en cas de convergence, ont-elles même somme ?
Au premier abord, notre intuition nous laisse penser que changer l'ordre des termes ne changera rien puisqu'au final, on somme toujours les mêmes nombres, bien que dans un autre ordre, ce qui ne change pas la somme par commutativité de l'addition[2].
Un exemple dérangeant était d'ailleurs contenu dans un exercice du TD de séries : en posant $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \ln(2)$.
Mais en permutant de manière astucieuse les termes, on obtient

[2] La commutativité de la somme n'a pour l'instant été rencontrée que pour les sommes **finies**.
Mais notre bon sens souhaiterait que cela reste vrai pour des sommes infinies.

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\dots &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\dots\\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\dots\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\ln(2).\end{aligned}$$

Pourtant nous avons bien sommé les mêmes termes, seul l'ordre a changé !

Autrement dit, il existe $\sigma : \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ bijective telle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \frac{\ln(2)}{2}$.

Dès lors, quel sens donner à $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$? La réponse sera simple : nous ne définirons pas cette somme...

Définition 35.1 – Si I est un ensemble, on note $\mathscr{P}_f(I)$ l'ensemble des parties **finies** de I.

35.1 Familles sommables de réels positifs

35.1.1 L'ensemble $[0, +\infty]$

On note $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup\{+\infty\}$, qui est une partie de $\overline{\mathbf{R}}$.
Rappelons qu'il s'agit d'un ensemble totalement ordonné, avec pour tout $x \in [0, +\infty]$, $x \leqslant +\infty$.

Si A est une partie non vide de $[0, +\infty]$, deux cas de figure se présentent :

- soit $+\infty \in A$, auquel cas c'est le plus grand élément de A.
- soit A est une partie de $\mathbf{R}$. Et alors :
  1. soit A est majorée (en tant que partie de $\mathbf{R}$), et donc possède une borne supérieure $m \in \mathbf{R}$, qui est donc aussi la borne supérieure[3] de A en tant que partie de $[0, +\infty]$.
  2. soit A n'est pas majorée. Et alors $+\infty$ est bien un majorant de A dans $[0, +\infty]$, et c'est le seul, donc le plus petit des majorants.

Dans tous les cas, A possède une borne supérieure dans $[0, +\infty]$.

[3] Donc le plus petit des majorants dans $[0, +\infty]$.

Nous utiliserons dans la suite les opérations usuelles sur les réels strictement positifs : $x + (+\infty) = +\infty$, $x \times (+\infty) = +\infty$ si $x \neq 0$, et nous ajouterons le un peu moins classique[4] : $0 \times (+\infty) = 0$.

[4] Car il ne nous plaît pas en termes de limites : $0 \times (+\infty)$ est une forme indéterminée.

35.1.2 Somme d'une famille de réels positifs

La notion de convergence d'une série reposait essentiellement sur le fait que les sommes partielles étaient bien définies.
Sur le même principe, pour toute famille de réels, et donc en particulier pour toute famille de réels positifs, la somme d'un nombre fini de termes est toujours bien définie.
Utilisons ces sommes finies pour définir des sommes infinies :

Définition 35.2 – Soit I un ensemble, et soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs indexée par I.

On note alors $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sup\left\{\sum_{j\in J} u_j,\ J \in \mathscr{P}_f(I)\right\}$, la borne sup étant considérée dans $[0, +\infty]$ (et donc éventuellement égale à $+\infty$).

► Si I est un ensemble fini, alors pour tout $J \subset I$, on a

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J} u_j + \underbrace{\sum_{k\in I\setminus J} u_k}_{\geqslant 0} \geqslant \sum_{j\in J} u_j.$$

Et puisque par ailleurs, $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i$ est un élément de $\left\{\displaystyle\sum_{j\in J} u_j,\ J \in \mathscr{P}_f(I)\right\}$, c'en est donc le plus grand élément.
Donc la notation $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i$ correspond bien à celle que l'on connaissait déjà.

▶ Lorsque $I = \mathbf{N}$, on a donc $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels positifs.
En particulier, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $J_n = [\![0, n]\!]$ est une partie finie de I, et donc

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{j\in J_n} u_j \in \left\{ \sum_{j\in J} u_j,\ J \in \mathscr{P}_f(\mathbf{N}) \right\}.$$

Et alors, par définition d'une borne supérieure[5], $\sup\{S_n,\ n \in \mathbf{N}\} \leqslant \sum_{i\in I} u_i$.
D'autre part, pour toute partie finie $J \subset \mathbf{N}$, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $J \subset J_n$, et donc[6] $\sum_{j\in J} u_j \leqslant \sum_{j\in J_n} u_j = S_n$.
Et donc $\sup \left\{ \sum_{j\in J} u_j,\ J \in \mathscr{P}_f(\mathbf{N}) \right\} \leqslant \sup\{S_n,\ n \in \mathbf{N}\}$.
Par double inégalité, $\sum_{n\in\mathbf{N}} u_n = \sup\{S_n,\ n \in \mathbf{N}\}$.
Donc si la série de terme général u_n converge, alors (S_n) est majorée et alors par le théorème de la limite monotone,

$$\sum_{i\in I} u_i = \sup\{S_n, n \in \mathbf{N}\} = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Et si $\sum u_n$ diverge, alors[7] $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc $\sum_{n\in\mathbf{N}} u_n = +\infty$.

[5] Qui ici aussi peut éventuellement être infinie.
[6] Par positivité des termes de la suite.
[7] C'est encore le théorème de la limite montonoe.

Définition 35.3 – Une famille $(u_i)_{i\in I}$ de réels positifs est dite **sommable** si $\sum_{i\in I} u_i \in \mathbf{R}_+$, soit encore si $\sum_{i\in I} u_i < +\infty$.

Remarque. Puisque $\left\{ \sum_{j\in J} u_j,\ J \in \mathscr{P}_f(I) \right\}$ est une partie non vide de $\mathbf{R}$, elle possède une borne supérieure dans $\mathbf{R}$ si et seulement si elle est majorée.
Donc $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout $J \in \mathscr{P}_f(I)$, $\sum_{j\in J} u_i \leqslant M$.

▶ Par ce qui a été dit précédemment, dans le cas où $I = \mathbf{N}$, la famille $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est sommable si et seulement si la série de terme général u_n converge, et dans ce cas, $\sum_{n\in\mathbf{N}} u_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

▶ Si $\sigma : I_1 \to I_2$ est une bijection, alors $\widetilde{\sigma} : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}_f(I_2) & \longrightarrow & \mathscr{P}_f(I_1) \\ J & \longmapsto & \sigma^{-1}(J) \end{array} \right.$ est une bijection, si bien que pour toute famille $(u_i)_{i\in I_2}$ de réels positifs,

$$\left\{ \sum_{j\in J} u_j,\ J \in \mathscr{P}_f(I_2) \right\} = \left\{ \sum_{j\in\sigma^{-1}(J)} u_{\sigma(j)},\ J \in \mathscr{P}_f(I_2) \right\} = \left\{ \sum_{j\in J} u_{\sigma(j)},\ J \in \mathscr{P}_f(I_1) \right\}.$$

Et donc ces ensembles ont la même borne supérieure[8].
Par conséquent, la famille $(u_i)_{i\in I_2}$ est sommable si et seulement si la famille $(u_{\sigma(i)})_{i\in I_1}$ est sommable, et lorsque c'est le cas $\sum_{i\in I_2} u_i = \sum_{i\in I_1} u_{\sigma(i)}$.

[8] Dans $[0, +\infty]$.

Cela signifie notamment que pour une série **à termes positifs**, modifier l'ordre des termes[9] ne change pas la nature de la série, et en cas de convergence, ne change pas la somme de la série.
Ce n'est pas toujours le cas[10] pour des séries à termes de signe quelconque.

[9] Cela revient à prendre σ une bijection de $\mathbf{N}$ sur $\mathbf{N}$.
[10] Voir l'exemple introductif et les exercices difficiles de la fin du TD de séries numériques pour les détails.

Une autre conséquence est que lorsque I est en bijection avec $\mathbf{N}$, pour étudier la sommabilité de la famille $(u_i)_{i\in I}$, il suffit de considérer une bijection $\sigma : \mathbf{N} \to I$, et d'étudier la nature de la série $\sum u_{\sigma(n)}$.
Et par conséquent, tous les outils déjà développés pour l'étude des séries[11] sont utilisables.

[11] À termes positifs.

35.1.3 Propriétés de la somme

Proposition 35.4 : *Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles des réels positifs telles que pour tout $i \in I$, $u_i \leqslant v_i$.*
Si $(v_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable et $\sum_{i\in I} u_i \leqslant \sum_{i\in I} v_i$.

Démonstration. Soit $J \in \mathscr{P}_f(I)$. Alors $\sum_{j\in J} u_j \leqslant \sum_{j\in J} v_j \leqslant \sum_{i\in I} v_i < +\infty$.

Et donc $\left\{\sum_{j\in J} u_j,\ J \in \mathscr{P}_f(I)\right\}$ est une partie de $\mathbf{R}$ majorée par $\sum_{i\in I} v_i$, si bien que sa borne sup, $\sum_{i\in I} u_i$ est inférieure à $\sum_{i\in I} v_i$. □

Proposition 35.5 : *Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs indexées par un même ensemble I.*

1. *pour tout $\lambda \in \mathbf{R}_+$, $\sum_{i\in I} \lambda u_i = \lambda \sum_{i\in I} u_i$.*
2. *$\sum_{i\in I}(u_i + v_i) = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i$.*

Démonstration.

1. Pour tout $J \in \mathscr{P}_f(I)$, $\sum_{i\in J} \lambda u_i = \lambda \sum_{i\in J} u_i$, si bien que par passage à la borne supérieure[12], $\sum_{i\in I} \lambda u_i \leqslant \lambda \sum_{i\in I} u_i$.
   Si $\lambda = 0$, il y a évidemment égalité.
   Et si $\lambda \neq 0$, alors $\sum_{i\in I} \frac{1}{\lambda}\lambda u_i \leqslant \frac{1}{\lambda} \sum_{i\in I} \lambda u_i$, si bien que $\lambda \sum_{i\in I} u_i \leqslant \sum_{i\in I} \lambda u_i$.
   Donc par double inégalité, on a bien l'égalité annoncée.
2. Sur le même principe : pour $J \in \mathscr{P}_f(I)$, $\sum_{i\in J}(u_i + v_i) = \sum_{i\in J} u_i + \sum_{i\in J} v_i$, et donc en particulier, $\sum_{i\in J}(u_i + v_i) \leqslant \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i$.
   Autrement dit, $\sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i$ est un majorant de $\left\{\sum_{i\in J}(u_i + v_i),\ J \in \mathscr{P}_f(I)\right\}$, et donc par définition d'une bornée supérieure[13], $\sum_{i\in I}(u_i + v_i) \leqslant \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i$.
   Inversement, si $\sum_{i\in I}(u_i + v_i) = +\infty$, il n'y a rien à prouver.
   Sinon, puisque pour tout $i \in I$, $0 \leqslant u_i \leqslant u_i + v_i$ et $0 \leqslant v_i \leqslant u_i + v_i$, alors les deux autres sommes sont également finies.
   Fixons alors $\varepsilon > 0$, et soit $J_u \in \mathscr{P}_f(I)$ telle que $\sum_{i\in J_u} u_i \geqslant \sum_{i\in I} u_i - \varepsilon$.
   Et de même, il existe $J_v \in \mathscr{P}_f(I)$ telle que $\sum_{i\in J_v} v_i \geqslant \sum_{i\in I} v_i - \varepsilon$.
   Soit alors $J = J_u \cup J_v$. Puisque $J_u \subset J$, on a
   $$\sum_{i\in I} u_i - \varepsilon \leqslant \sum_{i\in J_u} u_i \leqslant \sum_{i\in J} u_i.$$
   Et de même $\sum_{i\in I} v_i - \varepsilon \leqslant \sum_{i\in J} v_i$.
   Par conséquent,
   $$\sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i - 2\varepsilon \leqslant \sum_{i\in J} u_i + \sum_{i\in J} v_i = \sum_{i\in J}(u_i + v_i) \leqslant \sum_{i\in I}(u_i + v_i).$$

[12] Le «par passage au sup» est dangereux, êtes-vous sûrs de savoir ce qu'il veut dire ici ?

[13] C'est le plus petit des majorants.

Détails
L'existence d'un tel J_u est garantie par la caractérisation «epsilonesque» des bornes supérieures (dans $\mathbf{R}$).

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que

$$\sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i \leqslant \sum_{i\in I}(u_i + v_i).$$

Et donc par double inégalité, on a bien l'égalité annoncée.

□

Corollaire 35.6 – *Avec les hypothèses précédentes :*

1. *si $\lambda > 0$, alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $(\lambda u_i)_{i\in I}$ est sommable.*
2. *$(u_i + v_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ le sont.*

Démonstration. Pour le second point, il suffit de noter qu'une somme de deux éléments de $[0, +\infty]$ est un réel si et seulement si les deux termes de la somme sont des réels. □

35.1.4 Sommation par paquets

Proposition 35.7 : *Soit J une partie de I, et soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs indexée par I. Alors $\displaystyle\sum_{i\in J} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i$.*
En particulier, si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $(u_i)_{i\in J}$ l'est.

Démonstration. Une partie finie de J est une partie finie de I, si bien que

$$\left\{\sum_{k\in K} u_k,\ K \in \mathscr{P}_f(J)\right\} \subset \left\{\sum_{k\in K} u_k,\ K \in \mathscr{P}_f(I)\right\}.$$

Le résultat s'en déduit en considérant les bornes sup. □

Proposition 35.8 : *Soit I un ensemble, et soient I_1, I_2 deux ensembles non vides disjoints tels que $I = I_1 \cup I_2$.*
Soit alors $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs indexée par I. Alors $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I_1} u_i + \sum_{i\in I_2} u_i$.
En particulier, $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $(u_i)_{i\in I_1}$ et $(u_i)_{i\in I_2}$ le sont.

Autrement dit
On se donne une partition de I.

Démonstration. Notons, pour tout $i \in I$,

$$v_i = \mathbb{1}_{I_1}(i)u_i = \begin{cases} u_i & \text{si } i \in I_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et } w_i = \mathbb{1}_{I_2}(i)u_i = \begin{cases} u_i & \text{si } i \in I_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Puisque $\displaystyle\left\{\sum_{i\in J} u_i,\ J \in \mathscr{P}_f(I_1)\right\} = \left\{\sum_{i\in J} v_i,\ J \in \mathscr{P}_f(I)\right\}$, ces deux ensembles ont la même borne supérieure : $\displaystyle\sum_{i\in I_1} u_i = \sum_{i\in I} v_i$.

Détails
Pour toute partie finie J de I, $\displaystyle\sum_{i\in J} v_i$ est égale à
$$\sum_{i\in J\cap I_1} u_i.$$

Et de même, $\displaystyle\sum_{i\in I_2} u_i = \sum_{i\in I} w_i$.
Mais pour tout i, $u_i = v_i + w_i$, si bien que

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I}(v_i + w_i) = \sum_{i\in I} v_i + \sum_{i\in I} w_i = \sum_{i\in I_1} u_i + \sum_{i\in I_2} u_i.$$

□

Remarque. Le résultat s'étend sans difficulté par récurrence à une partition **finie** de I sous la forme $I = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n$, les ensembles étant deux à deux disjoints.

Exemple 35.9

Admettons que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

En d'autres termes, cela signifie que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Mais $\mathbf{N}^* = A_1 \cup A_2$, avec $A_1 = \{2k,\ k \in \mathbf{N}^*\}$ et $A_2 = \{2k+1,\ k \in \mathbf{N}\}$.

Donc $\displaystyle\sum_{p\in A_1} \frac{1}{p^4} + \sum_{p\in A_2} \frac{1}{p^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Mais $k \mapsto 2k$ est une bijection de $\mathbf{N}^*$ sur A_1, si bien que

$$\sum_{p\in A_1} \frac{1}{p^4} = \sum_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{1}{(2n)^4} = \frac{1}{16} \sum_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{1}{n^4}.$$

Et donc $\displaystyle\sum_{p\in A_2} \frac{1}{p^4} = \sum_{p\in\mathbf{N}^*} \frac{1}{p^4} - \sum_{p\in A_1} \frac{1}{p^4} = \frac{15}{16}\frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{96}$.

Ce qui s'écrit encore $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$.

Dans la suite, on étend un peu le cadre utilisé précédemment, en s'autorisant à considérer des sommes d'éléments de $[0, +\infty]$, c'est-à-dire éventuellement égaux à $+\infty$.
Dans ce cas, si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $[0, +\infty]$ indexée par I, et si il existe $i \in I$ tel que $u_i = +\infty$, alors on pose $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = +\infty$.

Théorème 35.10 (Théorème de sommation par paquets) : *Soit I un ensemble, et soit $\{I_k,\ k \in K\}$ une partition de I.*
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. Alors

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{k\in K} \left(\sum_{i\in I_k} u_i \right).$$

Remarque. L'intuition est assez simple : on a partitionné I en «petits paquets», qui sont les I_k.
Pour calculer la somme sur I, il suffit de le faire pour chaque paquet, puis de sommer les «petites» sommes[14] ainsi obtenues.

[14] Les sommes sur chaque paquet.

Démonstration. Soit $L \in \mathscr{P}_f(K)$. Alors par la proposition précédente[15],

[15] Et surtout la remarque qui la suit.

$$\sum_{k\in L} \left(\sum_{i\in I_k} u_i \right) = \sum_{i\in\bigcup_{k\in L} I_k} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i.$$

Et donc déjà, $\displaystyle\sum_{k\in K} \sum_{i\in I_k} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i$.

Inversement, pour $J \in \mathscr{P}_f(I)$, $K_J = \{k \in K \mid J \cap I_k \neq \emptyset\}$ est fini.
Et par conséquent,

$$\sum_{i\in J} u_i \leqslant \sum_{k\in K_J} \left(\sum_{i\in I_k} u_i \right) \leqslant \sum_{k\in K} \sum_{i\in I_k} u_i.$$

Et donc[16] $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i \leqslant \sum_{k\in K} \sum_{i\in I_k} u_i$. □

[16] Toujours en considérant la borne supérieure.

Corollaire 35.11 : *Avec les hypothèses précédentes, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si :*

1. *pour tout $k \in K$, $(u_i)_{i\in I_k}$ est sommable*
2. *la famille $\left(\sum_{i\in I_k} u_i\right)_{k\in K}$ est sommable.*

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, nous avons déjà dit que pour tout $k \in K$, $(u_i)_{i\in I_k}$ l'est, et puisque

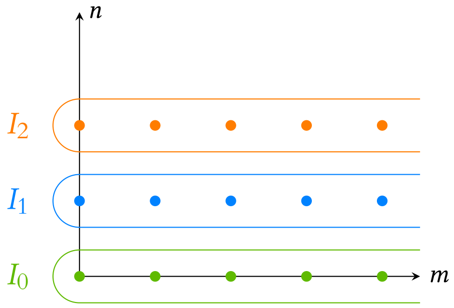
$$\sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} u_i = \sum_{i\in I} u_i < +\infty$$

la famille des $\left(\sum_{i\in I_k} u_i\right)_{k\in K}$ est sommable.

$\boxed{\Leftarrow}$ Inversement, on suppose donc que $\sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} u_i < +\infty$, et donc par le théorème de sommation par paquets, $\sum_{i\in I} u_i < +\infty$, si bien que $(u_i)_{i\in I}$ est sommable. □

Exemple 35.12

- Prenons $I = \mathbf{N}\times\mathbf{N}$, et pour $(m,n)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}$, $u_{m,n} = \dfrac{2^m}{m!n!}$.



Si on pose, pour $n \in \mathbf{N}$,

$$I_n = \{(m,n), m\in\mathbf{N}\}$$

on a bien $I = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} I_n$, avec les I_n deux à deux disjoints.

Pour $n \in \mathbf{N}$, $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable car $\sum_{(m,n)\in I_n} u_{m,n} = \sum_{m\in\mathbf{N}} \dfrac{2^m}{m!n!} = \dfrac{1}{n!}\sum_m \dfrac{2^m}{m!}$ est sommable puisque $\sum_{m=0}^{+\infty}\dfrac{2^m}{m!} = e^2$.

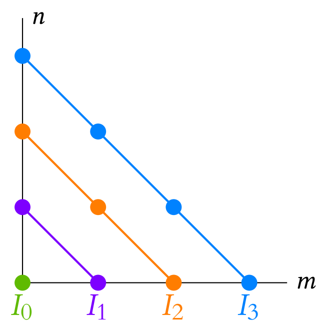
On a donc $\sum_{(m,n)\in I_n} u_{m,n} = \dfrac{e^2}{n!}$.

Mais alors $\sum_n \dfrac{e^2}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{e^2}{n!} = e^2 e = e^3$.

Donc $\sum_{(m,n)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}} u_{m,n} = e^3$, et en particulier, $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}}$ est sommable.

- Toujours avec $I = \mathbf{N}\times\mathbf{N}$, posons $u_{m,n} = \dfrac{1}{(m+n)!}$.

Les «paquets» employés à la question précédente ne sont probablement pas pertinents ici, puisqu'on ne saura pas calculer, à n fixé, $\sum_{m\in\mathbf{N}}\dfrac{1}{(m+n)!}$.



Posons cette fois, pour $k \in \mathbf{N}$

$I_k = \{(m,n) \in \mathbf{N}\times\mathbf{N} \mid m+n = k\}$

On a bien $I = \bigcup_{k\in\mathbf{N}} I_k$, avec les I_k deux à deux disjoints.
Notons qu'ici les I_k sont finis.

Pour $k \in \mathbf{N}$, la famille $(u_{m,n})_{(m,n)\in I_k}$ est sommable car elle est finie. De plus,

On a $\operatorname{Card}(I_k) = k+1$, ce dont on se convainc facilement sur le dessin.

$$\sum_{(m,n)\in I_k} \frac{1}{(m+n)!} = \sum_{(m,n)\in I_k} \frac{1}{k!} = \frac{\operatorname{Card}(I_k)}{k!} = \frac{k+1}{k!}.$$

Ensuite, la série $\sum_k \frac{k+1}{k!}$ est convergente car $\frac{k+1}{k!} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(k-1)!}$, donc la famille $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}}$ est sommable, et

$$\sum_{(m,n)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}} \frac{1}{(m+n)!} = \sum_{k\in\mathbf{N}} \left(\sum_{(m,n)\in I_k} \frac{1}{(m+n)!} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{k!}.$$

Et alors, en prenant soin de traiter à part $k=0$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{k!} = \frac{0}{0!} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 2e.$$

Même sans pouvoir calculer la somme, un des intérêts de ce résultat est de pouvoir étudier la sommabilité d'une famille.

Exemple 35.13

Pour $(p,q) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$, posons $u_{p,q} = \frac{1}{(p+q)^3}$.
Pour $k \geqslant 2$, notons $I_k = \{(p,q) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* \mid p+q = k\}$.
Alors pour tout k, I_k est fini de cardinal $k-1$, les I_k sont deux à deux disjoints, et $\bigcup_{k=2}^{+\infty} I_k = \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$.
Les I_k étant finis, la sommabilité de $(u_{p,q})_{(p,q)\in I_k}$ est triviale, mais de plus, pour tout $k \geqslant 2$,

$$\sum_{(p,q)\in I_k} u_{p,q} = \sum_{(p,q)\in I_k} \frac{1}{(p+q)^3} = \sum_{(p,q)\in I_k} \frac{1}{k^3} = \frac{k-1}{k^3}.$$

Et puisque la série de terme général $\frac{k-1}{k^3} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$ converge, la famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*}$ est sommable.

35.2 FAMILLES SOMMABLES DE NOMBRES COMPLEXES

Jusqu'à présent nous n'avons manipulé que des familles de nombres réels positifs. On généralise dans cette partie les résultats de la première partie au cas général des familles de nombres complexes.

Définition 35.14 – Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de complexes indexée par I.
On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est **sommable** si la famille de réels positifs $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable.

Notons que dans le cas particulier où $I = \mathbf{N}$, la famille $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est sommable si et seulement si $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}} |u_n| < +\infty$, soit si et seulement si la série de terme général u_n est **absolument convergente**. Ce n'est donc pas la notion de convergence d'une série que nous allons généraliser, mais celle de convergence absolue.

Définition 35.15 – Soit $\mathbf{K}$ l'un des deux corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. On note $\ell^1(I,\mathbf{K})$ l'ensemble des familles sommables indicées par I et à valeurs dans $\mathbf{K}$.

35.2.1 Somme d'une famille sommable

Si x est un réel, on note $x^+ = \max(x,0) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ et $x^- = \max(-x,0) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$.
Ainsi, x^+ et x^- sont deux réels positifs, et on a toujours $x = x^+ - x^-$ et $|x| = x^+ + x^-$.

Proposition 35.16 : *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de **réels**.*
Alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si les familles (positives) $(u_i^+)_{i\in I}$ et $(u_i^-)_{i\in I}$ sont sommables.

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable. On a, pour tout $i \in I$, et tout $J \in \mathscr{P}_f(I)$,

$$\sum_{i\in J} u_i^+ \leqslant \sum_{i\in J} |u_i| \leqslant \sum_{i\in I} |u_i| < +\infty$$

et de même pour $\sum\limits_{i\in J} u_i^-$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $(u_i^+)_{i\in I}$ et $(u_i^-)_{i\in I}$ sont sommables, alors $(|u_i|)_{i\in I} = \left(u_i^+ + u_i^-\right)_{i\in I}$ est sommable.
Et donc par définition, $(u_i)_{i\in I}$ est sommable. □

Définition 35.17 – Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de **réels**.
On pose alors $\sum\limits_{i\in I} u_i = \sum\limits_{i\in I} u_i^+ - \sum\limits_{i\in I} u_i^-$.

Dans le cas particulier où $I = \mathbf{N}$, si $(u_n)_n$ est sommable, alors les deux séries[17] de termes généraux u_n^+ et u_n^- sont convergentes.
Et on a alors

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} u_n = \sum_{n\in\mathbf{N}} u_n^+ - \sum_{n\in\mathbf{N}} u_n^- = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^+ - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^- = \sum_{n=0}^{+\infty} (u_n^+ - u_n^-) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Notons que dans le cas où la série de terme général $|u_n|$ diverge[18], on ne donne pas de sens à la notation $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}} u_n$, alors que la notation $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ peut éventuellement en avoir un, si la série de terme général u_n converge[19].

Donc par exemple, $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ n'est pas défini, alors que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ existe[20], par le critère des séries alternées.
En revanche, $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}} \dfrac{(-1)^n}{n!}$ existe puisque la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n!}$ est absolument convergente, et on a

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}.$$

17 À termes positifs.

18 C'est-à-dire lorsque $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas sommable.

19 Sans être absolument convergente.

20 Et vaut $\ln(2)$.

Proposition 35.18 : *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres complexes. Alors les familles $(\mathrm{Re}(u_i))_{i\in I}$ et $(\mathrm{Im}(u_i))_{i\in I}$ sont sommables.*

Démonstration. Adapter la preuve donnée pour u_i^+ et u_i^- en notant que pour tout $i \in I$, $0 \leqslant |\mathrm{Re}(u_i)| \leqslant |u_i|$ et $|\mathrm{Im}(u_i)| \leqslant |u_i| \leqslant |\mathrm{Re}(u_i)| + |\mathrm{Im}(u_i)|$. □

Définition 35.19 – Soit $(u_j)_{j\in J}$ une famille sommable de nombres complexes. On pose alors $\displaystyle\sum_{j\in J} u_j = \sum_{j\in J} \mathrm{Re}(u_j) + i \sum_{j\in J} \mathrm{Im}(u_j)$.

Notations
Nous avons du (à regret) abandonner i pour nos indices, afin de le réserver à la racine carrée de -1 dont nous avons l'habitude.

Encore une fois, dans le cas où $J = \mathbf{N}$, et où la série de terme général u_n est absolument convergente, on retrouve $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

35.2.2 Propriétés de la somme

Proposition 35.20 : *Soit $\sigma : I_1 \to I_2$ une bijection entre deux ensembles, et $(u_i)_{i\in I_2}$ une famille de complexes.*
Alors $(u_i)_{i\in I_2}$ est sommable si et seulement si $(u_{\sigma(i)})_{i\in I_1}$ est sommable, et si c'est le cas,

$$\sum_{i\in I_2} u_i = \sum_{i\in I_1} u_{\sigma(i)}.$$

Démonstration. Commençons par le cas d'une famille réelle.
Alors $(u_i)_{i\in I_2}$ est sommable si et seulement si $(u_i^+)_{i\in I_2}$ et $(u_i^-)_{i\in I_2}$ le sont.
Mais nous savons[21] que c'est le cas si et seulement si $(u_{\sigma(i)}^+)_{i\in I_1}$ et $(u_{\sigma(i)}^-)_{i\in I_1}$ sont sommables.
Soit si et seulement si $(u_{\sigma(i)})_{i\in I_1}$ est sommable, et dans ce cas,

$$\sum_{i\in I_2} u_i = \sum_{i\in I_2} u_i^+ - \sum_{i\in I_2} u_i^- = \sum_{i\in I_1} u_{\sigma(i)}^+ - \sum_{i\in I_1} u_{\sigma(i)}^- = \sum_{i\in I_1} u_{\sigma(i)}.$$

La preuve est alors la même pour les familles de complexes en séparant partie réelle et partie imaginaire. □

[21] Il s'agit de familles de réels positifs.

Corollaire 35.21 – *Si $(u_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ est tel que la série de terme général u_n converge absolument, alors pour toute permutation $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, la série de terme général $u_{\sigma(n)}$ est encore absolument convergente, et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Autrement dit
Pour une série **absolument convergente**, on peut réordonner les termes comme on le souhaite.

Démonstration. C'est le cas particulier où $I_1 = I_2 = \mathbf{N}$. □

Proposition 35.22 : *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de complexes, et soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe une partie finie J_ε de I telle que pour tout $J \in \mathscr{P}_f(I)$,*

$$J_\varepsilon \subset J \Rightarrow \left|\sum_{i\in I} u_i - \sum_{i\in J} u_i\right| < \varepsilon.$$

Démonstration. Dans le cas d'une famille de réels positifs, cela a déjà été mentionné, et c'est essentiellement la caractérisation epsilonesque de la borne supérieure.

Supposons à présent que $(u_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de réels.
Alors il existe une partie finie J_ε^+ de I telle que

$$\forall J \in \mathscr{P}_f(I),\, J_\varepsilon^+ \subset J \Rightarrow \left|\sum_{i\in J} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^+\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Et de même, il existe $J_\varepsilon^- \in \mathscr{P}_f(I)$ telle que

$$\forall J \in \mathscr{P}_f(I),\, J_\varepsilon^- \subset J \Rightarrow \left|\sum_{i\in J} u_i^- - \sum_{i\in I} u_i^-\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit donc $J_\varepsilon = J_\varepsilon^+ \cup J_\varepsilon^-$, et soit $J \in \mathscr{P}_f(I)$ tel que $J_\varepsilon \subset J$.
Alors

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i\in J} u_i - \sum_{i\in I} u_i\right| &= \left|\sum_{i\in J} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^+ - \left(\sum_{i\in J} u_i^- - \sum_{i\in I} u_i^-\right)\right| \\
&\leqslant \left|\sum_{i\in J} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^+\right| + \left|\sum_{i\in J} u_i^- - \sum_{i\in I} u_i^-\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dans le cas d'une famille de complexes, la preuve est la même en séparant partie réelle et partie imaginaire. □

Remarque. Ce résultat est en réalité une caractérisation assez intuitive de la somme : elle nous dit que pour une partie finie «suffisamment grande» de I, la somme finie est suffisamment proche de la somme de la famille.

On pourrait en fait prouver que $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si il existe un réel/un complexe S tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $J_\varepsilon \in \mathscr{P}_f(I)$ tel pour tout $J \in \mathscr{P}_f(I)$ tel que $J_\varepsilon \subset J$, alors $\left|\sum_{i\in J} u_i - S\right| \leqslant \varepsilon$.
On montrerait alors qu'un tel réel/complexe S, lorsqu'il existe est unique, et donc est bien $\sum_{i\in I} u_i$.

> **Proposition 35.23 (Inégalité triangulaire) :** *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres complexes. Alors*
>
> $$\left|\sum_{i\in I} u_i\right| \leqslant \sum_{i\in I} |u_i|.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe par la proposition précédente, il existe $J_{1,\varepsilon}$ et $J_{2,\varepsilon}$ telles que pour tout $J \in \mathscr{P}_f(I)$,

$$J_{1,\varepsilon} \subset J \Rightarrow \left|\sum_{i\in J} u_i - \sum_{i\in I} u_i\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } J_{2,\varepsilon} \subset J \Rightarrow \left|\sum_{i\in J} |u_i| - \sum_{i\in I} |u_i|\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Et alors notons $J_\varepsilon = J_{1,\varepsilon} \cup J_{2,\varepsilon}$.

Par inégalité triangulaire pour les sommes finies,

$$\left|\sum_{j\in J_\varepsilon} u_j\right| \leqslant \sum_{j\in J_\varepsilon} |u_j|.$$

Et alors,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i\in I} u_i\right| &= \left|\sum_{i\in I} u_i - \sum_{i\in J_\varepsilon} u_i + \sum_{i\in J_\varepsilon} u_i\right| \\ &\leqslant \left|\sum_{i\in I} u_i - \sum_{i\in J_\varepsilon} u_i\right| + \left|\sum_{i\in J_\varepsilon} u_i\right| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i\in J_\varepsilon} |u_i| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i\in I} |u_i| + \frac{\varepsilon}{2}. \\ &\leqslant \sum_{i\in I} |u_i| + \varepsilon.\end{aligned}$$

Le seconde inégalité vient du fait que $J_{2,\varepsilon} \subset J_\varepsilon$.

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit bien que

$$\left|\sum_{i\in I} u_i\right| \leqslant \sum_{i\in I} |u_i|.$$

□

Enfin, on peut obtenir une propriété[22] qui a l'air évidente, mais qui finalement nécessite un peu de travail :

[22] La linéarité.

Proposition 35.24 : *Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles sommables à valeurs dans $\mathbf{K}$, avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. Alors pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, $(\lambda u_i + v_i)_{i\in I}$ est sommable, avec*

$$\sum_{i\in I} (\lambda u_i + v_i) = \lambda \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i.$$

Démonstration. La sommabilité de $(\lambda u_i + v_i)_{i\in I}$ découle du fait que pour $i \in I$,

$$|\lambda u_i + v_i| \leqslant |\lambda||u_i| + |v_i|.$$

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, il existe K_n partie finie de I telle que

$$\left|\sum_{i\in K_n} u_i - \sum_{i\in I} u_i\right| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Et alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i\in K_n} u_i = \sum\limits_{i\in I} u_i$.

En procédant de même pour v_i et $\lambda u_i + v_i$, et quitte à agrandir K_n, on peut supposer qu'on a également

$$\sum_{i\in I} v_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in K_n} v_i$$

et également

$$\sum_{i\in I} (\lambda u_i + v_i) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in K_n} (\lambda u_i + v_i).$$

Et alors par linéarité des sommes finies,

$$\sum_{i\in I} (\lambda u_i + v_i) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in K_n} (\lambda u_i + v_i) = \lim_{n\to+\infty} \left(\lambda \sum_{i\in K_n} u_i + \sum_{i\in K_n} v_i\right) = \lambda \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i.$$

□

Corollaire 35.25 – *L'ensemble $\ell^1(I, \mathbf{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I, \mathbf{K})$, et l'application*

$$s : \left| \begin{array}{ccc} \ell^1(I, \mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ (u_i)_{i\in I} & \longmapsto & \sum\limits_{i\in I} u_i \end{array} \right.$$

est une forme linéaire sur $\ell^1(I, \mathbf{K})$.

35.2.3 Sommation par paquets

Le théorème de sommation par paquets reste valable pour calculer la somme d'une famille que l'on sait sommable.

Théorème 35.26 : *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille **sommable** de nombres complexes, et soit $\{I_k,\ k\in K\}$ une partition de I. Alors :*

1. *pour tout $k\in K$, $(u_i)_{i\in I_k}$ est sommable*
2. $\left(\sum_{i\in I_k} u_i\right)_{k\in K}$ *est sommable*
3. $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{k\in K}\left(\sum_{i\in I_k} u_i\right)$.

⚠ Ce théorème nécessite de déjà savoir que la famille est sommable, et ne peut en aucun cas le prouver.
Pour prouver la sommabilité de cette famille, il est possible d'utiliser le théorème par paquets, version positive, appliqué à la famille $(|u_i|)_{i\in I}$.

Démonstration. Commençons par le cas d'une famille à valeurs réelles.
On a donc $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^-$.
Mais les deux familles positives $(u_i^+)_{i\in I}$ et $(u_i^-)_{i\in I}$ sont sommables, et le théorème de sommation par paquets nous donne

$$\sum_{i\in I} u_i^+ = \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} u_i^+ \text{ et } \sum_{i\in I} u_i^- = \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} u_i^-.$$

Donc par linéarité de la somme,

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} u_i^+ - \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} u_i^- = \sum_{k\in K}\left(\sum_{i\in I_k} u_i^+ - \sum_{i\in I_k} u_i^-\right) = \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} u_i.$$

On raisonne de même pour une famille à valeurs complexes en séparant partie réelle et partie imaginaire. □

Exemple 35.27

Considérons la famille $\left(\frac{e^{2ik\frac{\pi}{n}}}{2^n}\right)_{\substack{n,k\in\mathbf{N}^*\\ n>k}}$.

On a donc ici $I = \{(n,k)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^* \mid k<n\}$.

Alors pour $n\in\mathbf{N}^*$, posons $I_n = \{(n,k),\ k\in[\![1,n-1]\!]\}$, de sorte que $I = \bigcup_{n=2}^{+\infty} I_n$.

Puisque I_n est fini la convergence de $\sum_{(n,k)\in I_n}\left|\frac{e^{2i\frac{k\pi}{n}}}{2^n}\right| = \sum_{(n,k)\in I_n}\frac{1}{2^n}$ est évidente.

Notons que cette somme vaut $\frac{n-1}{2^n}$.

Et alors $\sum_{n\geqslant 1}\frac{n-1}{2^n}$ converge par application du critère de d'Alembert : $\frac{n}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n-1} = \frac{n-1}{n}\frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} < 1$.

Donc par le théorème de sommation par paquets positif[23] la famille $\left(\frac{e^{2ik\frac{\pi}{n}}}{2^n}\right)_{\substack{n,k\in\mathbf{N}^*\\ n>k}}$ est sommable.

[23] Il prouve la sommabilité des $\left|\frac{e^{2i\frac{k\pi}{n}}}{2^n}\right|$.

On peut donc appliquer le théorème de sommation général, et ce avec les mêmes paquets :

$$\sum_{(n,k)\in I_n} \frac{e^{2ik\frac{\pi}{n}}}{2^n} = \frac{1}{2^n} \sum_{\omega\in \mathbf{U}_n\setminus\{1\}} \omega = \frac{1}{2^n}\left(\sum_{\omega\in\mathbf{U}_n} \omega - 1\right) = -\frac{1}{2^n}.$$

Et donc il vient,

$$\sum_{\substack{n,k\in\mathbf{N}^*\\ n>k}} \frac{e^{2ik\frac{\pi}{n}}}{2^n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{-1}{2^n} = -\frac{1}{2}.$$

35.3 Interversion de sommes

Les résultats de cette partie viennent généraliser ceux des sommes finies, pour lesquelles nous avons l'habitude de permuter, lorsque ça nous arrange, deux symboles $\sum$.

35.3.1 Théorèmes de Fubini et séries doubles

Théorème 35.28 (Théorème de Fubini positif a.k.a. Fubini-Tonnelli) : *Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de réels positifs indexée par un produit cartésien $I\times J$. Alors*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right).$$

En particulier, la famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable si et seulement si :

1. *pour tout $i\in I$, $(u_{i,j})_{j\in J}$ est sommable*
2. $\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right)_{i\in I}$ *est sommable.*

Démonstration. C'est le théorème de sommation par paquets avec

$$I\times J = \bigcup_{i\in I}\{i\}\times J = \bigcup_{j\in J} I\times\{j\}.$$

□

> ⚠ Attention !
> On suppose donc la famille sommable. Ce qui peut se prouver à l'aide du théorème de Fubini positif appliqué aux $|u_{i,j}|$.

Théorème 35.29 (Théorème de Fubini) : *Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}\in \ell^1(I\times J,\mathbf{C})$. Alors*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right).$$

Démonstration. Là encore, c'est le théorème de sommation par paquets, qui s'applique puisque la famille est sommable. □

Exemple 35.30

Calculons $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}$.

Posons donc $u_{n,k} = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{k!} & \text{si } k\geqslant n\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

> Remarque
> L'existence de cette quantité est garantie par la majoration des restes dans le critère des séries alternées, qui permet d'affirmer que
> $$\left|\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\right| \leqslant \frac{1}{n!}.$$

Alors à $k \in \mathbf{N}$ fixé, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |u_{n,k}| = \sum_{n=0}^{k} |u_{n,k}| = \frac{k+1}{k!}$.

Puisque $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{k+1}{k!}$ converge, la famille $(u_{n,k})_{n,k\in\mathbf{N}}$ est sommable, par Fubini positif.

Donc on peut appliquer Fubini :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k}\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{k+1}{k!}.\end{aligned}$$

Mais $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{k}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{1}{(k-1)!} = -\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!} = -e^{-1}$.

Et donc en conclusion, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!} = 0$.

Proposition 35.31 : *Soient $(u_i)_{i\in J}$ et $(v_j)_{j\in J}$ deux familles sommables de complexes. Alors $(u_iv_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_iv_j = \left(\sum_{i\in I} u_i\right)\left(\sum_{j\in J} v_j\right).$$

Démonstration. Par le théorème de Fubini positif, on a, pour tout $i \in I$, $(|u_iv_j|)_{j\in J} = (|u_i||v_j|)_{j\in J}$ qui est sommable puisque $(|v_j|)_{j\in J}$ l'est et que $|u_i|$ est une constante.

Et alors $\sum_{j\in J} |u_iv_j| = |u_i| \displaystyle\sum_{j\in J} |v_j|$.

Et donc $\displaystyle\left(\sum_{j\in J} |u_iv_j|\right)_{i\in I} = \left(\left(\sum_{j\in J} |v_j|\right)|u_i|\right)_{i\in I}$ est sommable puisque $(|u_i|)_{i\in I}$ l'est.

Donc par le théorème de Fubini positif, $(|u_iv_j|)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable.

Donc le théorème de Fubini s'applique[24] :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_iv_j = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_iv_j\right) = \sum_{i\in I}\left(u_i\left(\sum_{j\in J} v_j\right)\right) = \left(\sum_{j\in J} v_j\right)\left(\sum_{i\in I} u_i\right).$$

□

[24] Ce qui conduit aux mêmes arguments, sans les valeurs absolues/modules.

35.3.2 Produit de Cauchy

Proposition 35.32 : *Soit $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbf{N}^2}$ une famille sommable de complexes. Alors*

$$\sum_{(m,n)\in\mathbf{N}^2} u_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n} u_{p,q}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_{k,n-k}\right).$$

Démonstration. Il s'agit encore une fois d'appliquer le théorème de sommation par paquets, cette fois en notant que $\mathbf{N}^2 = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\{(p,q)\in\mathbf{N}^2 \mid p+q=n\}$.

Notons que les «paquets» sont finis, et donc la sommabilité de la famille $(u_{k,n-k})_{0\leqslant k\leqslant n}$ est alors automatique.

Mais le théorème de sommation par paquets nous garantit alors que la famille $\left(\sum_{k=0}^{n} u_{k,n-k}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est sommable. □

Corollaire 35.33 (Produit de Cauchy de séries absolument convergentes) :
Soient $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries absolument convergentes. Alors la série de terme général $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ est absolument convergente et

$$\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

Démonstration. Puisque les séries $\sum_p u_p$ et $\sum_q v_q$ sont absolument convergentes, les familles $(u_p)_{p\in\mathbf{N}}$ et $(v_q)_{q\in\mathbf{N}}$ sont sommables.
Comme expliqué à la proposition 35.31, la famille $(u_p v_q)_{(p,q)\in\mathbf{N}^2}$ est sommable.
Et donc la proposition précédente s'applique, nous garantissant la convergence absolue de la série de terme général w_n, et nous donne directement

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} w_n = \sum_{(p,q)\in\mathbf{N}^2} u_p v_q = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q\right).$$

□

Dans le cas particulier où $u_n = a_n x^n$ et $v_n = b_n x^n$, on a alors, sous les hypothèses d'absolue convergence évoquées ci-dessus[25] :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n.$$

Il faut y voir là une généralisation du produit de deux polynômes.

⚠ Pour des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ qui sont convergentes mais pas absolument convergentes, il se peut que leur produit de Cauchy diverge.
Par exemple, si $a_n = b_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, alors $\sum a_n$ converge[26] mais ne converge pas absolument.
Et donc a alors $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \dfrac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$.
Or $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geqslant \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = 1$, si bien que $\sum c_n$ diverge grossièrement.

Exemple 35.34 Exponentielle complexe

Oublions tout ce que nous savons au sujet de l'exponentielle, et redéfinissons nos objets.

Pour $z \in \mathbf{C}$, on pose $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$, série qui est absolument convergente par exemple par le critère de d'Alembert[27].
Alors, pour $z, z' \in \mathbf{C}$, on a

$$e^z e^{z'} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z'^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k z'^{n-k}}{k!(n-k)!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k z'^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+z')^n}{n!} = e^{z+z'}.$$

[25] Et vous rencontrerez de nombreux tels exemples l'an prochain lors de l'étude de ce qu'on appelle les séries entières.

[26] Par application du critère des séries alternées.

[27] Ou par comparaison à une série de Riemann.

En particulier, ceci est valable pour z, z' réels, et si $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, alors $e^z = e^a e^{ib}$.
Puisque par ailleurs $e^0 = 1$, il vient donc $e^{-z}e^z = e^0 = 1$, et donc $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$.

Enfin, pour $\theta \in \mathbf{R}$, posons $\cos(\theta) = \mathrm{Re}(e^{i\theta})$ et $\sin(\theta) = \mathrm{Im}(e^{i\theta})$, de sorte que $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.
Alors il vient

$$\cos(\theta+\theta') = \mathrm{Re}(e^{i(\theta+\theta')}) = \mathrm{Re}((\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta'+i\sin(\theta')) = \cos(\theta)\cos(\theta')-\sin(\theta)\sin(\theta').$$

On retrouve sur le même principe toutes les formules d'addition.

Par ailleurs, pour $z = i\theta$, on a

$$\mathrm{Re}((i\theta)^n) = \theta^n \,\mathrm{Re}(i^n) = \begin{cases} (-1)^p\theta^{2p} & \text{si } n = 2p \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

et de même $\mathrm{Im}((i\theta)^n) = \theta^n \,\mathrm{Im}(i^n) = \begin{cases} (-1)^p\theta^{2p+1} & \text{si } n = 2p+1 \text{ est impair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ si bien que

$$\cos(\theta) = \mathrm{Re}(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{(i\theta)^n}{n!}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{\theta^{2p}}{(2p)!}$$

et de même $\sin(\theta) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{\theta^{2p+1}}{(2p+1)!}$.

La théorie des séries entières qui sera étudiée l'an prochain permettra alors de justifier le fait qu'on puisse dériver terme à terme ces sommes infinies, et de retrouver $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$.

UN PETIT COMPLÉMENT SUR LA DÉNOMBRABILITÉ

La notion de dénombrabilité introduite ici sera étudiée davantage en seconde année.
Un ensemble est dit dénombrable s'il est équipotent à $\mathbf{N}$.
Il est au plus dénombrable s'il est équipotent à une partie de $\mathbf{N}$. On peut alors prouver que c'est le cas si et seulement si il est fini ou dénombrable.

On peut alors prouver que si $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'ensembles au plus dénombrables, alors $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbf{N}} I_n$ est encore au plus dénombrable[28]
Autrement dit, une union dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est encore au plus dénombrable.

[28] Voir le DM sur le théorème de Cantor-Bernstein pour une preuve.

Proposition 35.35 : *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres complexes. Alors $\{i \in I \mid u_i \neq 0\}$ est au plus dénombrable.*

Démonstration. Notons $S = \displaystyle\sum_{i\in I} |u_i| < +\infty$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, notons $I_n = \{i \in I \mid |u_i| \geqslant \frac{1}{n}\}$.
Alors $\displaystyle\sum_{i\in I_n} |u_i| \leqslant \sum_{i\in I} |u_i| = S$.
Si I_n contenait au moins $\lfloor nS \rfloor + 1$ éléments distincts, on aurait $\displaystyle\sum_{i\in I_n} |u_i| \geqslant \sum_{i\in I_n} \frac{1}{n} > \frac{1}{n} nS = S$
ce qui est absurde.
Ainsi, I_n est fini, et en particulier au plus dénombrable.
Et donc $\{i \in I \mid |u_i| \neq 0\} = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} I_n$ est au plus dénombrable. □

Et donc pour étudier les familles sommables, il suffit de savoir étudier les familles sommables indicées par un ensemble au plus dénombrable.
Le cas des sommes finies étant trivial, il suffit donc de savoir étudier les familles indicées par un ensemble dénombrable, c'est-à-dire les familles $(u_{\sigma}(n))_{n\in\mathbf{N}}$, où $\sigma : \mathbf{N} \to I$, avec I un ensemble dénombrable.
Mais l'étude d'une telle famille se ramène donc à l'étude de l'absolue convergence de la série $\sum u_{\sigma(n)}$.
Donc la théorie des familles sommables n'est pas vraiment plus riche que celle des séries absolument convergentes, bien que l'on préfère disposer d'outils du type Fubini plutôt que de devoir expliciter des bijections entre $\mathbf{N}$ et un ensemble dénombrable.