

GROUPES SYMÉTRIQUES ET DÉTERMINANTS

Il s'agit dans ce chapitre de généraliser la notion de déterminant que nous avons déjà rencontrée pour les matrices 2×2 .

Originellement introduits pour l'étude de systèmes d'équations linéaires, ce sont aujourd'hui des outils omniprésents en mathématiques, en algèbre linéaire bien entendu (systèmes d'équations, inversibilité de matrices, formule générale pour l'inverse d'une matrice $n \times n$), mais aussi en géométrie (volume d'un parallélépipède à n dimensions, définition du produit vectoriel), ou encore en analyse (étude d'équations différentielles linéaires du second ordre¹, formule de changement de variable pour des intégrales multiples).

¹ À l'aide d'un déterminant appelé *wronskien* dont vous croiserez la route l'an prochain.

Dans tout le chapitre, $\mathbf{K}$ désigne un corps (quelconque, même si une fois de plus le programme nous demanderait de ne considérer que les cas où $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$).

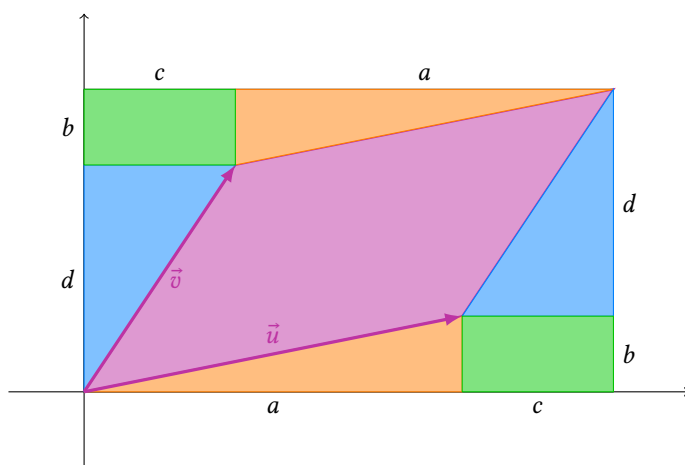
32.1 MOTIVATIONS GÉOMÉTRIQUES À L'ÉTUDE DU DÉTERMINANT

Cette partie a pour but de motiver géométriquement l'introduction du déterminant. On cherche à y faire passer des idées, quitte à faire des concessions à la rigueur, et nous allons donc y parler d'aire et d'orientation sans définir du tout ce que nous entendons par là. Laissez-vous guider par votre intuition, acceptez de ne pas tout comprendre et lisez ce paragraphe **jusqu'au bout**. Puis relisez-le une seconde fois, la notion d'orientation devra déjà vous paraître plus claire à la seconde lecture.

Pour commencer, commençons par une excellente raison de vouloir relier des aires de parallélogrammes et des déterminants 2×2 (les seuls que nous connaissons jusqu'à présent), en considérant deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ du plan².

Alors l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est : $(a+c)(b+d) - ab - cd - 2cb = ad - bc$.

² Les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant entendues dans un repères orthonormé direct.



Comme nous l'avons déjà mentionné lors de l'étude des intégrales, la formalisation de la notion intuitive d'aire dans le plan (ou de volume en plus grande dimension) n'est pas triviale.

Nous n'allons sûrement pas définir l'aire d'un cercle ici, mais ne considérer que des aires de parallélogrammes.

Dans toute la suite, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan, on note $\mathcal{P}(\vec{u}, \vec{v})$ le parallélogramme orienté construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Sans définir ce qu'on entend vraiment par «orienté», signalons qu'on tient à distinguer $\mathcal{P}(\vec{u}, \vec{v})$ et $\mathcal{P}(\vec{v}, \vec{u})$, ces deux parallélogrammes ayant des aires orientées (voir ci-dessous pour les détails) de signes opposés.

Plaçons-nous dans le plan muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, orthonormée directe³.

Si $\vec{u}, \vec{v}$ sont deux vecteurs du plan, notons $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v})$ l'aire orientée de $\mathcal{P}(\vec{u}, \vec{v})$.

Orientée signifiant que si $(\vec{u}, \vec{v})$ a même orientation⁴ que $(\vec{i}, \vec{j})$, alors on compte l'aire au sens usuel du terme (donc positive), et sinon on considère l'opposé de l'aire.

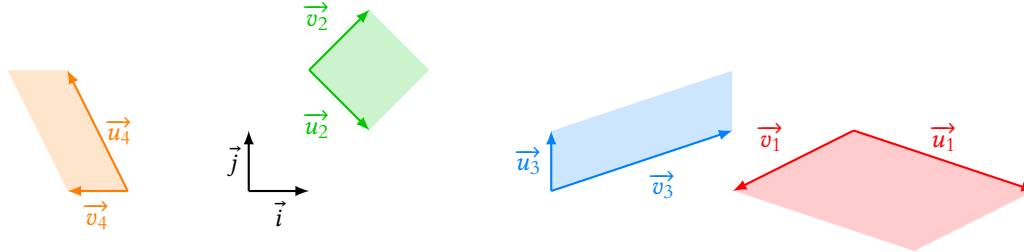


FIGURE 32.1 – $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_2, \vec{v}_2)$ et $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_4, \vec{v}_4)$ sont positifs, alors que $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \vec{v}_1)$ et $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_3, \vec{v}_3)$ sont négatifs.

Plusieurs propriétés des déterminants se lisent alors géométriquement :

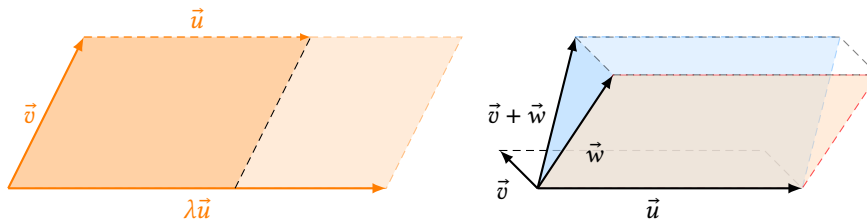


FIGURE 32.2 – Figure de gauche : $\det_{\mathcal{B}}(\lambda\vec{u}, \vec{v}) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v})$.

Figure de droite : l'aire du parallélogramme bleu ($\mathcal{P}(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w})$) est égale à la somme des deux autres ($\mathcal{P}(\vec{u}, \vec{v})$ en blanc et $\mathcal{P}(\vec{u}, \vec{w})$ en orange).

Donc l'application $\det_{\mathcal{B}}$, qui à un couple de vecteurs du plan associe un scalaire «doit» vérifier :

1. $\det_{\mathcal{B}}(\vec{v}, \vec{u}) = -\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v})$ (renversement de l'orientation)
2. $\det_{\mathcal{B}}(\lambda\vec{u}, \vec{v}) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v})$
3. $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u} + \vec{u}', \vec{v}) = \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) + \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}', \vec{v})$
4. si $\vec{u} = \vec{v}$, alors $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, puisqu'il s'agit alors de l'aire d'un parallélogramme «aplati». Plus généralement, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Les points 2) et 3) se condensent simplement sous la forme suivante : on a

$$\det_{\mathcal{B}}(\lambda\vec{u} + \vec{u}', \vec{v}) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) + \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}', \vec{v}).$$

Autrement dit, à $\vec{v}$ fixé, l'application $\vec{u} \mapsto \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v})$ est linéaire. C'est ce que nous appellerons la **linéarité à gauche** du déterminant.

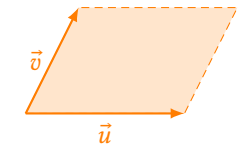
De même, on doit avoir $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \lambda\vec{v} + \vec{v}') = \lambda \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) + \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}')$ (ce sera la **linéarité à droite**).

Notons que cela découle alors directement du point 1) et de la linéarité à gauche car

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \lambda\vec{v} + \vec{v}') = -\det_{\mathcal{B}}(\lambda\vec{v} + \vec{v}', \vec{u}) = -\lambda \det_{\mathcal{B}}(\vec{v}, \vec{u}) - \det_{\mathcal{B}}(\vec{v}', \vec{u}) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) + \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}').$$

Dans le cas général, si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$, alors

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) &= \det_{\mathcal{B}}(x\vec{i} + y\vec{j}, x'\vec{i} + y'\vec{j}) \\ &= x \det_{\mathcal{B}}(\vec{i}, x'\vec{i} + y'\vec{j}) + y \det_{\mathcal{B}}(\vec{j}, x'\vec{i} + y'\vec{j}) \end{aligned}$$



Le parallélogramme $\mathcal{P}(\vec{u}, \vec{v})$

³ Au sens intuitif du terme, nous en donnerons une définition précise plus tard.

⁴ Une autre manière de le dire est : si l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ a une mesure principale (dans $] -\pi, \pi[$) de même signe que celle de $(\vec{i}, \vec{j})$.

⚠ Attention !

Contrairement aux apparences, cette figure est bien dessinée dans le plan (en deux dimensions), il n'est question que de parallélogrammes et d'aires, pas de volumes.

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{xx' \det_{\mathcal{B}}(\vec{i}, \vec{i})}_{=0} + \underbrace{xy' \det_{\mathcal{B}}(\vec{i}, \vec{j})}_{=1} + \underbrace{x'y \det_{\mathcal{B}}(\vec{j}, \vec{i})}_{=-\det_{\mathcal{B}}(\vec{i}, \vec{j})=-1} + \underbrace{yy' \det_{\mathcal{B}}(\vec{j}, \vec{j})}_{=0} \\
&= xy' - yx'.
\end{aligned}$$

Linéarité à droite.

Notons, et ce n'est sûrement pas un hasard, qu'il s'agit là du déterminant⁵ de

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \\ x & x' \\ y & y' \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{matrix}.$$

Cette formule donnant l'aire d'un parallélogramme pourrait également se retrouver par des arguments géométriques simples, en manipulant des rectangles.

Notons au passage que $\det_{\mathcal{B}}(\lambda\vec{u}, \lambda\vec{v}) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \lambda\vec{v}) = \lambda^2 \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v})$ qui est un résultat bien connu («quand on multiplie les longueurs par λ , on multiplie les aires par λ^2 »).

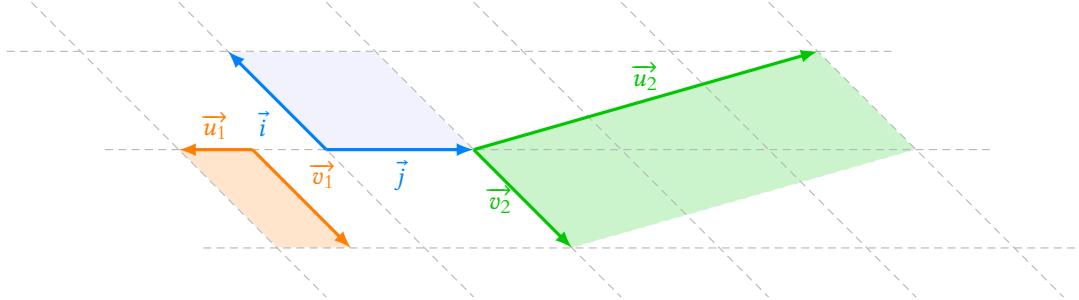
Maintenant, était-il vraiment indispensable que notre base $\mathcal{B}$ soit orthonormée ? Non, nous ne l'avons utilisé à aucun moment !

Donc soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\mathbb{R}^2$, et prenons comme unité d'aire orientée l'aire de $\mathcal{P}(\vec{i}, \vec{j})$.

Pour $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs du plan, notons alors $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v})$ l'aire orientée de $\mathcal{P}(\vec{u}, \vec{v})$, au sens du nombre de parallélogrammes $\mathcal{P}(\vec{i}, \vec{j})$ nécessaires pour le recouvrir, agrémenté d'un éventuel signe moins si l'orientation de $(\vec{u}, \vec{v})$ n'est pas la même que celle de $(\vec{i}, \vec{j})$.

Entendons-nous bien : ici l'orientation ne dépend que de $(\vec{i}, \vec{j})$, et n'est pas forcément l'orientation du plan dont on a l'habitude⁶ : choisir la base $\mathcal{B}$, c'est choisir une orientation du plan, c'est-à-dire quelles aires orientées sont positives, et lesquelles sont négatives.

Par exemple, sur la figure suivante, où $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ est orientée dans le sens horaire, $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \vec{v}_1) = -\frac{1}{2}$ et $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_2, \vec{v}_2) = +3$.



On prouve sans difficulté que les propriétés 1) à 4) évoquées dans le cas d'une base orthonormée restent valables.

Par ailleurs, si l'on se donne deux bases $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ et $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, alors $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v})$ est le nombre de parallélogrammes $\mathcal{P}(\vec{i}, \vec{j})$ nécessaires pour recouvrir $\mathcal{P}(\vec{u}, \vec{v})$.

Mais pour recouvrir $\mathcal{P}(\vec{i}, \vec{j})$, il faut $\det_{\mathcal{B}'}(\vec{i}, \vec{j})$ parallélogrammes $\mathcal{P}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Et donc pour recouvrir $\mathcal{P}(\vec{u}, \vec{v})$, il faut $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) \times \det_{\mathcal{B}'}(\vec{i}, \vec{j})$ parallélogrammes de la forme $\mathcal{P}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

En d'autres termes, nous devons avoir

$$\det_{\mathcal{B}'}(\vec{u}, \vec{v}) = \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) \times \det_{\mathcal{B}'}(\vec{i}, \vec{j}) = \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) \times \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \quad (\text{formule de changement de base})$$

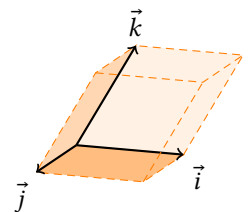
Une étude similaire pourrait être conduite dans $\mathbb{R}^3$, où l'on prendrait comme unité de volume orienté le volume d'un parallélépipède formé sur les trois vecteurs d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

La notion d'orientation est un peu plus difficile à appréhender dans l'espace, mais vous l'avez déjà rencontrée en physique et/ou en SI, c'est la «règle de la main droite» ou «règle des trois doigts» (et donc la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ représentée ci-contre est une base indirecte avec l'orientation usuelle).

Il n'y a alors que deux orientations possibles pour une famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de trois vecteurs non coplanaires : main droite ou main gauche. Donc la notion de volume orienté a bien un sens : c'est le volume au sens usuel du terme, affublé d'un éventuel signe moins suivant l'orientation.

⁵ Au sens où nous avons défini le déterminant d'une matrice 2×2 .

⁶ le sens trigonométrique.



Une unité de volume orienté dans l'espace

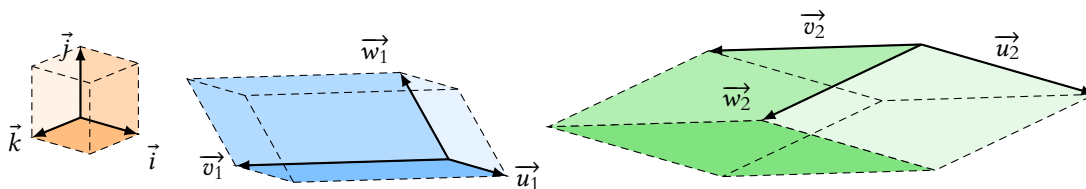


FIGURE 32.3 – Si la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est directe, c'est aussi le cas $(\vec{u}_2, \vec{v}_2, \vec{w}_2)$, mais la base $(\vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{w}_1)$ est indirecte.

Pour trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de l'espace, notons $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ le volume orienté du parallélépipède construit sur $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$.

Ce volume est nul si et seulement si $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, soit si et seulement si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une famille liée.

Par ailleurs, tout échange de deux des trois vecteurs change⁷ l'orientation du parallélépipède, et donc

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = \det_{\mathcal{B}}(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}) = \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}) = -\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}).$$

En revanche, une permutation circulaire des trois vecteurs préserve l'orientation et donc

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) = \det_{\mathcal{B}}(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}).$$

Il n'est pas très difficile de se convaincre que multiplier l'un des trois vecteurs par λ multiplie le volume par λ , et donc que multiplier les trois vecteurs par λ multiplie le volume par λ^3 . En revanche, il est graphiquement plus difficile⁸ de se convaincre que

⁷ À vos mains droites pour vous en convaincre !

⁸ Et nous ne le ferons donc pas.

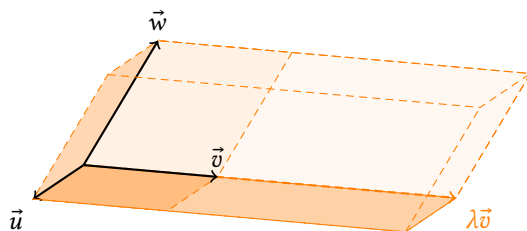


FIGURE 32.4 – $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \lambda\vec{v}, \vec{w}) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

$\det_{\mathcal{B}}(\vec{u} + \vec{u}', \vec{v}, \vec{w}) = \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}', \vec{v}, \vec{w})$, et qu'il en est de même pour les deux autres variables.

On dit alors que $\det_{\mathcal{B}}$ est linéaire par rapport à chacune de ses variables.

32.2 FORMES MULTILINÉAIRES ALTERNÉES

32.2.1 Formes multilinéaires

Définition 32.1 – Soient $E_1, \dots, E_n, F$ des espaces vectoriels sur $\mathbf{K}$, et soit $f : E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \rightarrow F$.

On dit que f est une application **multilinéaire** ou **n -linéaire** sur $E_1 \times \dots \times E_n$ si : pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, et pour tout $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_{i-1} \times E_{i+1} \times \dots \times E_n$ fixé, l'application $f_i : x \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, \underset{i^{\text{ème position}}}{x}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ est linéaire de E_i

dans F .

Autrement dit si $\forall (x, y) \in E_i^2, \forall \lambda \in \mathbf{K}$,

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda x + y, x_{i+1}, \dots, x_n) = \lambda f(x_1, \dots, x_{i-1}, \underset{i}{x}, x_{i+1}, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_{i-1}, \underset{i}{y}, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Dans le cas particulier où $n = 2$, on retrouve la définition d'application bilinéaire.



Une application multilinéaire n'est généralement pas une application linéaire sur $E_1 \times \dots \times E_n$.

Tout simplement car on a alors

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda f(x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^2 f(x_1, x_2, \lambda x_3, \dots, \lambda x_n) = \dots = \lambda^n f(x_1, \dots, x_n).$$

Alors que pour une application linéaire sur l'espace produit, on devrait simplement avoir

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = f(\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n)) = \lambda f(x_1, \dots, x_n).$$

Exemples 32.2

- Dans $\mathbf{R}[X]$, l'application $(P, Q) \mapsto PQ$ est bilinéaire, et plus généralement, $(P_1, \dots, P_n) \mapsto P_1 P_2 \dots P_n$ est n -linéaire.
- Le produit matriciel $(A, B) \mapsto AB$ est bilinéaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ dans $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbf{K})$: c'est une conséquence de la distributivité du produit.
- L'application $\det_2 : ((a, b), (c, d)) \mapsto ad - bc = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est bilinéaire sur $\mathbf{K}^2$.

En effet, pour $(a, b), (a', b'), (c, d) \in \mathbf{K}^2$ et $\lambda \in \mathbf{K}$, on a

$$\begin{aligned} \det(\lambda(a, b) + (a', b'), (c, d)) &= \det((\lambda a + a', \lambda b + b'), (c, d)) = (\lambda a + a')d - (\lambda b + b')c \\ &= \lambda(ad - bc) + (a'd - b'c) = \lambda \det((a, b), (c, d)) + \det((a', b'), (c, d)). \end{aligned}$$

Proposition 32.3 : Soit $f : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ une application multilinéaire, et soit $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$.
S'il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $x_i = 0_{E_i}$, alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0_F$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la linéarité de f_i , et du fait que l'image du vecteur nul par une application linéaire est le vecteur nul. $\square$

Définition 32.4 – Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel, et soit $n \in \mathbf{N}^*$. Une application multilinéaire $\varphi : E^n \rightarrow \mathbf{K}$ est appelée **forme n -linéaire** sur E .

⚠ Attention !

Comme pour les **formes** linéaires, si on parle de **forme n -linéaire**, l'espace d'arrivée est nécessairement $\mathbf{K}$, le corps des scalaires.

32.2.2 Formes alternées

Définition 32.5 – Soit $\varphi : E^n \rightarrow \mathbf{K}$ une forme n -linéaire. On dit que φ est **alternée** si $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$ et $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, avec $i \neq j$,

$$x_i = x_j \Rightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Autrement dit, dès que deux éléments du n -uplet $(x_1, \dots, x_n)$ sont égaux, l'image de ce n -uplet par φ est nulle.

Exemples 32.6

- Le produit scalaire dans le plan n'est pas alterné car $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$, qui n'est nul que si $\vec{u} = \vec{0}$.
- L'application $\det$ définie plus tôt sur $\mathbf{K}^2 \times \mathbf{K}^2$ est alternée car $\det((a, b), (a, b)) = ab - ab = 0$.

Proposition 32.7 : Soit $\varphi : E^n \rightarrow \mathbf{K}$ une forme n -linéaire alternée. Alors φ est **antisymétrique** : $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ avec $i < j$, on a

$$\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -\varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n).$$

Autrement dit, permuter deux des vecteurs du n -uplet $(x_1, \dots, x_n)$ change la valeur de son image par φ en son opposée.

Démonstration. Pour alléger les notations, nous ne faisons dans la suite apparaître que les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ variables.

On a $\varphi(x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, x_i + x_j, \dots, x_n) = 0$.

Mais par n -linéarité,

$$\begin{aligned} \varphi(\dots, x_i + x_j, \dots, x_i + x_j, \dots) &= \varphi(\dots, x_i, \dots, x_i + x_j, \dots) + \varphi(\dots, x_j, \dots, x_i + x_j, \dots) \\ &= \underbrace{\varphi(\dots, x_i, \dots, x_i, \dots)}_{=0} + \varphi(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) + \varphi(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots) + \underbrace{\varphi(\dots, x_j, \dots, x_j, \dots)}_{=0} \\ &= \varphi(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) + \varphi(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots). \end{aligned}$$

Linéarité par rapport à la $i^{\text{ème}}$ variable.

Et donc on en déduit que

$$\varphi(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) + \varphi(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) = -\varphi(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots).$$

□

Proposition 32.8 : Une forme n -linéaire $\varphi : E^n \rightarrow \mathbf{K}$ antisymétrique est alternée.

Démonstration. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$ avec $x_i = x_j, i < j$. Alors

$$\varphi(x) = \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -\varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) = -\varphi(x).$$

Donc $2\varphi(x) = 0$, si bien que $\varphi(x) = 0$.

□

Proposition 32.9 : Soit $\varphi : E^n \rightarrow \mathbf{K}$ une forme n -linéaire alternée sur E . Alors :

1. l'image par φ d'une famille liée est nulle.
2. la valeur de φ ne change pas si on ajoute à une variable une combinaison linéaire des autres variables.

Petite arnaque

En réalité, il existe des corps sur lesquels ceci est faux, qui sont en gros tous ceux qui contiennent $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, car dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, $2 = 0$, et donc dans tout $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ -espace vectoriel E , pour tout $x \in E$, $2x = 0_E$, sans que pour autant $x = 0_E$. Plus généralement, cette propriété est fautive dans tous les corps $\mathbf{K}$ tels que $2 = 0$, (où $2 = 1_{\mathbf{K}} + 1_{\mathbf{K}}$), appelés *corps de caractéristique 2*. Ce n'est pas le cas dans $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, seuls corps officiellement au programme.

Démonstration. 1. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille liée. Alors il existe $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et des

scalaires $(\lambda_i)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}}$ tels que $x_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \lambda_i x_i$. Et donc

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, \dots, x_n) &= \varphi\left(x_1, \dots, \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \lambda_i x_i, \dots, x_n\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \varphi(x_1, \dots, \underset{\uparrow i}{x_i}, \dots, \underset{\uparrow k}{\lambda_i x_i}, \dots, x_n) + \sum_{i=k+1}^n \varphi(x_1, \dots, \underset{\uparrow k}{\lambda_i x_i}, \dots, \underset{\uparrow i}{x_i}, \dots, x_n) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) + \sum_{i=k+1}^n \lambda_i \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. Soient $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, et soient $(\lambda_i)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}}$ des scalaires. Alors

$$\varphi \left(x_1, \dots, x_k + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \lambda_i x_i, \dots, x_n \right) = \varphi(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) + \varphi \left(x_1, \dots, \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \lambda_i x_i, \dots, x_n \right).$$

Mais la famille $\left(x_1, \dots, \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \lambda_i x_i, \dots, x_n \right)$ est liée et donc son image par φ est nulle.

□

32.2.3 Formes n -linéaires alternées en dimension n

Proposition 32.10 : Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension n , de base $(e_1, \dots, e_n)$, et soit $\varphi : E^p \rightarrow \mathbf{K}$ une forme p -linéaire. .
Soit alors $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$, et notons $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq n}$ les coordonnées de x_j , de sorte que

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i.$$

$$\text{Alors : } \varphi(x_1, \dots, x_p) = \sum_{\substack{1 \leq i_1 \leq n \\ 1 \leq i_2 \leq n \\ \vdots \\ 1 \leq i_p \leq n}} a_{i_1,1} a_{i_2,2} \dots a_{i_p,p} \varphi(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}).$$

Remarque

Notons que p et n peuvent être différents.

Démonstration. Il s'agit d'appliquer successivement les linéarités par rapport aux différentes variables :

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, \dots, x_p) &= \varphi \left(\sum_{i_1=1}^n a_{i_1,1} e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^n a_{i_2,2} e_{i_2}, \dots, \sum_{i_p=1}^n a_{i_p,p} e_{i_p} \right) \\ &= \sum_{i_1=1}^n a_{i_1,1} \varphi \left(e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^n a_{i_2,2} e_{i_2}, \dots, \sum_{i_p=1}^n a_{i_p,p} e_{i_p} \right) \\ &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n a_{i_1,1} a_{i_2,2} \varphi \left(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, \sum_{i_p=1}^n a_{i_p,p} e_{i_p} \right) \\ &= \dots \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i_1 \leq n \\ 1 \leq i_2 \leq n \\ \vdots \\ 1 \leq i_p \leq n}} a_{i_1,1} a_{i_2,2} \dots a_{i_p,p} \varphi(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) \end{aligned}$$

□

Nous pouvons aller plus loin dans le cas où p est égal à n , la dimension de E , et où φ est alternée.

En effet, la somme-ci-dessus est donc une somme qui porte sur tous les n -uplets $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ de $\llbracket 1, n \rrbracket^n$.

Mais un tel n -uplet peut être identifié à une application σ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans lui-même, où $\sigma(k) = i_k$.

Autrement dit, on a, avec les notations ci-dessus :

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \llbracket 1, n \rrbracket^{\llbracket 1, n \rrbracket}} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n} \varphi(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)}).$$

Lorsque σ n'est pas bijective, elle n'est pas injective⁹, et donc deux des $e_{\sigma(i)}$ sont égaux. Dans ce cas, φ étant alternée, $\varphi(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = 0$.

⁹ Car une application entre deux ensembles finis de même cardinal est injective si et seulement si elle est bijective.

Donc la somme ci-dessus, qui comportait n^n termes, ne porte en fait que sur les permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ (et donc compte tout de même $n!$ termes¹⁰), de sorte que

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n} \varphi(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)}).$$

Mais lorsque σ est une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$, le n -uplet $(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$ comporte une et une seule fois chacun des e_i , $1 \leq i \leq n$.

Et alors, par échanges successifs de deux termes, on peut réordonner ce n -uplet pour obtenir $(e_1, \dots, e_n)$. Mais chacun de ces échanges aura eu pour effet¹¹ de faire apparaître un facteur -1 .

Donc au final, on doit arriver à $\varphi(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \varphi(e_1, \dots, e_n)$, où $\varepsilon(\sigma)$ doit valoir 1 ou -1 , suivant la parité du nombre d'échanges de deux termes qu'il nous a fallu réaliser pour «réordonner» le n -uplet $(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$.

Au final, on a donc

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} \right) \varphi(e_1, \dots, e_n).$$

Cette formule est loin d'être anecdotique : elle nous dit qu'une forme n -linéaire alternée (où n est la dimension de E , et rien d'autre !) est entièrement déterminée par l'image d'une base : si on connaît $\varphi(e_1, \dots, e_n)$, alors on peut calculer $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

Le but de la partie suivante est de mieux comprendre ce qu'est ce $\varepsilon(\sigma) \in \{-1, 1\}$, notamment qu'il est bien défini, ce qui nous permettra notamment de prouver qu'il existe toujours bien des formes n -linéaires alternées si $\dim E = n$.

Notons que nous avons une bonne intuition de ce que *doit être* $\varepsilon(\sigma)$: c'est -1 si le nombre de permutations de deux termes qu'il faut pour réordonner $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$ en $(1, 2, \dots, n)$.

S'il semble assez intuitif qu'on puisse arriver à un tel réagencement par permutations successives de deux termes, il faudra le prouver rigoureusement. Sans compter qu'il existe probablement différentes manières de permuter des termes deux à deux pour arriver à ce but. Ces manières donnent-elles la même valeur à $\varepsilon(\sigma)$?

32.3 GROUPES SYMÉTRIQUES

Tous les résultats qui mentionnent des isomorphismes entre groupes, ou encore l'ordre d'un élément¹² débordent du programme de première année (et ne figurent même pas au programme de PSI), et ne sont là que pour aiguïser/satisfaire la curiosité de certains. Vous pouvez oublier ces résultats si vous le souhaitez.

32.3.1 Généralités

Nous savons que muni de la composition des applications, l'ensemble $\mathfrak{S}_n$ est muni d'une structure de groupe fini, de cardinal $n!$, appelé **groupe symétrique sur $\llbracket 1, n \rrbracket$** . Il est non commutatif dès que $n \geq 3$.

Dans la suite, si σ et τ sont deux éléments de $\mathfrak{S}_n$, nous noterons $\sigma\tau$ plutôt que $\sigma \circ \tau$, et id plutôt que $\text{id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}$.

Un élément $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ sera dans la suite représenté par une matrice $2 \times n$ sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n-1) & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ est l'élément de $\mathfrak{S}_5$ qui échange 1 et 2, qui envoie 3 sur 5, 4 sur 3 et 5 sur 4.

Pour la culture, mentionnons le résultat classique suivant (totalement hors-programme et assez difficile, vous pouvez ne pas le lire du tout !), dû à Cayley¹³, qui dit que la structure

¹⁰ Ce qui chiffre vite lorsque n est grand...

Rappel

On a noté $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$, c'est-à-dire des bijections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans lui-même.

¹¹ C'est l'antisymétrie de φ .

¹² Notion qui n'a été définie que dans un DM facultatif.

Remarque

Plus qu'une matrice, voyons surtout là un tableau à 2 lignes et n colonnes, c'est tout ce dont nous aurons besoin.

¹³ Arthur CAYLEY (1821–1895), algébriste britannique à qui on doit notamment la représentation matricielle des applications linéaires.

de groupe de $\mathfrak{S}_n$ est très riche, en ce sens que $\mathfrak{S}_n$ «contient» une copie de chaque groupe de cardinal n .

Proposition 32.11 : Soit G un groupe fini de cardinal n . Alors il existe un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ isomorphe à G .

Démonstration. Pour $g \in G$, soit $\varphi_g : \begin{cases} G & \longrightarrow G \\ h & \longmapsto g \cdot h \end{cases}$.

Alors φ_g est une application injective, car $\varphi_g(h) = \varphi_g(h') \Leftrightarrow g \cdot h = g \cdot h' \Leftrightarrow h = h'$.

Et comme toute application injective entre deux ensembles finis de même cardinal, elle est bijective. Donc $\varphi_g \in \mathfrak{S}_G$.

Par ailleurs, pour $g, g' \in G$, on a $\varphi_g \circ \varphi_{g'} = \varphi_{g \cdot g'}$.

Autrement dit, l'application $\varphi : \begin{cases} G & \longrightarrow \mathfrak{S}_G \\ g & \longmapsto \varphi_g \end{cases}$ est un morphisme de groupes.

Il est injectif car si $g \in \text{Ker } \varphi$, alors $\varphi_g = \text{id}_G$.

Et en particulier, $\varphi_g(e_G) = e_G \Leftrightarrow g \cdot e_G = e_G \Leftrightarrow g = e_G$.

Donc l'image de φ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_G$, isomorphe à G , l'isomorphisme n'étant rien d'autre que φ .

Et puisque $\mathfrak{S}_G$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_n$, on arrive bien à la conclusion annoncée. $\square$

Remarque

Vous prouverez ceci en seconde année, mais c'est un bon exercice : si $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ est un morphisme de groupes, alors $\text{Im } \varphi$ est un sous-groupe de G_2 .

32.3.2 Support d'une permutation

Définition 32.12 – Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On appelle alors **support** de σ l'ensemble des $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ qui ne sont **pas** fixes par σ , c'est-à-dire tels que $\sigma(k) \neq k$. On notera dans la suite $\text{Supp}(\sigma)$ le support d'une permutation σ .

Proposition 32.13 : Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Alors $\text{Supp}(\sigma)$ est stable par σ .

Démonstration. Soit $i \in \text{Supp}(\sigma)$. Alors $\sigma(i)$ ne peut pas être un point fixe de σ , car on aurait alors $\sigma(\sigma(i)) = \sigma(i)$, et donc par injectivité de σ , $\sigma(i) = i$.

Ceci n'est pas possible puisque i n'est pas un point fixe de σ .

Et donc $\sigma(i) \in \text{Supp}(\sigma)$. $\square$

Proposition 32.14 : Deux permutations de $\mathfrak{S}_n$ à support disjoints commutent entre elles.

Démonstration. Soient σ, σ' deux permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ telles que $\text{Supp}(\sigma) \cap \text{Supp}(\sigma') = \emptyset$. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors

- si $i \in \text{Supp}(\sigma)$, alors par la proposition précédente, $\sigma(i) \in \text{Supp}(\sigma)$, et donc $\sigma(i) \notin \text{Supp}(\sigma')$.
Par conséquent, $\sigma'(\sigma(i)) = \sigma(i)$.
Par ailleurs, $i \notin \text{Supp}(\sigma')$, donc $\sigma'(i) = i$, si bien que $\sigma(\sigma'(i)) = \sigma(i)$, et donc $(\sigma \circ \sigma')(i) = (\sigma' \circ \sigma)(i)$.
- on raisonne de même si $i \in \text{Supp}(\sigma')$.
- si $i \notin \text{Supp}(\sigma) \cup \text{Supp}(\sigma')$, alors $\sigma(i) = i$ et donc $\sigma'(\sigma(i)) = i$, et de même, $\sigma(\sigma'(i)) = i$.

$\square$

32.3.3 Permutations particulières

Définition 32.15 – Soit $p \geq 2$, et soient $a_1, \dots, a_p$ des éléments deux à deux distincts de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Alors l'application $\sigma : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ définie par

$$\sigma(i) = \begin{cases} i & \text{si } i \notin \{a_1, \dots, a_p\} \\ a_{k+1} & \text{si } i = a_k \text{ avec } 1 \leq k \leq p-1 \\ a_1 & \text{si } i = a_p \end{cases}$$

est une bijection (et donc un élément de $\mathfrak{S}_n$).

On la note alors $(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p)$, et un tel élément est appelé un **cycle de longueur p** , ou encore un **p -cycle**.

Autrement dit

On procède à une permutation circulaire de $a_1, a_2, \dots, a_p$ (dans cet ordre) et on laisse fixes les autres éléments.

Démonstration. Pour la bijectivité, il suffit de remarquer que si σ' est la permutation

$$i \mapsto \begin{cases} i & \text{si } i \notin \{a_1, \dots, a_p\} \\ a_{k-1} & \text{si } i = a_k \text{ avec } 2 \leq k \leq p \\ a_p & \text{si } i = a_1 \end{cases}$$

alors $\sigma\sigma' = \sigma'\sigma = \text{id}$. Et donc σ est bijective d'inverse σ' .

Remarquons au passage que $\sigma' = \sigma^{-1}$ est aussi un p -cycle : c'est $(a_p \ a_{p-1} \ \dots \ a_2 \ a_1)$. $\square$

Notons en particulier qu'un p -cycle σ possède $n - p$ points fixes, et qu'il s'agit d'un élément d'ordre p de $\mathfrak{S}_n$ au sens où $\sigma^p = \text{id}$ et pour tout $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, $\sigma^k \neq \text{id}$.

En effet, pour $k \leq p-1$, $\sigma^k(a_1) = \sigma^{k-1}(a_2) = \dots = a_{k+1} \neq a_1$, et pour $k = p$,

$$\sigma^p(a_i) = \sigma^{p-1}(a_{i+1}) = \dots = \sigma^i(a_p) = \sigma^{i-1}(a_1) = \sigma^{i-2}(a_2) = \dots = a_i.$$

Exemple 32.16

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ est en fait le 3-cycle $(2 \ 5 \ 4)$ (à ne pas confondre avec $(2 \ 4 \ 5)$).

Cela signifie juste que 2 est envoyé sur 5, 5 est envoyé sur 4 et 4 est envoyé sur 2, et que 1 et 3 sont fixes.

Remarquons qu'il n'y a pas unicité de l'écriture d'un cycle, et que

$$(2 \ 5 \ 4) = (5 \ 4 \ 2) = (4 \ 2 \ 5).$$

Exercice

Combien y a-t-il de manières d'écrire un p -cycle ?



Tous les éléments de $\mathfrak{S}_n$ ne sont pas des cycles, par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ n'est pas un cycle. En effet, ne possédant pas de point fixe, ce ne pourrait qu'être un 5-cycle, ce qui n'est pas le cas !

Définition 32.17 – Un 2-cycle est appelé une **transposition**.

Autrement dit, une transposition de $\mathfrak{S}_n$ est une permutation qui possède exactement $n - 2$ points fixes.

Les transpositions permettent de donner une définition plus concise de ce que nous avons appelé une forme n -linéaire antisymétrique.

En effet, $f : E^n \rightarrow \mathbf{K}$ est antisymétrique si pour toute transposition $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$,

$$f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = -f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Proposition 32.18 : Une transposition est égale à son propre inverse : $(i \ j)^{-1} = (i \ j)$.

Exercice

Plus généralement, quel est l'inverse d'un p -cycle ?

Démonstration. Calculer $(i \ j)(i \ j) \dots$ $\square$

32.3.4 Structure des groupes symétriques pour $n = 2$ et $n = 3$

Le groupe $\mathfrak{S}_2$ est assez facile à décrire, puisqu'il ne contient que deux éléments, qui sont id et la transposition $(1\ 2)$.

Nous avons déjà mentionné que tous les groupes d'ordre 2 ont la même table de multiplication, et donc sont isomorphes à $\mathbf{U}_2$ ou encore à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, +)$.

Le groupe $\mathfrak{S}_3$ en revanche contient $3! = 6$ éléments.

Il y a bien entendu l'identité, les trois transpositions $(1\ 2)$, $(1\ 3)$ et $(2\ 3)$.

Et pour compléter le tableau, on a deux 3-cycles, qui sont $(1\ 2\ 3)$ et $(1\ 3\ 2)$, inverses l'un de l'autre.

Notons que ce groupe n'est pas isomorphe $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ car il n'est pas abélien, par exemple car $(1\ 2\ 3)(1\ 2) = (1\ 3)$ alors que $(1\ 2)(1\ 2\ 3) = (2\ 3)$.

Complément

$\mathfrak{S}_3$ est d'ailleurs le plus petit groupe non abélien : un groupe de cardinal inférieur ou égal à 5 est abélien, et un groupe non abélien de cardinal 6 est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.

32.3.5 Décomposition en produit de cycles disjoints

La notion d'orbite qui suit n'est utile qu'en vue de la preuve du théorème 32.24 et n'est pas exigible.

Définition 32.19 – Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, et soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On appelle **orbite de i sous l'action de σ** l'ensemble $\mathcal{O}_\sigma(i) = \{\sigma^k(i), k \in \mathbf{Z}\}$. C'est évidemment un ensemble fini car inclus dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Exemple 32.20

Si $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_5$.

Alors $\sigma(1) = 2$, $\sigma^2(1) = \sigma(2) = 1$, $\sigma^3(1) = 2$, etc.

Et $\sigma^{-1}(1) = 2$, $\sigma^{-2}(1) = 1$, etc, de sorte que pour $k \in \mathbf{Z}$,

$$\sigma^k(1) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 2 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

Et donc l'orbite de 1 sous σ est $\{1, 2\}$.

De même, on prouve que $\sigma^k(3) = \begin{cases} 3 & \text{si } k \equiv 0 \pmod{3} \\ 5 & \text{si } k \equiv 1 \pmod{3} \\ 4 & \text{si } k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$.

Et donc l'orbite de 3 sous σ est $\{3, 4, 5\}$.

Proposition 32.21 : Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Alors la relation binaire $\mathcal{R}_\sigma$ définie sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ par $i\mathcal{R}_\sigma j \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z}, j = \sigma^k(i)$ est une relation d'équivalence sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, dont les classes d'équivalence sont les orbites sous l'action de σ .

Démonstration. On a évidemment $i = \sigma^0(i)$, et donc $i\mathcal{R}_\sigma i$, donc $\mathcal{R}_\sigma$ est réflexive.

Si $i\mathcal{R}_\sigma j$, alors il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $j = \sigma^k(i)$, et donc $i = \sigma^{-k}(j)$, de sorte que $j\mathcal{R}_\sigma i$. Donc $\mathcal{R}_\sigma$ est symétrique.

Enfin, si $j = \sigma^{\ell_1}(i)$ et $k = \sigma^{\ell_2}(j)$, alors $k = \sigma^{\ell_1 + \ell_2}(i)$. Donc $\mathcal{R}_\sigma$ est transitive, et donc est une relation d'équivalence.

Il est alors évident que pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la classe d'équivalence de i est

$$\text{cl}(i) = \{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \exists k \in \mathbf{Z}, j = \sigma^k(i)\} = \{\sigma^k(i), k \in \mathbf{Z}\} = \mathcal{O}_\sigma(i).$$

□

Corollaire 32.22 – Les orbites sous l'action de σ forment une partition de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Lemme 32.23. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et soit $\mathcal{O}$ une orbite sous l'action de σ .

Alors l'application $\varphi : x \mapsto \begin{cases} \sigma(x) & \text{si } x \in \mathcal{O} \\ x & \text{sinon} \end{cases}$ est un cycle de support $\mathcal{O}$.

Démonstration. Soit $x \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\mathcal{O} = \mathcal{O}_x = \{\sigma^k(x), k \in \mathbb{Z}\}$.

Puisque $\mathcal{O}_x$ est fini, il existe deux entiers positifs $p < q$ tels que $\sigma^p(x) = \sigma^q(x)$, et alors $\sigma^{q-p}(x) = x$.

Donc $\{k \in \mathbb{N}^* \mid \sigma^k(x) = x\}$ est non vide, et par conséquent possède un plus petit élément s , pour lequel $\sigma^s(x) = x$ et donc $\sigma^{-s}(x) = x$.

Soit alors $k \in \mathbb{Z}$, et soit $k = sq + r$, avec $0 \leq r < s$ la division euclidienne de k par s .

Alors $\sigma^k(x) = \sigma^{sq+r}(x) = \sigma^r \circ (\sigma^s)^q(x) = \sigma^r(x)$.

Donc $\mathcal{O} = \{\sigma^i(x), 0 \leq i < s\}$.

Par ailleurs, ces éléments sont deux à deux distincts, car si $i \leq j$ sont deux éléments de $\llbracket 0, s-1 \rrbracket$ tels que $\sigma^i(x) = \sigma^j(x)$, alors $x = \sigma^{j-i}(x)$, avec $0 \leq i-j \leq s-1$. Par définition de s , on a donc $i-j = 0$, et donc $i = j$.

Notons alors, pour $i \in \llbracket 0, s-1 \rrbracket$, $x_i = \sigma^i(x)$, de sorte que $\mathcal{O} = \{x_0, \dots, x_{s-1}\}$.

Alors $\sigma(x_i) = \begin{cases} x_{i+1} & \text{si } 0 \leq i < s-1 \\ x_0 & \text{si } i = s-1 \end{cases}$.

Donc $\varphi = (x_0 \ x_1 \ \dots \ x_{s-1})$ est bien un cycle. $\square$

Théorème 32.24 (Décomposition en produit de cycles à supports disjoints) :

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Alors σ s'écrit comme produit de cycles à supports disjoints. De plus, cette écriture est unique à l'ordre des facteurs près¹⁴.

Démonstration. **Existence** : notons $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_p$ les orbites non réduites à un point¹⁵ sous l'action de σ .

On a alors $\text{Supp}(\sigma) = \bigcup_{i=1}^p \mathcal{O}_i$.

Pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, notons C_i la permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ définie par

$$C_i : x \mapsto \begin{cases} \sigma(x) & \text{si } x \in \mathcal{O}_i \\ x & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors par le lemme précédent, C_i est un cycle de support $\mathcal{O}_i$, qui coïncide avec σ sur $\mathcal{O}_i$.

Les orbites étant deux à deux disjointes, les supports de $C_1, \dots, C_p$ le sont également. Et alors, pour $x \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

- soit $x \notin \bigcup_{i=1}^p \mathcal{O}_i$ (c'est-à-dire x est un point fixe de σ), auquel cas x est un point fixe de chacun des C_i , et donc de leur produit.
Et donc $(C_1 \cdots C_p)(x) = x = \sigma(x)$.
- soit x est dans une et une seule orbite $\mathcal{O}_i$, auquel cas

$$\begin{aligned} (C_1 C_2 \cdots C_p)(x) &= (C_1 \cdots C_{i-1} C_{i+1} \cdots C_p) C_i(x) \\ &= (C_1 \cdots C_{i-1} C_{i+1} \cdots C_p) \sigma(x) \\ &= \sigma(x) \end{aligned}$$

Donc dans tous les cas, $\sigma(x) = (C_1 \cdots C_p)(x)$, et donc $\sigma = C_1 \cdots C_p$.

Unicité : supposons que $\sigma = C_1 \cdots C_p$, où les C_i sont des cycles à supports disjoints.

Alors il est évident que $\text{Supp}(\sigma) = \bigcup_{i=1}^p \text{Supp}(C_i)$.

Autrement dit

Pour des raisons de cardinalité, l'application $k \in \mathbb{Z} \mapsto \sigma^k(x)$ ne saurait être injective.

¹⁴ Puisque des permutations à supports disjoints commutent, on peut les permuter.

¹⁵ L'orbite de x est réduite à un point si et seulement si x est un point fixe de σ .

Les C_i commutent 2 à 2.

C_i et σ coïncident sur $\mathcal{O}_i$.

$\sigma(x)$ est encore dans $\mathcal{O}_i$, et donc pas dans les $\mathcal{O}_j$, $j \neq i$.

Par ailleurs, si $x \in \text{Supp}(C_i)$, alors x est fixe par les C_j , $j \neq i$.

Et donc l'orbite de x sous l'action de σ est aussi l'orbite de x sous l'action de C_i .

Or l'unique orbite non triviale¹⁶ d'un cycle est égale à son support.

Donc le nombre p de cycles qui apparaissent dans la décomposition de σ est nécessairement égal au nombre d'orbites non triviales.

Et alors, sur l'orbite $\text{Supp}(C_i)$, les restrictions de C_i et de σ coïncident.

Donc C_i est le cycle décrit dans la partie existence, et donc la décomposition $\sigma = C_1 \dots C_p$ est celle donnée plus haut. $\square$

¹⁶ Non réduite à un point.

Exemple 32.25

La preuve est en fait très constructive, et nous dit comment trouver la décomposition cherchée.

Considérons par exemple $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 2 & 1 & 8 & 6 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Alors il nous faut commencer par déterminer ses orbites, ce qui est assez facile :

- les images de 1 par les puissances successives de σ sont 7, 3, 1, ... **STOP !**
Comme expliqué plus haut, si on trouve s tel que $\sigma^s(x) = x$, alors $\mathcal{O}_x = \{x, \sigma(x), \dots, \sigma^{s-1}(x)\}$.
Donc ici $\mathcal{O}_1 = \{1, 3, 7\}$.
- Puis on prend le premier élément qui n'est pas dans $\mathcal{O}_1$, ici 2. Il est fixe, donc est seul dans son orbite : $\mathcal{O}_2 = \{2\}$.
- Puis le premier élément dont on ne connaît pas encore l'orbite est 4, son orbite est $\{4, 8, 5, 6\}$.

Tous les éléments sont alors dans une orbite, il suffit donc de regarder l'action de σ sur les orbites non réduites à un point. Or, $\sigma(1) = 7$, $\sigma(7) = 3$ et $\sigma(3) = 1$.

Donc le premier cycle de notre décomposition est $(1 \ 7 \ 3)$.

Et l'autre orbite non triviale correspond au 4-cycle $(4 \ 8 \ 5 \ 6)$.

Donc la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints est

$$\sigma = (1 \ 7 \ 3) (4 \ 8 \ 5 \ 6).$$

Corollaire 32.26 : Tout élément de $\mathfrak{S}_n$ est produit de transpositions.

Remarque. Concrètement, ce résultat signifie par exemple que si j'aligne les 48 élèves de MP2I sur 48 chaises, par ordre alphabétique, alors en procédant uniquement à des échanges successifs de deux élèves («Pierre échange sa place avec Paul», «Bob échange sa place avec Alice», «Alice échange sa place avec Pierre», etc), on peut atteindre n'importe quelle configuration des 48 élèves.

On pourrait même prouver¹⁷ qu'on peut s'en tirer uniquement en permutant des voisins de chaise.

Démonstration. Il suffit pour cela de prouver que tout cycle est un produit de transpositions. Mais si $\sigma = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p)$ est un p -cycle, alors

$$\sigma = (a_1 \ a_2) (a_2 \ a_3) \dots (a_{p-2} \ a_{p-1}) (a_{p-1} \ a_p)$$

Le mieux pour se convaincre de la validité de cette formule est de calculer quelques images «à la main» pour comprendre ce qu'elle signifie.

Donnons tout de même une preuve rigoureuse : notons $\tau_i = (a_i \ a_{i+1})$, et prouvons donc que $\sigma = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_{p-1}$. Soit $x \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- Si $x \notin \{a_1, \dots, a_p\}$, alors x est fixe par σ , mais aussi par tous les τ_i , donc par leur produit.
- Si $x = a_i$, $1 \leq i \leq p-1$. Alors

$$\begin{aligned} (\tau_1 \dots \tau_{p-1})(x) &= (\tau_1 \dots \tau_i)(x) \\ &= (\tau_1 \dots \tau_{i-1})(a_{i+1}) \\ &= a_{i+1} = \sigma(a_i). \end{aligned}$$

Si $j > i$, $a_i \notin \text{Supp}(\tau_j)$.

a_{i-1} est fixe par $\tau_1, \dots, \tau_{i-1}$.

Terminologie

On dit encore que l'ensemble des transposition engendre le groupe $\mathfrak{S}_n$.

¹⁷ Et nous le ferons en TD.

⚠ Attention !

Les supports n'étant pas disjoints, ces transpositions ne commutent pas deux à deux !

► Si $x = a_p$, alors $\tau_{p-1}(x) = a_{p-1}$, puis $(\tau_{p-2}\tau_{p-1})(x) = \tau_{p-2}(a_{p-1}) = a_{p-2}$, etc, jusqu'à

$$(\tau_1 \cdots \tau_{p-1})(x) = \tau_1 \tau_2(a_3) = \tau_1(a_2) = a_1 = \sigma(a_p).$$

Ainsi, pour tout $x \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sigma(x) = (\tau_1 \cdots \tau_{p-1})(x)$, et donc $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_{p-1}$. $\square$

Notons que cette fois, il n'y a pas unicité de la décomposition d'une permutation en produit de transpositions, par exemple car

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

32.3.6 Signature d'une permutation

Venons-en enfin au fameux $\varepsilon(\sigma)$ mentionné plus tôt qui, rappelons-le, doit¹⁸ être égal à -1 puissance le nombre de transpositions qui figurent dans une décomposition de σ en produit de transpositions.

Ce qui n'est pas clair pour l'instant c'est que le nombre de telles transpositions ne dépend pas de l'écriture choisie.

En fait, il en dépend clairement, puisque si les τ_i sont des transpositions, $\tau_1 \cdots \tau_p = \tau_1^3 \cdots \tau_p^3$ s'écrit à la fois comme produit de p transpositions et de $3p$ transpositions.

Pour que $\varepsilon(\sigma)$ soit bien défini, il faudrait au minimum que la parité du nombre de transpositions ne dépende pas de la décomposition choisie.

Et donc qu'il ne puisse pas exister une décomposition de σ comme produit d'un nombre pair de transpositions et une autre comme produit d'un nombre impair de transpositions.

Théorème 32.27 : *Il existe une unique application non triviale $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \rightarrow \{-1, 1\}$ telle que $\forall (\sigma, \sigma') \in \mathfrak{S}_n^2$, $\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$.*

Autrement dit, il existe un unique morphisme de groupes non trivial¹⁹ de $\mathfrak{S}_n$ dans $\{-1, 1\}$.

Cette application prend alors la valeur -1 sur toutes les transpositions.

*On dit alors que $\varepsilon(\sigma)$ est la **signature** de la permutation σ .*

Le programme officiel de MP2I précise que la preuve qui suit n'est pas exigible, je la donne tout de même pour la complétude du cours, mais vous pouvez la passer en première lecture.

Démonstration. Existence : notons A l'ensemble des parties de $\llbracket 1, n \rrbracket$ de cardinal 2, c'est-à-dire l'ensemble des paires²⁰ (ou encore des 2-combinaisons) $\{i, j\}$ avec $i \neq j$.

Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, notons $\varepsilon(\sigma) = \prod_{\{i,j\} \in A} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$.

Cette quantité pourrait s'écrire plus simplement $\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$, mais cette

écriture est moins pratique pour prouver les propriétés de ε .

Puisque σ est bijective, l'application $\{i, j\} \mapsto \{\sigma(i), \sigma(j)\}$ réalise une bijection de A sur lui-même. Et donc toute paire $\{k, \ell\} \in A$ s'écrit de manière unique $\{\sigma(i), \sigma(j)\}$ avec $\{i, j\} \in A$.

Ainsi, $\prod_{\{i,j\} \in A} |\sigma(i) - \sigma(j)| = \prod_{\{k,\ell\} \in A} |k - \ell|$.

Et par conséquent,

$$|\varepsilon(\sigma)| = \frac{\prod_{\{i,j\} \in A} |\sigma(i) - \sigma(j)|}{\prod_{\{i,j\} \in A} |i - j|} = \frac{\prod_{\{k,\ell\} \in A} |k - \ell|}{\prod_{\{i,j\} \in A} |i - j|} = 1.$$

Donc déjà ε est à valeurs dans $\{-1, 1\}$.

On a alors, pour $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$,

$$\frac{\varepsilon(\sigma\sigma')}{\varepsilon(\sigma')} = \prod_{\{i,j\} \in A} \frac{\sigma(\sigma'(i)) - \sigma(\sigma'(j))}{i - j} \times \prod_{\{i,j\} \in A} \frac{i - j}{\sigma'(i) - \sigma'(j)} = \prod_{\{i,j\} \in A} \frac{\sigma(\sigma'(i)) - \sigma(\sigma'(j))}{\sigma'(i) - \sigma'(j)}.$$

Mais comme mentionné ci-dessus, $\{i, j\} \mapsto \{\sigma'(i), \sigma'(j)\}$ réalise une bijection de A sur lui-même.

¹⁸ S'il existe...

¹⁹ C'est-à-dire qui ne prend pas toujours la valeur 1.

²⁰ Et pas des couples ! Une paire n'est pas ordonnée.

Subtilité !

Voyez-vous pourquoi cette quantité est bien définie alors que

$$\prod_{\{i,j\} \in A} (i - j)$$

ne l'est pas (car une paire n'est pas ordonnée) ?

$$\text{Donc } \frac{\varepsilon(\sigma\sigma')}{\varepsilon(\sigma')} = \prod_{\{k,\ell\} \in A} \frac{\sigma(k) - \sigma(\ell)}{k - \ell} = \varepsilon(\sigma).$$

Et donc comme annoncé, $\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$.

Si $\tau = (k \ \ell)$ est une transposition, avec $k < \ell$, alors lorsque ni i ni j ne sont égaux à k ou

$$\text{à } \ell, \text{ on a } \frac{\tau(i) - \tau(j)}{i - j} = \frac{i - j}{i - j} = 1.$$

Et donc dans le produit définissant $\varepsilon(\tau)$, ne restent que les termes où l'un au moins des deux nombres i, j est dans $\{k, \ell\}$:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\tau) &= \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k, i \neq \ell}}^n \frac{\tau(k) - \tau(i)}{k - i} \times \frac{\tau(\ell) - \tau(i)}{\ell - i} \right) \times \frac{\tau(k) - \tau(\ell)}{k - \ell} \\ &= \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k, i \neq \ell}}^n \frac{\ell - i}{k - i} \times \frac{k - i}{\ell - i} \right) \times \frac{\ell - k}{k - \ell} \\ &= -1. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, si $\sigma = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_p$, où les τ_i sont des transpositions, alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$.

Le fait que ε existe prouve en particulier que toutes les décompositions de σ en produit de transpositions font apparaître un nombre de transpositions dont la parité ne dépend que de σ .

Unicité : soit ε un morphisme de groupe non trivial de $\mathfrak{S}_n$ dans $\{-1, 1\}$.

► **Si $n = 2$** : puisque $\varepsilon(\text{id}) = 1$, si ε est non trivial, c'est que le seul élément de $\mathfrak{S}_2$ différent de id, à savoir $(1 \ 2)$ a pour image -1 .

On a donc bien l'application définie ci-dessus : à l'unique transposition elle associe -1 , et à l'identité, elle associe 1 .

► **Si $n \geq 3$** : notons que pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, et pour $1 \leq i < j \leq n$, on a

$$\sigma(i \ j) \sigma^{-1} = (\sigma(i) \ \sigma(j)).$$

Or, si $(i \ j)$ et $(k \ \ell)$ sont deux transpositions, il existe toujours²¹ $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\sigma(i) = k$ et $\sigma(j) = \ell$.

Et alors $\sigma(i \ j) \sigma^{-1} = (k \ \ell)$.

Donc si τ et τ' sont deux transpositions, et si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est telle que $\tau = \sigma\tau'\sigma^{-1}$, alors

$$\varepsilon(\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau')\underbrace{\varepsilon(\sigma^{-1})}_{\varepsilon(\sigma)^{-1}} = \varepsilon(\tau')\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma)^{-1} = \varepsilon(\tau').$$

Donc toutes les transpositions ont même image par ε .

Si toutes les transpositions ont pour image 1 , toute permutation étant produit de transpositions, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\varepsilon(\sigma) = 1$. Ce qui contredit le fait que ε n'est pas le morphisme trivial.

Si au contraire les transpositions ont toutes -1 pour image, alors une permutation σ qui s'écrit comme produit de p transpositions vérifie $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$, et donc on retrouve l'application définie ci-dessus.

Remarque : nous avons prouvé ici qu'il y avait un unique morphisme de groupe non trivial de $\mathfrak{S}_n$ dans $\{-1, 1\}$, mais si on voulait seulement prouver qu'il existe un unique morphisme qui envoie toutes les transpositions sur -1 , alors les deux dernières lignes suffisent. □

Proposition 32.28 : Si σ est un p -cycle, alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{p-1}$.

Démonstration. Cela découle de la décomposition précédemment donnée d'un p -cycle en produit de $p - 1$ transpositions :

$$(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p) = (a_1 \ a_2) (a_2 \ a_3) \cdots (a_{p-1} \ a_p).$$

□

Détails

On a séparé les paires où un seul des deux nombres i, j est dans $\{k, \ell\}$ (et on a supposé que ce nombre était j) de la paire $\{i, j\} = \{k, \ell\}$.

Rappel

L'image de l'élément neutre par un morphisme de groupes est l'élément neutre.

Prouvez-le !

Calculer l'image de k en distinguant trois cas :
 $\sigma^{-1}(k) \notin \{i, j\}$, $\sigma^{-1}(k) = i$
 et $\sigma^{-1}(k) = j$.

²¹ À vous de jouer !

Pour la culture

On dit alors que les deux transpositions $(i \ j)$ et $(k \ \ell)$ sont conjuguées dans le groupe $\mathfrak{S}_n$.
 La notion de conjugaison est un élément central de la théorie des groupes.

Et par conséquent, si l'on connaît la décomposition de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ en produit de cycles disjoints, il est possible de calculer sa signature sans avoir besoin de décomposer σ en produit de transpositions.

Exemple 32.29

Nous avons prouvé plus tôt que $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 2 & 1 & 8 & 6 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ se décompose en produit de cycles disjoints de la manière suivante : $(1 \ 7 \ 3)(4 \ 8 \ 5 \ 6)$.
Donc

$$\varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 2 & 1 & 8 & 6 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \varepsilon((1 \ 7 \ 3)) \times \varepsilon((4 \ 8 \ 5 \ 6)) = (-1)^2 \times (-1)^3 = -1.$$

Dans toute la suite du chapitre, E désigne un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n .

32.4 DÉTERMINANT D'UNE FAMILLE DE VECTEURS DANS UNE BASE

Dans toute cette partie, on note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

32.4.1 Définition

Maintenant que la notion de signature, que nous avons pressentie en début de chapitre, est clarifiée, revenons aux formes n -linéaires alternées.

Proposition 32.30 : Soit $\varphi : E^n \rightarrow \mathbf{K}$ une forme n -linéaire alternée.
Alors pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ et pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,

$$\varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \varphi(x_1, \dots, x_n).$$

Démonstration. Notons $\tau_1, \dots, \tau_p$ des transpositions telles que $\sigma = \tau_1 \cdot \tau_p$.
Alors

$$\begin{aligned} \varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) &= \varphi(x_{\tau_1 \dots \tau_p(1)}, \dots, x_{\tau_1 \dots \tau_p(n)}) \\ &= -\varphi(x_{\tau_2 \dots \tau_p(1)}, \dots, x_{\tau_2 \dots \tau_p(n)}) \\ &= (-1)^2 \varphi(x_{\tau_3 \dots \tau_p(1)}, \dots, x_{\tau_3 \dots \tau_p(n)}) \\ &= (-1)^p \varphi(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

□

Comme annoncé plus tôt, si φ est une forme n -linéaire alternée sur E , on a donc pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, si $A = (a_{i,j}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$, alors

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} \right) \varphi(e_1, \dots, e_n).$$

Et donc une forme n -linéaire alternée est uniquement déterminée par l'image d'une base. On appelle donc déterminant dans la base $\mathcal{B}$ l'unique forme n -linéaire alternée qui envoie $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ sur 1 :

Définition 32.31 (Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base) –

Pour $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, notons $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$.
On pose alors

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}.$$

Rappel

Cela signifie que $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i.$$

Le déterminant est défini sur E^n , où $n = \dim E$, donc on ne définira pas le déterminant de 2 vecteurs de $\mathbf{R}^3$ ou de 3 vecteurs de $\mathbf{R}^2$, il faut autant de vecteurs que la dimension !
Insistons aussi sur le fait qu'on ne parle pas du déterminant de la famille $(x_1, \dots, x_n)$, mais du déterminant de cette famille **dans une base $\mathcal{B}$** . En général, changer de base change la valeur du déterminant.

Proposition 32.32 : L'application $\det_{\mathcal{B}} : E^n \rightarrow \mathbf{K}$ est une forme n -linéaire alternée sur E telle que $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$.

Démonstration. ► **Multilinéarité** : soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Prouvons que $\det_{\mathcal{B}}$ est linéaire par rapport à sa $k^{\text{ème}}$ variable.

Soient donc $x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n \in E$, soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbf{K}$.

Notons alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_n) = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \dots, x_n) = (b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$.

Si on note $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{k-1}, \lambda x + y, x_{k+1}, \dots, x_n) = (c_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$, on a alors

$$c_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} = b_{i,j} & \text{si } j \neq k \\ \lambda a_{i,j} + b_{i,j} & \text{si } j = k \end{cases}$$

Et donc

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{k-1}, \lambda x + y, x_{k+1}, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n c_{\sigma(i), i} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n c_{\sigma(i), i} \right) \times (\lambda a_{\sigma(k), k} + b_{\sigma(k), k}) \\ &= \lambda \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n a_{\sigma(i), i} \right) a_{\sigma(k), k} + \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n b_{\sigma(i), i} \right) b_{\sigma(k), k} \\ &= \lambda \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_n) + \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Donc $\det_{\mathcal{B}}$ est linéaire par rapport à la $k^{\text{ème}}$ variable.

► **Caractère alterné** : soit $\tau \in \mathfrak{S}_n$ une transposition, et soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de E tels que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$.

Alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)}) = (a_{i, \tau(j)})_{1 \leq i, j \leq n}$. Il vient donc

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)}) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), \tau(i)} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(\tau^{-1}(j)), j} \\ &= \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma' \tau) \prod_{j=1}^n a_{\sigma'(j), j} \\ &= - \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma') \prod_{j=1}^n a_{\sigma'(j), j} = -\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Chgt d'indice

► τ réalise une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur lui-même.
On a donc posé $j = \tau(i)$.

Détails

► $\sigma \mapsto \sigma \tau^{-1}$ réalise une bijection de $\mathfrak{S}_n$ dans lui-même.
Et donc on a posé $\sigma' = \sigma \tau^{-1}$.

Ceci prouve que $\det_{\mathcal{B}}$ est bien une forme anti-symétrique, et donc alternée.

Reste à calculer $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n)$.

Mais la matrice de $(e_1, \dots, e_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ est $I_n = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ où $a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$.

Par conséquent, si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ n'est pas l'identité, il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\sigma(i) \neq i$, et donc

$a_{\sigma(i), i} = 0$, de sorte que $\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), i} = 0$.

Ainsi, des $n!$ termes de la somme définissant le déterminant, il n'en reste qu'un :

$$\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = \varepsilon(\text{id}) \prod_{i=1}^n a_{i,i} = 1.$$

□

Proposition 32.33 : Soit φ une forme n -linéaire alternée sur E . Alors il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $\varphi = \lambda \det_{\mathcal{B}}$.
Par ailleurs, $\lambda = \varphi(e_1, \dots, e_n)$, où $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

Autrement dit

L'espace vectoriel des formes n -linéaires alternées sur E est de dimension 1.

Démonstration. Ceci a en fait déjà été prouvé page 8.

□

Cas particuliers des déterminants en dimension 2 et 3.

► Si $\dim E = 2$: soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, et soient $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ et $y = y_1 e_1 + y_2 e_2$ deux vecteurs de E , décomposés dans la base $\mathcal{B}$.

Nous savons que $\mathfrak{S}_2 = \{\text{id}, \underbrace{(1 \ 2)}_{=\tau}\}$, et donc

$$\det_{\mathcal{B}}(x, y) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_2} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)} y_{\sigma(2)} = \varepsilon(\text{id}) x_1 y_2 + \varepsilon(\tau) x_2 y_1 = x_1 y_2 - y_1 x_2.$$

Ce déterminant est usuellement noté $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$.

On retrouve alors le déterminant d'une matrice 2×2 , calculé selon la règle :

$$\det_{\mathcal{B}}(x, y) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - y_1 x_2.$$

► Si $\dim E = 3$: soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, et soient x, y, z des vecteurs de E de coordonnées respectives (x_1, x_2, x_3) , (y_1, y_2, y_3) et (z_1, z_2, z_3) dans la base $\mathcal{B}$.

Alors $\det_{\mathcal{B}}(x, y, z) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)} y_{\sigma(2)} z_{\sigma(3)}$.

Or, $\mathfrak{S}_3 = \{\text{id}, (1 \ 2 \ 3), (1 \ 3 \ 2), (1 \ 2), (1 \ 3), (2 \ 3)\}$.

Les deux 3-cycles et l'identité ont pour signature 1 et les trois transpositions ont pour signature -1 , de sorte que

$$\det_{\mathcal{B}}(x, y, z) = \underbrace{x_1 y_2 z_3}_{\text{id}} + \underbrace{x_2 y_3 z_1}_{(1 \ 2 \ 3)} + \underbrace{x_3 y_1 z_2}_{(1 \ 3 \ 2)} - \underbrace{x_2 y_1 z_3}_{(1 \ 2)} - \underbrace{x_3 y_2 z_1}_{(1 \ 3)} - \underbrace{x_1 y_3 z_2}_{(2 \ 3)}.$$

Le déterminant $\det_{\mathcal{B}}(x, y, z)$ se note généralement $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ et la formule donnée

ci-dessus²² se retient alors sous la forme suivante :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} + & + & + \\ - & - & - \end{matrix}$$

ou plus sim-

²² Nommée règle de SARRUS.

plement

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} + & + & + \\ - & - & - \end{matrix}$$

32.4.2 Propriétés des déterminants

Puisqu'à chaque base $\mathcal{B}$ de E correspond une forme n -linéaire alternée $\det_{\mathcal{B}}$, et que toutes ces formes sont colinéaires²³, quelle relation existe-t-il entre ces différentes formes n -linéaires ?

²³ C'est la proposition 32.33.

Proposition 32.34 (Formule de changement de base) :

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E .

Alors pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, on a

$$\det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}'}(e_1, \dots, e_n) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

Remarque

Cette formule avait été «établie», ou du moins conjecturée, en termes d'aire au début du chapitre.

Démonstration. Puisque $\det_{\mathcal{B}'}$ est une forme n -linéaire alternée, par la proposition 32.33,

$$\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(e_1, \dots, e_n) \det_{\mathcal{B}}.$$

□

Corollaire 32.35 – Soit $x_1, \dots, x_n$ une famille de n vecteurs de E . Alors $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

Démonstration. Si $\mathcal{B}' = (x_1, \dots, x_n)$ est une base de E , on a

$$1 = \det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}'}(e_1, \dots, e_n) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

Et donc en particulier, $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

Inversement, si $(x_1, \dots, x_n)$ n'est pas une base, étant de cardinal n elle ne peut être libre. Or nous avons mentionné précédemment que l'image d'une famille liée par une forme n -linéaire alternée est nulle, donc c'est le cas de $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$. □

32.5 DÉTERMINANT D'UNE MATRICE CARRÉE

Le titre est explicite, mais insistons bien : la notion de déterminant d'une matrice n'a de sens²⁴ que pour les matrices carrées.

²⁴ À l'instar de la notion d'inversibilité.

32.5.1 Définition, premières propriétés

Définition 32.36 – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On appelle **déterminant de A** et on note $\det(A)$ le déterminant des vecteurs colonnes de A dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. Autrement dit, si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, alors

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}.$$

On note alors

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Commentaire

Notons que cette somme fait apparaître tous les produits de n coefficients de A qui contiennent exactement un coefficient de chaque ligne et un coefficient de chaque colonne de A .

Soyez soigneux

Sur vos copies, essayez de bien différencier les parenthèses (dénotant une matrice) des barres verticales (pour signifier un déterminant).

Remarque. Les colonnes de la matrice I_n sont précisément les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et donc $\det(I_n) = \det_{\mathcal{B}_{can}}(\mathcal{B}_{can}) = 1$.

Pour les déterminants de matrices 2×2 et 3×3 , on retrouve les formules établies précédemment : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ et

$$= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3} - a_{3,2}a_{2,3}a_{1,1}.$$

Pour $n = 4$, $\text{Card}(\mathfrak{S}_4) = 4! = 24$, et la formule définissant le déterminant n'est plus utilisable, et bien entendu, c'est pire pour $n \geq 5$.

Dans la suite, nous allons chercher à établir des moyens «simples» de calculer le déterminant d'une matrice.

Remarquons alors tout de suite que si $\mathcal{B}$ est une base de E , alors pour $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ désigne $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$, alors

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i} = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

et donc si on sait calculer le déterminant d'une matrice, on saura (enfin) calculer celui d'une famille de vecteurs dans une base.

Proposition 32.37 : Soit E est un espace vectoriel de dimension n de base $\mathcal{B}$, et soient $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Alors $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$.

Démonstration. Si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, alors ces deux déterminants sont définis par la même formule : $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$. $\square$

Proposition 32.38 : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors

1. $\forall \lambda \in \mathbf{K}, \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
2. le déterminant de A est inchangé si on ajoute à l'une des colonnes de A une combinaison linéaire des autres
3. échanger deux colonnes de A multiplie son déterminant par -1
4. $\det(AB) = \det(A) \det(B)$

⚠ Attention ! Le déterminant n'est pas une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$: non seulement nous n'avons pas $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$, mais surtout le déterminant d'une somme n'est pas la somme des déterminants (sauf cas particuliers) : $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$.

Démonstration. Les trois premiers points sont des conséquences directes de la n -linéarité et du caractère alterné.

Détaillons par exemple la première et notons $\mathcal{B}_{can}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A , de sorte que $\det(A) = \det_{\mathcal{B}_{can}}(C_1, \dots, C_n)$ et donc

$$\begin{aligned} \det(\lambda A) &= \det_{\mathcal{B}_{can}}(\lambda C_1, \dots, \lambda C_n) \\ &= \lambda \det_{\mathcal{B}_{can}}(C_1, \lambda C_2, \dots, \lambda C_n) \\ &= \lambda^2 \det_{\mathcal{B}_{can}}(C_1, C_2, \lambda C_3, \dots, \lambda C_n) \\ &= \dots = \lambda^n \det_{\mathcal{B}_{can}}(C_1, \dots, C_n) = \lambda^n \det A. \end{aligned}$$

Pour le point 4, considérons l'application $\varphi_A : \begin{matrix} (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))^n & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ (C_1, \dots, C_n) & \longmapsto & \det_{\mathcal{B}_{can}}(AC_1, \dots, AC_n) \end{matrix}$.

Il n'est pas difficile de prouver qu'elle est n -linéaire alternée, et par conséquent²⁵, $\varphi_A = \varphi_A(E_1, \dots, E_n) \det_{\mathcal{B}_{can}}$, où $(E_1, \dots, E_n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

⚠ Attention !
Il y a un λ qui «sort» pour chaque colonne, et donc
 $\det(\lambda A) \neq \lambda \det(A)$.
En revanche, $\lambda \det(A)$ est le déterminant qu'on obtient en multipliant une seule colonne de A par λ .

²⁵ C'est encore la proposition 32.33.

Mais $\varphi_A(E_1, \dots, E_n) = \det_{\mathcal{B}_{can}}(AE_1, \dots, AE_n)$, et AE_i n'est rien d'autre que la $i^{\text{ème}}$ colonne de A .

Donc $\varphi_A(E_1, \dots, E_n) = \det A$.

Enfin, $\varphi_A(B) = \det_{\mathcal{B}_{can}}(AC_1, \dots, AC_n)$ où $C_1, \dots, C_n$ sont les colonnes de B . Mais AC_i est la $i^{\text{ème}}$ colonne²⁶ de AB , et donc $\varphi_A(B) = \det(AB)$.

On a donc bien

$$\det(AB) = \varphi_A(B) = \det(A) \det_{\mathcal{B}_{can}}(C_1, \dots, C_n) = \det(A) \det(B).$$

□

Remarque. Puisque le produit de $\mathbf{K}$ est commutatif, $\det(A) \det(B) = \det(B) \det(A)$, et par conséquent, $\det(AB) = \det(BA)$.

Corollaire 32.39 : Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Et dans ce cas, on a $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Démonstration. Si A est inversible, alors $1 = \det(I_n) = \det(AA^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1})$.
Ce qui prouve donc que $\det(A) \neq 0$, et que son inverse est $\det(A^{-1})$.

En revanche, si A n'est pas inversible, alors la famille de ses colonnes est une famille liée, et donc de déterminant²⁷ nul. Donc $\det(A) = 0$.

□

Remarque. Ceci signifie que $\det : GL_n(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{K}^*$ est un morphisme de groupes.

²⁷ Dans la base canonique, mais en fait dans n'importe quelle base.

Exemple 32.40

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible car

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 + 4 - 4 \neq 0.$$

En revanche, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 15 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 15 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 10 + 30 + 18 + 2 + 30 - 90 = 0.$$

Corollaire 32.41 – Deux matrices semblables ont même déterminant.

Démonstration. Soient A et B deux matrices semblables, et soit $P \in GL_n(\mathbf{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$. Alors

$$\det(B) = \det(P^{-1}) \det(A) \det(P) = \det(P)^{-1} \det(P) \det(A) = \det(A).$$

□

Remarque. Nous avons dégagé plusieurs invariants de similitude²⁸, et savons que deux matrices semblables ont même rang, même trace et même déterminant.

Malheureusement, cela ne suffit pas encore, deux matrices peuvent avoir tout ceci en commun et ne pas être semblables.

Et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est toujours un contre-exemple...

²⁸ Des quantités qui sont égales pour deux matrices semblables.

Proposition 32.42 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors $\det(A) = \det(A^\top)$.
Et donc $\det(A)$ est aussi le déterminant de la famille des lignes de A dans la base canonique de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{K})$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{j,\sigma^{-1}(j)} \\ &= \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_n} \underbrace{\varepsilon(\sigma'^{-1})}_{=\varepsilon(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma'(i)} \\ &= \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma') \prod_{i=1}^n [A^\top]_{\sigma'(i),i} = \det(A^\top).\end{aligned}$$

Détails

On a réalisé le changement d'indice $j = \sigma(i)$, qui est légitime puisque σ réalise une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur lui-même.

Chgt d'indice

$\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ est une bijection de $\mathfrak{S}_n$ sur lui-même, donc on a posé $\sigma' = \sigma^{-1}$.

□

Une conséquence importante de ceci est que le déterminant est aussi une forme n -linéaire des vecteurs lignes de A , puisque les lignes de A sont les colonnes de $A^\top$.
Et donc ajouter à une ligne une combinaison linéaire des autres ne change pas le déterminant, échanger deux lignes le multiplie par -1 .

32.5.2 Calcul de déterminants

Le fait qu'une matrice soit inversible si et seulement si son déterminant est non nul nous donne envie²⁹ de calculer des déterminants, mais pour $n \geq 4$, la définition est quasiment inutilisable en pratique.
Pour l'instant, le seul outil dont nous disposons est de procéder à des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes de A , afin de faire apparaître une matrice dont on saurait calculer le déterminant.

²⁹ Même si ce n'est pas la seule raison d'être des déterminants.

Exemples 32.43

Avant de commencer, réfléchissons un peu à l'effet des trois opérations élémentaires sur les déterminants.

Puisqu'une opération sur les lignes revient à une opération sur les colonnes de $A^\top$, qui a même déterminant que A , bornons-nous à expliquer l'effet des opérations élémentaires sur les colonnes, en gardant à l'esprit que tout ce qui est permis sur les colonnes sera donc autorisé sur les lignes.

Nous savons déjà que l'ajout à une colonne d'une combinaison linéaire des autres préserve le déterminant.

Le déterminant étant alterné, l'échange de deux colonnes multiplie le déterminant par -1 .

Et par n -linéarité, multiplier une colonne par $\lambda \neq 0$ multiplie également le déterminant par λ .

Considérons $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -6 & 7 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, et calculons son déterminant par opérations élémentaires :

$$\det(A) \underset{C_1 \leftrightarrow C_4}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 7 & 1 & -6 \end{vmatrix}$$

L'échange de colonnes multiplie le déterminant par -1 .

$$\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{L_4 \leftarrow L_4 + 3L_1} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{L_2 \leftrightarrow L_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{L_4 \leftarrow L_4 - L_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 - L_3 - L_4}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 - 2L_4}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

Le déterminant est inchangé.

C'est la linéarité par rapport à la dernière ligne : on a « sorti » le -1 . Puis par linéarité par rapport à l'avant dernière ligne, on a « sorti » le 2 .

Constat : on arrive bien à calculer $\det(A)$, mais c'est laborieux !

Sur le même principe, si A est non inversible, des opérations sur les lignes/colonnes vont finir par faire apparaître une matrice dont les colonnes sont liées (ou même dont une colonne est nulle), ce qui nous permettra d'affirmer que le déterminant est nul.

Heureusement, nous allons mettre en place d'autres outils plus efficaces pour un calcul de déterminant, ce qui ne voudra pas dire qu'il n'est pas intéressant de coupler ces outils à des opérations sur les lignes et les colonnes !

Pour les matrices triangulaires, le calcul du déterminant est en fait assez facile : il suffit de regarder les coefficients diagonaux :

Proposition 32.44 (Déterminant d'une matrice triangulaire) :

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice triangulaire.

Alors $\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{i,i}$ est le produit des coefficients diagonaux de A :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n}.$$

Cas particulier

Ceci vaut bien entendu pour une matrice diagonale !

Démonstration. Prouvons-le dans le cas d'une matrice triangulaire supérieure, puisque si A est triangulaire inférieure, alors $\det(A) = \det(A^T)$, et A^T est triangulaire supérieure avec les mêmes coefficients diagonaux que A .

Rappelons que A triangulaire supérieure signifie que pour $i > j$, $a_{i,j} = 0$.

Par définition, $\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$.

Soit alors $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

► Si $\sigma = \text{id}$, alors $\varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} = a_{1,1} \dots a_{n,n}$.

► Si $\sigma \neq \text{id}$, alors $\text{Supp}(\sigma) = \{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \sigma(k) \neq k\}$ est non vide.

Il possède donc un plus petit élément p , pour lequel $\sigma(p)$ est encore dans $\text{Supp}(\sigma)$ (c'est-à-dire n'est pas fixe par σ).

Et donc $\sigma(p) > p$, de sorte que $a_{\sigma(p),p} = 0$, et donc $\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i} = 0$.

Ainsi, dans la somme définissant $\det(A)$, il ne reste que le terme correspondant à $\sigma = \text{id}$. $\square$

Remarques. ► Ce résultat englobe le cas des matrices diagonales, et on retrouve notamment le fait que $\det(I_n) = 1$.

► Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ fixé, dans le produit $\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$ il y a un et un seul terme de chaque colonne, et un unique terme de chaque ligne.

Pour A triangulaire supérieure, si on veut que ce produit soit non nul, il faut que $\sigma(1) = 1$ (faute de quoi $a_{\sigma(1),1} = 0$).

Puis que $\sigma(2) \leq 2$. Mais on a déjà $\sigma(1) = 1$, donc nécessairement il faut $\sigma(2) = 2$.

Puis de proche en proche, on prouve que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sigma(i) = i$, et donc $\sigma = \text{id}$.

Donc le seul terme restant dans la somme définissant $\det(A)$ est $\prod_{i=1}^n a_{i,i}$.

Définition 32.45 – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. On appelle alors :

1. **mineur** d'ordre (i, j) de A , et on note $\Delta_{i,j}(A)$ le déterminant de la matrice extraite de A obtenue par suppression de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne.
2. **cofacteur** d'ordre (i, j) le scalaire $(-1)^{i+j} \Delta_{i,j}(A)$.

Théorème 32.46 (Développement de $\det(A)$ par rapport à une colonne) :

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, et soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}(A).$$

Démonstration. Notons $\mathcal{B}_{\text{can}} = (E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A , de sorte que

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(C_1, \dots, C_n) = \det_{\mathcal{B}_{\text{can}}}\left(C_1, \dots, C_{j-1}, \sum_{i=1}^n a_{i,j} E_i, C_{j+1}, \dots, C_n\right) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{i,j} \det_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(C_1, \dots, C_{j-1}, E_i, C_{j+1}, \dots, C_n). \end{aligned}$$

Il s'agit donc de prouver que $D_{i,j} = \det_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(C_1, \dots, C_{j-1}, E_i, C_{j+1}, \dots, C_n) = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}(A)$. Or ce déterminant est

$$D_{i,j} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j-1} & 0 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

En procédant à $n - i$ échanges de lignes, on peut faire descendre la $i^{\text{ème}}$ ligne en dernière position. Comme chaque échange fait apparaître un facteur -1 , on a donc

$$D_{i,j} = (-1)^{n-i} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j-1} & 0 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \end{vmatrix}$$

Alternative

Au lieu de procéder par échanges de lignes successifs, on peut directement appliquer le cycle

$$(nn-1 \dots i)$$

à la famille des lignes. Il est de longueur $n - i$, donc de signature $(-1)^{n-i-1}$.

Puis par $n - j$ échanges de colonnes, déplacer la $j^{\text{ème}}$ colonne en dernière position :

$$D_{i,j} = \underbrace{(-1)^{2n-i-j}}_{=(-1)^{i+j}} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \dots & a_{2,n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} & 0 \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} & 0 \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} & 1 \end{vmatrix}$$

Notons $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dont le déterminant figure ci-dessus.

$$\text{Alors } \det(B) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n b_{\sigma(i),i}.$$

Si $\sigma(n) \neq n$, alors $b_{\sigma(n),n} = 0$, et sinon $b_{\sigma(n),n} = 1$.

Donc dans la somme définissant $\det(B)$, ne restent que les termes tels que $\sigma(n) = n$, qu'on peut identifier (quitte à considérer leur restriction à $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$) à des éléments de $\mathfrak{S}_{n-1}$, identification qui préserve la signature³⁰.

$$\text{Donc } \det(B) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n-1} b_{\sigma(i),i}.$$

On reconnaît alors le déterminant de la matrice $(b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n-1}$, extraite de B , qui n'est rien d'autre que la matrice extraite de A obtenue par suppression de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne, dont le déterminant vaut³¹ $\Delta_{i,j}(A)$. $\square$

³⁰ La décomposition de σ en produit de transpositions de $\mathfrak{S}_{n-1}$ donne aussi une décomposition de σ en produit de transpositions de $\mathfrak{S}_n$.

³¹ Par définition d'un mineur.

Corollaire 32.47 (Développement par rapport à une ligne) :

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, et soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}(A).$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème précédent à A^T . $\square$

Exemple 32.48

L'intérêt de ces deux formules est de permettre un calcul récursif des déterminants : un déterminant $n \times n$ peut se calculer en calculant au plus n déterminants $(n-1) \times (n-1)$, qui nécessitent eux-mêmes chacun $n-1$ calculs de déterminant $(n-2) \times (n-2)$, etc.

► Dans le cas d'un déterminant 3×3 , on a alors une alternative à la règle de Sarrus.

$$\text{Par exemple, soit } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Développons alors $\det(A)$ par rapport à sa première ligne. On obtient alors

$$\det(A) = (-1)^{1+1} \times 1 \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -6 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \times (-2) \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -6 & -3 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{1+3} \times 4 \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -6 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -21 - 14 - 112 =$$

-147.

► Certains développements sont plus intelligents que d'autres !

Considérons par exemple $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -7 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

S'il est possible de développer $\det(A)$ par rapport à la première ligne, cela ferait apparaître 4 déterminants 3×3 , qui eux-mêmes nécessitent chacun 6 produits (si l'on utilise la règle de Sarrus) ou 3 déterminant 2×2 (si on les redéveloppe).

En revanche, la troisième ligne ne contient que deux coefficients non nuls, donc il est pertinent de développer par rapport à cette troisième ligne :

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{3+2} 3 \begin{vmatrix} -1 & -7 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} 5 \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 6 \end{vmatrix} \\ &= -3 \left(-2 \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} -1 & -7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) + 5 \left(-2 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= -3 (-2 \times 19 + 6 \times 13) + 5 (-2 \times 22 + 3 \times 7) = -235. \end{aligned}$$

Détails

On a développé chacun des déterminants 3×3 par rapport à leur ligne qui contenait le 0.



Ne surtout pas oublier les $(-1)^{i+j}$ dans les cofacteurs.

Un bon moyen de ne pas se tromper est de se rappeler que le coefficient en haut à gauche (le coefficient $(1, 1)$) correspond à un $+1$, et que deux coefficients adjacents correspondent à un signe opposé :

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}, \text{ etc.}$$

Proposition 32.49 (Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs) : Soient

$A \in \mathcal{M}_r(\mathbf{K})$, $B \in \mathcal{M}_{r, n-r}(\mathbf{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbf{K})$.

Alors $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-r, r} & C \end{pmatrix} = \det(A) \det(C)$.

Démonstration. Soit $\varphi : (\mathcal{M}_{r,1}(\mathbf{K}))^r \rightarrow \mathbf{K}$ l'application qui à $(X_1, \dots, X_r)$ associe

$$\varphi(X_1, \dots, X_r) = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_r & B \\ 0_{n-r,1} & 0_{n-r,1} & \dots & 0_{n-r,1} & C \end{vmatrix}$$

qui est un déterminant de taille $n \times n$.

Il est facile de constater que φ est r -linéaire alternée.

Et donc, par la proposition 32.33, $\varphi = \varphi(E_1, \dots, E_r) \det_{\mathcal{B}_{can}}$ où $\mathcal{B}_{can} = (E_1, \dots, E_r)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{r,1}(\mathbf{K})$.

En particulier, si $A_1, \dots, A_r$ sont les colonnes de A ,

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0_{n-r, r} & C \end{vmatrix} = \varphi(A_1, \dots, A_r) = \varphi(E_1, \dots, E_r) \det_{\mathcal{B}_{can}}(A_1, \dots, A_r) = \varphi(E_1, \dots, E_r) \det(A).$$

Or, $\varphi(E_1, \dots, E_r) = \begin{vmatrix} I_r & B \\ 0_{n-r, r} & C \end{vmatrix}$.

En développant ce déterminant par rapport à sa première colonne, on obtient

$(-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} I_{r-1} & B' \\ 0_{n-r, r-1} & C \end{vmatrix}$ où B' est la matrice obtenue à partir de B en supprimant la première ligne.

En développant de nouveau ce déterminant par rapport à sa première colonne, et en répétant r fois le procédé, on obtient $\begin{vmatrix} I_r & B \\ 0_{n-r, r} & C \end{vmatrix} = \det(C)$.

Et donc au final, $\begin{vmatrix} A & B \\ 0_{n-r, r} & C \end{vmatrix} = \det(A) \det(C)$. $\square$

Corollaire 32.50 – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice triangulaire par blocs, c'est-à-dire de

la forme
$$\begin{pmatrix} A_1 & \star & \dots & \star \\ 0_{k_2, k_1} & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0_{k_p, k_1} & \dots & 0_{k_p, k_{p-1}} & A_p \end{pmatrix} \text{ avec } A_1 \in \mathcal{M}_{k_1}(\mathbf{K}), \dots, A_p \in \mathcal{M}_{k_p}(\mathbf{K}), \text{ alors}$$

$$\det(A) = \det(A_1) \cdots \det(A_p).$$

Démonstration. Par récurrence sur p . □

Exemple 32.51

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 & -5 & 19 \\ 4 & 0 & 6 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 & -5 & 19 \\ 4 & 0 & 6 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \times 5 \times \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -8 \times 5 \times 6 = -240.$$

32.5.3 Un déterminant à connaître : le déterminant de Vandermonde.

Proposition 32.52 : Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soient $x_0, \dots, x_n$ des scalaires. Alors

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \dots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \dots & x_{n-1}^n & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Ce déterminant est appelé **déterminant de VANDERMONDE**.

En particulier

Il est non nul si et seulement si les x_i sont deux à deux distincts.

Démonstration. Procédons par récurrence sur n , et notons³² $V_n(x_0, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$.

³² On le note V comme VANDERMONDE bien entendu.

Pour $n = 1$, on a bien

$$V_1(x_0, x_1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_0 & x_1 \end{vmatrix} = (x_1 - x_0) = \prod_{0 \leq i < j \leq 1} (x_j - x_i).$$

Supposons donc la formule vraie pour $V_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-1})$, et ce quels que soient les scalaires $(x_0, \dots, x_{n-1})$.

Soient alors $x_0, \dots, x_n$ $n + 1$ scalaires.

► Si deux des x_i sont égaux, alors le déterminant a deux colonnes identiques, donc est nul. Mais alors le produit $\prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$ a un de ses facteurs qui est nul, donc est nul.

Et donc la formule $V(x_0, \dots, x_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$ est valable.

► Si les x_i sont deux à deux distincts, considérons la fonction définie sur $\mathbf{K}$ par $V : x \mapsto V_n(x_0, \dots, x_{n-1}, x)$.

En développant $V(x)$ par rapport à la dernière colonne, on constate qu'il s'agit d'un polynôme de degré au plus n en x . En effet,

$$V(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_{n-1} & x \\ x_0^2 & x_1^2 & \dots & x_{n-1}^2 & x^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \dots & x_{n-1}^n & x^n \end{vmatrix} = (-1)^{n+2} \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{n-1} \\ x_0^2 & x_1^2 & \dots & x_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \dots & x_{n-1}^n \end{vmatrix} + (-1)^{n+3} x \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0^2 & x_1^2 & \dots & x_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \dots & x_{n-1}^n \end{vmatrix} \\ + \dots + (-1)^{2n+2} x^n \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}}_{=V_{n-1}(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})}$$

Notons que le cofacteur de la dernière ligne prouve que le coefficient dominant de V est $V_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-1})$.

Par ailleurs, $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ sont des racines de V , puisqu'une fois encore $V(x_i)$ a deux colonnes identiques donc est nul.

Donc V est scindé³³, et

$$\forall x \in \mathbf{K}, V(x) = V_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-1}) \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i).$$

Et donc en particulier, pour $x = x_n$,

$$V_n(x_0, \dots, x_n) = V(x_n) = V_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-1}) \prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i) = \prod_{0 \leq i < j \leq n-1} (x_j - x_i) \times \prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i) \\ = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Par le principe de récurrence, la formule annoncée est vraie pour tout n . $\square$

³³ Nous avons déjà autant de racines distinctes que le degré.

Coeff. dominant
Nous n'avons pas oublié le coefficient dominant, qui est $V_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-1})$.

32.5.4 Comatrice

Définition 32.53 – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On appelle **comatrice** de A , et on note $\text{Com}(A)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dont les coefficients sont les cofacteurs de A , c'est-à-dire définie par $[\text{Com}(A)]_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}(A)$.

Taille
La comatrice de A est une matrice carrée de même taille que A .

Exemple 32.54

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 2 & -5 & -3 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. Alors

$$\text{Com}(A) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29 & -8 & -6 \\ 15 & 4 & 3 \\ -25 & -7 & -5 \end{pmatrix}.$$

Théorème 32.55 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors $A \text{Com}(A)^T = \text{Com}(A)^T A = \det(A) I_n$.

Démonstration. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Alors

$$\begin{aligned} [A \operatorname{Com}(A)^T]_{i,j} &= \sum_{k=1}^n [A]_{i,k} [\operatorname{Com}(A)^T]_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^n a_{i,k} [\operatorname{Com}(A)]_{j,k} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} (-1)^{j+k} \Delta_{j,k}(A). \end{aligned}$$

► Si $i = j$, on reconnaît le développement de $\det(A)$ par rapport à la $i^{\text{ème}}$ ligne.

Donc $[A \operatorname{Com}(A)^T]_{i,i} = \det(A)$.

► Si $i \neq j$, on reconnaît le développement par rapport à la $j^{\text{ème}}$ ligne de

$$\begin{array}{cccccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & \dots & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & \dots & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & \dots & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & \dots & \dots & a_{n,n} \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow i^{\text{ème}} \text{ ligne} \\ \leftarrow j^{\text{ème}} \text{ ligne} \end{array}$$

Remarque

En écrivant ainsi les choses, on a implicitement supposé $i < j$, mais le principe est le même si $j < i$.

Autrement dit il s'agit du déterminant de A où on a remplacé la $j^{\text{ème}}$ ligne par la $i^{\text{ème}}$. Mais comme toute matrice ayant deux lignes égales, cette matrice est de déterminant nul, donc $[A \operatorname{Com}(A)^T]_{i,j} = 0$.

Et donc au final, on a bien $A \operatorname{Com}(A)^T = \det(A) I_n$.

La preuve est la même pour $\operatorname{Com}(A)^T A$, en utilisant plutôt des développements par rapport à des colonnes. $\square$

On obtient alors une formule générale exprimant l'inverse d'une matrice en fonction de ses coefficients :

Corollaire 32.56 – Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est inversible, alors $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{Com}(A)^T$.

Ne nous emballons pas trop vite : aussi jolie soit cette formule, elle a surtout un intérêt théorique, et n'est vraiment pratique³⁴ pour des calculs que pour $n \leq 3$ puisque la complexité des calculs explose rapidement.

³⁴ Et encore, pas toujours...

Exemples 32.57

► Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible, alors $\operatorname{Com}(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ et donc on retrouve une

vieille connaissance : $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

► Si $n = 3$, alors le calcul de la comatrice nécessite le calcul de 9 déterminants 2×2 et du déterminant de A , ce qui peut avoir un temps de calcul comparable à celui d'un calcul d'inverse par la méthode du pivot, mais qui surtout, nécessite d'en écrire moins.

Par exemple, soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Alors la règle de Sarrus nous donne : $\det(A) = -8 + 6 + 4 = 2$. Ce déterminant étant non nul, A est inversible.

Calculs

En revanche, cette méthode ne met pas à l'abri des erreurs de calcul, et de ce point de vue, n'est pas vraiment meilleure qu'un pivot.

Par ailleurs, $\text{Com}(A) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \\ -6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ et donc

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Com}(A)^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 4 & -6 \\ 2 & -2 & 6 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

32.6 DÉTERMINANT D'UN ENDOMORPHISME

Comme mentionné précédemment, deux matrices semblables ont le même déterminant. Et en particulier, deux matrices représentant le même endomorphisme dans deux bases différentes ont le même déterminant. Donc le déterminant est une propriété intrinsèque de l'endomorphisme.

Définition 32.58 – Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle alors **déterminant de f** et on note $\det(f)$ le déterminant de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, où $\mathcal{B}$ est n'importe quelle base de E .

Notons que pour toute base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$,

$$\det(f) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

et donc est le volume orienté du parallélépipède construit sur les vecteurs $f(e_1), \dots, f(e_n)$.

Les deux propriétés suivantes découlent immédiatement des propriétés analogues pour les matrices :

Proposition 32.59 : Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

1. f est bijectif si et seulement si $\det(f) \neq 0$
2. $\det(g \circ f) = \det(g) \det(f)$.

Proposition 32.60 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors pour toute famille $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ et toute base $\mathcal{B}$ de E ,

$$\det_{\mathcal{B}}(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \det(f) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

Démonstration. Si $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, $(f(x_1), \dots, f(x_n))$ l'est aussi, donc dans ce cas les deux déterminants sont nuls.

En revanche, si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille libre, c'est une base $\mathcal{B}'$ de E .

Et donc, par la formule de changement de base,

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(f(x_1), \dots, f(x_n)) &= \det_{\mathcal{B}'}(f(x_1), \dots, f(x_n)) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \\ &= \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(x_1), \dots, f(x_n))) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \\ &= \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

□

Autrement dit, le déterminant de f décrit l'effet de f sur les aires/volumes/leur analogue en dimension n orientés. Ce qui est remarquable, c'est que pour tous les parallélépipèdes, le rapport entre le volume du parallélépipède d'origine et le volume de son image par f est constant (égal à $\det(f)$).

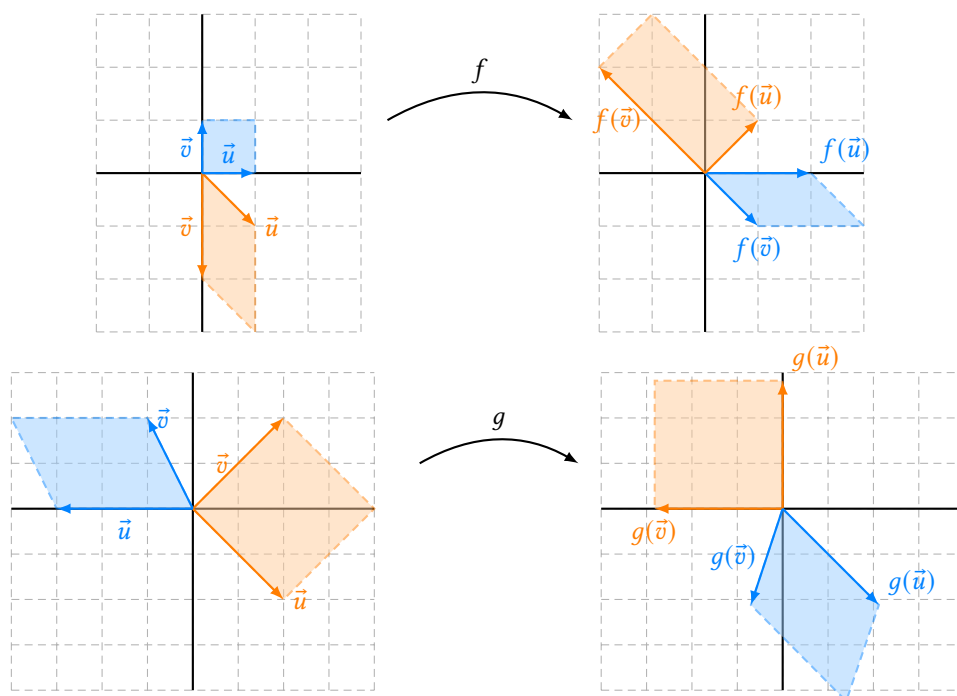
Par exemple, sur la figure ci-dessous on a représenté, pour deux endomorphismes de $\mathbf{R}^2$, deux parallélogrammes et leurs images.

Dans le cas de f , on constate que les aires orientées ont été multipliées par -2 (donc $\det f = -2$), et dans le cas de g , elles n'ont pas changé (donc $\det(g) = 1$).

Pour g , vous aurez sans doute reconnu une rotation, notion que nous définirons un peu

Détails
Par définition,

$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(x_1), \dots, f(x_n))$
est la matrice de f dans la
base $\mathcal{B}' = (x_1, \dots, x_n)$.



plus tard, mais pour laquelle on n'est pas surpris que les aires soient préservées.

En particulier, les endomorphismes non bijectifs, c'est-à-dire de déterminant nul, «aplatissent» tous les parallélépipède en les envoyant sur des parties de volume nul.

C'est assez logique si on y réfléchit, puisque leur image est incluse dans un hyperplan, qui doit être de volume nul. Sans une définition plus rigoureuse d'un volume³⁵, il est difficile de donner du sens à ceci en grande dimension, mais en dimensions 2 et 3, cela revient à dire qu'une droite est d'aire nulle et qu'un plan est de volume nul.

Spoiler

Comme vous avez déjà manipulé des rotations en physique ou en SI, vous ne serez pas surpris si je vous dis que la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle θ est

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

³⁵ Et pour aller plus loin que le volume d'un parallélépipède, il faut construire ce qu'on appelle la mesure de Lebesgue, qui permet entre autres de construire l'intégrale de fonctions définies sur des parties de $\mathbf{R}^n$ et pas seulement sur des segments.