RUDIMENTS DE LOGIQUE. ENSEMBLES 3

3.1 PROPOSITIONS LOGIQUES

Une **proposition logique** (ou **assertion**) P est une phrase dont on peut dire qu'elle est soit vraie soit fausse[1].
Par exemple, la proposition «2 est positif» est vraie, et la proposition «$-1 > 2$» est fausse.
La **valeur de vérité** d'une proposition est donc soit «vrai» (noté généralement V), soit «faux» (noté F).

[1] Mais pas les deux à la fois !

Une phrase en français n'est pas forcément une proposition logique :

- «S'il n'y a pas de nuages, alors il ne pleut pas» est bien vraie, donc est une assertion logique.
- «Federer est le meilleur tennisman de tous les temps» ne fait pas l'unanimité, donc ne peut être considérée comme une proposition logique.

Remarquons qu'une proposition peut dépendre d'un ou plusieurs paramètres, comme par exemple la proposition «$\lfloor x^2 \rfloor \geqslant 9$» qui dépend d'un réel x, ou encore «n est divisible par 6», qui dépend d'un entier n.
On fera alors attention à nommer correctement ces propositions, en faisant apparaître la ou les variables dans le nom. Par exemple $P(x)$ et $Q(n)$ et pas seulement P ou Q.
Ceci évite les confusions car par exemple, $Q(2)$ est fausse alors que $Q(6)$ est vraie. Si on l'avait nommée uniquement Q, quelle valeur de vérité donner à Q ?

Remarque
Cette notation ne doit pas vous surprendre, c'est celle que vous avez utilisé pour les récurrences en terminale !

À partir de plusieurs propositions logiques, il est possible d'en créer d'autres, par exemple la proposition «2 est positif **et** $-1 > 2$». Cette dernière proposition est fausse, puisque -1 n'est toujours pas supérieur à 2.
On peut aussi par exemple considérer la proposition «si il neige, alors il fait froid».

La **table de vérité** d'une formule R construite à base d'autres propositions[2] est un tableau donnant la valeur de vérité de R en fonction des valeurs de vérité des propositions utilisées pour la construire.

[2] Qu'on appellera des variables propositionnelles.

Par exemple, la table de vérité de la proposition «P et Q» est la suivante :

P	Q	P **et** Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Autrement dit, la proposition «P **et** Q» est vraie si et seulement si P et Q sont toutes les deux vraies.
Deux formules qui ont la même table de vérité sont dites **équivalentes**. Autrement dit, quelle que soit la valeur de vérité des variables propositionnelles qui la composent, elles ont la même valeur de vérité.
Si deux propositions P et Q sont équivalentes, on note alors $P \equiv Q$.

Nous présentons dans la suite les principaux connecteurs logiques qui permettent de construire de nouvelles propositions à partir de propositions existantes.

3.1.1 Négation

Définition 3.1 – Si P est une proposition logique, alors sa **négation** notée $\neg P$ (ou **non** P) est la proposition qui est vraie si et seulement si P est fausse.

Elle a donc la table de vérité suivante :

P	$\neg P$
V	F
F	V

Exemples 3.2

La négation de $P : x < 4$ est $\neg P : x \geqslant 4$.
La négation de «il fait chaud tous les jours» est «certains jours, il ne fait pas chaud».
Et sûrement pas «tous les jours, il ne fait pas chaud» !
La négation de $P : x^2 = 3$ et $\neg P : x^2 \neq 3$.
La négation de $P : -1 < x \leqslant 2$ est $\neg P : x \leqslant -1$ **ou** $x > 2$.

Proposition 3.3 (Loi de la double négation) : *Si P est une proposition logique, alors $\neg(\neg P) \equiv P$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que P et $\neg(\neg P)$ ont la même table de vérité :

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$
V	F	V
F	V	F

□

3.1.2 Conjonction («et») et disjonction («ou»)

Définition 3.4 – Soient P et Q deux propositions logiques.

1. La conjonction de P et Q, notée $P \wedge Q$ (ou «P **et** Q») est la proposition qui est vraie si et seulement si P et Q sont simultanément vraies, et qui est fausse sinon.
2. La disjonction de P et Q, notée $P \vee Q$ (ou «P **ou** Q») est la proposition qui est fausse si et seulement si P et Q sont simultanément fausses, et qui est vraie sinon.

Autrement dit, les tables de vérité de ces deux propositions sont données par

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Autrement dit
P **ou** Q est vraie dès que l'une (ou les deux !) des deux propositions P et Q est vraie.

Ordre ?
L'ordre n'a bien évidemment aucune importance : $P \wedge Q$ et $Q \wedge P$ sont équivalentes, de même que $P \vee Q$ et $Q \vee P$.

Exemple 3.5

Si n est un entier naturel, alors si $P(n)$ est la proposition «n est pair», si $Q(n)$ est la proposition «n est divisible par 3», alors $P(n) \wedge Q(n)$ est la proposition «n est divisible par 6».
En revanche, $P(n) \vee Q(n)$ est la proposition «n est divisible par 2 ou par 3», qui est vraie pour tous les entiers qui ne sont pas de la forme $6k+1$ ou $6k+5$, $k \in \mathbf{N}$.

⚠ En français, le **ou** est souvent (mais pas toujours) exclusif, comme dans «fromage **ou** dessert». Autrement dit, on considère qu'il est vraie si une et une seule des propositions qui

le composent est vraie.
En logique, le **ou** que l'on manipule, et dont on vient de donner la table de vérité est inclusif : (P **ou** Q) est vraie dès que l'une des deux propositions P ou Q est vraie, y compris si les deux sont vraies.

Proposition 3.6 : *Pour toute proposition P, on a :*

1. $P \wedge (\neg P)$ *est fausse*
2. $P \vee (\neg P)$ *est vraie (principe du tiers-exclus).*

Remarque

Ces deux propositions traduisent le fait que P est toujours soit vraie soit fausse (il n'y a pas de troisième option), et ne peut être les deux à la fois.

Démonstration. Dresser les tables de vérité de $P \wedge (\neg P)$ et $P \vee (\neg P)$. □

Proposition 3.7 (Négation d'une conjonction/disjonction) : *Soient P et Q deux propositions logiques. On a alors*

1. $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$.
   Autrement dit **non**(P **et** Q) $\equiv$ (**non** P) **ou** (**non** Q).
2. $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$.
   Autrement dit **non**(P **ou** Q) $\equiv$ (**non** P) **et** (**non** Q).

Démonstration. Une fois encore, dressons des tables de vérité.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$(\neg P) \wedge (\neg Q)$
V	V	F	F	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V	V	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V	F	V	V

Nous constatons donc que les tables de vérité de $\neg(P \wedge Q)$ et $(\neg P) \vee (\neg Q)$ (resp. $\neg(P \vee Q)$ et $(\neg P) \wedge (\neg Q)$) sont les mêmes. □

Exemple 3.8

Si P est la proposition : «je fais du ski» et Q la proposition «je fais de l'escalade», alors $P \wedge Q$ est la proposition «je fais du ski et de l'escalade».
Sa négation est $(\neg P) \vee (\neg Q)$: «je ne fais pas de ski ou ne fais pas d'escalade».
Et pas : «je ne fais ni ski ni escalade» !
En effet, si vous ne pratiquez que l'un des deux sports, alors $P \wedge Q$ est fausse, donc $\neg(P \wedge Q)$ est vraie, alors que $(\neg P) \wedge (\neg Q)$ est fausse.
En revanche, la négation de $P \vee Q$ («je fais du ski ou de l'escalade) est bien $(\neg P) \wedge (\neg Q)$: «je ne pratique pas le ski et ne pratique pas l'escalade» (ou encore «je ne pratique ni le ski ni l'escalade»).

Le résultat qui suit est plutôt intuitif, mais il est bon de le mentionner :

Proposition 3.9 (Associativité de $\wedge$ et $\vee$) : *Soient P, Q, R trois assertions logiques. Alors*

1. $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$
2. $(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$

Démonstration. Dresser des tables de vérité. □

La proposition précédente signifie que lorsqu'on utilise plusieurs fois de suite le même symbole $\vee$ ou $\wedge$, il n'est pas utile de mettre des parenthèses. Attention, ceci n'est plus vrai si l'on mélange conjonction ($\wedge$) et disjonction ($\vee$).
Mais on dispose alors du résultat suivant :

Proposition 3.10 (Distributivités) : *Soient P, Q, R trois propositions logiques. Alors*

1. $(P \vee Q) \wedge R \equiv (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$.
   Soit encore (P **ou** Q) **et** $R \equiv$ (P **et** R) **ou** (Q **et** R).
2. $(P \wedge Q) \vee R \equiv (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$.
   Soit encore (P **et** Q) **ou** $R \equiv$ (P **ou** R) **et** (Q **ou** R).

Démonstration. Prouvons uniquement le premier point, comme toujours à l'aide d'une table de vérité.

P	Q	R	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \wedge R$	$(P \wedge R)$	$(Q \wedge R)$	$(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	F	V
V	F	F	V	F	F	F	F
F	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

□

3.1.3 Implication, équivalence

Définition 3.11 (Implication) – Si P et Q sont deux propositions, on note $P \Rightarrow Q$, et on lit «P implique Q» la proposition dont la table de vérité est la suivante :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Remarque

$P \Rightarrow Q$ est fausse si et seulement si P est vraie et que Q est fausse.

Dire que la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie signifie que dès que P est vraie, alors Q l'est aussi. Par exemple, si x est un nombre réel, alors «$x \geqslant 4 \Rightarrow x \geqslant 0$» est vraie, puisqu'un réel plus grand que 4 est positif. En revanche, si x n'est pas plus grand que 4 (donc si $x \geqslant 4$ est fausse), alors $x \geqslant 0$ peut être vraie (par exemple si $x = 1$) ou fausse (si $x = -1$).

Proposition 3.12 : *Si P et Q sont deux propositions logiques, alors $P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$.*

Démonstration.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

□

Remarques. ► La table de vérité nous donne une méthode pour prouver une implication $P \Rightarrow Q$: il faut prouver que quand P est vraie, alors Q l'est aussi. Autrement dit, supposer P pour montrer Q.
En revanche, il n'y a absolument pas besoin de se préoccuper du cas où P n'est pas vraie.
► La proposition précédente nous permet aussi de donner la négation de $P \Rightarrow Q$:

$$\neg(P \Rightarrow Q) \equiv \neg(\neg P \vee Q) \equiv P \wedge (\neg Q).$$

Remarque

Le résultat n'est pas très surprenant : l'implication sera fausse si P peut-être vraie sans que Q ne le soit.

Définition 3.13 (Contraposée) – On appelle **contraposée** de la proposition $P \Rightarrow Q$ la proposition $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$.

Proposition 3.14 : *La proposition $P \Rightarrow Q$ est équivalente à sa contraposée.*

Démonstration. Nous pourrions le prouver à l'aide d'une table de vérité[3], mais notons plutôt que $(P \Rightarrow Q) \equiv (\textbf{non}\, P)$ **ou** Q.
Et donc $(\textbf{non}\, Q) \Rightarrow (\textbf{non}\, P)$ est équivalente à $(\textbf{non}(\textbf{non}\, Q))$ **ou** $(\textbf{non}\, P)$, soit encore à Q **ou** $(\textbf{non}\, P)$. □

[3] Encore une...

Cette proposition d'apparence anodine est en réalité très importante : pour montrer qu'une implication est vraie, on peut en fait montrer que sa contraposée est vraie
Par exemple, si n est un entier, prouvons la proposition «si n^2 est pair, alors n est pair». Soit encore «n^2 pair $\Rightarrow n$ pair».
Sa contraposée est alors «n impair $\Rightarrow n^2$ impair».
Or, si $n = 2k+1$ est impair, alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$ est impair.
Ainsi, «n impair $\Rightarrow n^2$ impair» est vraie, et donc sa contraposée «n^2 pair $\Rightarrow n$ pair» est également vraie.

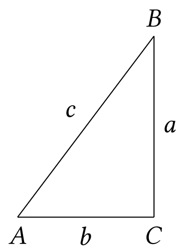
Terminologie
On parle alors de raisonnement par contraposition.

Définition 3.15 – Soients P et Q deux assertions.

1. Si la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie, alors on dit que
   — P est une **condition suffisante** de Q, ce qui traduit que dès que P est vraie, alors Q l'est aussi.
   — Q est une **condition nécessaire** de P, ce qui traduit que P ne peut pas être vraie si Q n'est pas vraie.
2. La proposition $Q \Rightarrow P$ est appelée **réciproque** de la proposition $P \Rightarrow Q$.

Autrement dit
Pour que Q soit vraie, il **suffit** que P le soit.
Pour que P soit vraie, il est nécessaire que Q le soit aussi.

⚠ Il ne faut pas confondre réciproque et contraposée.
Comme dit précédemment, une implication et sa contraposée ont même valeur de vérité.
En revanche, il n'y a pas de lien entre une implication et sa réciproque, l'une peut être vraie et pas l'autre, les deux peuvent être vraies, etc.



Par exemple, si ABC est un triangle de côtés a, b, c, alors vous savez depuis toujours que (ABC est rectangle en C) $\Rightarrow (a^2+b^2=c^2)$, et que la réciproque est également vraie.
En revanche, si f est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, alors la proposition

$$f \text{ est dérivable et sa dérivée est positive} \Rightarrow f \text{ est croissante}$$

est vraie, mais sa réciproque ne l'est pas. En effet, la fonction partie entière est une[4] fonction croissante sur $\mathbf{R}$ qui n'est pas dérivable sur $\mathbf{R}$.

[4] Parmi bien d'autres !

Définition 3.16 (Équivalence) – Si P et Q sont deux propositions logiques, on note $P \Leftrightarrow Q$ la proposition qui est vraie si et seulement si P et Q ont les mêmes valeurs de vérité :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

⚠ Si j'écris $P \iff Q$, je ne me prononce ni sur la valeur de P, ni sur celle de Q.
Par exemple,si x est un réel, alors $x+2 = x \Leftrightarrow 2 = 0$.
L'équivalence ainsi écrite est vraie, mais ne signifie pas que l'une ou l'autre des deux assertions qui la composent le soient.
Les mêmes remarques valent évidemment pour l'implication.

✎ **Rédaction** : Dans une copie, on ne cherchera donc pas à remplacer tous les «donc» ou «on a» par des implications ou des équivalences.
Ces mots sont importants :

1. afin que votre copie ne se limite pas à une succession de symboles mathématiques

2. pour bien marquer ce que l'on sait être vrai.

Proposition 3.17 (Équivalence et double implication) : *Si P et Q sont deux propositions logiques, alors les propositions $P \Leftrightarrow Q$ et $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ sont équivalentes.*

Démonstration.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

□

Remarque. Ceci justifie le raisonnement par double implication : pour prouver une équivalence, il est possible de prouver séparément les deux implications.

3.2 QUANTIFICATEURS

3.2.1 Quantificateur universel, quantificateur existentiel

Nous avons vu plus haut des exemples de propositions dépendant d'un ou plusieurs paramètres, qui peuvent être vraies pour certaines valeurs du paramètre et fausses pour d'autres.

Définition 3.18 (Quantificateur universel) – On note $\forall x \in E, P(x)$, et on lit «pour tout x appartenant à E, $P(x)$», la proposition qui est vraie si quel que soit l'élément x de E, la proposition $P(x)$ est vraie.
Le symbole $\forall$ est appelé **quantificateur universel**.

Exemples 3.19

- La proposition $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 \geqslant 0$ est vraie, puisqu'un carré est toujours positif.
- La proposition $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x \geqslant 0$ est fausse, puisque pour $x = -1$, on a $x^2 + 2x = -1 < 0$.
- La proposition $\forall n \in \mathbf{Z}, n^2 \in \mathbf{N}$ est vraie puisque le carré d'un entier relatif est **toujours** un entier naturel.
- La proposition $\forall n \in \mathbf{N}, n - 1 \in \mathbf{N}$ est fausse puisque pour $n = 0$, on a $n - 1 = -1 \notin \mathbf{N}$.
- La proposition $\forall x \in \mathbf{R}, x \geqslant 2 \Rightarrow x \geqslant 3$ est fausse. En effet, pour $x = 2$, on a $x \geqslant 2$ qui est vraie, et $x \geqslant 3$ qui est fausse, de sorte que $x \geqslant 2 \Rightarrow x \geqslant 3$ est fausse.
- En revanche, $\forall x \in \mathbf{R}, x \geqslant 2 \Rightarrow x > 0$ est vraie.
En effet, si x est un réel, deux cas de figure sont possibles :
  — soit $x \geqslant 2$, et alors on a bien $x > 0$, de sorte que $x \geqslant 2 \Rightarrow x > 0$ est vraie ;
  — soit $x < 2$, auquel cas $x \geqslant 2$ est fausse et donc $x \geqslant 2 \Rightarrow x > 0$ est vraie.
- Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Alors la proposition «f est la fonction nulle» est équivalente à $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = 0$.
Cela signifie que f prend toujours la valeur nulle.

Remarque
Notons que $n = 0$ est le seul entier de $\mathbf{N}$ pour lequel $n - 1 \notin \mathbf{N}$. Par conséquent, la proposition

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \ n - 1 \in \mathbf{N}$$

est vraie.

<u>**Rédaction**</u> : pour prouver une proposition du type $\forall x \in E, P(x)$, on commencera systématiquement par «Soit $x \in E$», pour arriver à la conclusion que $P(x)$ est vraie.
Ceci signifie que l'on prend un x dont on sait qu'il est dans E, mais qui peut être n'importe quel élément de E (autrement dit, x est un élément quelconque de E).
Si on arrive alors à prouver $P(x)$, en n'utilisant que les propriétés communes à tous les éléments de E, alors on a bien prouvé $\forall x \in E, P(x)$.
Si on part de «Soit $n \in \mathbf{N}$» et que pour prouver $\mathscr{P}(n)$ on utilise que n est pair, alors il y a un problème : certains élément de $\mathbf{N}$ sont bien pairs, mais ce n'est pas un point commun à tous les entiers. Donc nous sommes en train de prouver $\forall n \in \{2k, k \in \mathbf{N}\}, P(n)$ et non $\forall n \in \mathbf{N}, P(n)$.

Détails
L'ensemble noté

$$\{2k, \ k \in \mathbf{N}\}$$

est l'ensemble des multiples de 2, donc l'ensemble des entiers pairs.

Définition 3.20 (Quantificateur existentiel) – On note $\exists x \in E,\ P(x)$, et on lit «il existe x appartenant à E tel que $P(x)$», la proposition qui est vraie si il existe au moins un[5] élément x_0 de E pour lequel $P(x_0)$ soit vraie.
Le symbole $\exists$ est appelé **quantificateur existentiel.**

[5] Il peut y en avoir plusieurs !

Exemples 3.21

- La proposition $\exists x \in \mathbf{R},\ x \geqslant 0$ est vraie, puisqu'il existe bien un réel positif, par exemple $x = 4$.
- La proposition $\exists z \in \mathbf{C},\ z^2 + 1 = 0$ est vraie, puisque $z = i$ convient[6].
- En revanche, la proposition $\exists x \in \mathbf{R},\ x^2 + 1 = 0$ est fausse. On prendra donc bien garde à l'ensemble auquel appartient la variable quantifiée.
- Si f est une fonction réelle, alors la proposition $\exists x \in \mathbf{R},\ f(x) = 0$ signifie que f s'annule au moins une fois.
Par exemple, elle est vraie si f est la fonction $x \mapsto x^2 - 1$, puisque $f(1) = 0$.

[6] Notons que $z = -i$ convient également.

Rédaction : Il est beaucoup plus difficile de prouver des propositions du type $\exists x \in E,\ P(x)$, et en général il faut avoir la bonne intuition pour savoir quel x vérifie P.
Mais une fois qu'on a trouvé un tel x, la rédaction est simplissime, il faut se contenter de «Posons $x = \dots$» (où l'on remplace $\dots$ par la valeur de x qu'on a «devinée»), et on prouve qu'alors $P(x)$ est vraie.

Il reste enfin une dernière notation, qui n'est qu'une variation du précédent : on note $\exists! x \in E,\ P(x)$ pour signifier qu'il existe un **unique** $x \in E$ vérifiant la propriété P.
Autrement dit, on note $\exists! x \in E,\ P(x)$ pour

$$\exists x \in E,\ P(x) \textbf{ et } (\forall y \in E,\ (P(y) \Rightarrow y = x))$$

qui signifie qu'il existe un $x \in E$ qui satisfait $P(x)$, et que tout autre $y \in E$ satisfaisant la propriété P doit être égal à y, ce qui est bien l'idée qu'on se fait de l'unicité.
On a donc notamment $(\exists! x \in E,\ P(x)) \Rightarrow (\exists x \in E,\ P(x))$.

Exemple 3.22

La proposition $\exists! x \in \mathbf{R},\ x^2 = 4$ est fausse, puisque $x = 2$ et $x = -2$ vérifient tous les deux $x^2 = 4$.
En revanche, $\exists! x \in \mathbf{R}_+,\ x^2 = 4$ est vraie, puisque $x = 2$ est l'unique réel **positif** dont le carré vaut 4.

3.2.2 Quelques exemples de définitions quantifiées

Nous redonnons, sans justification, les définitions quantifiées de certaines propositions déjà rencontrées précédemment :

Définition 3.23 – Soit $f : I \to \mathbf{R}$, avec I partie de $\mathbf{R}$. Alors f est strictement croissante si et seulement si $\forall (x, y) \in I^2,\ (x < y) \Rightarrow f(x) < f(y)$.

Définition 3.24 – Une partie I de $\mathbf{R}$ est un intervalle si

$$\forall x \in I, \forall y \in I, \forall z \in \mathbf{R}, ((x \leqslant z) \textbf{ et } (z \leqslant y)) \Rightarrow y \in I.$$

Définition 3.25 – Soit A une partie de $\mathbf{R}$. Alors

1. un réel M est un majorant de A si $\forall t \in A,\ t \leqslant M$.
2. A est majorée si $\exists M \in \mathbf{R}, \forall t \in A,\ t \leqslant M$.

Définition 3.26 – Soit $f : I \to J$, où I et J sont deux parties de $\mathbf{R}$. Alors f réalise une bijection de I sur J si et seulement si

$$\forall y \in J, \exists! x \in I, y = f(x).$$

Soit encore $\forall y \in J, \exists x \in E, (y = f(x) \textbf{ et } (\forall u \in I, (f(u) = y \Rightarrow u = x))$.

3.2.3 Négation des propositions quantifiées

Faute de définition formelle et rigoureuse des quantificateurs, nous ne pouvons qu'admettre les résultats suivants, qui sont très intuitifs.

Proposition 3.27 :

1. *La négation de* $\forall x \in E,\ P(x)$ *est* $\exists x \in E,\ \textbf{non}\, P(x)$.
2. *La négation de* $\exists x \in E,\ P(x)$ *est* $\forall x \in E,\ \textbf{non}\, P(x)$.

Danger !
La négation de

$$\forall x \in E,\ P(x)$$

n'est surtout pas

$$\forall x \in E,\ \textbf{non}\, P(x).$$

Exemples 3.28

► La négation de $\forall x \in \mathbf{R},\ x^2 + 1 \geqslant 0$ est $\exists x \in \mathbf{R},\ x^2 + 1 < 0$.
Puisque la proposition de départ est vraie, sa négation est fausse.
► La négation de $\exists n \in \mathbf{N},\ \frac{n}{3} \in \mathbf{N}$ est $\forall n \in \mathbf{N},\ \frac{n}{3} \notin \mathbf{N}$.
Puisque la proposition de départ est vraie (par exemple pour $n = 3$), sa négation est fausse.
► Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$. Alors la négation de « f est la fonction nulle» est $\exists x \in \mathbf{R},\ f(x) \neq 0$.
À ne pas confondre avec $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) \neq 0$ qui signifie que la fonction f ne s'annule jamais !
► Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, alors la négation de « f est croissante» est

$$\exists x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, \textbf{non}(x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)).$$

Mais nous avons déjà mentionné que la négation de $P \Rightarrow Q$ est P **et non** Q.
Donc la négation de « f est croissante» est

$$\exists x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R},\ x \leqslant y \textbf{ et } f(x) > f(y).$$

Autrement dit
Il existe deux réels dont les images sont dans l'ordre inverse.
Ce qui est bien moins fort que la décroissance de f.

► L'assertion suivante signifie qu'une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ est constante :

$$\exists a \in \mathbf{R}, \forall x \in I,\ f(x) = a.$$

Sa négation est

$$\forall a \in \mathbf{R},\ \exists x \in I,\ f(x) \neq a.$$

► Soit $(u_n)_n$ une suite. La négation de

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, (n \geqslant N \Rightarrow |u_n| \leqslant \varepsilon)$$

est

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbf{N}, \exists n \in \mathbf{N}, (n \geqslant N \textbf{ et } |u_n| > \varepsilon).$$

En effet, rappelons que la négation de $P \Rightarrow Q$ est P **et** (**non** Q).

Explication
Dans quelques temps, cette assertion sera la définition de $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3.2.4 Succession de quantificateurs

Une proposition logique peut contenir plusieurs quantificateurs successifs.
Par exemple, $\forall n \in \mathbf{Z},\ \exists m \in \mathbf{Z},\ n = m + 1$.
Déterminons la valeur de vérité de cette proposition, en la découpant en morceaux plus simples.
Notons $P(n)$ la proposition $\exists m \in \mathbf{Z},\ n = m + 1$.

Alors $P(0)$ est vraie, puisque $m = -1$ convient, $P(1)$ est vraie puisque $m = 0$ convient, etc.
Plus généralement, si $n \in \mathbf{Z}$, alors $P(n)$ est vraie, puisqu'on peut prendre $m = n - 1$, qui est encore un élément de $\mathbf{Z}$.
Et donc notre proposition de départ, qui n'est autre que $(\forall n \in \mathbf{Z},\ P(n))$ est vraie.

De même, la proposition $\forall n \in \mathbf{Z},\ \exists m \in \mathbf{Z},\ n = m + 1$ est vraie, puisque pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $m = n - 1$ est encore un élément de $\mathbf{Z}$, vérifiant $n = m + 1$.
Cet exemple prouve que, lorsqu'on a deux quantificateurs à la suite, et que le second est un quantificateur existentiel, alors la seconde variable (ici m) peut dépendre de la première (ici n) : pour tout n, il existe un m **dépendant du n choisi** tel que $n = m + 1$.

⚠ Dans une expression possédant plusieurs quantificateurs, changer l'ordre des quantificateurs peut changer la valeur de vérité de la proposition !
Par exemple, la proposition «pour toute MPSI, il y a un prof de maths» est vraie. Soit encore $\forall m$ MPSI, $\exists p$ prof de maths, p enseigne à m.
Mais si on change l'ordre des quantificateurs, alors on obtient la proposition

$$\exists p \text{ prof de maths, } \forall m \text{ MPSI, } p \text{ enseigne à } m$$

qui signifie qu'il existe un prof de maths qui enseigne à toutes les MPSI, ce qui est faux.

Par exemple, $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R},\ x < y$ est vraie.
En effet, si x est un réel fixé, alors $y = x+1$ satisfait bien à $x < y$, de sorte que $\exists y \in \mathbf{R},\ x < y$ est vraie.
Et ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a bien $\forall x \in \mathbf{R},\ \exists y \in \mathbf{R},\ x < y$.

En une phrase — Cette proposition signifie que pour tout x, il existe un réel inférieur strictement à x.

En revanche, si l'on permute l'ordre des quantificateurs, on obtient la proposition
$\exists y \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathbf{R},\ x < y$ ... qui est fausse !
En effet, sa négation est $\forall y \in \mathbf{R},\ \exists x \in \mathbf{R},\ x \geqslant y$.
Cette négation est vraie, puisque $x = y - 1$ convient. Et donc la proposition de départ est fausse.
Plus généralement, on peut permuter l'ordre de deux quantificateurs universels, on peut permuter l'ordre de deux quantificateurs existentiels, mais on ne peut pas toujours permuter l'ordre de deux quantificateurs différents.

En une phrase — Cette proposition signifie qu'il existe un réel strictement supérieur à tous les réels, ce qui est bien évidemment faux.

Exemples 3.29

- Les propositions $\forall x \in \mathbf{R},\ \forall y \in \mathbf{R}_+,\ x^2 \geqslant -y$ et $\forall y \in \mathbf{R}_+,\ \forall x \in \mathbf{R},\ x^2 \geqslant -y$ sont équivalentes[7].
- De même, $\exists n \in \mathbf{N},\ \exists p \in \mathbf{N},\ n = 2p$ et $\exists p \in \mathbf{N},\ \exists n \in \mathbf{N},\ n = 2p$ signifient toutes deux qu'il existe un entier pair.

[7] Et elles sont les deux vraies.

3.3 Ensembles

3.3.1 Définition

Nous ne donnerons pas[8] de définition rigoureuse de ce qu'est un ensemble, et nous contenterons de l'«intuition» suivante : un **ensemble** E est une «collection» d'objets, qui sont appelés les **éléments de** E.
Si x est un élément de E, on note alors $x \in E$. Au contraire, si x n'est pas un élément de E, on note $x \notin E$.

[8] Ni cette année ni l'an prochain.

Des ensembles peuvent être formés d'objets très divers : les plus fréquemment rencontrés sont des ensembles de nombres ($\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{R}_+^*$, etc), mais on peut également considérer l'ensemble $\mathscr{P}$ des fonctions paires, ou l'ensemble E des élèves de MP2I.
Il existe deux manières de définir un ensemble :

— en **extension**, en donnant la liste de tous ses éléments. Par exemple $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ou $F = \left\{\pi, \sqrt{2}, -e\right\}$.
Notons qu'alors, l'ordre dans lequel on donne les éléments n'a aucune importance,

$\{0, 4, 3, 2, 1\}$ et $\{4, 3, 2, 1, 0\}$ désignent tous les deux l'ensemble noté E ci-dessus.
On ne peut définir ainsi que des ensembles finis[9].

— en **compréhension**, en donnant une propriété P qui caractérise tous les éléments de l'ensemble E, c'est-à-dire une propriété que tous les éléments de E vérifient, et qu'ils sont les seuls à vérifier.
On note alors $\{x \mid P(x)\}$ l'ensemble des objets x qui vérifient la propriété P.
Par exemple, $\left\{x \in \mathbf{R} \mid \sqrt{x^2} = x\right\}$ désigne $\mathbf{R}_+$. En pratique, on note plutôt $\{x \in E \mid P(x)\}$ l'ensemble des éléments de E qui vérifient la propriété P.
Par exemple $\{n \in \mathbf{N} \mid \exists p \in \mathbf{N},\ n = 2p\}$ désigne l'ensemble des entiers pairs.
Cet ensemble peut également se noter $\{2p,\ p \in \mathbf{N}\}$ ou encore $\{2p\}_{p\in\mathbf{N}}$.
Plus généralement, si $f : E \to F$ est une application[10] entre deux ensembles E et F, alors $\{f(x), x \in E\}$ désigne l'ensemble $\{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\}$.

[9] Puisqu'il serait compliqué d'écrire **tous** les éléments d'un ensemble infini...

[10] La définition en sera donnée un peu plus loin, tenez-vous en à l'intuition d'une fonction qui à un élément de E associe un élément de F.

⚠ Pour un ensemble défini par exemple par $E = \{n \in \mathbf{N} \mid \exists p \in \mathbf{N},\ n = 2p\}$, il faudra faire très attention au quantificateur existentiel lorsqu'on manipule plusieurs éléments de cet ensemble.
Ainsi, si n et m sont deux éléments de E, alors il existe un entier $p_1 \in \mathbf{N}$ tel que $n = 2p_1$ et il existe un entier $p_2 \in \mathbf{N}$ tel que $m = 2p_2$.
Mais p_1 et p_2 n'ont aucune raison d'être égaux, raison pour laquelle il est impératif de les noter différemment (et pas par exemple de les appeler bêtement p tous les deux).
Le même risque existe avec la notation $E = \{2p,\ p \in \mathbf{N}\}$.

Remarque
En réalité le risque est peut être même plus grand avec cette notation, car le quantificateur existentiel n'y apparaît pas directement (bien qu'il soit sous-entendu).

Un même ensemble peut être défini de différentes manières, et on a par exemple

$$\begin{aligned}\{-1, 1\} &= \left\{x \in \mathbf{R} \mid x^4 = 1\right\} = \left\{z \in \mathbf{C} \mid z^2 = 1\right\} = \{(-1)^n,\ n \in \mathbf{N}\}\\ &= \left\{n \in \mathbf{Z} \mid \forall m \in \mathbf{N}, (m \text{ divise } n) \Rightarrow (m = 1)\right\}.\end{aligned}$$

Définition 3.30 – ► On admet[11] qu'il existe un unique ensemble, appelé **ensemble vide**, et qui ne contient aucun élément, qu'on note $\emptyset$.
► Un ensemble de la forme $\{x\}$ qui ne contient qu'un élément x est appelé un **singleton**.

[11] Lorsqu'on veut développer une théorie axiomatique des ensembles, c'est en réalité un axiome qu'il faut ajouter : l'existence d'un ensemble ne contenant aucun élément.

Remarques. ► Puisque $\emptyset$ ne contient aucun élément, une proposition du type $\exists x \in \emptyset,\ P(x)$ est toujours fausse.
Et donc une proposition de la forme $\forall x \in \emptyset,\ P(x)$ est toujours vraie. En effet, sa négation est $\exists x \in \emptyset,\ \neg P(x)$, qui est est fausse.
► On ne confondra pas $\{x\}$, qui est un ensemble, et x, qui est un élément de cet ensemble.
On a toujours $x \in \{x\}$, et ce quel que soit x.

3.3.2 Inclusion, égalité, ensemble de parties

Définition 3.31 – Soient E et F deux ensembles. On dit que F est **inclus** dans E si $\forall x \in F,\ x \in E$. On note alors $F \subset E$.
On dit également que F est **une partie de** E, ou **un sous-ensemble de** E.

Autrement dit
F est inclus dans E si tout élément de F est également un élément de E.

Cette définition peut aussi se reformuler de la manière suivante : $F \subset E$ si et seulement si $\forall x,\ x \in F \Rightarrow x \in E$.

Rédaction : cela signifie notamment que pour prouver que $F \subset E$, une rédaction correcte commencera **toujours** par «Soit $x \in F$», pour terminer par «... donc $x \in E$».

Remarque. Notons qu'on a toujours $E \subset E$.
On a également $\emptyset \subset E$ car $\forall x \in \emptyset,\ x \in E$ est vraie.

Remarque
Ce point permet de prouver l'unicité de l'ensemble vide : s'il en existe deux alors ils sont inclus l'un dans l'autre, et sont égaux.

Exemples 3.32

▸ On a les inclusions classiques suivantes : $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.
▸ $\{x \in \mathbf{R} \mid x = x^2 + 1\} \subset \mathbf{R}_+$. En effet, si x est un réel tel que $x = x^2 + 1$, puisque $x^2 + 1 \geqslant 0$, $x \geqslant 0$ et donc $x \in \mathbf{R}_+$.
▸ Pour tout ensemble E, la proposition $\forall x \in \emptyset,\ x \in E$ est vraie. Et donc $\emptyset \subset E$, quel que soit l'ensemble E.
Par exemple, l'ensemble de l'exemple précédent s'écrit encore $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - x + 1 = 0\}$. Or, cette équation ne possède pas de solutions réelles[12] et donc $\{x \in \mathbf{R} \mid x = x^2 + 1\} = \emptyset$, de sorte que l'inclusion précédente n'est autre que $\emptyset \subset \mathbf{R}_+$.

Remarque
Notons que nous n'avons pas eu besoin de déterminer explicitement les éléments de $\{x \in \mathbf{R}, \mid x = x^2 + 1\}$ pour prouver l'inclusion.

[12] Car son discriminant est $-3 < 0$.

⚠ Attention à ne pas confondre inclusion et appartenance, les deux symboles $\in$ et $\subset$ ne s'utilisent pas dans le même contexte !
Si E est un ensemble, si F est une partie de E, alors un élément $x \in E$ **peut** appartenir (ou non) à F, mais pas être inclus dans F.
Par exemple, $-2 \in \mathbf{Z}$, mais il est hors de question d'écrire $\cancel{-2 \subset \mathbf{Z}}$.
De même, une autre partie G de E peut être **incluse** dans F, mais pas lui appartenir.
Ainsi, $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$, mais on ne peut pas écrire $\cancel{\mathbf{N} \in \mathbf{Z}}$.
En revanche, on a $\{-2\} \subset \mathbf{Z}$.

Insistons un peu !
Je ne suis pas en train de dire que $-2 \subset \mathbf{Z}$ est faux (et donc que $-2 \not\subset \mathbf{Z}$ est vrai), mais que ça n'a pas de sens !

Proposition 3.33 (Transitivité de l'inclusion) : *Si A, B et C sont trois ensembles tels que $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$.*

Démonstration. Soit $x \in A$. Alors $x \in B$. Mais puisque $B \subset C$, alors $x \in C$.
Et donc nous venons de prouver que $\forall x \in A,\ x \in C$, donc $A \subset C$. □

Définition 3.34 (Égalité d'ensembles) – Deux ensembles A et B sont dits égaux si ils ont les mêmes éléments, c'est-à-dire si $\forall x,\ x \in A \Leftrightarrow x \in B$. On note alors $A = B$.

Remarque. C'est cette définition de l'égalité qui justifie un principe bien connu : il ne sert à rien d'écrire plusieurs fois un élément x lorsqu'on définit un ensemble E. Soit x est dans E, soit il ne l'est pas, mais il ne peut pas l'être plusieurs fois.
Par exemple, $\{1, 2\} = \{1, 1, 2\}$ puisque tout élément de $\{1, 2\}$ est dans $\{1, 1, 2\}$ et tout élément de $\{1, 1, 2\}$ (qui vaut donc 1 ou 2) est dans $\{1, 2\}$.
Puisqu'une inclusion $A \subset B$ correspond à une implication $x \in A \Rightarrow x \in B$, l'équivalence correspond aux deux implications $x \in A \Rightarrow x \in B$ et $x \in B \Rightarrow x \in A$.
Et donc $A = B \Leftrightarrow (A \subset B)$ **et** $(B \subset A)$.
Ceci nous donne donc deux méthodes pour prouver que deux ensembles A et B sont égaux :

1. soit procéder par double inclusion en prouvant $A \subset B$ et $B \subset A$
2. soit procéder directement par équivalences, en prouvant que $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

Exemples 3.35

▸ Montrons par double inclusion que si $a < b$, alors

$$[a, b] = \underbrace{\{(1-t)a + bt,\ t \in [0, 1]\}}_{=F}.$$

• Soit $t \in [0, 1]$. Alors $(1-t)a + bt = a + t(b-a)$, qui est compris entre $(1-t)a + ta = a$ et $(1-t)b + tb = b$.
Donc tout élément de F est dans $[a, b]$: $F \subset [a, b]$.
• Inversement, si $x \in [a, b]$, il nous faut montrer que $x \in F$ et donc qu'il existe un réel $t \in [0, 1]$ tel que $x = (1-t)a + bt$.
Or, $x = (1-t)a + bt \Leftrightarrow x - a = t(b-a) \Leftrightarrow t = \dfrac{x-a}{b-a}$.

Si $x \in [a,b]$, alors $0 \leqslant x-a \leqslant b-a \Rightarrow \dfrac{x-a}{b-a} \in [0,1]$.
Et donc il existe $t \in [0,1]$ (qui vaut $\dfrac{x-a}{b-a}$) tel que $x = (1-t)a + bt \in F$.
Ainsi, $[a,b] \subset F$.
Par double inclusion, on en déduit que $[a,b] = F$.
► Montrons par équivalence que si A et B sont deux points distincts du plan, alors l'ensemble $E = \{M,\ MA = MB\}$ est la droite D orthogonale à $\overrightarrow{AB}$ et passant par le milieu I de $[AB]$.
Soit donc M un point du plan. Alors

$$\begin{aligned} M \in E &\Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow MA^2 = MB^2 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 = \overrightarrow{MB}^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \left(\overrightarrow{MI} + \cancel{\overrightarrow{IA}} + \overrightarrow{MI} + \cancel{\overrightarrow{IB}}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MI} = 0 \\ &\Leftrightarrow M \in D. \end{aligned}$$

Et donc ceci prouve directement que $D = E$.

Médiatrice
Vous aurez probablement reconnu deux caractérisations de la médiatrice de $[AB]$.

Remarque. Deux ensembles A et B sont différents si $\exists x \in A,\ x \notin B$ ou $\exists x \in B,\ x \notin A$.
Autrement dit s'il existe un élément qui est dans l'un des deux ensembles mais pas dans l'autre.

Définition 3.36 (Ensemble des parties de E) – Soit E un ensemble. On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E, c'est-à-dire l'ensemble des ensembles inclus dans E.
Autrement dit, on a $F \in \mathscr{P}(E)$ si et seulement si $F \subset E$.

⚠ Attention !
$\mathscr{P}(E)$ est un ensemble dont les éléments sont eux-mêmes des ensembles !

Exemples 3.37

- Puisque pour tout ensemble E, $\emptyset \subset E$, on a toujours $\emptyset \in \mathscr{P}(E)$.
- De même, on a toujours $E \in \mathscr{P}(E)$, et si $x \in E$, alors $\{x\} \in \mathscr{P}(E)$.
- Si $E = \{x\}$ est un singleton, alors $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{x\}\}$.
- Si $E = \{a,b\}$ possède deux éléments, alors $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$.
- Si $E = \{1,2,3\}$, alors

$$\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

- On a $\mathscr{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Donc $\mathscr{P}(\emptyset)$ est un singleton.
Et par suite, $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.
Et donc $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

3.3.3 Opérations sur les ensembles

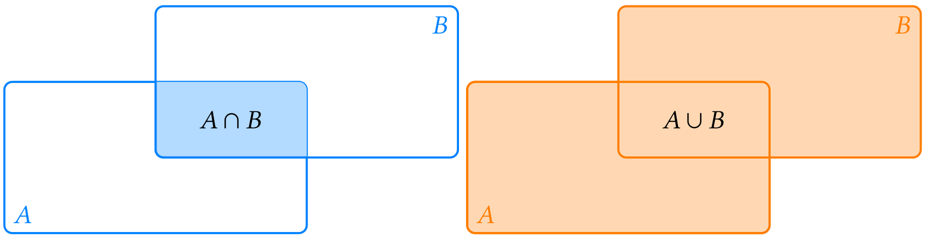
Définition 3.38 – Soient E et F deux ensembles. Alors on appelle

1. **union de** E **et** F, et on note $E \cup F$ l'ensemble des éléments qui sont dans E **ou** dans F. Autrement dit

$$x \in E \cup F \Leftrightarrow (x \in E) \textbf{ ou } (x \in F).$$

2. **intersection de** E **et** F, et on note $E \cap F$ l'ensemble des éléments qui sont dans E **et** dans F. Autrement dit

$$x \in E \cap F \Leftrightarrow (x \in E) \textbf{ et } (x \in F).$$



Exemples 3.39

- Si $A = \{1,2,3\}$ et $B = \{2,3,4\}$, alors $A \cup B = \{1,2,3,4\}$ et $A \cap B = \{2,3\}$.
- $\mathbf{R}_+^* \cup \mathbf{R}_- = \mathbf{R}$ et $\mathbf{R}_+^* \cap \mathbf{R}_- = \emptyset$.
- On a toujours $A \cup \emptyset = A$ et $A \cap \emptyset = A$.

Vocabulaire
Si $E \cap F = \emptyset$, on dit que E et F sont **disjoints**.

Remarque. Notons qu'on a toujours $A \cap B \subset A \subset A \cup B$ et $A \cap B \subset B \subset A \cup B$.

Proposition 3.40 : *Soient A, B et C trois ensembles. Alors*
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Terminologie
On dit que l'intersection est distributive par rapport à l'union (c'est le premier point) et que l'union est distributive par rapport à l'intersection (c'est le second point).

Démonstration. Prouvons le premier point, le second étant laissé en exercice. On a :

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \cap C &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \textbf{ et } x \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \textbf{ ou } x \in B) \textbf{ et } x \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \textbf{ et } x \in C) \textbf{ ou } (x \in B \textbf{ et } x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \cap C) \textbf{ ou } (x \in B \cap C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C). \end{aligned}$$

Et donc $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. □

Définition 3.41 – Soient E et I deux ensembles. On suppose que pour tout $i \in I$, on se donne A_i une partie de E. Alors on note

1. $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I,\ x \in A_i\}$ l'ensemble des éléments qui sont dans **au moins l'un** des A_i.
2. $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I,\ x \in A_i\}$ l'ensemble des éléments qui sont dans **tous** les A_i.

Autrement dit
On a

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I,\ x \in A_i$$

et

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I,\ x \in A_i.$$

Remarque. Notons que pour $I = \emptyset$, on a $\bigcap_{i \in I} A_i = E$ et $\bigcup_{i \in I} A_i = \emptyset$.

Remarque
Ceci est un tout petit peu perturbant, puisque pour une fois, on n'a pas

$$\bigcap_{i \in I} A_i \subset \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Cela dit, il y a peu de chances qu'on s'intéresse vraiment au cas $I = \emptyset$.

Dans le cas où $I = [\![a, b]\!]$, on note souvent $\bigcap_{i=a}^{b} A_i$ au lieu de $\bigcap_{i \in [\![a,b]\!]} A_i$, et de même pour les unions.

De même, si $I = \mathbf{N}$, on note souvent $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ au lieu de $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} A_n$.

Exemple 3.42

Considérons un point du plan M fixé, et pour $n \in \mathbf{N}$, on note D_n le disque de centre M et de rayon $\frac{1}{n}$.

Alors $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} D_n = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} D_n = \{M\}$.
Il est clair que M appartient à tous les D_n et donc à l'intersection des D_n.
Inversement, soit P un point du plan distinct de M, et soit r la longueur du segment MP (=la distance de M à P). Alors, pour $n > \dfrac{1}{r}$, on a $\dfrac{1}{n} < r$, et donc $P \notin D_n$. Par conséquent, $P \notin \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbf{N}} D_n$.

Par contraposée, on a donc $P \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbf{N}} D_n \Rightarrow P = M$, soit encore $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} D_n \subset \{M\}$.

On en déduit que $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} D_n = \{M\}$.

La proposition ci-dessous généralise la proposition 3.40.

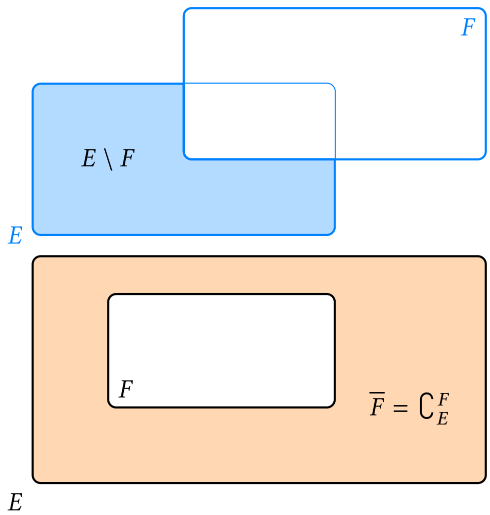
Proposition 3.43 : *Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles et si B est un ensemble, on a*

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i\in I} (A_i \cap B) \quad et \quad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i\in I} (A_i \cup B)\,.$$

Définition 3.44 –

1. Soient E et F deux ensembles. La **différence ensembliste** de E et F est l'ensemble noté $E \setminus F$ (lire «E privé de F» ou «E moins F») formé des éléments qui appartiennent à E, mais n'appartiennent pas à F. Donc
$$x \in E \setminus F \Leftrightarrow (x \in E \textbf{ et } x \notin F).$$
2. Dans le cas particulier où $F \subset E$, l'ensemble $E \setminus F$ est appelé **complémentaire de** F **dans** E et noté $\complement_E^F$ (ou $\complement_E F$). Dans le cas où il n'y a pas d'ambiguïté sur ce qu'est E, on abrège souvent en «complémentaire de F» et on note $\overline{F}$ au lieu de $\complement_E^F$.

Ambiguïté ?
Le «gros ensemble» E dans lequel on considère le complémentaire n'est pas toujours très clair et a donc parfois besoin d'être précisé.
Par exemple, sans précisions, dur de savoir si la notation $\overline{\mathbf{N}}$ désigne $\mathbf{Z}\setminus\mathbf{N}$, $\mathbf{Q}\setminus\mathbf{N}$, $\mathbf{R}\setminus\mathbf{N}$ ou encore $\mathbf{C}\setminus\mathbf{N}$.



Remarques. Si A est une partie de E, on a toujours $E = A \cup \overline{A}$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$.
Et de même $\complement_E^E = \emptyset$ et $\complement_E^{\emptyset} = E$.
De plus, si A et B sont des parties d'un même ensemble E, alors $A \setminus B = A \cap \overline{B} = A \cap \complement_E^B$.

Proposition 3.45 (Propriétés du complémentaire) : *Soit E un ensemble. Alors :*

1. *Pour toute partie A de E, $\overline{\overline{A}} = A$.*
2. *Pour toutes parties A et B de E, $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.*

Démonstration. 1) Soit $x \in E$. Alors

$$x \in \overline{\overline{A}} \Leftrightarrow \textbf{non}(x \in \overline{A}) \Leftrightarrow \textbf{non}(\textbf{non}(x \in A)) \Leftrightarrow x \in A.$$

Donc $\overline{\overline{A}} = A$.
2) Soient A et B deux parties de E telles que $A \subset B$. Alors, $\forall x \in E, (x \in A \Rightarrow x \in B)$.
Par contraposition, $x \notin B \Rightarrow x \notin A$, soit encore $x \in \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A}$.
Donc $\overline{B} \subset \overline{A}$. On a donc prouvé que

$$\forall A \in \mathscr{P}(E), \forall B \in \mathscr{P}(E), A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}.$$

Et alors si $\overline{B} \subset \overline{A}$, en appliquant ce qui précède, $\overline{\overline{A}} \subset \overline{\overline{B}} \Leftrightarrow A \subset B$. □

Proposition 3.46 (Lois de De Morgan) : *Soit E un ensemble.*

1. *Si A et B sont deux parties de E, alors*

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \text{ et } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

2. *Plus généralement, si les $A_i, i \in I$ sont des parties de E, alors*

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i} \text{ et } \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}.$$

En français
Le complémentaire de l'union est l'intersection des complémentaires, et le complémentaire de l'intersection est l'union des complémentaires.

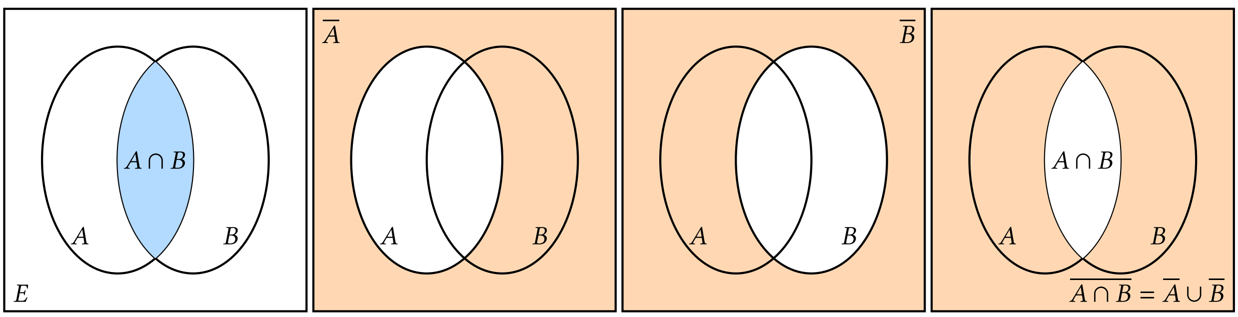
Démonstration. Prouvons directement le second point : soit $x \in E$. Alors

$$\begin{aligned} x \notin \bigcup_{i \in I} A_i &\Leftrightarrow \textbf{non}(\exists i \in I, x \in A_i) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ x \notin A_i \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ x \in \overline{A_i} \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}. \end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned} x \notin \bigcap_{i \in I} A_i &\Leftrightarrow \textbf{non}(\forall i \in I, x \in A_i) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in I,\ x \notin A_i \\ &\Leftrightarrow \exists x \in I,\ x \in \overline{A_i} \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}. \end{aligned}$$

□



Définition 3.47 – Soit E un ensemble, et soit A un ensemble de parties de E (c'est-à-dire une partie de $\mathscr{P}(E)$). On dit que A est une **partition de** E si :

- $\forall X \in A, X \neq \emptyset$,
- $\bigcup_{X \in A} X = E$,
- les A_i sont deux à deux disjoints, c'est-à-dire que

$$\forall X \in A, \forall Y \in A,\ X \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow X = Y.$$

Notons que la contraposée de cette proposition est aussi

$$\forall X \in A, \forall Y \in A,\ X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = \emptyset.$$

Remarque
Cette contraposée, bien que plus intuitive est souvent plus difficile à prouver car il est souvent difficile d'utiliser $X \neq Y$.

Exemples 3.48

► Si $A \in \mathscr{P}(E)$ est non vide, et n'est pas égale à E, alors $\{A, \overline{A}\}$ est une partition de E.
En effet, ni A ni $\overline{A}$ ne sont vides[13], $A \cup \overline{A} = E$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$.
► L'ensemble des trinômes de colle constitue une partition de l'ensemble des élèves de MP2I.
En effet, aucun trinôme n'est vide, tous les élèves sont dans un trinôme (donc l'union des trinômes est toute la classe), et deux trinômes distincts n'ont pas d'élève en commun (puisque chaque élève est dans un seul trinôme).
► Pour $t \in [0,1[$, notons $A_t = \{x \in \mathbf{R} \mid x - \lfloor x \rfloor = t\}$.
Alors $\{A_t, t \in [0,1[\}$ est une partition de $\mathbf{R}$.
En effet, pour tout $t \in [0,1[$, $A_t \neq \emptyset$ puisque $t \in A_t$.
Si $x \in \mathbf{R}$, alors $t = x - \lfloor x \rfloor \in [0,1[$ et $x \in A_t$. Donc $\mathbf{R} \subset \bigcup_{t \in [0,1[} A_t$, et l'inclusion réciproque étant évidente[14], on a bien l'égalité $\mathbf{R} = \bigcup_{t \in [0,1[} A_t$. En effet, si $x \in \mathbf{R}$, alors $x - \lfloor x \rfloor \in [0,1[$. Et donc en notant $t = x - \lfloor x \rfloor$, $x \in A_t$.
Donc $x \in \bigcup_{t \in [0,1[} A_t$. Ainsi, $\mathbf{R} \subset \bigcup_{t \in [0,1[} A_t$.
L'inclusion réciproque étant triviale[15], on a donc $\mathbf{R} = \bigcup_{t \in [0,1[} A_t$.
Reste à prouver que les A_t sont deux à deux disjoints.De plus, soient t_1, t_2 deux éléments de $[0,1[$ tels que $A_{t_1} \cap A_{t_2} \neq \emptyset$. Alors il existe $x \in A_{t_1} \cap A_{t_2}$, et donc

$$t_1 = x - \lfloor x \rfloor = t_2.$$

Nous venons donc de prouver que $A_{t_1} \cap A_{t_2} \neq \emptyset \Rightarrow t_1 = t_2$.

[13] $\overline{A} \neq \emptyset$ car $A \neq E$.

Autrement dit
A_t est l'ensemble des réels dont la partie décimale est t.

[14] Une union de parties de $\mathbf{R}$ est dans $\mathbf{R}$.

[15] Car les A_t sont des parties de $\mathbf{R}$.

3.3.4 Lien entre logique et ensemble

Coté logique	Côté ensembles	En détails
Implication	Inclusion	$A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$
Équivalence	Égalité	$A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
Conjonction (**et**)	Intersection	$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A$ **et** $x \in B)$
Disjonction (**ou**)	Union	$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A$ **ou** $x \in B)$
Négation	Complémentaire	$x \in \overline{A} \Leftrightarrow$ **non**$(x \in A)$

3.3.5 Produit cartésien d'ensembles

Définition 3.49 (Produit cartésien de deux ensembles) – Si E et F sont deux ensembles, on note $E \times F$ l'ensemble des **couples** (x, y) tels que $x \in E$ et $y \in F$. On dit que $E \times F$ est le **produit cartésien de** E **et** F.
Si $E = F$, on note alors E^2 au lieu de $E \times F$.

Exemples 3.50

Puisque $\emptyset$ ne contient aucun élément, $\emptyset \times \emptyset$ est encore l'ensemble vide.
L'ensemble $\mathbf{R}^2$ est l'ensemble des couples de deux réels, c'est-à-dire l'ensemble des points (x, y) avec $x \in \mathbf{R}$ et $y \in \mathbf{R}$.
$\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ = \{(x, y), x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}_+\}$.
Si $I = [a, b]$ et $J = [c, d]$ sont deux segments de $\mathbf{R}$, alors $I \times J = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, a \leqslant x \leqslant b \text{ et } c \leqslant y \leqslant d\}$ est un pavé de $\mathbf{R}^2$.

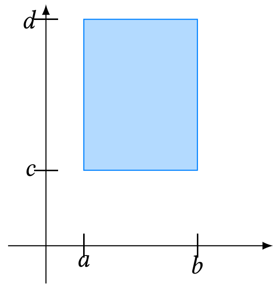


Figure 3.1– $[a, b] \times [c, d]$.

⚠ On ne confondra pas le couple (x, y) et l'ensemble $\{x, y\}$, qui sont deux éléments de nature différente.
En particulier, l'ordre des éléments d'un couple est important $((1, 2) \neq (2, 1))$, alors que dans un ensemble, l'ordre n'a aucune importance $(\{1, 2\} = \{2, 1\})$.
Autrement dit, on a $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow ((a = c) \textbf{ et } (b = d))$.
On notera qu'il revient au même d'écrire $\forall x \in E, \forall y \in F, P(x, y)$ et $\forall (x, y) \in E \times F, P(x, y)$.
En revanche on n'écrira pas[16] $\forall x, y \in E, \dots$ au lieu de $\forall (x, y) \in E^2, \dots$. À **un** quantificateur correspond **une** variable !

[16] En théorie...

Définition 3.51 (Produit cartésien de n ensembles) – Si $E_1, E_2, \dots, E_n$ sont des ensembles non vides, on note $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ ou encore $\prod_{i=1}^{n} E_i$ l'ensemble formé des **n-uplets** $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tels que $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_n \in E_n$.
Si $E_1 = E_2 = \cdots = E_n$, on note E^n au lieu de $E \times E \times \cdots \times E$.

Notons que deux éléments $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ de $E_1 \times \cdots \times E_n$ sont égaux si et seulement si

$$x_1 = y_1 \text{ et } x_2 = y_2 \text{ et } \dots \text{ et } x_n = y_n.$$

Remarquons que si E, F, G sont trois ensembles, alors un élément de $(E \times F) \times G$ est un couple formé d'un élément de $E \times F$ (lui-même un couple) et d'un élément de G.
Autrement dit, il est de la forme $((x, y), z)$, avec $x \in E, y \in F$ et $z \in G$.
On l'identifiera alors au triplet $(x, y, z) \in E \times F \times G$, de sorte qu'on ne fera pas de différence entre $(E \times F) \times G$ et $E \times F \times G$.
Et de même pour des produits de plus de trois ensembles.

Identification
Cette identification est légitime puisqu'à chaque triplet (x, y, z) de $E \times F \times G$ correspond **un unique** élément $((x, y), z)$ de $(E \times F) \times G$.

Exemple 3.52

Soit $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, et soit $F = [a, b] \subset \mathbf{R}$.
Alors $E \times F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1 \textbf{ et } a \leqslant z \leqslant b\}$. C'est un cylindre de $\mathbf{R}^3$.

3.4 Les modes de raisonnements

3.4.1 Par disjonction de cas

Il est possible de prouver une proposition du type $\forall x \in E, P(x)$ en écrivant E sous la forme $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n$, et en prouvant séparément que $P(x)$ est vraie si $x \in E_1$, si $x \in E_2$, etc.

Remarque
Les E_i peuvent être deux à deux disjoints (et donc former une partition de E), ou non.

Exemple 3.53

Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $n^3 - n$ est divisible par 3.
Pour cela, notons que $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1)$.
Distinguons alors trois cas, suivant la valeur du reste de la division de n par 3 :

- si n est de la forme $3k$, avec $k \in \mathbf{N}$. Alors $n^3 - n = (3k - 1)3k(3k + 1)$ est divisible par 3.
- si n est de la forme $3k + 1$, avec $k \in \mathbf{N}$. Alors $n^3 - n = 3k(3k + 1)(3k + 2)$ est divisible par 3.

- si n est de la forme $3k+2$, avec $k \in \mathbf{N}$. Alors
$n^3 - n = (3k+2)(3k+3)(3k+4) = 3(3k+2)(k+1)(3k+4)$ est divisible par 3.

3.4.2 Par contraposition

Nous avons mentionné précédemment qu'une implication $P \Rightarrow Q$ est toujours équivalente à sa contraposée $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$.
Et donc pour prouver qu'une implication est vraie, on peut se contenter de prouver sa contraposée.

Intuition
L'idée qui se cache ici est assez simple : si P était vraie, puisque $P \Rightarrow Q$, alors Q serait vraie également.
Mais Q et sa négation ne peuvent être vraies en même temps !

Exemple 3.54

Prouvons que si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair.
Si on souhaite vraiment tout quantifier, cette proposition est

$$\forall n \in \mathbf{N}, (\forall k \in \mathbf{N},\ n^2 - 1 \neq 8k) \Rightarrow (\exists p \in \mathbf{N},\ n = 2p).$$

Cela dit, nous n'avons pas besoin de tout écrire avec des quantificateurs.
La contraposée est «n impair $\Rightarrow n^2 - 1$ est divisible par 8», et nous allons prouver que cette contraposée est vraie.
Soit donc n un entier impair. Il existe donc $p \in \mathbf{Z}$ tel que $n = 2p+1$, et alors

$$n^2 - 1 = (2p+1)^2 - 1 = 4p^2 + 4p = 4p(p+1).$$

Or, l'un des deux entiers p et $p+1$ est pair[17], donc $p(p+1)$ est pair, de sorte qu'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $p(p+1) = 2k$.
Et donc $n^2 - 1 = 4 \cdot 2k = 8k$ est divisible par 8.
Ainsi, la contraposée de notre proposition initiale est vraie, et donc la proposition de départ l'est aussi.

[17] De deux entiers consécutifs, l'un (et un seul) est toujours pair.

3.4.3 Par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde consiste à prouver que $\neg P \Rightarrow$ **Faux**, c'est-à-dire à supposer que P est fausse, pour arriver à **Faux**, c'est-à-dire à une contradiction (qui peut par exemple être le fait que P soit vraie : $P \wedge \neg P \equiv$ **Faux**).
Mais on a toujours $\neg P \Rightarrow$ **Faux** $\equiv P \vee$ **Faux** $\equiv P$.

Et donc si $\neg P \Rightarrow$ **Faux** est vrai, alors P est également vraie.

Détails
Puisque **Faux** est toujours faux, **Faux** **ou** P a même valeur de vérité que P.

Exemple 3.55 Irrationalité de $\sqrt{2}$

Prouvons par l'absurde que $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.
À cet effet, supposons que $\sqrt{2}$ est un rationnel, et soit alors $\dfrac{p}{q}$ une fraction irréductible égale à $\sqrt{2}$.
Alors $2 = \dfrac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow 2q^2 = p^2$.
Donc p^2 est pair, et donc p lui-même est pair.
Et donc il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $p = 2k$, et donc $p^2 = (2k)^2 = 4k^2$.
Donc $2q^2 = 4k^2 \Leftrightarrow q^2 = 2k^2$ est pair. Donc q est pair.
Mais p et q étant tous deux divisibles par 2, ceci vient contredire l'irréductibilité de la fraction $\dfrac{p}{q}$.
Et donc notre hypothèse initiale est fausse : $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

Détails
Le carré d'un nombre impair est impair, donc si p^2 est pair, c'est que p lui-même est pair.

Exemple 3.56 **Principe des tiroirs de Dirichlet**

Si vous rangez $n+1$ paires de chaussettes dans une commode à n tiroirs, alors il existe un tiroir qui contient au moins deux paires de chaussettes.
En effet, supposons par l'absurde que chaque tiroir contienne au plus une seule paire de chaussettes.
Alors la commode contient au plus $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ fois}}$ paires de chaussettes, ce qui est absurde.
Par conséquent, un tiroir contient au moins deux paires de chaussettes.
Ce résultat est loin d'être anodin et sert plus souvent qu'il n'y paraît[18].

⚠ Attention !
La négation de «au moins 2» est bien «au plus une», et pas «une seule».
Un tiroir peut tout à fait ne contenir aucune paire de chaussettes.

[18] Même si nous nous en servirons plutôt pour ranger des nombres dans des ensembles que des chaussettes dans des tiroirs...

3.4.4 Le raisonnement par analyse-synthèse

Expliquons le raisonnement par analyse-synthèse sur un exemple : prouvons que toute fonction définie sur $\mathbf{R}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Soit donc $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

▸ **Analyse** : supposons qu'il existe deux fonctions f_1 paire et f_2 impaire telles que $f = f_1 + f_2$.
Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.
Donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = f_1(x) - f_2(x)$.
En sommant ces deux égalités, il vient $f(x) + f(-x) = 2f_1(x) \Leftrightarrow f_1(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$.
Et de même, $f(x) - f(-x) = 2f_2(x) \Leftrightarrow f_2(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.
Donc si deux telles fonctions existent, ce sont nécessairement celles définies par : pour tout $x \in \mathbf{R}$

$$f_1(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \text{ et } f_2(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

Remarque
Nous venons donc de prouver l'unicité : seules les fonctions écrites ici sont susceptibles de convenir. Mais nous n'avons pas encore prouvé l'existence de deux telles fonctions (nous l'avions **supposée** dans le raisonnement que nous venons de tenir).
La synthèse a pour but de prouver l'existence.

▸ **Synthèse** : nous cherchons désormais à prouver que deux telles fonctions f_1 et f_2 existent.
Or le raisonnement tenu dans la phase d'analyse nous dit ce que doivent être ces fonctions, il n'y a pas le choix.
Reste à vérifier que les formules obtenues précédemment pour f_1 et f_2 définissent bien une fonction paire et une fonction impaire dont la somme vaut f.
Posons donc, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f_1(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $f_2(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.
Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f_1(-x) = \dfrac{f(-x)+f(-(-x))}{2} = \dfrac{f(-x)+f(x)}{2} = f_1(x)$, de sorte que f_1 est paire.
D'autre part, $f_2(-x) = \dfrac{f(-x)-f(-(-x))}{2} = \dfrac{f(-x)-f(x)}{2} = -f_2(x)$ donc f_2 est impaire.
Enfin, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $f_1(x)+f_2(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} + \dfrac{f(x)-f(-x)}{2} = \dfrac{2f(x)}{2} = f(x)$.
Donc $f = f_1 + f_2$.
Donc nous venons de prouver qu'il existe bien deux telles fonctions f_1 et f_2.

▸ **Conclusion** : il existe un unique couple formé d'une fonction paire et d'une fonction impaire dont la somme vaut f.

⚠ Si on oublie la synthèse, on prouve seulement qu'il existe **au plus** un tel couple, mais pas qu'il en existe **au moins** un !

En résumé, la phase d'analyse revient à dire «s'il existe une solution au problème posé, alors la/les voilà». La synthèse n'est alors rien d'autre qu'une vérification.

3.5 Le raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence, que vous avez déjà manipulé en terminale, connaît plusieurs variantes, dont le but est à chaque fois de montrer qu'une propriété $\mathscr{P}(n)$, dépendant de n, est valable pour tout n dans une certain partie de $\mathbf{N}$.

3.5.1 Récurrence simple

C'est la récurrence étudiée en terminale : on initialise la récurrence à $n_0 \in \mathbf{N}$, en on prouve que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$.
Ceci prouve alors que $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant n_0 \Rightarrow \mathscr{P}(n)$.

La preuve de ce principe ne sera pas donnée, elle fait partie des axiomes définissant $\mathbf{N}$, et donc nous ne pourrons que l'admettre.

Exemple 3.57

Montrons que pour tout $n \geqslant 4$, $2^n \leqslant n!$
Soit donc $\mathscr{P}(n)$ la propriété $2^n \leqslant n!$
Initialisation : $\mathscr{P}(4)$ est vérifiée car $2^4 = 16 \leqslant 24 = 4!$
Hérédité : supposons que $n \geqslant 4$ et que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
Alors $2^{n+1} = 2 \times 2^n \leqslant 2 \times n! \leqslant (n+1) \times n! \leqslant (n+1)!$.
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par le principe de récurrence, pour tout $n \geqslant 4$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

3.5.2 Récurrence multiple à pas fixé

Commençons par la récurrence double : il s'agit d'une légère variation de la précédente, où pour prouver $\mathscr{P}(n+1)$, vous n'avez pas seulement besoin de savoir que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, mais aussi que $\mathscr{P}(n-1)$ est vraie.

Le principe est donc le suivant : on initialise la récurrence en prouvant que pour un certain $n_0 \in \mathbf{N}$, $\mathscr{P}(n_0)$ et $\mathscr{P}(n_0+1)$ sont toutes deux vraies.
Puis on prouve que $(\mathscr{P}(n)$ **et** $\mathscr{P}(n+1)) \Rightarrow \mathscr{P}(n+2)$.
Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant n_0 \Rightarrow \mathscr{P}(n)$.

Exemple 3.58

Soit $x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. Montrons par récurrence double sur $n \in \mathbf{N}$ que $x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbf{Z}$.
Soit donc $\mathscr{P}(n)$: $x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbf{Z}$.
Initialisation : $\mathscr{P}(0)$ est vraie car $x^0 + \dfrac{1}{x^0} = 1 + 1 = 2 \in \mathbf{Z}$.
$\mathscr{P}(1)$ est vraie car

$$x + \frac{1}{x} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{2(3-\sqrt{5})}{9-5} = \frac{6+2\sqrt{5}+6-2\sqrt{5}}{4} = 3.$$

Hérédité : supposons que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ soient vraies. Alors

$$\left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{n+2} + x^n + \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n+2}}$$

et donc

$$x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}} = \underbrace{\left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right)}_{\in \mathbf{Z} \text{ car } \mathscr{P}(n+1)} \underbrace{\left(x + \frac{1}{x}\right)}_{=3} - \underbrace{\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)}_{\in \mathbf{Z} \text{ car } \mathscr{P}(n)} \in \mathbf{Z}.$$

Donc $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.
Par le principe de récurrence **double**, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

⚠ Attention !
Qui dit récurrence **double** dit initialisation **double**.

Ce principe se généralise à des récurrences triples, quadruples, etc.
Énonçons directement un «principe de récurrence d'ordre k» (qui pour $k = 2$ correspond donc à ce que l'on vient de faire dans l'exemple) :

Proposition 3.59 : *Soit $\mathscr{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier $n \in \mathbf{N}$, et soit $k \in \mathbf{N}$ fixé. On suppose que*

1. *$\exists n_0 \in \mathbf{N}$, $\mathscr{P}(n_0), \mathscr{P}(n_0+1), \cdots \mathscr{P}(n_0+k)$ soient vraies*
2. *que pour tout $n \geqslant n_0$, $(\mathscr{P}(n)$ **et** $\mathscr{P}(n+1)$ **et** $\ldots$ **et** $\mathscr{P}(n+k)) \Rightarrow \mathscr{P}(n+k+1)$.*

Alors, pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Démonstration. Pour $n \in \mathbf{N}$, notons $\mathscr{Q}(n)$ la proposition $\mathscr{P}(n) \wedge \mathscr{P}(n+1) \wedge \cdots \wedge \mathscr{P}(n+k)$.
Par hypothèse, $\mathscr{Q}(n_0)$ est vraie.
Supposons que $\mathscr{Q}(n)$ soit vraie.
Alors $\mathscr{P}(n), \ldots, \mathscr{P}(n+k)$ sont vraies.
Donc $\mathscr{P}(n+k+1)$ est vraie.
Ainsi, $\mathscr{P}(n+1), \mathscr{P}(n+2), \ldots, \mathscr{P}(n+k), \mathscr{P}(n+1+k)$ sont vraies.
Donc $\mathscr{Q}(n+1)$ est vraie.
Par le principe de récurrence simple appliqué à la proposition $\mathscr{Q}(n)$, pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathscr{Q}(n)$ est vraie.
Et en particulier, pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie. □

3.5.3 Récurrence forte

Cette fois, il s'agit d'une récurrence où pour prouver $\mathscr{P}(n+1)$, on a non seulement besoin de savoir que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, mais aussi que $\mathscr{P}(n-1), \mathscr{P}(n-2), \ldots, \mathscr{P}(0)$ sont vraies.

Exemple 3.60

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite vérifiant $u_0 \geqslant 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
Prouvons que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant 2^n u_0$.
Notons donc $\mathscr{P}(n)$ la proposition $u_n \leqslant 2^n u_0$.
Alors $\mathscr{P}(0)$ est trivialement vérifiée.
Supposons que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ soit vraie. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\leqslant u_0 + u_1 + \cdots + u_n \\ \Leftrightarrow u_{n+1} &\leqslant u_0\left(2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n\right) \\ &\leqslant u_0 \frac{1-2^{n+1}}{1-2} \\ &\leqslant u_0\left(2^{n+1}-1\right) \leqslant u_0 2^{n+1}. \end{aligned}$$

Détails
On a utilisé à la fois $\mathscr{P}(0), \mathscr{P}(1), \ldots, \mathscr{P}(n)$.

Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 2.

Par le principe de récurrence **forte**, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant u_0 2^n$.

Proposition 3.61 : *Soit $\mathscr{P}(n)$ une propriété dépendant d'un entier n telle que*

1. *il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\mathscr{P}(n_0)$ soit vraie.*
2. *pour tout $n \geqslant n_0$, $(\forall k \in [\![n_0, n]\!], \mathscr{P}(k)) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$.*

Alors pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Démonstration. Notons $\mathscr{Q}(n)$ la proposition «$\forall k \in [\![n_0, n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie».
Alors $\mathscr{Q}(n_0)$ n'est rien d'autre que $\mathscr{P}(n_0)$, donc est vraie par hypothèse.
Supposons que $\mathscr{Q}(n)$ soit vraie. Alors $\mathscr{P}(n_0), \mathscr{P}(n_0+1), \ldots, \mathscr{P}(n)$ sont vraies.
Par hypothèse, cela implique que $\mathscr{P}(n+1)$ soit vraie.
Donc $\mathscr{P}(n_0), \ldots, \mathscr{P}(n), \mathscr{P}(n+1)$ sont vraies : $\mathscr{Q}(n+1)$ est vraie.
Par le principe de récurrence (simple), pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie. □

3.5.4 Récurrence finie

Citons enfin une dernière variante du principe de récurrence : la récurrence finie, qui consiste non plus à supposer que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$, mais

seulement pour $n \in [\![n_0, n_1+1]\!]$.
Alors dans ce cas, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour $n \in [\![n_0, n_1]\!]$.

Exemple 3.62

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ fixé. Prouvons que pour tout $p \in [\![1, n+1]\!]$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^p < 1 + \frac{p}{n} + \left(\frac{p}{n}\right)^2$.

Pour $p = 1$, on a $1 + \frac{1}{n} < 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$, donc la récurrence est initialisée.

Supposons que pour $p \leqslant n$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^p < 1 + \frac{p}{n} + \frac{p^2}{n^2}$. Alors

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+1} &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^p\left(1+\frac{1}{n}\right)\\
&< \left(1+\frac{p}{n}+\frac{p^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\\
&< 1 + \frac{p+1}{n} + \frac{p^2}{n^2} + \frac{p}{n^2} + \frac{p^2}{n^3}\\
&< 1 + \frac{p+1}{n} + \frac{p^2}{n^2} + \frac{p}{n^2} + \frac{p}{n^2}\\
&< 1 + \frac{p+1}{n} + \frac{p^2+2p}{n^2}\\
&< 1 + \frac{p+1}{n} + \frac{(p+1)^2}{n^2}.
\end{aligned}$$

Nous avons ici utilisé le fait que $p \leqslant n$ et donc $\frac{p}{n} \leqslant 1$.

Par le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $p \in [\![1, n+1]\!]$,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^p < 1 + \frac{p}{n} + \frac{p^2}{n^2}.$$

En particulier, pour $p = n$, alors $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$.

Or nous prouverons plus tard dans l'année que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$, et donc ceci prouve[19] que $e \leqslant 3$.

[19] Sans aucun calcul de valeur approchée.

3.5.5 La récurrence fausse !

Juste pour la culture, citons une petite curiosité.
Prouvons par récurrence sur n que pour tout $n \geqslant 1$, n crayons sont toujours de la même couleur.
On note donc $\mathscr{P}(n)$ la proposition : quels que soient les n crayons $C_1, \ldots, C_n$, alors ils ont tous la même couleur.
$\mathscr{P}(1)$ est vrai si je n'ai qu'un crayon, alors tous mes crayons sont de la même couleur.
Supposons que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie, et soient $C_1, \ldots, C_{n+1}$, $n+1$ crayons.
Alors par hypothèse de récurrence, $C_1, \ldots, C_n$ sont de même couleur, de la couleur de C_2.
De même, $C_2, \ldots, C_{n+1}$ sont de même couleur, de la couleur de C_2.
Et donc $C_1, \ldots, C_n, C_{n+1}$ ont tous la couleur de C_2.
Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, et donc par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Pourtant j'ai dans ma trousse un crayon bleu et trois crayons rouges, qui ne sont clairement pas de la même couleur ! Où se cache le problème ?

3.6 INTRODUCTION À LA NOTION D'APPLICATION ENTRE ENSEMBLES

3.6.1 Définitions

Définition 3.63 – Une **application** est un triplet de la forme $f = (E, F, \Gamma)$, où E et F sont deux ensembles non vides et Γ est une partie de $E \times F$ telle que

$$\forall x \in E,\ \exists! y \in F,\ (x, y) \in \Gamma.$$

On dit que f est une application de E dans F, E est appelé ensemble de départ de f et F est appelé l'ensemble d'arrivée de F.
Si $(x, y) \in \Gamma$, on note $y = f(x)$.
L'ensemble $\Gamma = \{(x, f(x)),\ x \in E\}$ est appelé **graphe de** f.

Explication

Cela revient à dire que **tout** élément de l'ensemble de départ admet une **unique** image par f.

Pour une application de **R** dans **R**, alors le graphe de f est exactement ce dont on a l'habitude : l'ensemble des couples (x, y) où $y = f(x)$.
Et la condition sur l'existence et l'unicité d'une image a déjà été évoquée au chapitre 2 : elle signifie que toute droite verticale rencontre le graphe en un unique point.
En particulier, deux applications f et g sont égales si et seulement si :

- elles ont le même ensemble de départ
- elles ont le même ensemble d'arrivée
- pour tout élément x de leur ensemble de départ, $f(x) = g(x)$.

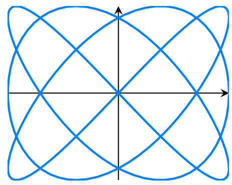


FIGURE 3.2– Une partie de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ qui n'est pas le graphe d'une application.

Remarque. Le second point (l'égalité des ensembles d'arrivée) est le moins naturel.
En effet, si l'on s'en tient à la définition, les deux applications $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$ et $g : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$ ne sont pas égales car elles n'ont pas le même ensemble d'arrivée[20].
Nous verrons qu'en pratique, nous omettrons ce point dans la plupart des cas, nous en reparlerons lorsque nous définirons la corestriction.

En revanche, il y a un cadre où il est totalement légitime d'ignorer ce second point, c'est celui des fonctions numériques[21], à savoir les fonctions qui ont pour ensembles de départ et d'arrivée des parties de **R**.
Dans ce cas, on considérera toujours (là aussi, un peu abusivement) que leur ensemble d'arrivée est **R**, et donc les deux fonctions f et g ci-dessus seront considérées égales.

[20] Mais pourtant elles ont même ensemble de départ, et prennent partout les mêmes valeurs.

[21] C'est-à-dire celles qui ont été étudiées chapitre 2, qui à un réel associent un autre réel.

Exemples 3.64

En pratique, nous ne définirons jamais une application en se donnant un triplet, et comme pour les fonctions numériques, nous utiliserons la notation $f : \left|\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}\right.$.
Donnons tout de même quelques exemples d'applications qui ne sont pas des fonctions numériques, mais avec des ensembles de départ et/ou d'arrivée plus exotiques.

- $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathscr{P}(\mathbf{C}) \\ A & \longmapsto & \{z \in A \mid |z| = 1\} \end{array}\right.$, qui à un ensemble (inclus dans **C**) associe un autre ensemble.
- $g : \left|\begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\mathbf{N}^*) & \longrightarrow & \mathbf{C}^* \\ A & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } A = \emptyset \\ e^{i\frac{2\pi}{\min A}} & \text{si } A \neq \emptyset \end{cases} \end{array}\right.$.
- $h : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{Q} & \longrightarrow & \mathbf{Z} \\ \frac{p}{q} & \longmapsto & p \end{array}\right.$ n'est pas bien définie, le rationnel 2 s'écrit à la fois $\frac{2}{1}$ et $\frac{4}{2}$, donc son image n'est pas uniquement définie.
En revanche l'application qui à un rationnel associe le numérateur de son écriture irréductible est bien définie.

Géométriquement

$f(A)$ est l'intersection de A avec le cercle trigonométrique.

Définition 3.65 (Identité) – Soit E un ensemble. On appelle **identité de** E l'application $\mathrm{id}_E : \left|\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}\right.$.

Les notions d'image et d'antécédent, déjà rencontrées pour les fonctions numériques se généralisent sans difficulté à toutes les applications.

Définition 3.66 (Image, antécédent) – Soit $f : E \to F$ une application.

- Si $x \in E$, et si $y = f(x)$, on dit que y est **l'image de x par f.**
- Si $y \in F$, et si il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, on dit que x est **un antécédent de y par f.**

⚠ L'image d'un élément de l'ensemble de départ est toujours unique, par définition d'une application.
En revanche, un élément de l'ensemble d'arrivée peut ne pas posséder d'antécédents, ou en posséder plusieurs. On prendra donc bien garde à dire **un** antécédent de y et surtout pas[22] l'antécédent de y par f.
Par exemple, si on considère l'application $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$, alors 0 possède un unique antécédent par f qui est 0, 1 possède deux antécédents par f qui sont -1 et 1 et -1 ne possède aucun[23] antécédent par f.

[22] Sauf si pour une raison ou une autre, on sait déjà qu'un tel antécédent est unique.

[23] Le carré d'un nombre réel ne peut être négatif.

Exemple 3.67

Soit f l'application définie sur l'ensemble des élèves de MP2I, à valeurs dans $[\![1, 16]\!]$, qui à un étudiant associe le numéro de son groupe de colle.
Alors $f(Candide) = 16$, de sorte que 16 est l'image de Candide, et donc Maxime est un antécédent de 16.
Notons que Julien est aussi un antécédent de 16.

Définition 3.68 – Soient E et F deux ensembles. L'ensemble de toutes les applications de E dans F est noté $\mathscr{F}(E, F)$ ou F^E.

Notation
La notation F^E sera motivée plus tard, lorsque nous compterons le nombre d'éléments de $\mathscr{F}(E, F)$ dans le cas où E et F sont finis. Attention au fait que c'est l'espace de départ qui est en exposant.

Exemple 3.69

Il est tout à fait possible de considérer des applications elles-mêmes définies sur des ensembles d'applications. Par exemple, si on note $\mathscr{D}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables, il est possible de considérer l'application $D : \left|\begin{array}{ccc} \mathscr{D}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathscr{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}\right.$, qui à une fonction associe sa dérivée.
Notons alors $h : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 0 \end{array}\right.$ la fonction nulle sur $\mathbf{R}$.
Une fonction dérivable f est alors un antécédent de h par D si et seulement si $f' = h$, soit si et seulement si f' est nulle. Ce qui est le cas si et seulement si f est constante.

Définition 3.70 – Si I et E sont deux ensembles, on note parfois $(a_i)_{i \in I}$ au lieu de $a : \left|\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ i & \longmapsto & a(i) \end{array}\right.$, et on parle alors de **famille d'éléments de E indexée par I** au lieu de parler d'application.

En particulier, une suite, qui est une famille indicée par $\mathbf{N}$ n'est rien d'autre qu'une application de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$ (ou dans $\mathbf{C}$ pour les suites complexes).
On préfère alors largement[24] la notation $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ à $u : n \mapsto u(n)$.
L'ensemble des suites réelles est donc noté $\mathscr{F}(\mathbf{N}, \mathbf{R})$, ou encore $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

[24] Par habitude...

3.6.2 Composition d'applications

Définition 3.71 – Soient E, F, G trois ensembles, et soient $f \in \mathscr{F}(E,F)$ et $g \in \mathscr{F}(F,G)$ deux applications. On appelle composée de g et f, et on note $g \circ f$ l'application de E dans G définie par :

$$\forall x \in E,\ (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Remarque
Si on veut que la composition ait bien un sens, il faut nécessairement que l'espace d'arrivée de f soit l'espace de départ de g, afin qu'on puisse bien appliquer g à $f(x)$.

⚠ Le sens dans lequel on effectue la composition est important : même dans les cas où $g \circ f$ et $f \circ g$ sont toutes les deux bien définies[25], en règle générale ces deux applications ne sont pas égales.

Par exemple, si $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x + 2\pi \end{array} \right.$, alors $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$(g \circ f)(x) = g(\sin(x)) = \sin(x) + 2\pi \neq \sin(x + 2\pi) = \sin(g(x)) = (f \circ g)(x).$$

[25] C'est-à-dire lorsque $G = E$, soit

$$f : E \to F$$

et $g : F \to E$.

Notons qu'on a toujours, pour $f : E \to F$,

$$\mathrm{id}_F \circ f = f \circ \mathrm{id}_E = f.$$

Terminologie
On dit que id est un élément neutre pour la composition.

Dans le cas particulier où l'espace de départ et l'espace d'arrivée de f sont égaux, alors on peut composer f avec elle-même. Puis composer cette composée avec f, etc.

Définition 3.72 – Soit E un ensemble et soit $f : E \to E$.
On pose alors $f^0 = \mathrm{id}_E$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $f^{n+1} = f \circ f^n$.
Autrement dit, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$.

Cette notation a un léger inconvénient, c'est qu'elle peut être confondue avec le produit (pour peu que E soit un espace dans lequel on a un produit clairement défini). Lorsqu'il y risque de confusion, on note parfois $f^{\circ n}$ au lieu de f^n.

Il est alors très facile de se convaincre que pour tous $k, n \in \mathbf{N}$, $f^k \circ f^n = f^n \circ f^k = f^{k+n}$.
En revanche, lorsqu'on compose trois applications ou plus, l'ordre dans lequel la composition est effectuée n'a pas d'importance, comme le prouve la proposition suivante :

Proposition 3.73 (Associativité de la composition) : *Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ trois applications. Alors $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.*

Démonstration. Commençons par noter que $h \circ (g \circ f)$ et $(h \circ g) \circ f$ ont toutes deux E comme espace de départ et H comme espace d'arrivée. Pour le reste, la preuve est identique à celle qui a été donnée pour les fonctions numériques. □

Nous nous contentons de ces quelques définitions pour l'instant, et reviendrons dans un chapitre ultérieur sur l'étude générale des applications.