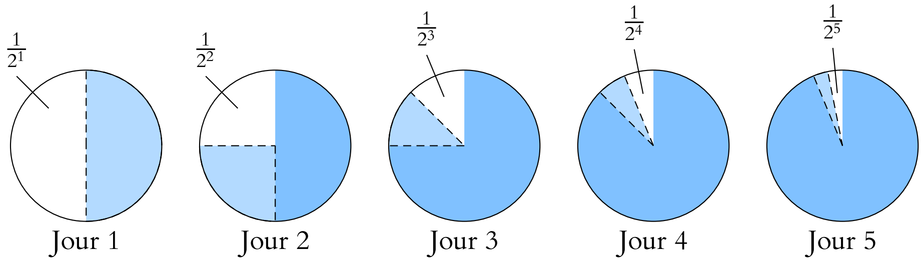
Séries numériques

27

Dans ce chapitre on cherche à donner un sens à la notion de somme infinie de réels ou de complexes, l'infini cachant en réalité un passage à la limite.
Un exemple (certes très peu mathématique) que j'aime beaucoup est le suivant : «j'ai une tarte, et le premier jour j'en mange la moitié. Le jour suivant je mange un quart (soit la moitié de ce qu'il me restait), puis chaque jour je mange la moitié de ce qu'il me reste. À la fin, quelle proportion de la tarte vais-je conserver ?».



Vous comprenez bien entendu qu'à la fin on aura mangé toute la tarte, c'est-à-dire que $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots = 1$, ce que nous écrirons bientôt $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n} = 1$.
Au delà de l'intérêt que ces sommes infinies présentent en analyse, ce sera un outil fondamental en probabilités en seconde année afin de travailler dans des espaces probabilisés infinis, où l'on est souvent amené à considérer des sommes infinies, par exemple dans la formule des probabilités totales, ou pour définir l'espérance/la variance d'une variable aléatoire qui peut prendre une infinité de valeurs.

Enfin, nous parlons de séries numériques[1] puisque vous parlerez (longuement) l'an prochain de séries de fonctions.

[1] C'est-à-dire de nombres (réels ou complexes).

27.1 Convergence d'une série

27.1.1 Définition

Définition 27.1 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à valeurs complexes. On appelle **série de terme général** u_n, et on note $\sum u_n$ (ou $\sum\limits_n u_n$, ou $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$) la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$\forall n\in\mathbf{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

On dit que S_n est la **somme partielle d'ordre** n de $\sum u_n$.

Autrement dit
Se donner une série, c'est se donner la suite de ses sommes partielles.

Remarque. Si u_n n'est défini qu'à partir d'un certain entier $n_0\in\mathbf{N}$, alors les sommes partielles de la série $\sum u_n$ sont définies par :

$$\forall n\geqslant n_0,\ S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$

On peut alors noter $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ pour bien marquer que les sommes commencent à n_0.

Exemple 27.2

- Si $u_n = \frac{1}{2^n}$, alors nous savons que pour $n \geqslant 0$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^n}$.
Autrement dit, l'appellation série de terme général $\frac{1}{2^n}$, désigne la suite $(2 - \frac{1}{2^n})_{n \in \mathbf{N}}$.
- Pour $n \geqslant 1$, on pose $v_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Alors nous savons que $v_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, et donc pour $n \geqslant 1$, la somme partielle d'ordre n de la série $\sum_{n \geqslant 1} v_n$ est

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Si $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite à valeurs complexes, la série de terme général u_n est une suite, pour laquelle on peut donc s'intéresser à la convergence.
Autrement dit, on dit[2] que la série de terme général u_n converge si et seulement si $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ existe (dans $\mathbf{C}$).
Soit encore si et seulement si la suite de ses sommes partielles est une suite convergente.
Dans le cas contraire, on dit que la série de terme général u_n diverge, ce qui inclut notamment le cas où $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k = \pm\infty$.

[2] Ceci n'est pas une définition : j'ai déjà défini ce qu'est une série (en l'occurrence c'est une suite particulière), et j'ai déjà défini ce qu'est une suite convergente.

Exemple 27.3

La série $\sum (-1)^n$ diverge puisque pour $n \in \mathbf{N}$ la somme partielle d'ordre n de cette série est donnée par, $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$.
Donc la suite des sommes partielles diverge, ce qui par définition signifie que la série diverge.

Pour une série $\sum u_n$ à valeurs complexes, on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k \right) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}(u_k) \text{ et } \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k \right) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}(u_k).$$

Or, une suite à valeurs complexes converge si et seulement si les suites[3] des parties réelles et des parties imaginaires convergent. En appliquant ce résultat à la suite des sommes partielles de $\sum u_n$, on obtient donc le résultat suivant : la série $\sum u_n$ converge si et seulement si les deux séries[4] $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ convergent.

[3] Réelles.

[4] À termes réels.

⚠ On ne confondra pas la convergence de la suite $(u_n)_n$ et celle de la série $\sum u_n$, ces deux notions ne sont pas équivalentes[5].
Par exemple, pour $n \geqslant 1$, posons $u_n = \frac{1}{n}$.
Alors nous avons prouvé[6] que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$.
Ainsi, $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$.
Donc la **suite** $(u_n)_{n \geqslant 1}$ converge, alors que la **série** $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ diverge.

[5] Bien qu'il existe une implication, voir un peu plus loin.

[6] Au chapitre 8, mais nous le reprouverons dans ce chapitre.

Définition 27.4 (Somme d'une série convergente) – Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite à valeurs complexes. Si la série de terme général u_n converge, on appelle **somme de la série** $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ et on note $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ le complexe[7] défini par

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} S_N = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=n_0}^{N} u_n.$$

[7] C'est un réel si (u_n) est à valeurs réelles.

⚠ La somme n'est définie que pour une série convergente.

Pour une série divergente, la notation $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ n'est pas définie.

Ce qui signifie que si vous utilisez la notation $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$, il est impératif d'avoir au préalable effectué une étude de la convergence de la série (et avoir conclu à la convergence).

De manière générale, on prendra bien soin de faire la différence entre $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ (qui est une limite, donc un scalaire) et $\sum u_n$ (ou $\sum_n u_n$) qui désigne une suite.

Exemples 27.5

- On a $\lim_{n\to+\infty}\left(2-\dfrac{1}{2^n}\right) = 2$, et donc la somme de la série $\sum \dfrac{1}{2^n}$ est $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{2^n} = 2$.
- $\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right) = 1.$

Notation

Bien entendu, la variable de sommation est encore muette et on pourrait tout autant noter $\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{2^k}$ ou $\sum_{p=0}^{+\infty}\dfrac{1}{2^p}$.

Tout au long de l'étude des séries, il y a deux problématiques qui vont nous intéresser :

1. déterminer si la série converge ou non. Nous allons développer de nombreux outils généraux permettant de répondre à cette question. On parle alors de la *nature de la série* (série convergente ou série divergente).
2. en cas de convergence[8], calculer la somme de la série. C'est un problème bien plus difficile, pour lequel il n'existe pas de méthode générale, et il existe de nombreuses séries dont on sait prouver la convergence, mais pas calculer la somme.

[8] Et seulement dans ce cas.

Comme pour les limites de suites, lorsqu'on étudie la nature d'une série, les premiers termes n'ont aucune importance, la convergence décrivant le comportement «à l'infini».

Proposition 27.6 (Indifférence des premiers termes) : *Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite complexe, et soit $n_1 \geqslant n_0$. Alors les séries $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant n_1} u_n$ sont de même nature*[9].

[9] Autrement dit l'une converge si et seulement si l'autre converge.

Démonstration. Soit $N \geqslant n_1$. Alors

$$\sum_{n=n_0}^{N} u_n = \sum_{n=n_0}^{n_1-1} u_n + \sum_{n=n_1}^{N} u_n.$$

Puisque $\sum_{n=n_0}^{n_1-1} u_n$ est une constante, la **suite** de terme général $\sum_{n=n_1}^{N} u_n$ admet une limite finie si et seulement si la suite de terme général $\sum_{n=n_0}^{N} u_n$ admet une limite finie. □

⚠ En cas de convergence, les sommes de ces deux séries n'ont en revanche pas de raison d'être égales[10].

[10] Et c'est là une vraie différence avec les suites où changer les premiers termes ne change pas la limite.

En effet, ces deux sommes (qui rappelons-le, sont des limites) diffèrent de la constante $\sum_{n=n_0}^{n_1-1} u_n$. On garde tout de même la relation de Chasles :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=n_0}^{n_1-1} u_n + \sum_{n=n_1}^{+\infty} u_n.$$

Dans toute la suite, afin d'alléger les notations, les résultats sont énoncés pour des séries dont le terme général est défini à partir de 0, mais tous restent valables en changeant $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.

27.1.2 Premières propriétés

Commençons par une remarque triviale[11], mais qui mérite d'être signalée : multiplier une série par un scalaire non nul ne change pas sa nature.
Autrement dit, pour $\lambda \in \mathbf{C}^*$, $\sum(\lambda u_n)$ converge si et seulement si $\sum u_n$ converge.
Plus généralement, on dispose du résultat suivant.

[11] Je ne la prouve volontairement pas, à vous de vous convaincre que c'est trivial !

Proposition 27.7 (Linéarité de la somme) : *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes. Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2$, $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Démonstration. Cela découle directement de la linéarité des sommes finies : pour tout $N \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{N} u_n + \mu \sum_{n=0}^{N} v_n \xrightarrow[N\to+\infty]{} \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

□

En particulier, la somme de deux séries convergentes est encore convergente.
En revanche si $\sum u_n$ est convergente et $\sum v_n$ est divergente, alors $\sum(u_n + v_n)$ est divergente.
En effet, si elle était convergente, puisque $v_n = (u_n + v_n) - u_n$, $\sum v_n$ serait convergente par différence de séries convergentes.

Plus généralement
Si dans une somme de k séries, une seule est divergente (et donc les autres convergentes), alors la somme est divergente.

Notons enfin qu'on ne peut rien dire en général de la somme de deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergentes.
Elle peut diverger, par exemple pour $u_n = v_n = \frac{1}{n}$, comme elle peut converger, par exemple pour $u_n = \frac{1}{n}$, $v_n = -\frac{1}{n}$.

Le tableau suivant récapitule la nature de $\sum(u_n + v_n)$ en fonction de celles de $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

$\sum v_n$ \ $\sum u_n$	CV	DV
CV	CV	DV
DV	DV	?

Signifie qu'il n'existe pas de règle qui permette de conclure **dans tous les cas.** Si on vous demande la nature d'une telle série, il faudra aller mettre les mains dans le cambouis pour déterminer la nature de la série. Et surtout pas se contenter d'un «on ne peut pas conclure».

Proposition 27.8 : *Soit $\sum u_n$ une série convergente. Alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 0$. □

Corollaire 27.9 – *Si (u_n) est une suite telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$, alors $\sum u_n$ diverge. On dit alors qu'elle* ***diverge grossièrement****.*

Démonstration. C'est la contraposée de la proposition ci-dessus. □

⚠ Il ne s'agit en aucun cas d'une équivalence, et prouver que son terme général tend vers 0 ne peut pas prouver la convergence d'une série !
Un contre exemple est la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$, dont le terme général tend vers 0, mais qui diverge.
En revanche, un terme général qui ne tend pas vers 0 permet de répondre : la série est divergente.

Méthode
Souvent la première chose à faire lors de l'étude d'une série est de vérifier que $u_n \to 0$. Ce sera le cas la plupart du temps, mais ceci permet d'éviter de passer à côté des cas de divergence grossière.

Exemple 27.10

Soit $u_n = \left(1-\frac{1}{2n}\right)^n$. Alors $u_n = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right)$.
Or, $\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$, et donc $n\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$, de sorte que par continuité de l'exponentielle, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1/2} \neq 0$, donc la série de terme général u_n est divergente.

Définition 27.11 – Si $\sum u_n$ est une série convergente, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k$. Soit encore $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.
On dit alors que R_n est le **reste d'ordre n** de $\sum u_n$.

Justification
Cette écriture a bien un sens puisque la série $\sum_{k\geqslant n+1} u_k$ converge (par indifférence des premiers termes).

Le reste d'ordre n mesure donc l'écart entre la somme partielle d'ordre n et la somme de la série.

Proposition 27.12 : *Avec les notations ci-dessus $R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Démonstration. Notons S_n la somme partielle d'ordre n, de sorte que $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n$.
Et donc $R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 0$. □

Ce résultat est assez intuitif, mais en pratique, avoir un contrôle de la vitesse à laquelle les restes tendent vers 0 peut aider à approximer la somme d'une série par une somme partielle.
En effet, si on souhaite une approximation de $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ à ε près, il faut savoir à partir de quelle valeur de n on a $|R_n| \leqslant \varepsilon$, et alors, pour un tel n, S_n est une approximation de S à ε près.

27.1.3 Séries usuelles

Proposition 27.13 : *Soit (u_n) une suite. Alors la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est de même nature que la suite $(u_n)_n$.*

Démonstration. Pour $N \in \mathbf{N}$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} (u_{n+1} - u_n) = u_{N+1} - u_0$, qui admet une limite lorsque $N \to +\infty$ si et seulement si u_{N+1} admet une limite. Donc si et seulement si (u_n) converge. □

Remarque : En cas de convergence, on a directement une expression de la somme de la série en fonction de la limite de la suite (u_n).

Le résultat a l'air anodin, mais comme nous allons bientôt disposer de nombreux outils pour prouver la convergence d'une série, appliqués à la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ ils deviendront des outils pour étudier la convergence de la suite (u_n). Voir par exemple la preuve de la formule de Stirling donnée plus loin.

Une série dont le terme général est de la forme $u_{n+1} - u_n$ pour une certaine suite (u_n) est appelée **série télescopique**.

Voici deux séries qu'il faudra connaître par cœur, ce sont quasiment les seules qui figurent au programme, et les seules dont la somme est à connaître.

Proposition 27.14 (Série géométrique) : *Soit $q \in \mathbf{C}$. La série de terme général q^n converge si et seulement si $|q| < 1$.*

Dans ce cas, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Démonstration. Si $|q| \geqslant 1$, alors pour tout n, $|q|^n \geqslant 1$, donc $\sum q^n$ diverge grossièrement.
Si $|q| < 1$, alors pour tout n, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
Et alors $|q^{n+1}| = |q|^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0$.
On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$, ce qui prouve à la fois que la série $\sum q^n$ converge et que sa somme vaut $\dfrac{1}{1-q}$. □

Proposition 27.15 (Série exponentielle) :

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, la série de terme général $\dfrac{x^n}{n!}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

Démonstration. C'est une conséquence directe de l'inégalité de Taylor-Lagrange, et la preuve de ce résultat est l'exemple 33 du chapitre 26. □

Remarque. On pourrait prouver par d'autres moyens (cf le critère de d'Alembert ci-dessous) que cette série converge, et **définir** e^x comme étant la somme de cette série.
Puis prouver[12] que la fonction ainsi définie a les propriétés usuelles de l'exponentielle (positivité, continuité, $e^{x+x'} = e^x e^{x'}$, solution de $y' = y$).
Le dernier point impliquant alors que sa bijection réciproque est une primitive de la fonction inverse, et donc définir ainsi le logarithme, sans faire appel au théorème fondamental de l'analyse.
Un des avantages de cette façon de procéder est qu'elle permet également de définir e^z pour $z \in \mathbf{C}$ comme somme d'une série, et qu'on peut alors définir *proprement* les fonctions sin et cos via les formules d'Euler.
Et par exemple définir π comme étant le double du plus petit zéro positif de la fonction cos. Mais vous en reparlerez[13] en spé.

[12] Et c'est à peu près ce que vous ferez en seconde année.

[13] Ou pas.

Exemples 27.16

▸ Soit $u_n = \dfrac{4^{n+2}}{3^{2n+1}}$. Alors $u_n = \dfrac{16}{3}\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$.
Puisque $\left|\frac{4}{9}\right| < 1$, la série[14] de terme général $\left(\frac{4}{9}\right)^n$ converge, et donc il en est de même de $\sum u_n$. On a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{16}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{16}{3}\frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{48}{5}.$$

[14] Géométrique.

▸ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} = e^1 = e$.
On en déduit que

$$\mathrm{ch}(1) = \frac{e+e^{-1}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1+(-1)^n}{2n!} = \sum_{\substack{n=0\\ n \text{ pair}}}^{+\infty}\frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}.$$

27.2 Étude des séries à termes positifs

Dans cette partie, on énonce des résultats sur la convergence des séries à termes positifs[15] (ou nuls). Nous devrions d'ailleurs plutôt dire «de terme général positif».
Toutefois les résultats qui vont être prouvés ci-après ont une portée plus importante puisque :

1. multiplier par -1 ne change pas la nature de la série, et donc les résultats s'appliqueront également aux séries à termes négatifs
2. par indifférence des premiers termes, il suffit qu'à partir d'un certain rang, u_n soit positif.

Autrement dit, les résultats qui suivent s'appliquent aux séries de signe constant à partir d'un certain rang.
En revanche, ils ne s'appliquent pas aux séries qui changent de signe une infinité de fois.

[15] Et donc réels.

27.2.1 Utilisation d'inégalités

Le résultat fondamental dans l'étude des séries à termes positifs est le suivant :

Proposition 27.17 : *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.*

Dans le cas contraire, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty$.

Démonstration. Notons (S_n) la suite des sommes partielles. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1} \geqslant 0.$$

Donc (S_n) est croissante. Par le théorème de la limite monotone, elle converge si et seulement si elle est majorée. Et dans le cas contraire, elle tend vers $+\infty$. □

Proposition 27.18 : *Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs réelles telles que $\forall n \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$. Alors :*

1. *si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.*
2. *si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.*

En cas de convergence, on a $0 \leqslant \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

⚠ Attention !
L'hypothèse de positivité est indispensable.

⚠ Ce que dit cette proposition c'est que, pour **les séries à termes positifs**, majorer par une série convergente ou minorer par une série divergente permet de conclure quant à la nature.
En revanche, minorer par une série convergente ou majorer par une série divergente est complètement inutile et n'apporte aucune information[16]

[16] En tous cas pas quant à la nature de la série.

Démonstration. 1) Supposons que $\sum v_n$ converge.
Étant donnée l'hypothèse faite sur u_n et v_n, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k \qquad (\star).$$

Or, puisque $\sum v_n$ converge, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)_n$ est majorée, et donc il en est de même de la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_n$.
Par la proposition précédente, $\sum u_n$ converge.
Et alors en passant à la limite lorsque $n \to +\infty$ dans $(\star)$, il vient

$$0 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

2) C'est tout simplement la contraposée du premier point. □

Exemples 27.19

▶ Soit $u_n = \dfrac{1+\cos(3n)}{2^n}$. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{2}{2^n}$.
Puisque la série de terme général $\frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est convergente, par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, il en est de même de $\sum u_n$.
▶ Soit $v_n = \dfrac{\ln(n+2)}{n}$.
Alors pour $n \geqslant 1$, $v_n \geqslant \dfrac{1}{n} \geqslant 0$.
Puisque $\sum \frac{1}{n}$ diverge, il en est de même de $\sum v_n$.

L'énoncé de la proposition ci-dessus suppose qu'on a une majoration qui est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$. Mais par indifférence des premiers termes, il suffit qu'elle le soit **à partir d'un certain rang**, autrement dit, qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

Exemple 27.20

Soit $\alpha > 0$, et soit $u_n = \dfrac{\ln(1+\alpha\sqrt[3]{n})}{\sqrt{n}}$.
Alors $\ln\left(1+\alpha\sqrt[3]{n}\right) - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
Donc il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$,

$$\ln\left(1+\alpha\sqrt[3]{n}\right) - \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln\left(1+\alpha\sqrt[3]{n}\right) \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow u_n \geqslant \frac{1}{n}.$$

Donc $\sum u_n$ diverge.

27.2.2 Comparaison série-intégrale

Dans cette partie, considérons une fonction $f : [1, +\infty[\to \mathbf{R}_+$, continue, positive et décroissante.

Soit alors $k \in \mathbf{N}^*$. Par décroissance de f, pour tout $t \in [k, k+1]$, on a $f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k)$. Et donc par croissance de l'intégrale,

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1)\,dt \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\,dt = f(k).$$

Et donc en sommant ces inégalités pour k variant de 1 à $n-1$, il vient

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

Soit encore, en utilisant la relation de Chasles :

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leqslant \int_1^n f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

De la première inégalité, on tire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant f(1) + \int_1^n f(t)\,dt$, et de la seconde il vient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) \geqslant \int_1^{n+1} f(t)\,dt$.

Au final, on obtient donc un encadrement des sommes partielles de la série de terme général $f(k)$ entre deux intégrales :

$$\int_1^{n+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant f(1) + \int_1^n f(t)\,dt.$$

Méthode

Je n'en fais pas une proposition parce que je ne tiens pas à ce que l'encadrement soit connu par cœur, mais la méthode est à connaître et il faut savoir retrouver ce résultat.

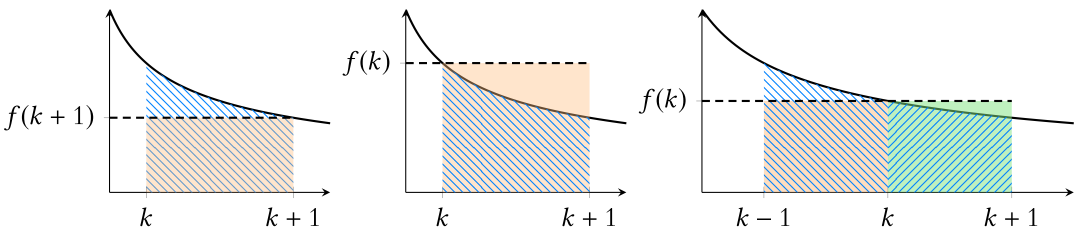


Figure 27.1 – L'encadrement de $\displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,dt$ entre les aires de deux rectangles.

La troisième figure montre un encadrement de $f(k)$ (qui est l'aire des deux rectangles colorés) à l'aide de deux intégrales : $\displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt$.

Remplacer tous les 1 par un $n_0 \in \mathbf{N}$ reste valable.

Le principal intérêt de cet encadrement réside dans la proposition suivante, qui ramène l'étude de convergence de certaines séries à des limites d'intégrales. Comme il est souvent bien plus facile de calculer une intégrale qu'une somme (parce qu'on connaît un certain nombre de primitives, et parce qu'on dispose de deux outils formidables, à savoir l'intégration par parties et le changement de variable), ceci fournit donc un outil précieux pour étudier la nature d'une série.

Proposition 27.21 (Comparaison série/intégrale) : *Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbf{R}_+$ une fonction continue, positive et décroissante.*

Alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f(n)$ converge si et seulement si la suite $\displaystyle\left(\int_1^n f(t)\,dt\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

Démonstration. Puisqu'il s'agit d'une série à termes positifs, elle converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Supposons que $\left(\int_1^n f(t)\,dt\right)_n$ converge. Alors en particulier elle est majorée par une constante M.
Et donc pour tout $n \geqslant 1$, $\sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant f(1) + M$, et donc la suite des sommes partielles de $\sum f(n)$ est majorée, donc la série est convergente.

Inversement, supposons que la série converge. Alors pour tout $n \geqslant 1$, $\int_1^n f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} f(k)$.
Mais la suite $\left(\int_1^n f(t)\,dt\right)_n$ est croissante car f est positive :

$$\int_1^{n+1} f(t)\,dt - \int_1^n f(t)\,dt = \int_n^{n+1} f(t)\,dt \geqslant 0.$$

Étant croissante et majorée, elle converge. □

Géométriquement
Pour une fonction positive, l'intégrale est une aire et cette croissance est donc assez évidente.

Théorème 27.22 (Séries de Riemann) :
Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Alors la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

*Les séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ sont appelées **séries de Riemann**, et le cas particulier où $\alpha = 1$, donc la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$, est appelé **série harmonique**[17].*

⚠ On veillera à ne pas confondre les *sommes* de Riemann et les *séries* de Riemann, qui bien qu'elles fassent toutes les deux apparaître des sommes, n'ont rien à voir[18].
On prendra bien garde au fait qu'une série de Riemann est une série de la forme $\frac{1}{n^\alpha}$, avec α **fixé**.
Une série de la forme $\sum \frac{1}{n^{u_n}}$, où (u_n) n'est pas constante ne relève donc pas du théorème ci-dessus.

Démonstration. Pour $\alpha \leqslant 0$, on n'a pas $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$, et donc la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.
Pour $\alpha > 0$, la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est positive, continue et décroissante sur $[1, +\infty[$, donc la proposition précédente s'applique.
On a alors, pour $n \geqslant 1$, et pour $\alpha \neq 1$,

$$\int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = \left[-\frac{1}{\alpha - 1}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_1^n = \frac{1}{\alpha - 1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right).$$

► Si $\alpha > 1$, alors $\frac{1}{n^{\alpha-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.
► En revanche, si $\alpha < 1$, alors $\alpha - 1 < 0$, et donc $\frac{1}{n^{\alpha-1}} = n^{1-\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, et donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.
► Reste à traiter le cas $\alpha = 1$, pour lequel notre calcul de primitive n'était pas valable. Mais on a alors

$$\int_1^n \frac{dt}{t} = \ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

et donc la série harmonique diverge. □

[17] Qui est donc divergente.

[18] Si ce n'est leur illustre découvreur.

Exemple 27.23

La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (car elle correspond à $\alpha = \frac{1}{2} < 1$) alors que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^3}$ convergent.

Remarques. ▶ Si ce théorème répond complètement à la question de la convergence des séries de Riemann, il ne dit rien de la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ lorsque $\alpha > 1$. Et pour cause, il s'agit d'un problème très difficile. Nous avons prouvé en DM que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et il existe des formules analogues[19] lorsque α est un entier pair.

Il est de plus connu que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ est irrationnel, mais c'est à peu près[20] tout.

▶ Pour $s > 1$, on note $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$. La fonction $\zeta :]1, +\infty[\to \mathbf{R}^+$ se prolonge en une fonction dérivable (en tant que fonction d'une variable complexe) sur $\mathbf{C} \setminus \{1\}$, et une question qui taraude les mathématiciens depuis un siècle et demi, et qui est centrale en théorie des nombres est de savoir où cette fonction s'annule. On suppose que les zéros de ζ sont (presque) tous sur la droite $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$, c'est *l'hypothèse de Riemann*, dont la tête[21] est mise à prix un million de dollars.

[19] Comme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

[20] J'exagère un peu...

[21] Celle de l'hypothèse, pas celle de Riemann !

En pratique, l'encadrement établi plus haut permet d'aller plus loin dans l'étude des séries de la forme $\sum f(n)$, avec f vérifiant les hypothèses précitées[22].
Deux cas de figure se présentent alors :
▶ Dans le cas où $\sum f(n)$ diverge. Alors pour $n \geqslant 1$,

$$\int_1^{n+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant f(1) + \int_1^n f(t)\,dt.$$

On a alors un encadrement des sommes partielles , qui permet souvent d'obtenir un équivalent de la suite des sommes partielles.

[22] Continuité, positivité, décroissance.

Rappel
Les sommes partielles tendent vers $+\infty$ puisqu'il s'agit d'une série divergente à termes positifs.

Exemple 27.24 Une série de Bertrand

Pour $n \geqslant 2$, posons $u_n = \frac{1}{n\ln n}$.
Soit alors $f : [2, +\infty[\to \mathbf{R}_+$ la fonction définie par $f(t) = \frac{1}{t\ln t}$, de sorte que $u_n = f(n)$.
Alors f est continue, positive et décroissante, donc comme précédemment, on prouve que pour tout $n \geqslant 2$,

$$\int_2^{n+1} \frac{dt}{t\ln t} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} \leqslant \frac{1}{2\ln 2} + \int_2^n \frac{dt}{t\ln t}.$$

Mais une primitive de f est $F : t \mapsto \ln(\ln t)$.
Donc $\int_2^n f(t)\,dt = F(n) - F(2) = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, de sorte que $\sum \frac{1}{n\ln n}$ diverge.
Mieux, on a $\ln(\ln n) - \ln(\ln 2) \leqslant \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} \leqslant \frac{1}{2\ln 2} + \ln(\ln n) - \ln(\ln 2)$.

Détails
f est de la forme $\frac{u'}{u}$.

Donc $1 - \dfrac{\ln(\ln 2)}{\ln(\ln n)} \leqslant \dfrac{\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}}{\ln(\ln n)} \leqslant 1 + \dfrac{1}{2\ln 2 \ln(\ln n)} - \dfrac{\ln(\ln 2)}{\ln(\ln n)}$.
On en déduit donc par le théorème des gendarmes que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}}{\ln(\ln n)} = 1 \Leftrightarrow \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln n).$$

Remarque
C'est exactement la même méthode qui avait été mise en œuvre pour prouver le très classique

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n.$$

▸ Dans le cas où $\sum f(n)$ converge, alors pour $1 \leqslant n < N$, on a

$$\int_{n+1}^{N+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} f(k) \leqslant f(n+1) + \int_{n+1}^{N} f(t)\,dt.$$

Notons $I_n = \displaystyle\int_1^n f(t)\,dt$ et $I = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.
Alors on a $I_{N+1} - I_{n+1} \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{N} f(k) \leqslant f(n+1) + I_N - I_{n+1}$.
En passant à la limite lorsque $N \to +\infty$ (et à n **fixé**), on obtient alors

$$I - I_{n+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leqslant f(n+1) + I - I_{n+1}.$$

Le terme central est alors le reste d'ordre n de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f(k)$, et cet encadrement permet souvent de donner un équivalent du reste. Ce reste n'étant rien d'autre que l'erreur qu'on commet en approchant la somme de la série par la somme partielle d'ordre n.

Exemple 27.25

Considérons la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$, qui est bien de la forme ci-dessus pour $f(t) = \dfrac{1}{t^2}$.
Alors $I_n = \displaystyle\int_1^n \frac{dt}{t^2} = 1 - \frac{1}{n}$, et donc $I = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 1$, et $I - I_n = \dfrac{1}{n}$.
Donc pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1}.$$

Et en particulier, après multiplication par n et application du théorème des gendarmes, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Classique
Si on a trois suites positives telles que $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$, alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

Mentionnons enfin que les méthodes d'encadrement de sommes à l'aide d'intégrales développées ci-dessus peuvent également s'appliquer si f est croissante, en changeant le sens des inégalités.
Dans le cadre des séries, ceci est de peu d'intérêt, puisque si f est croissante et positive, elle ne tendra que rarement[23] vers 0 en $+\infty$, et donc la série de terme général $f(n)$ est divergente.
Toutefois, ceci permet d'obtenir des équivalents de sommes que l'on ne sait pas forcément calculer comme par exemple $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)$.

[23] Savez-vous quand ?

Exercice
Le prouver :
1. par comparaison à une intégrale
2. avec la formule de Stirling.

27.2.3 Utilisation d'équivalents

Théorème 27.26 : *Soient (u_n) et (v_n) deux suites* ***à termes positifs*** *telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*

Autrement dit
L'une converge si et seulement si l'autre converge.

Démonstration. Par définition des équivalents, il existe (θ_n) une suite de limite 1 telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \theta_n v_n$.
Soit alors $\varepsilon = \frac{1}{2}$, de sorte qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$,

$$|\theta_n - 1| \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leqslant \theta_n \leqslant \frac{3}{2}.$$

Et donc pour $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant \frac{1}{2}v_n \leqslant u_n \leqslant \frac{3}{2}v_n$.
Ainsi, si $\sum v_n$ converge, il en est de même de $\sum \frac{3}{2}v_n$, et donc par majoration, $\sum u_n$ converge.
En revanche, si $\sum v_n$ diverge, alors il en est de même de $\sum \frac{1}{2}v_n$, et donc de $\sum u_n$.
Donc les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature. □

⚠ La positivité est vraiment indispensable (voir en TD pour un contre-exemple), et donc il est vraiment nécessaire de la mentionner.
En revanche, souvenons nous que deux suites équivalentes sont de même signe à partir d'un certain rang. Et donc par indifférence des premiers termes, il suffit de vérifier la positivité de l'une des deux suites pour pouvoir appliquer le résultat.

Exemples 27.27

▶ Soit $u_n = \sin\frac{1}{n^2}$. Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.
Puisque la série **à termes positifs** $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge, il en est de même de $\sum u_n$.

▶ Soit $v_n = e^{1/\sqrt{n}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$. Alors à l'aide d'un développement limité, on obtient

$$v_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

Puisque la série **à termes positifs** $\sum \frac{1}{2n}$ diverge, il en est de même de $\sum v_n$.

▶ Soit $w_n = \dfrac{4^n + \cos n}{3^{2n} + \ln(n)}$.
Alors $4^n + \cos n \underset{n\to+\infty}{\sim} 4^n$ et $3^{2n} + \ln n \underset{n\to+\infty}{\sim} 9^n$, donc $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{4}{9}\right)^n$.
Puisque la série **à termes positifs** $\sum \left(\frac{4}{9}\right)^n$ converge[24], il en est de même de $\sum_{n\geqslant 1} w_n$.

[24] C'est une série géométrique de raison dans $]-1, 1[$.

27.3 Séries absolument convergentes

27.3.1 Définition

Définition 27.28 – Soit (u_n) une suite à valeurs complexes. La série $\sum u_n$ est dite **absolument convergente** si la série[25] $\sum |u_n|$ converge.

[25] À termes positifs.

Remarque. Pour une série à termes positifs, la convergence est équivalente à l'absolue convergence puisque $|u_n| = u_n$.
De même pour une série à termes négatifs puisqu'alors $|u_n| = -u_n$ et que $\sum u_n$ et $\sum(-u_n)$ sont de même nature.
La notion d'absolue convergence n'est donc intéressante que pour les séries dont le terme général change de signe[26].

[26] Et par indifférence des premiers termes, ce n'est même vraiment intéressant que pour les séries qui changent de signe une infinité de fois.

Exemples 27.29

- $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos n}{n^2}$ est absolument convergente, puisque pour tout n, $0 \leqslant \left|\frac{\cos n}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$.
- Pour tout $z \in \mathbf{C}$, $\sum \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ converge absolument.

En effet, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}\right| = \sum_{k=0}^{n}\frac{|z|^{2k}}{(2k)!} \leqslant \sum_{k=0}^{2n}\frac{|z|^k}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{|z|^k}{k!} \leqslant e^{|z|}.$$

Et donc les sommes partielles de la série **à termes positifs** $\sum\left|\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}\right|$ sont majorées, donc la série converge.

Étudier une absolue convergence revient à étudier la convergence d'une série à termes positifs, et donc toutes les techniques développées précédemment sont utilisables.
La bonne nouvelle véhiculée par le théorème qui suit, est que ceci permet de prouver des convergences.

Théorème 27.30 (La convergence absolue entraîne la convergence) :
Soit $\sum u_n$ une série à valeurs complexes absolument convergente.
Alors $\sum u_n$ est convergente, et de plus

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}|u_n| \qquad \textit{(Inégalité triangulaire généralisée).}$$

Danger ! Cette inégalité ne peut avoir de sens que lorsque la somme à droite est bien définie. C'est-à-dire lorsque $\sum u_n$ est absolument convergente.

Démonstration. ▸ Commençons par le cas d'une série à valeurs réelles, avec $(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.
On a alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant u_n + |u_n| \leqslant 2|u_n|$.
Et donc puisque $\sum 2|u_n|$ converge, par comparaison de séries à termes positifs, il en est de même de la série de terme général $u_n + |u_n|$.
Et alors $u_n = (u_n + |u_n|) - |u_n|$ est le terme général d'une série convergente car différence de deux séries convergentes.

▸ Dans le cas d'une série à valeurs complexes, il suffit de noter que $0 \leqslant |\operatorname{Re}(u_n)| \leqslant |u_n|$ et $0 \leqslant |\operatorname{Im}(u_n)| \leqslant |u_n|$, de sorte que la convergence absolue de $\sum u_n$ entraîne la convergence absolue de $\sum \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum \operatorname{Im}(u_n)$.
Et donc par le cas réel, $\sum \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum \operatorname{Im}(u_n)$ convergent toutes deux.
Donc $\sum u_n$ converge.

▸ Enfin, pour l'inégalité triangulaire, notons que pour tout $N \in \mathbf{N}$, par l'inégalité triangulaire[27]

$$\left|\sum_{n=0}^{N} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{N}|u_n|$$

et donc que par passage à la limite[28] lorsque $N \to +\infty$

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|.$$

□

[27] La classique, version somme finie.

[28] Ce qui nécessite de savoir que les deux membres possèdent une limite, donc que $\sum u_n$ et $\sum |u_n|$ convergent toutes les deux.

Exemple 27.31

La série à termes complexes $\sum \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ converge car nous avons prouvé qu'elle converge absolument.

> **Pour la culture**
> La somme de cette série est appelée $\cos(z)$ (rappelons que z est un complexe !).
> On peut alors prouver qu'on a toujours la formule d'Euler
> $$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

⚠ La réciproque est fausse : il existe des séries convergentes qui ne sont pas absolument convergentes (un exemple en sera donné un peu plus bas dans le critère des séries alternées).

En pratique, pour une série qui ne serait pas à termes positifs, étudier l'absolue convergence doit être votre premier réflexe pour étudier la convergence.
Si malheureusement cette absolue convergence n'est pas vérifiée, il faudra trouver d'autres outils[29] pour déterminer la nature de la série.

[29] Et nous en aurons bien peu...

27.3.2 Encore des critères de comparaison

La proposition qui suit est énoncée dans un cas général avec une série complexe et une absolue convergence, mais en pratique vous aurez souvent à l'utiliser avec des séries à termes positifs, ce qui nous fournit donc un critère de plus pour étudier de telles séries.

Proposition 27.32 (Comparaison à l'aide d'une relation de domination) :
Soit $(u_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ et soit $(v_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ à termes positifs.
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge absolument (et donc converge).

Démonstration. Par définition, il existe une constante positive M telle que pour tout n suffisamment grand, $|u_n| \leqslant M|v_n| \Leftrightarrow 0 \leqslant |u_n| \leqslant Mv_n$.
Or la série de terme général Mv_n converge, donc par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum |u_n|$ converge, donc $\sum u_n$ converge absolument. □

Exemples 27.33

▶ Pour $n \geqslant 2$, soit $u_n = \frac{\ln(\ln n)}{\ln n}\frac{\cos n}{2^n}$.
Puisque la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ tend vers 0 en $+\infty$, elle est bornée au voisinage de $+\infty$. Puisque $\ln n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, la suite $\left(\frac{\ln(\ln n)}{\ln n}\right)_n$ est donc bornée.
Donc $\left(\frac{\ln(\ln n)}{\ln n}\cos(n)\right)_n$ est bornée, de sorte que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{2^n}\right)$.
Et donc $\sum u_n$ converge, par comparaison à une série géométrique convergente.

> **Rappel**
> Pour une suite, bornée au voisinage de $+\infty$ (i.e. bornée à partir d'un certain rang) est équivalent à bornée.

▶ Soit $u_n = \sqrt{1-\frac{1}{n}} - 1 - \ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)$.
Alors, à l'aide de développements limités, on obtient

$$\sqrt{1-\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ et } \ln\left(1-\frac{1}{2n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Autrement dit, les termes de degré 1 des développements limités se simplifient, mais si on cherche un équivalent[30], il faut aller jusqu'à un ordre où le développement limité est non nul.
Bien entendu, on peut essayer l'ordre 2, mais ici ce ne sera pas suffisant puisque les termes d'ordre 2 des deux développements limités ci-dessus valent $-\frac{1}{8n^2}$. Donc il faudrait aller calculer les termes d'ordre 3 et espérer qu'ils ne sont pas égaux...
Plus simplement, notons que $\sqrt{1-\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
En effet, nous savons que $\sqrt{1-x}$ possède un développement limité d'ordre 2, et

[30] Ce qui nous permettrait sûrement de conclure quant à la nature de $\sum u_n$.

sans calculer le terme de degré 2, nous pouvons regrouper ce terme de degré 2 et le reste en $o(x^2)$ sous la même notation : $O(x^2)$.
Et de même, $\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
Et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, de sorte que par comparaison à une série de Riemann convergente, $\sum u_n$ converge.

Récapitulatif
Il nous a suffit ici de calculer les termes de degré 1 des développements limités, alors que la recherche d'un équivalent aurait nécessité le calcul des termes de degré 2 et 3.
Au delà du temps gagné, cette astuce limite grandement les risques d'erreur de calcul.

Corollaire 27.34 (Comparaison à l'aide d'une relation de négligeabilité) – *Soient $(u_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ et $(v_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$* ***à termes positifs.***
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge absolument (et donc converge).

Démonstration. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ et donc la proposition s'applique. □

Exemple 27.35

Pour $n \geqslant 3$, soit $u_n = \dfrac{\ln(\ln n)}{n\sqrt{n}}$.
La nature de la série $\sum u_n$ peut s'obtenir par une comparaison série/intégrale, mais il faudrait alors s'assurer de la décroissance de $t \mapsto \dfrac{\ln(\ln t)}{t\sqrt{t}}$, et si on pouvait se passer du calcul de la dérivée, on le ferait volontiers !
Notons que $\ln(\ln n) \underset{n\to+\infty}{=} o(\ln(n)) \underset{n\to+\infty}{=} o(n^\beta)$ pour tout $\beta > 0$.
Donc $\dfrac{\ln(\ln n)}{n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{n^\beta}{n\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^{3/2-\beta}}\right)$.
Prenons alors $\beta = \frac{1}{4}$ de sorte que $\frac{3}{2} - \beta > 1$.
Alors la série de terme général $\dfrac{1}{n^{3/2-\beta}}$ converge, et donc par critère de comparaison, il en est de même de $\sum u_n$.

Parmi les rares séries dont on connaît déjà la nature, celles auxquelles on se réfère le plus souvent sont les séries de Riemann.
Je mentionne la règle suivante sous forme d'une proposition, mais il ne s'agit de rien d'autre que du cas où une série est négligeable devant une série de Riemann convergente, comme dans l'exemple précédent.

Proposition 27.36 (Règle $n^\alpha u_n$) : *Soit (u_n) une suite complexe. S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors $\sum u_n$ converge absolument.*

Démonstration. Il s'agit de remarquer que $n^\alpha u_n = \dfrac{u_n}{\frac{1}{n^\alpha}}$ et donc que

$$n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Et alors, on peut appliquer la proposition précédente avec la série de Riemann convergente $\sum \frac{1}{n^\alpha}$. □

27.3.3 Application : la formule de Stirling

Dans cette partie, nous prouvons enfin la formule de Stirling énoncée dans le chapitre 18.
Les deux ingrédients principaux sont :

1. l'existence d'un réel strictement positif ℓ tel que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{n}\ell$

2. les intégrales de Wallis $\int_0^{\pi/2} \cos^n t\, dt$ qui permettent de déterminer la valeur de ℓ *une fois son existence acquise.*

Remarque historique

C'est Abraham DE MOIVRE qui a prouvé le premier point, et STIRLING le second.

Commençons par le premier point : Posons, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}$ et $v_n = \ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

Alors

$$\begin{aligned}
v_n &= \ln\left(\frac{(n+1)!}{n!}\frac{e^{-n}}{e^{-(n+1)}}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)\\
&= \cancel{\ln(n+1)} + \ln(e) - \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac12}\right) + \ln\left(\cancel{\frac{1}{n+1}}\right)\\
&= 1 - \left(n+\frac12\right)\ln\left(1+\frac1n\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1 - \left(n+\frac12\right)\left(\frac1n - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1 - 1 + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Astuce

Plutôt que d'écrire le $DL_3(0)$ de $\ln(1+x)$, on se contente de

$\ln(1+x) \underset{x\to0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + O\left(x^3\right)$.

Donc $\sum v_n$ converge. Mais $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$, qui est le terme général d'une série télescopique.
Puisque cette série converge, $\ln(u_n)$ possède donc une limite finie A lorsque $n \to +\infty$. Et alors par continuité de l'exponentielle, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^A > 0$.
Et donc $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n}n^n\sqrt{n}\underbrace{e^A}_{=\ell}$.

Reste à présent à calculer la valeur de ℓ, et pour cela utilisons les intégrales de Wallis, avec des arguments[31] déjà rencontrés dans le DM 7.

Pour $n \in \mathbf{N}$, notons $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\, dt$ les intégrales de Wallis.

Il est alors aisé de prouver que $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$, $W_1 = 1$.

▶ Pour $n \in \mathbf{N}$, on a $W_{n+1} - W_n = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos^n(t)}_{\geqslant 0}\underbrace{(\cos(t)-1)}_{\leqslant 0}\, dt \leqslant 0$, si bien que (W_n) est décroissante.

[31] Très classique et qu'on voit régulièrement revenir aux concours.
Vous n'avez à connaître aucune des propriétés de (W_n) énoncées ici, mais lorsqu'un sujet de concours les mentionne, quasiment chacun des points marqués ▶ ci-contre fait l'objet d'une question.

▶ De plus, pour $n \in \mathbf{N}$, on a

$$W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \cos^2 t\, dt = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\left(1-\sin^2 t\right) dt = W_n - \int_0^{\pi/2} \cos^n t \sin^2 t\, dt.$$

Procédons alors à une intégration par parties, en notant que $t \mapsto \cos^n t \sin t$ est la dérivée de $t \mapsto -\dfrac{1}{n+1}\cos^{n+1} t$. Il vient alors

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n t \sin^2 t\, dt = \left[-\frac{1}{n+1}\cos^{n+1} t \sin t\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{n+1}\int_0^{\pi/2} \cos^{n+1} t \cos t\, dt = \frac{1}{n+1}W_{n+2}.$$

Et donc il vient $W_{n+2} = W_n - \dfrac{1}{n+1}W_{n+2} \Leftrightarrow \dfrac{n+2}{n+1}W_{n+2} = W_n \Leftrightarrow (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.
▶ Cette relation permet alors de prouver facilement, par récurrence, que pour tout n,

$$(n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2} \quad (\star).$$

▶ De la décroissance de (W_n) et de la relation liant W_{n+2} à W_n, on tire $\dfrac{n+1}{n+2}W_n \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$, et donc $W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$.
Dès lors, la relation $(\star)$ nous dit que $(n+1)W_{n+1}W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} nW_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$.

Et donc $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

► Enfin, en utilisant la relation $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$, il vient

$$W_{2n} = \frac{2n-1}{2n}W_{2n-2} = \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)}W_{2n-4} = \cdots = \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{1}{2}W_0 = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}.$$

Nous pouvons à présent utiliser l'équivalent $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{n}\ell$ pour déterminer la valeur de ℓ :

$$(2n)! \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n} \text{ et } (n!)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell^2 n^{2n}e^{-2n}n$$

de sorte que $W_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ell}\dfrac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n}}{2^{2n}n^{2n}e^{-2n}n}\dfrac{\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ell}\dfrac{\pi}{\sqrt{2n}}$.

Comme d'autre part $W_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$, alors $\dfrac{1}{\ell}\dfrac{\pi}{\sqrt{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}} \Leftrightarrow \ell \sim \sqrt{2\pi}$.

Et donc[32] $\ell = \sqrt{2\pi}$, d'où la formule de Stirling :

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}.}$$

[32] Deux constantes sont équivalentes si et seulement si elles sont égales.

27.3.4 Hors programme : la règle de d'Alembert

Le critère de convergence qui suit est hors programme en première année, mais est central dans le programme de seconde année, lorsque vous étudierez les *séries entières*, qui sont en gros des développements limités d'ordre infini.
Comme nous avons plusieurs fois tourné autour dans des exercices cette année, je préfère l'énoncer dès maintenant.

Proposition 27.37 (Règle de d'Alembert) :
Soit $(u_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ une suite qui ne s'annule pas. Supposons que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell \in \overline{\mathbf{R}}$. Alors

1. *si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ diverge (grossièrement)*
2. *si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ converge absolument*

Dans le cas $\ell = 1$, la série $\sum u_n$ peut converger ou diverger.

Démonstration. ► Si $\ell > 1$, alors il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$,

$$\left|\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| - \ell\right| \leqslant \frac{\ell-1}{2} \text{ et donc } \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| - \ell \geqslant -\frac{\ell-1}{2}, \text{ de sorte que } \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geqslant \frac{1+\ell}{2}.$$

Et alors $|u_{n_0+1}| \geqslant \dfrac{1+\ell}{2}|u_{n_0}|$, puis $|u_{n_0+2}| \geqslant \dfrac{1+\ell}{2}|u_{n_0+1}| \geqslant \left(\dfrac{\ell+1}{2}\right)^2|u_{n_0}|$, etc

Et alors une récurrence facile prouve que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$|u_n| \geqslant \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-n_0}|u_{n_0}|.$$

Puisque $\left|\dfrac{1+\ell}{2}\right| > 1$, $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.

► Si $\ell < 1$, alors il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$,

$$\left|\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| - \ell\right| \leqslant \frac{1-\ell}{2} \Rightarrow \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant \frac{1+\ell}{2}.$$

Et alors pour $n \geqslant n_0$,

$$|u_n| \leqslant \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-n_0}|u_{n_0}|.$$

Mais alors, $\left|\dfrac{1+\ell}{2}\right| < 1$, et donc la série géométrique de raison $\dfrac{1+\ell}{2}$ converge, donc par critère de comparaison, $\sum |u_n|$ converge. □

⚠ La règle de d'Alembert ne dit rien du cas $\ell = 1$, et pour cause, tout est possible.
Regarder par exemple ce qui se passe pour $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$.

De manière générale, ce critère est particulièrement adapté aux séries dont le terme général fait apparaître des factorielles et des puissances.

Exemples 27.38

- Soit $u_n = \frac{n!n^n}{(2n)!}$. Alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!}\frac{(2n)!}{n!n^n} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$.
On a alors $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$.
Et alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{e}{4} < 1$, de sorte que par la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge.
- Nous savons que le développement limité de l'arctangente en 0 est

$$\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{\sim} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o\left(x^{2n+2}\right).$$

Comme nous l'avons fait précédemment pour l'exponentielle ou pour le cosinus, on peut se demander si la série de terme général $(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ converge (et éventuellement utiliser une formule de Taylor pour prouver que sa somme est égale à $\operatorname{Arctan}(x)$).
Le cas $x = 0$ étant trivial, considérons $x \neq 0$, et posons $u_n = (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.
Alors $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}\frac{2n+1}{|x|^{2n+1}} = x^2\frac{2n+1}{2n+3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x^2$.
Et donc pour $|x| > 1$, la série de terme général u_n diverge, et pour $|x| < 1$, elle converge. Pour $x = \pm 1$, le critère de d'Alembert ne dit rien[33].

27.4 Le critère des séries alternées

Le critère évoqué dans cette partie ne s'applique qu'à certaines séries dont le terme général n'est pas de signe constant, mais dont le signe alterne à chaque terme.
Certaines de ces séries sont absolument convergentes, et on pourra leur appliquer les résultats de la partie précédente, mais d'autres sont convergentes sans être pour autant absolument convergentes.

Théorème 27.39 (Critère de Leibniz pour les séries alternées a.k.a. le critère spécial des séries alternées) : *Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante qui tend vers 0.*
Alors la série de terme général $(-1)^n u_n$ est convergente.

De plus, on dispose de la majoration suivante des restes : si on note $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k u_k$, alors $\forall n \in \mathbf{N}$, $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.

Démonstration. Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$ les sommes partielles de la série $\sum(-1)^k u_k$.
Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$S_{2n+2} - S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2}(-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k u_k = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leqslant 0.$$

Donc la suite $(S_{2n})_n$ est décroissante.
De même, $S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+2} - u_{2n+3} \geqslant 0$, si bien que $(S_{2n+1})_n$ est croissante.

Factorielles
Vous me direz que pour les factorielles, on peut passer par des équivalents puisqu'on dispose de la formule de Stirling.
C'est rarement le moyen le plus agréable d'arriver au résultat, et la formule de Stirling doit plutôt être utilisée en dernier recours, si rien d'autre ne fonctionne.

Classique
Passer par la forme exponentielle et utiliser un développement limité.

[33] Mais pour $x = -1$, on prouve facilement qu'elle diverge, car il s'agit de $\sum \frac{1}{2n+1}$ et pour $x = 1$, le critère des séries alternées prouvé ci-dessous prouvera qu'elle converge.

Remarque
Notons en particulier qu'une telle suite (u_n) est à valeurs positives.

Enfin, $S_{2n} - S_{2n+1} = u_{2n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
Donc les deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, et donc convergente vers une même limite ℓ.
Mais alors les deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}), extraites de (S_n) convergent vers une même limite, si bien que (S_n) converge vers ℓ.
Par définition, puisque la suite de ses sommes partielles converge, la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente, et $\ell = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k$.

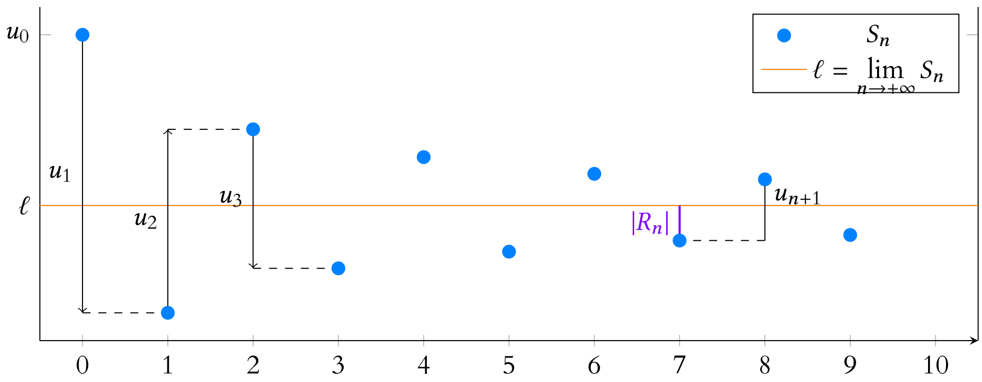


FIGURE 27.2 – Illustration de la convergence de S_n et de $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.

Prouvons à présent la majoration annoncée de R_n.
► Si $n = 2p$ est un entier pair, alors on a

$$S_{n+1} = S_{2p+1} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k \leqslant S_{2p} = S_n.$$

Explications
Puisque $(S_{2k})_k$ est décroissante et convergente, tous ses termes sont supérieurs à sa limite, et de même, tous les termes de $(S_{2k+1})_k$ sont inférieurs à sa limite.

Et donc en particulier,

$$S_{n+1} - S_n = (-1)^{2p+1} u_{2p+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k \leqslant 0.$$

Soit encore $-u_{n+1} \leqslant R_n \leqslant 0$, si bien que $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.
► Si $n = 2p + 1$ est impair, on a sur le même principe,

$$S_n = S_{2p+1} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k \leqslant S_{2p+2} = S_{n+1}.$$

On en déduit donc que

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k \leqslant S_{2p+2} - S_{2p+1} = u_{2p+2} = u_{n+1}$$

et donc $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.

Dans tous les cas, on a bien $|R_n| \leqslant u_{n+1}$. □

Exemples 27.40

► Soit $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. Alors la série de terme général u_n n'est pas absolument convergente, puisque $|u_n| = \frac{1}{n}$ est le terme général d'une série convergente.
En revanche, si on pose $v_n = \frac{1}{n}$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = (-1)^n v_n$, et $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ en décroissant.

Donc le critère des séries alternées s'applique, et $\sum u_n$ est convergente.

▶ Pour $n \geqslant 2$, posons $u_n = \dfrac{(-1)^n \sqrt{n} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n} + (-1)^n}$. Alors

$$|u_n| = \frac{\sqrt{n} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n} + (-1)^n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

de sorte que la série de terme général u_n n'est pas absolument convergente, ce qui ne permet pas encore de déterminer sa nature.
Mais pour $n \geqslant 2$,

$$u_n = (-1)^n \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} \underset{n \to +\infty}{=} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right)\left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\underset{n \to +\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

Nous savons donc par le critère des séries alternées que $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

De plus, $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, et $O\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ est le terme général d'une série convergente par comparaison à une série de Riemann.
Et donc $\sum u_n$ diverge.

> **☠ Danger !** Sans les valeur absolues, $u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, qui est le terme général d'une série convergente, mais le critère des équivalents ne s'applique pas aux séries dont le terme général n'est pas de signe constant.

> **Remarque** Puisque $u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, nous avons là un exemple de deux séries de nature différentes bien que leurs termes géné-r... ...valents. Le

27.5 DÉVELOPPEMENT DÉCIMAL D'UN RÉEL

Dans cette courte partie, on explique (enfin) ce qu'on entend par développement décimal d'un réel, par exemple $\frac{1}{3} = 0,3333\dots$ ou $\pi = 3,14159\dots$.
Nous ne nous intéressons qu'aux réels positifs, puisque la convention veut que pour un réel négatif, le développement décimal soit le développement décimal de la valeur absolue, précédée d'un signe moins.

> **Remarque** Il y a tout de même une faille ici : nous n'avons (toujours) pas défini ce qu'est un réel...

Lorsqu'on écrit $\sqrt{2} = 1,41421\dots$, c'est $\sqrt{2} = 1 + \dfrac{4}{10} + \dfrac{1}{10^2} + \dfrac{4}{10^3} + \dfrac{2}{10^4} + \dfrac{1}{10^5} + \dots$, ce qui nous conduit naturellement à nous intéresser à des séries de la forme $\sum\limits_{k \geqslant 1} \dfrac{\alpha_k}{10^k}$, où $\alpha_k \in [\![0, 9]\!]$ (α_k est un chiffre).

Nous allons dans la suite prouver que pour tout réel positif x, il existe $\beta_0 \in \mathbf{N}$ et une suite $(\beta_n)_{n \geqslant 1}$ d'éléments de $[\![0, 9]\!]$ telle que $x = \beta_0 + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\beta_k}{10^k}$.
Le problème est qu'une telle décomposition n'est pas toujours unique car

> **Convergence** La convergence d'une telle série est facile, car son terme général est majoré par $9 \cdot 10^{-k}$, qui est le terme général d'une série convergente.

$$0,9999\dots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = 9 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{9}{10} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1 = 1,000\dots$$

et de même, $0,199999\dots = 0,2$, etc.
Nous allons voir qu'en réalité c'est là le seul problème qui puisse apparaître et qu'il ne se produit que pour les nombres décimaux. Rappelons que les nombres décimaux sont les éléments de $\mathbf{D} = \left\{ \frac{k}{10^n},\ (k, n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N} \right\}$.

Enfin, puisqu'ajouter un entier revient à changer β_0, nous ne nous intéressons dans la suite qu'aux réels de $[0, 1[$.

Théorème 27.41 : *Pour tout $x \in [0,1[$, il existe une suite $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de $[\![0,9]\!]$ telle que $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\beta_k}{10^k}$. De plus :*

1. *si $x \notin \mathbf{D}$, une telle suite est unique.*
2. *si $x \in \mathbf{D}$, alors il existe exactement deux telles suites, l'une dont tous les termes sont nuls à partir d'un certain rang, et l'autre dont tous les termes sont égaux à 9 à partir d'un certain rang.*

Dans les deux cas, il existe une unique suite $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de $[\![0,9]\!]$ telle que pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, $\exists n \geqslant N$ tel que $\beta_n \neq 9$.

On dit alors que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\beta_k}{10^k}$ est le développement décimal propre de x.

Démonstration. Rappelons qu'au chapitre sur les réels, nous avions défini pour tout $n \geqslant 1$ un réel $r_n = \dfrac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n}$, que nous avons nommé l'approximation décimale par défaut de x à 10^{-n} près.
Posons alors $\beta_n = 10^n(r_n - r_{n-1}) = \lfloor 10^n x\rfloor - 10\lfloor 10^{n-1}x\rfloor$. Il est alors évident qu'il s'agit d'un entier, et puisque

$$10^n x - 1 < \lfloor 10^n x\rfloor \leqslant 10^n x \text{ et } 10^n x - 10 < 10\left\lfloor 10^{n-1}x\right\rfloor \leqslant 10^n x$$

alors $-1 < \beta_n < 10$ soit encore $0 \leqslant \beta_n \leqslant 9$.
Par ailleurs,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_k}{10^k} = \sum_{k=1}^{n}(r_k - r_{k-1}) = r_n - r_0 = r_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x.$$

Donc on a bien prouvé que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k 10^{-k} = x$.

Pour l'unicité du développement propre, supposons que $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k 10^{-k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \beta'_k 10^{-k}$.

Soit alors n_0 le plus petit entier tel que $\beta_{n_0} \neq \beta'_{n_0}$ (et quitte à échanger les deux développements, supposons $\beta_{n_0} < \beta'_{n_0}$), et soit n_1 le plus petit entier supérieur strictement à n_0 tel que $\beta_{n_1} \neq 9$.
Alors

$$\begin{aligned}
x &= \sum_{k=1}^{n_0-1} \beta_k 10^{-k} + \beta_{n_0}10^{-n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n_1-1} \beta_k 10^{-k} + \beta_{n_1}10^{-n_1} + \sum_{k=n_1+1}^{+\infty} \beta_k 10^{-k}\\
&< \sum_{k=1}^{n_0-1} \beta_k 10^{-k} + \beta_{n_0}10^{-n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n_1-1} \beta_k 10^{-k} + (\beta_{n_1}+1)10^{-n_1} + \sum_{k=n_1+1}^{+\infty} \beta_k 10^{-k}\\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n_0-1} \beta_k 10^{-k} + \beta_{n_0}10^{-n_0} + \underbrace{\sum_{k=n_0+1}^{+\infty} 9\cdot 10^{-k}}_{=10^{-n_0}}\\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n_0-1} \beta_k 10^{-k} + (\beta_{n_0}+1)10^{-n_0}\\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n_0-1} \beta_k 10^{-k} + \beta'_{n_0}10^{-n_0}\\
&\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \beta'_k 10^{-k}\\
&\leqslant x.
\end{aligned}$$

Remarque
C'est ici que nous utilisons $\beta_{n_1} < 9$, pour garantir que $\beta_{n_1} + 1 < 9$.

Et donc au final, $x < x$, ce qui est absurde.

Essayez d'écrire toute la suite avec des nombres à virgule pour bien comprendre ce qui s'y passe.
Enfin, un réel ne peut pas avoir deux développements décimaux qui ne sont pas propres, car en utilisant $\sum_{k=n}^{+\infty} 9 \cdots 10^{-k} = 10^{-n-1}$, tout développement impropre est égal à un[34] développement propre, et on prouve aisément que deux développements impropres distincts ne peuvent être égaux.

[34] Nécessairement unique par le point qui précède.

Reste à prouve l'affirmation sur les nombres décimaux : si x possède un développement impropre $x = \sum_{k=1}^{n} \beta_k 10^{-k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} 9 \cdot 10^{-k}$ avec $\beta_n \neq 9$, alors $x = \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k 10^{-k} + (\beta_n + 1)10^{-n}$ qui est décimal.
Et inversement, un décimal x s'écrit $\sum_{k=1}^{n} \beta_k 10^{-k}$ avec $\beta_n \neq 0$, et alors

$$x = \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k 10^{-k} + (\beta_n - 1)10^{-n} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} 9 \cdot 10^{-k}$$

qui est un développement impropre.

Ceci prouve en particulier qu'un décimal ne peut avoir deux développements impropres différents, puisqu'ils donneraient lieu à deux développements propres différents. □