26 Intégration

Le but de ce chapitre est de définir **rigoureusement** ce qu'est une intégrale.
Bien entendu, vous avez l'impression[1] de déjà savoir ce qu'est une intégrale.
Mais la définition d'intégrale dont nous disposons pour l'instant (à l'aide d'une primitive) a plusieurs lacunes :

- on a admis jusque là l'existence de primitive(s) d'une fonction continue
- elle n'explique en rien le lien entre l'aire et l'intégrale qu'on vous a appris en terminale. Et d'ailleurs, qu'est-ce qu'une aire ?
- Elle nécessite des fonctions continues, et par exemple ne nous autorise pas à calculer $\displaystyle\int_0^2 \lfloor x \rfloor \, dx$, alors que graphiquement, on se fait une bonne idée de ce que doit valoir cette intégrale.

Nous allons donc reconstruire l'intégrale en partant de zéro, et retrouver toutes les propriétés que nous connaissons déjà.
Pour la culture, mentionnons qu'il existe plusieurs théories de l'intégration, et que l'intégrale que nous construisons ici se nomme l'intégrale de Riemann.
C'est probablement la plus facile à construire, mais elle souffre de plusieurs lacunes :

1. elle est délicate à étendre à des intégrales de fonctions définies sur autre chose qu'un segment (par exemple $]0,1]$ ou $[0,+\infty[$), sujet auquel vous consacrerez un peu de temps en seconde année
2. certains grands théorèmes (par exemple le théorème de convergence dominée au programme de seconde année) sont franchement désagréables à prouver dans le contexte de l'intégrale de Riemann.
3. elle ne nous permet pas de définir par exemple $\displaystyle\int_0^1 \mathbb{1}_{\mathbf{Q}}(t)\, dt$.

Une autre théorie de l'intégration très célèbre se nomme l'intégrale de Lebesgue. Elle est bien plus difficile à construire[2], mais elle possède de nombreux avantages, notamment de répondre aux trois problèmes soulevés ci-dessus (les preuves des grands théorèmes d'intégration sont presque triviales avec le vocabulaire de l'intégrale de Lebesgue), et de fournir un cadre très général dans lequel faire des probabilités.
Un certain nombre d'entre vous auront l'occasion d'en reparler en école, et pas uniquement ceux qui suivront des cursus de maths pures.

Dans toute la suite du chapitre, en l'absence de précisions, la lettre $\mathbf{K}$ désigne indifféremment $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

26.1 Fonctions uniformément continues

Définition 26.1 – Soit $f : D \to \mathbf{K}$ une fonction définie sur une partie $D \subset \mathbf{R}$. On dit que f est **uniformément continue sur** D si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x,y) \in D^2,\ |x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Notons tout de suite la différence avec la continuité : une fonction f est continue sur D si elle est continue en tout point de D. Soit si et seulement si

$$\forall x \in D,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall y \in D,\ |x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

La différence réside donc uniquement dans l'ordre des quantificateurs : pour une fonction continue, le η dépend du point x choisi[3], alors que pour une fonction uniformément continue, le même η convient pour tout x.

[1] Et à juste titre.

[2] Et c'est la raison pour laquelle elle n'est pas enseignée en prépa.

[3] Et bien entendu du ε.

Proposition 26.2 : *Une fonction uniformément continue est continue.*

Démonstration. C'est une simple permutation de quantificateurs : si il existe un η qui convient pour tout x, alors pour tout x, il existe un η tel que...
Dans le détail : fixons $\varepsilon > 0$. Alors $\exists \eta > 0$ tel que $\forall (x, y) \in D^2, |x-y| < \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$.
Soit donc $x \in D$ fixé. Alors, pour tout $y \in D$, si $|x - y| < \eta$, alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
Donc f est continue en x, et ceci étant vrai pour tout $x \in D$, f est continue sur D. □

La réciproque est fausse : une fonction peut être continue sans être uniformément continue, c'est-à-dire que le η dépend réellement de x.
Par exemple considérons la fonction carré $f : x \mapsto x^2$ sur $\mathbf{R}^+$.
Prenons $\varepsilon = 1$. Pour tout $x \in \mathbf{R}^+$ et $h > 0$, on a

$$|f(x + h) - f(x)| = (x + h)^2 - x^2 = 2xh + h^2.$$

Et donc en particulier, pour $\eta > 0$ fixé, prenons $x = \frac{1}{\eta}$ et $h = \frac{\eta}{2}$.
Alors les deux réels x et $y = x+h$ vérifient $|x-y| = \frac{\eta}{2} < \eta$ mais $|f(x)-f(y)| = 2\frac{1}{\eta}\frac{\eta}{2} + \frac{\eta^2}{4} > 1$.
Ainsi, on a prouvé que

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists (x, y) \in \mathbf{R}_+^2, |x - y| < \eta \textbf{ et } |f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon.$$

Ce qui est bien la négation de f uniformément continue.

Proposition 26.3 : *Une fonction lipschitzienne est uniformément continue.*

Démonstration. Soit $f : D \to \mathbf{K}$ une fonction k-lipschitzienne, avec $k > 0$.
Soit $\varepsilon > 0$, et soit $\eta = \dfrac{\varepsilon}{k}$.
Alors pour tout $(x, y) \in D^2$, si $|x - y| < \eta$, alors

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y| \leqslant k\frac{\varepsilon}{k} \leqslant \varepsilon.$$

Et donc f est uniformément continue. □

On a donc les implications f lipschitzienne $\Rightarrow$ f uniformément continue $\Rightarrow$ f continue.
Mais aucune des deux implications réciproques n'est vraie[4].

[4] Nous avons déjà prouvé qu'il existe des fonctions continues non uniformément continues, voir un peu plus loin pour une fonction uniformément continue et non lipschitzienne.

Le résultat qui suit est vraiment fondamental dans la suite :

Théorème 26.4 (de Heine) : *Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$. Alors f est uniformément continue.*

Démonstration. Soit $f : [a, b] \to \mathbf{K}$. Supposons par l'absurde que f n'est pas uniformément continue sur $[a, b]$, de sorte que

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0,\ \exists (x, y) \in [a, b]^2,\ |x - y| < \eta \textbf{ et } |f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, en prenant $\eta = \frac{1}{n}$, il existe x_n, y_n tels que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon$.
Puisque (x_n) est bornée[5], par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une extractrice φ telle que $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un réel x.
Notons que x est encore dans $[a, b]$ car $a \leqslant x_{\varphi(n)} \leqslant b$, et que les inégalités sont préservées par passage à la limite.
Puisque $\dfrac{1}{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et que $|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| \leqslant \dfrac{1}{\varphi(n)}$, on a également $y_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.
Par caractérisation séquentielle de la continuité[6], $f(x_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$, et de même pour $f(y_{\varphi(n)})$.
Et donc en passant à la limite $|f(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon$, ce qui est absurde. □

[5] Elle est à valeurs dans $[a, b]$.

[6] Et c'est là qu'on utilise la continuité de f.

Rappelons que nous avions prouvé que la fonction racine carrée, n'est pas lipschitzienne sur $[0, 1]$. En revanche, étant continue sur le segment $[0, 1]$, elle est[7] uniformément continue. Et nous avons donc là un exemple de fonction uniformément continue non lipschitzienne.

[7] Par le théorème de Heine.

26.2 Intégrale des fonctions en escalier

Définition 26.5 – Si $[a, b]$ est un segment, avec $a \leqslant b$, on appelle **subdivision de** $[a, b]$ toute partie finie $\sigma = \{x_i, 0 \leqslant i \leqslant n\}$ de $[a, b]$ avec $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.
Le réel $\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1} (x_{i+1} - x_i)$ est appelé le pas de σ.

Autrement dit, se donner une subdivision de $[a, b]$, c'est juste se donner un «découpage» de $[a, b]$ en un nombre fini de segments plus petits.

L'exemple le plus classique de subdivision est, pour $n \in \mathbf{N}^*$, la subdivision à n éléments obtenue en posant $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$.
On parle de subdivision à **pas régulier**.

26.2.1 Fonctions en escalier

Définition 26.6 – Soit $f : [a, b] \to \mathbf{K}$. On dit que f est une **fonction en escalier** s'il existe une subdivision $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n-1}$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $f_{|]x_i, x_{i+1}[}$ soit constante.
Une telle subdivision σ est dite **adaptée** à la fonction f.
On note $\mathscr{E}([a, b], \mathbf{K})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$.

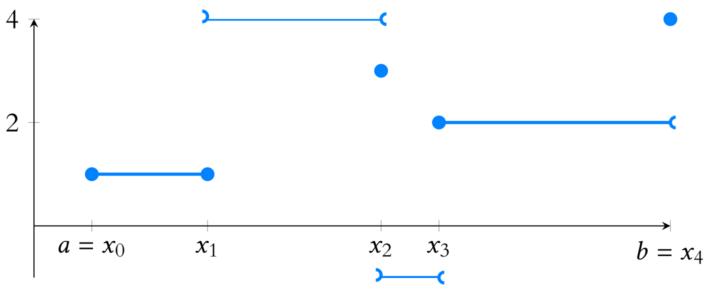


Figure 26.1 – Un exemple de fonction en escalier.

Remarques. ▸ Notons qu'on n'impose rien sur la valeur des $f(x_i)$. La fonction f peut être continue à droite en x_i, elle peut être continue à gauche, ou elle peut n'être ni l'un ni l'autre. Voir par exemple la fonction ci-dessus.
▸ Il n'y a absolument pas unicité d'une subdivision adaptée à f : si $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est adaptée à f, alors toute subdivision plus fine[8] l'est encore.
En effet, la restriction d'une fonction constante à une partie de son ensemble de définition est encore une fonction constante.

[8] C'est-à-dire contenant tous les x_i.

Proposition 26.7 : *L'ensemble $\mathscr{E}([a, b], \mathbf{K})$ des fonctions en escalier est à la fois un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathscr{F}([a, b], \mathbf{K})$.*

Démonstration. La preuve n'est pas si dure, mais plutôt désagréable à écrire.
La seule chose à laquelle il faut être soigneux lorsqu'on manipule deux fonctions en escalier f et g est qu'elles ont a priori chacune une subdivision qui leur est adaptée, mais il n'y a aucune raison qu'il s'agisse de la même.
En revanche, l'union de ces deux subdivisions, réarrangée par ordre croissant, et après élimination des éventuels doublons[9] est une subdivision de $[a, b]$ plus fine que les deux

[9] Par exemple a et b sont déjà dans les deux subdivisions de départ.

subdivisions adaptées à f et à g, et donc adaptée aux deux à la fois.

Une fois établie l'existence d'une telle subdivision, il n'y a plus grand chose à faire. Prouvons par exemple que $\lambda f + g$ est encore une fonction en escalier.
Soit donc $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à la fois à f et à g.
Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, notons alors μ_i (resp. ν_i) l'unique valeur que prend f (resp. g) sur $]x_i, x_{i+1}[$.
Alors pour tout $t \in]x_i, x_{i+1}[$, $(\lambda f + g)(t) = \lambda\mu_i + \nu_i$, et donc $\lambda f + g$ est bien constante sur $]x_i, x_{i+1}[$.
Et donc $\lambda f + g \in \mathscr{E}([a, b])$. Notons que nous avons prouvé au passage qu'une subdivision adaptée à la fois à f et g est adaptée à $\lambda f + g$.
La preuve de stabilité de $\mathscr{E}([a, b])$ par produit est du même acabit. □

26.2.2 Intégrale des fonctions en escalier

Définition 26.8 – Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$, et soit $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ une subdivision adaptée. Alors on appelle **intégrale de f entre a et b**, et on note $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(t)\,dt$ le réel défini par

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)\lambda_i$$

où pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, λ_k est la valeur que prend f sur $]x_k, x_{k+1}[$.
Cette quantité ne dépend pas de la subdivision adaptée à f.

Remarque
On a
$$\lambda_i = f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right).$$

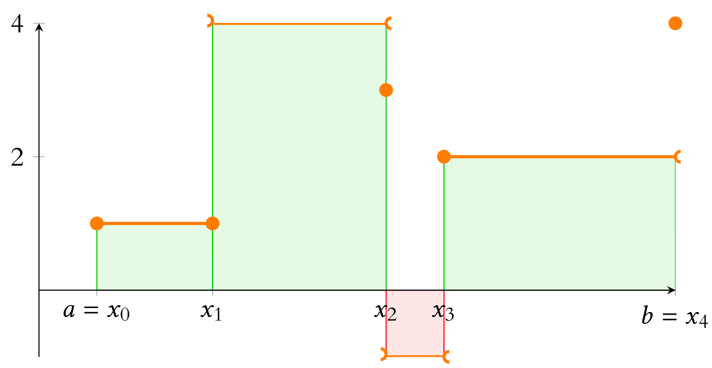


FIGURE 26.2 – L'interprétation en termes d'aire de l'intégrale d'une fonction en escalier est assez évidente. Notons que la valeur de f en les points qui composent la subdivision n'a aucune importance.

Avant de prouver que cette quantité est bien indépendante de la subdivision adaptée choisie, notons que l'interprétation en terme d'aire est assez évidente, du moins si on accepte que l'aire d'un rectangle est bien donnée par `longueur × largeur`.
En effet, $\lambda_k(x_{k+1} - x_k)$ est bien l'aire du rectangle délimité par l'axe des abscisse, la courbe de f et les droites d'équations $x = x_{k+1}$ et $x = x_k$.

Plus précisément
Nous parlons là d'une aire algébrique, qu'on autorise à être négative si $\lambda_k < 0$.

Démonstration. Il s'agit de prouver[10] que cette quantité ne dépend pas de la subdivision adaptée à f.

Étant donnée une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ adaptée à f, notons $I_\sigma(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)\lambda_k$, où $\lambda_k = f\left(\frac{x_{k+1} + x_k}{2}\right)$.
Commençons par ajouter que si σ' est une subdivision obtenue à partir de σ par ajout d'un point, alors $I_{\sigma'}(f) = I_\sigma(f)$.
Notons par exemple c le point ajouté, et soit p tel que $x_p < c < x_{p+1}$.

[10] C'est assez facile à comprendre, plus pénible à écrire...

Alors σ' est encore adaptée à f, et on a

$$I_{\sigma'}(f)=\sum_{k=0}^{p-1}(x_{k+1}-x_k)f\left(\frac{x_{k+1}+x_k}{2}\right)+(c-x_p)f\left(\frac{c+x_p}{2}\right)+(x_{p+1}-c)f\left(\frac{x_{k+1}+c}{2}\right)+\sum_{k=p+1}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)f\left(\frac{x_{k+1}+x_k}{2}\right).$$

Mais f est constante sur $]x_p,x_{p+1}[$ et donc $f\left(\frac{x_p+c}{2}\right)=f\left(\frac{c+x_{p+1}}{2}\right)=f\left(\frac{x_p+x_{p+1}}{2}\right)$.
Par conséquent,

$$(c-x_k)f\left(\frac{c+x_k}{2}\right)+(x_{k+1}-c)f\left(\frac{x_{k+1}+c}{2}\right)=(x_{k+1}-c+c-x_k)f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)$$

et donc $I_\sigma(f)=I_{\sigma'}(f)$.
Une récurrence triviale prouve que l'ajout d'un nombre fini de points à une subdivision ne change pas la valeur de l'intégrale de f.

Considérons à présent σ_1 et σ_2 deux subdivisions de $[a,b]$ adaptées à f. Alors $\sigma_1\cup\sigma_2$ est encore une subdivision adaptée à f, obtenue à partir de σ_1 par ajout d'un nombre fini de points[11].
Et donc $I_{\sigma_1}(f)=I_{\sigma_1\cup\sigma_2}(f)$. De même $I_{\sigma_2}(f)=I_{\sigma_1\cup\sigma_2(f)}$.
Il vient donc bien $I_{\sigma_1}(f)=I_{\sigma_2}(f)$. □

Cette définition de l'intégrale des fonctions en escalier jouit déjà de bonnes propriétés qu'on attendrait pour une intégrale[12] :

Proposition 26.9 : *Soient $(f,g)\in\mathscr{E}([a,b],\mathbf{K})$ et soit $\lambda\in\mathbf{K}$. Alors :*

1. $\int_a^b(\lambda f(t)+g(t))\,dt=\lambda\int_a^b f(t)\,dt+\int_a^b g(t)\,dt$ *(linéarité de l'intégrale)*
2. *Si $f\geqslant 0$ (ce qui n'a de sens que pour f à valeurs réelles), alors* $\int_a^b f(t)\,dt\geqslant 0$.
3. *Si $f\leqslant g$ (avec là aussi f et g à valeurs réelles), alors* $\int_a^b f(t)\,dt\leqslant\int_a^b g(t)\,dt$.
4. *Pour tout $c\in[a,b]$,* $\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^c f(t)\,dt+\int_c^b f(t)\,dt$ *(relation de Chasles).*
5. $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right|\leqslant\int_a^b|f(t)|\,dt$ *(inégalité triangulaire).*
6. $\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b\mathrm{Re}(f(t))\,dt+i\int_a^b\mathrm{Im}(f(t))\,dt$.

Démonstration. 1. Si σ_1 est une subdivision adaptée à f et σ_2 une subdivision adaptée à g, alors $\sigma_1\cup\sigma_2$ est adaptée à f et à g à la fois, travaillons donc avec une telle subdivision $x_0<x_1<\cdots<x_n$.
Nous avons déjà prouvé que $\lambda f+g$ est encore constante sur chacun des $]x_k,x_{k+1}[$.
Et alors

$$\begin{aligned}\int_a^b(\lambda f(t)+g(t))\,dt&=\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\left(\lambda f\left(\frac{x_{k+1}+x_k}{2}\right)+g\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\right)\\&=\lambda\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)+\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)g\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\\&=\lambda\int_a^b f(t)\,dt+\int_a^b g(t)\,dt.\end{aligned}$$

2. Si f est positive, alors

$$\int_a^b f(t)\,dt=\sum_{k=0}^{n-1}\underbrace{(x_{k+1}-x_k)}_{\geqslant 0}\underbrace{f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)}_{\geqslant 0}\geqslant 0.$$

[11] Ceux de σ_2 qui n'étaient pas déjà dans σ_1.

[12] Et que nous avons prouvé pour les fonctions continues... en admettant le théorème fondamental de l'analyse !

Remarque
Il n'y a pas équivalence : l'intégrale d'une fonction qui n'est pas de signe constant peut être positive.

Mieux
Le résultat reste valable si on demande f positive sauf en un nombre fini de points.

3. Il suffit d'appliquer la positivité à $g - f$, puis la linéarité de l'intégrale.
4. Si $c = a$ ou $c = b$, il n'y a pas grand chose à dire, si ce n'est constater que $\displaystyle\int_a^a f(t)\,dt = 0$.
   Supposons donc $c \in]a, b[$. Considérons une subdivision $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ de $[a, b]$ adaptée à f, qui contient[13] c, et soit $p \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $c = x_p$. Alors
$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,dt &= \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{p-1}(x_{k+1} - x_k) f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) + \sum_{k=p}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right).\end{aligned}$$
   Mais $x_0 < x_1 < \cdots < x_k = c$ est une subdivision de $[a, c]$ adaptée à f, de sorte que la première somme ci-dessus vaut $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$.
   Et de même, $x_k < \cdots < x_n$ est une subdivision de $[c, b]$ adaptée à f et la seconde somme vaut donc $\displaystyle\int_c^b f(t)\,dt$.
5. Par l'inégalité triangulaire (pour les sommes), on a
$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)\lambda_k\right|\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)|\lambda_k|\\ &\leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt.\end{aligned}$$
6. Notons que les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont encore toutes les deux des fonctions en escalier.
   On a alors
$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,dt &= \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)\left(\mathrm{Re}(\lambda_k) + i\,\mathrm{Im}(\lambda_k)\right) = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)\,\mathrm{Re}(\lambda_k) + i\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)\,\mathrm{Im}(\lambda_k)\\ &= \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,dt + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,dt.\end{aligned}$$

□

[13] Il est toujours possible de l'ajouter à une subdivision.

26.3 Intégrale des fonctions continues par morceaux

26.3.1 Fonctions continues par morceaux sur un segment

Les fonctions que nous allons pouvoir intégrer ne se limitent pas aux fonctions continues, nous allons autoriser également des fonctions qui ont un nombre fini de points de discontinuité. Mais attention pas toutes les fonctions qui ont un nombre fini de points de discontinuité, uniquement celles de la forme suivante :

Définition 26.10 – Une fonction $f : [a, b] \to \mathbf{K}$ est dite **continue par morceaux** s'il existe une subdivision $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $f_{|]x_i, x_{i+1}[}$ est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$ et prolongeable par continuité en x_i et en x_{i+1}.
Une telle subdivision est dite adaptée à f.
On note $\mathscr{C}_m([a, b], \mathbf{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

Remarques. ► Comme pour les fonctions en escalier, il n'y a pas de contrainte sur la valeur de f aux points de la subdivision.
► En revanche, le fait que $f_{|]x_i, x_{i+1}[}$ soit prolongeable par continuité en x_i et en x_{i+1} se

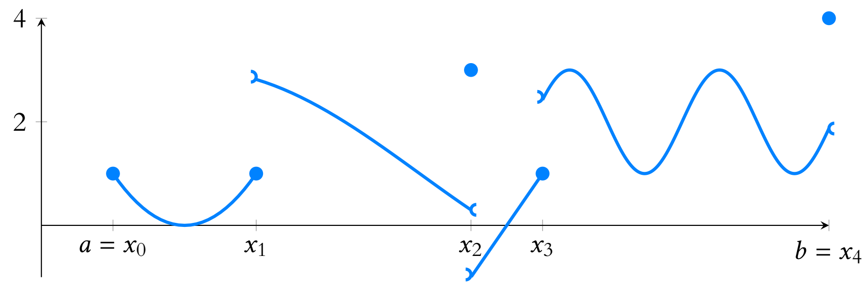


Figure 26.3 – Un exemple de fonction continue par morceaux.

reformule de la manière suivante : f possède des limites finies à droite et à gauche en tous les x_i.
► Et comme pour les fonctions en escalier, il n'y a pas unicité d'une subdivision adaptée.
► Une fonction en escalier est continue par morceaux : $\mathscr{E}([a,b],\mathbf{K}) \subset \mathscr{C}_m([a,b],\mathbf{K})$.

Exemples 26.11

► Toute fonction continue sur le segment $[a,b]$ y est continue par morceaux[14].
► La restriction de la fonction partie entière à un segment est continue par morceaux sur ce segment.

[14] Et il suffit de prendre la subdivision à deux points $a < b$.

⚠ Une fonction continue par morceaux n'est pas seulement une fonction avec un nombre fini de points de discontinuité, il y a vraiment la condition sur les limites latérales en les x_i.

Par exemple, la fonction définie sur $[-1,1]$ par $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ n'est pas continue par morceaux.

Proposition 26.12 : *L'ensemble $\mathscr{C}_m([a,b],\mathbf{K})$ est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathscr{F}([a,b],\mathbf{K})$.*

Démonstration. La preuve est à peu près la même que pour les fonctions en escalier.
Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux, et si $a = x_0 < x_1 < x_n = b$ est une subdivision adaptée à la fois à f et à g, alors pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, $(\lambda f + g)_{|]x_k,x_{k+1}[}$ et $(fg)_{|]x_k,x_{k+1}[}$ sont continues sur $]x_k, x_{k+1}[$.
De plus, $f_{|]x_k,x_{k+1}[}$ et $g_{|]x_k,x_{k+1}[}$ possèdent des limites à droite en x_k et à gauche en x_{k+1}, donc il en est de même de $(\lambda f + g)_{|]x_k,x_{k+1}[}$ et $(fg)_{|]x_k,x_{k+1}[}$. □

Proposition 26.13 : *Une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.*

Démonstration. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$, et soit $(x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ une subdivision adaptée à f.
Alors pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, le prolongement par continuité de $f_{|]x_k,x_{k+1}[}$ à $[x_k, x_{k+1}]$ est une fonction continue sur le segment $[x_k, x_{k+1}]$ et donc est bornée. Notons M_k un majorant de sa valeur absolue[15], de sorte que pour tout $x \in]x_k, x_{k+1}[$, $|f(x)| \leqslant M_k$.
Si on pose $M = \max(M_0, M_1, \dots, M_{n-1}, |f(x_0)|, \dots, |f(x_n)|)$, alors pour tout $x \in [a,b]$, $|f(x)| \leqslant M$. □

[15] Son module dans le cas d'une fonction à valeurs complexes.

Définition 26.14 – Plus généralement, une fonction f définie sur un intervalle[16] I est dite **continue par morceaux sur** I si pour tout segment $[a,b]$ de I, $f_{|[a,b]}$ est continue par morceaux sur $[a,b]$.

[16] Qui peut être ouvert et/ou non borné.

Exemple 26.15

La fonction partie entière est continue par morceaux sur $\mathbf{R}$.

26.3.2 Approximation uniforme par des fonctions en escalier

Définition 26.16 – Si $f : [a, b] \to \mathbf{K}$ est une fonction bornée sur $[a, b]$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{[a,b]} |f|$.

Terminologie : On parle de la «norme infinie» de f.

Notons qu'en particulier, $\|f\|_\infty$ est bien définie si f est continue sur $[a, b]$, ou si f est continue par morceaux sur $[a, b]$.
Graphiquement, $\|f\|_\infty$ est le plus petit réel M tel que le graphe de f soit compris entre les deux droites horizontales d'équations $y = M$ et $y = -M$.

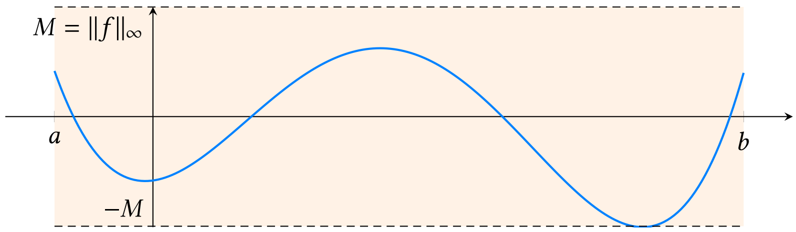


FIGURE 26.4 – Interprétation de la norme infinie.

Les propriétés qui suivent justifient que l'on appelle $\|\cdot\|_\infty$ une norme, mais vous n'étudierez ces objets qu'en seconde année.
Pour vous faire une intuition, remplacez dans l'énoncé suivant les fonctions par des vecteurs de $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$ et les $\|\cdot\|_\infty$ par les normes usuelles[17] des vecteurs.

[17] C'est-à-dire les longueurs !

Proposition 26.17 : *Soient f, g deux fonctions bornées sur $[a, b]$ et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors*
1. $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$
2. $\|f + g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ *(inégalité triangulaire)*
3. $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0$

Démonstration.
1. Pour tout $t \in [a, b]$, on a $|\lambda f(t)| = |\lambda| \cdot |f(t)|$.
Donc en passant au sup, $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$.
2. Pour tout $t \in [a, b]$, on a $|f(t) + g(t)| \leqslant |f(t)| + |g(t)| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.
Et donc, en passant au sup[18], $\|f + g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.
3. Il est évident que si f est la fonction nulle, alors $\|f\|_\infty = 0$.
Inversement, si $\|f\|_\infty = 0$, alors, pour tout $t \in [a, b]$, $-0 \leqslant f(t) \leqslant 0$, et donc $f(t) = 0$, de sorte que f est la fonction nulle.

□

[18] Rappelons qu'il s'agit du plus petit des majorants.

Définition 26.18 – Si f et g sont deux fonctions bornées sur $[a, b]$, on appelle **distance uniforme entre f et g** le réel positif $\|f - g\|_\infty$.

Théorème 26.19 (Approximation uniforme par des fonctions en escalier) : *Soit $f \in \mathscr{C}_m([a, b], \mathbf{K})$, et soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe une fonction en escalier φ telle que $\|f - \varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$.*

Autrement dit : Il existe toujours une fonction en escaliers qui ne s'éloigne jamais de plus de ε de f.

Démonstration. ▶ Commençons par le cas où f est continue sur $[a, b]$, et à valeurs réelles.
Par le théorème de Heine, il existe $\eta > 0$ tel que pour $|x - y| \leqslant \eta$, $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.

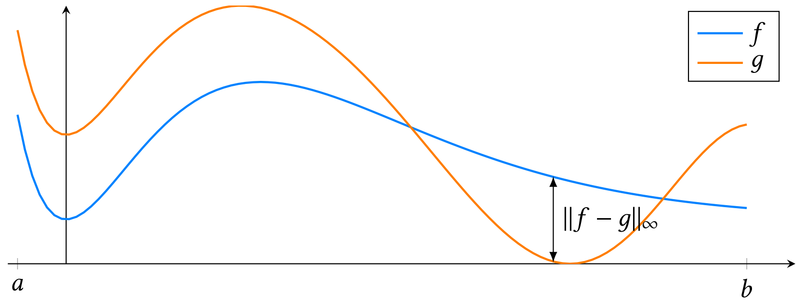


FIGURE 26.5 – Graphiquement, $\|f-g\|_\infty$ est la plus grande distance verticale entre les graphes de f et de g.

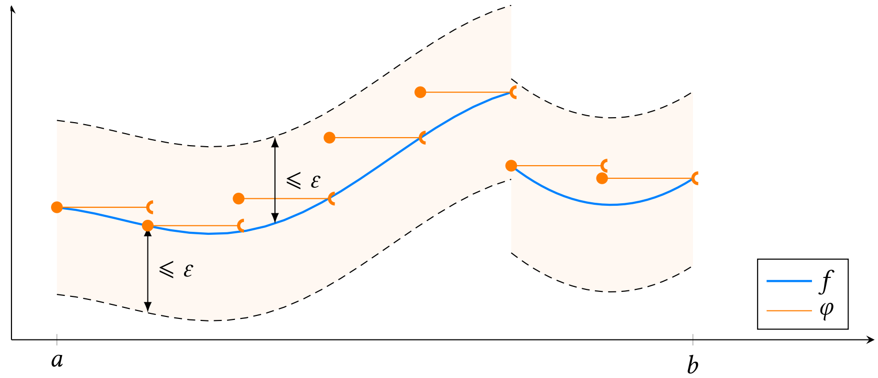


FIGURE 26.6 – La distance entre f et φ est inférieure à ε.

Soit alors $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $\dfrac{b-a}{n} < \eta$, et posons alors $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ la subdivision régulière de $[a,b]$ définie par $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$.

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, notons $M_k = \displaystyle\max_{t\in[x_k,x_{k+1}]} f(t)$. Posons alors $\varphi : t \mapsto \begin{cases} M_k & \text{si } t \in [x_k, x_{k+1}[\\ f(b) & \text{si } t = b \end{cases}$

Il est alors évident que φ est une fonction en escalier, vérifiant de plus $f \leqslant \varphi$.

Notons que par le théorème des bornes atteintes, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, il existe $T_k \in [x_k, x_{k+1}[$ tel que $f(T_k) = M_k$.
Et donc pour $t \in [x_k, x_{k+1}[$, on a alors $|f(t)-\varphi(t)| = |f(T_k) - f(t)| \leqslant \varepsilon$ puisque $|T_k - t| \leqslant |x_{k+1} - x_k| < \eta$.
Cette inégalité étant vraie pour tout $t \in [a,b]$, on en déduit que $\|f-\varphi\| \leqslant \varepsilon$.
► Dans le cas d'une fonction continue sur $[a,b]$, mais à valeurs complexes, il n'y a pas grand chose à changer, si ce n'est qu'il faut poser $M_k = \displaystyle\max_{t\in[x_k,x_{k+1}]} |f(t)|$, et noter T_k un point où ce maximum est atteint.
On peut alors poser $\varphi : t \mapsto \begin{cases} f(T_k) & \text{si } t \in [x_k, x_{k+1}[\\ f(b) & \text{si } t = b \end{cases}$ et vérifier qu'elle convient[19].

[19] Pour les mêmes raisons que dans le cas réel, il suffit de remplacer les valeurs absolues par des modules, ce qui est complètement indolore.

► Passons à présent au cas général d'une fonction continue par morceaux.
Soit donc $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une subdivision adaptée à f.
Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, notons $\widetilde{f_i}$ le prolongement par continuité de $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$ à $[x_i, x_{i+1}]$.
Par ce qui précède, il existe donc une fonction φ_i, en escalier sur $[x_i, x_{i+1}]$ telle que $\forall t \in]x_i, x_{i+1}[$,

$$|\varphi_i(t) - \underbrace{\widetilde{f_i}(t)}_{=f(t)}| \leqslant \varepsilon.$$

Si on pose alors

$$\varphi : t \mapsto \begin{cases} \varphi_i(t) & \text{si } t \in]x_i, x_{i+1}[\\ f(x_i) & \text{si } t = x_i \end{cases}$$

alors on vérifie sans grande difficulté qu'on a bien les propriétés attendues. □

Remarque. Remarquons que dans le cas d'une fonction f à valeurs réelles, nous avons prouvé qu'il était toujours possible de prendre φ de sorte que $f \leqslant \varphi$.
Vous interpréterez l'an prochain ce résultat en parlant de la *densité* de l'ensemble des fonctions en escalier dans l'ensemble des fonctions continues par morceaux : on peut approcher une fonction continue par morceaux d'aussi près[20] qu'on le souhaite par des fonctions en escalier.

[20] Au sens de la norme infinie.

Corollaire 26.20 – *Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbf{K})$. Alors il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions en escalier telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f-\varphi_n\|_\infty = 0$.*
On dit qu'une telle suite converge uniformément vers f.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe $\varphi_n \in \mathscr{E}([a,b],\mathbf{K})$ telle que $\|f-\varphi_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
Et alors la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a bien la propriété annoncée. □

26.3.3 Intégrale des fonctions continues par morceaux

Proposition 26.21 : *Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbf{K})$. Alors pour toute suite $(\varphi)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions en escaliers telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \|f-\varphi_n\|_\infty$, la suite $\left(\int_a^b \varphi_n(t)\,dt\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.*

Démonstration. Puisque la suite $(\|f-\varphi_n\|_\infty)_n$ converge, elle est bornée.
Notons donc M un de ses majorants. Alors $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall t \in [a,b]$, $|f(t)-\varphi_n(t)| \leqslant M$.
Et alors par inégalité triangulaire, $|\varphi_n(t)| \leqslant |f_n(t)| + M \leqslant \|f\|_\infty + M$.
On en déduit donc que

$$\left|\int_a^b \varphi_n(t)\right| \leqslant \int_a^b |\varphi_n(t)|\,dt \leqslant \int_a^b (\|f\|_\infty + M)\ dt \leqslant (b-a)(\|f\|_\infty + M).$$

Donc la suite $\left(\int_a^b \varphi_n(t)\,dt\right)_n$ est bornée.
Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle possède donc une suite extraite convergente.
Notons alors $\psi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ une extractrice telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_{\psi(n)}(t)\,dt = \ell \in \mathbf{R}$.
Alors pour $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b \varphi_n(t) - \int_a^b \varphi_{\psi(n)}(t)\,dt\right| &= \left|\int_a^b \left(\varphi_n(t) - \varphi_{\psi(n)}(t)\right)\,dt\right| \\ &\leqslant \int_a^b |\varphi_n(t) - \varphi_{\psi(n)}(t)|\,dt \\ &\leqslant (b-a)\|\varphi_n - \varphi_{\psi(n)}\|_\infty \\ &\leqslant (b-a)\left(\|\varphi_n - f\|_\infty + \|f-\varphi_{\psi(n)}\|_\infty\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(t)\,dt = \ell$. □

Proposition 26.22 : *Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbf{K})$. Si $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ sont deux suites de fonctions en escalier telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f-\varphi_n\|_\infty = \lim\limits_{n\to+\infty} \|f-\psi_n\|_\infty = 0$, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(t)\,dt.$$

*Cette limite indépendante du choix d'une suite (φ_n) de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f est appelée **intégrale de f sur** $[a,b]$, et on la note $\int_a^b f(t)\,dt$.*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b \varphi_n(t)\,dt - \int_a^b \psi_n(t)\,dt\right| &\leqslant \int_a^b |\varphi_n(t) - \psi_n(t)|\,dt \\ &\leqslant (b-a)\|\varphi_n - \psi_n\|_\infty \\ &\leqslant (b-a)\left(\|\|f - \varphi_n\|_\infty + \|\psi_n - f\|_\infty\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Puisque ces deux suites sont convergentes, elles ont donc la même limite. □

Remarques. ► La définition de l'intégrale n'est donc pas facile à manipuler, puisqu'elle cache un passage à la limite.
► Soyez rassurés : nous ne calculerons jamais une intégrale en cherchant une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers la fonction que l'on cherche à intégrer.
► La définition est somme toute assez géométrique : on définit l'aire sous la courbe à l'aide de petits rectangles approchant de mieux en mieux la partie du plan située sous la courbe.
► Si f elle-même est une fonction en escalier, alors on peut prendre (φ_n) suite constante égale à f, dont la limite est déjà ce que nous avions appelé $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.
Autrement dit, l'intégrale que nous venons de définir (pour des fonctions continues par morceaux) coïncide bien, pour une fonction en escalier avec celle définie précédemment.
Reste donc à prouver que l'intégrale ainsi définie possède bien les propriétés qu'on lui connaît dans le cas des fonctions continues.

Déjà fait ?
Avons-nous déjà prouvé ces propriétés pour les fonctions continues ? Oui et non ! Les preuves données dans le chapitre 8 sont correctes, mais reposent toujours sur le théorème fondamental de l'analyse, qui n'a toujours pas été prouvé (patience, plus que quelques pages à attendre...).

Proposition 26.23 (Propriétés de l'intégrale) : *Soient $f, g \in \mathscr{C}_m([a,b], \mathbf{K})$. Alors*

1. $\forall \lambda \in \mathbf{R}$, $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(t) + g(t))\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$ *(linéarité de l'intégrale)*
2. *Dans le cas où $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, si $f \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$ (positivité de l'intégrale)*
3. *Dans le cas où $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ si $f \leqslant g$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt$ (croissance de l'intégrale)*
4. *Dans le cas où $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,dt + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,dt$.*
5. $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt$ *(inégalité triangulaire)*
6. *si f et g ne diffèrent qu'en un nombre fini de points, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt$.*
7. *pour tout $c \in]a,b[$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$.*

Remarque
Si f est continue par morceaux, $|f|$ l'est aussi.

Démonstration. Notons (φ_n) (resp. (ψ_n)) une suite de fonctions en escalier telle que $\|f - \varphi_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (resp. $\|g - \psi_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$).

1) Alors pour $\lambda \in \mathbf{K}$, on a

$$\|(\lambda f + g) - (\lambda\varphi_n + \psi_n)\|_\infty \leqslant |\lambda|\|f - \varphi_n\|_\infty + \|g - \psi_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

si bien que

$$\begin{aligned}\int_a^b (\lambda f(t) + g(t))\,dt &= \lim_{n\to+\infty} \int_a^b (\lambda\varphi_n(t) + \psi_n(t))\,dt \\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(\lambda\int_a^b \varphi_n(t)\,dt + \int_a^b \psi_n(t)\,dt\right) \\ &= \lambda\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \varphi_n(t)\,dt + \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \psi_n(t)\,dt\end{aligned}$$

C'est la définition de l'intégrale.

Linéarité de l'intégrale des fonctions en escalier.

Ces deux suites sont convergentes.

$$= \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt.$$

2) Pour la positivité de l'intégrale, notons qu'il a été prouvé qu'on peut toujours trouver une suite $(\varphi_n)_n$ de fonctions en escalier telles que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant f \leqslant \varphi_n$ et $\|f - \varphi_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On a alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, par positivité de l'intégrale des fonctions en escalier, $\displaystyle\int_a^b \varphi_n(t)\,dt \geqslant 0$, si bien que par passage à la limite

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(t)\,dt \geqslant 0.$$

3) Découle directement de la linéarité et de la positivité.

4) Les fonctions $\mathrm{Re}(\varphi_n)$ et $\mathrm{Im}(\varphi_n)$ sont encore en escalier, et pour tout $t \in [a,b]$, on a

$$|\mathrm{Re}(f(t)) - \mathrm{Re}(\varphi_n(t))| = |\mathrm{Re}(f(t) - \varphi_n(t))| \leqslant |f(t) - \varphi_n(t)| \leqslant \|f - \varphi_n\|_\infty$$

si bien que par définition de la borne sup[21], $\|\mathrm{Re}(f) - \mathrm{Re}(\varphi_n)\|_\infty \leqslant \|f - \varphi_n\|_\infty$ et donc $\|\mathrm{Re}(f) - \mathrm{Re}(\varphi_n)\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Et de même, $\|\mathrm{Im}(f) - \mathrm{Im}(\varphi_n)\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Et donc

$$\int_a^b \varphi_n(t)\,dt = \int_a^b (\mathrm{Re}(\varphi_n(t)) + i\,\mathrm{Im}(\varphi_n(t)))\,dt = \int_a^b \mathrm{Re}(\varphi_n(t))\,dt + i\int_a^b \mathrm{Im}(\varphi_n(t))\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,dt + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,dt.$$

Par unicité de la limite, on a donc $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,dt + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,dt$.

5) Par l'inégalité triangulaire inversée, pour tout $t \in [a,b]$,

$$\big||f(t)| - |\varphi_n(t)|\big| \leqslant |f(t) - \varphi_n(t)| \leqslant \|f - \varphi_n\|_\infty.$$

Et donc par passage[22] à la borne supérieure, $\big\||f| - |\varphi_n|\big\|_\infty \leqslant \|f - \varphi_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Donc la suite $(|\varphi_n|)_n$ converge uniformément vers $|f|$.
Mais puisque l'inégalité triangulaire est valable pour les fonctions en escalier, on a

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| &= \lim_{n\to+\infty} \left|\int_a^b \varphi_n(t)\,dt\right| \\ &\leqslant \lim_{n\to+\infty} \int_a^b |\varphi_n(t)|\,dt = \int_a^b |f(t)|\,dt.\end{aligned}$$

Soit donc $c \in]a,b[$. Afin de les distinguer, notons $\|f - \varphi_n\|_{\infty,[a,c]} = \max\limits_{t\in[a,c]} |f(t) - \varphi_n(t)|$, et de même $\|f - \varphi_n\|_{\infty,[c,b]}$.

Alors pour tout $t \in [a,c]$, $|f(t) - \varphi_n(t)| \leqslant \|f - \varphi_n(t)\|_\infty$, si bien que $\|f - \varphi_n\|_{\infty,[a,c]} \leqslant \|f - \varphi_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Et donc $(\varphi_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a,c]$, si bien que

$$\int_a^c f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^c \varphi_n(t)\,dt.$$

Il en est de même sur $[c,b]$ et donc

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,dt &= \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^c \varphi_n(t)\,dt + \int_c^b \varphi_n(t)\,dt\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_a^c \varphi_n(t)\,dt + \lim_{n\to+\infty} \int_c^b \varphi_n(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.\end{aligned}$$

□

[21] Le plus petit des majorants.

[22] L'expression n'est pas jolie, mais signifie encore une fois que c'est le plus petit des majorants, et donc qu'il est plus petit que celui obtenu précédemment.

Remarque
Il faudrait plutôt parler des restrictions à $[a,c]$ de f et de φ_n.

Remarque. Si deux fonctions f et g diffèrent seulement en un nombre fini de points, alors $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt$.
En effet, $g - f$ est non nulle sauf en un nombre fini de points, donc est en escalier.
Si on note $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ une subdivision adaptée, alors pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$ est nulle, si bien que $\int_a^b (g(t) - f(t))\,dt = 0$, et donc $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt$.
Puisque la fonction nulle sur $[a, b]$ est d'intégrale nulle, en changeant sa valeur en un nombre fini de points de $[a, b]$, on obtient une autre fonction, éventuellement positive sur tout $[a, b]$ dont l'intégrale est nulle.

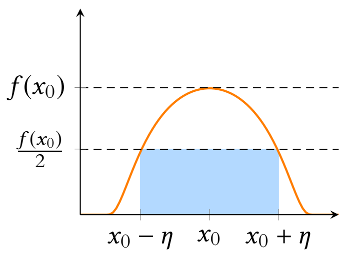
L'exemple ci-dessus ne peut pas se produire avec une fonction continue : une fonction continue et positive d'intégrale nulle est nécessairement la fonction nulle.

Proposition 26.24 : *Soit $f \in \mathscr{C}([a, b], \mathbf{R})$, de signe constant.*
Alors $\int_a^b f(t)\,dt = 0$ si et seulement si f est la fonction nulle.

Démonstration. Le sens $\Leftarrow$ est évident.
Pour l'autre sens, supposons, quitte à changer f en son opposé que f est positive.
Prouvons la contraposée en montrant que si f n'est pas la fonction nulle, alors son intégrale est non nulle. Comme on sait déjà[23] que cette intégrale est positive, il s'agit de prouver qu'elle est strictement positive.
Soit donc $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) > 0$.
Puisque f est continue, on peut supposer que $x_0 \in]a, b[$ est un point intérieur à $]a, b[$.
Par définition de la continuité, en prenant $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$, il existe $\eta > 0$ tel que pour $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap [a, b]$, $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$.
Quitte à diminuer η, on peut supposer que $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\subset [a, b]$.
Et alors pour $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, $f(x) \geqslant \dfrac{f(x_0)}{2}$.
Ainsi, f est minorée par la fonction en escalier $\varphi : x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x_0)}{2} & \text{si } x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
Mais l'intégrale de φ vaut $\eta f(x_0) > 0$, donc

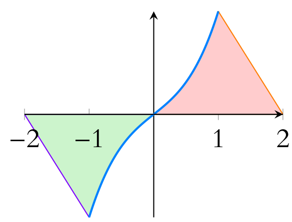
$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx > 0.$$

$\square$



[23] C'est la positivité de l'intégrale.

⚠ C'est évidemment faux si on oublie l'hypothèse de signe constant, même si on impose la continuité.



Corollaire 26.25 – *Soient $a < b$ et soit $f \in \mathscr{C}_m([a, b], \mathbf{R})$ une fonction strictement positive sur $[a, b]$, sauf éventuellement en un nombre fini de points.*
Alors $\int_a^b f(t)\,dt > 0$.

Démonstration. Si f est continue, c'est une conséquence à la fois de la proposition précédente et de la positivité de l'intégrale.

Et pour une fonction continue par morceaux, si on note $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ une subdivision adaptée à f, alors il existe au moins un point c de l'un des $]x_k, x_{k+1}[$ où f est strictement positive .
Soit alors $\eta > 0$ tel que $]c - \eta, c + \eta[\subset]x_k, x_{k+1}[$, de sorte que f est continue sur $]c - \eta, c + \eta[$.
Et donc $\int_{c-\eta}^{c+\eta} f(t)\,dt > 0$. Si bien que

$$\int_a^b f(t)\,dt = \underbrace{\int_a^{c-\eta} f(t)\,dt}_{\geqslant 0} + \int_{c-\eta}^{c+\eta} f(t)\,dt + \underbrace{\int_{c+\eta}^b f(t)\,dt}_{\geqslant 0} > 0.$$

□

26.3.4 Extension au cas $b \leqslant a$

Les définitions données ci-dessus d'intégrale ne sont valables que pour des intégrales dont les bornes sont «dans le bon sens».
Si $b < a$, par définition, on pose

$$\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt.$$

La linéarité est alors conservée, mais ce n'est pas le cas de toutes les propriétés qui ont trait à la relation d'ordre (donc la positivité, la croissance et l'inégalité triangulaire).
Si on a besoin d'utiliser des inégalités dans des intégrales, on commencera par «remettre» les bornes dans le bon sens.

En revanche, la relation de Chasles est conservée :

Proposition 26.26 : *Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I. Alors* $\forall (a,b,c) \in I^3$, $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt.$

Démonstration. Le résultat a déjà été prouvé si $a < b < c$, et il est trivial si $a = b$ ou $b = c$.
Notons que pour tout $(m, x, y) \in I^3$ avec $m \leqslant x$ et $m \leqslant y$, on a

$$\int_x^y f(t)\,dt = \int_m^y f(t)\,dt - \int_m^x f(t)\,dt.$$

En effet, si $x \leqslant y$, alors par Chasles[24]

$$\int_x^y f(t)\,dt + \int_m^x f(t)\,dt = \int_m^y f(t)\,dt.$$

Et si $y < x$, alors

$$\int_m^y f(t)\,dt + \int_y^x f(t)\,dt = \int_m^x f(t)\,dt.$$

Posons donc $m = \min(a, b, c)$, de sorte que

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt &= \int_m^b f(t)\,dt - \int_m^a f(t)\,dt + \int_m^c f(t)\,dt - \int_m^b f(t)\,dt\\ &= \int_m^c f(t)\,dt - \int_m^a f(t)\,dt\\ &= \int_a^c f(t)\,dt.\end{aligned}$$

□

[24] Version «bornes dans le bon sens».

26.4 INTÉGRALES ET CALCUL DIFFÉRENTIEL

26.4.1 Le théorème fondamental de l'analyse

Il est enfin grand temps de prouver un théorème annoncé depuis longtemps :

Théorème 26.27 : *Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$, soit $a \in I$ et soit $f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbf{K})$. Alors* $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ *est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.*

Remarque

Notons que F est bien définie, puisque f est une fonction continue (et donc continue par morceaux) sur le segment $[a, x]$ (ou $[x, a]$ si $x \leqslant a$), qui est inclus dans I par définition d'un intervalle.

Démonstration. L'unicité d'une telle primitive ayant déjà été prouvée[25], il s'agit surtout de prouver que F est bien une primitive de f.
Soit donc $x_0 \in I$, et soit $\varepsilon > 0$.
Puisque f est continue en x_0, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall t \in I \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, \ |f(t) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$

Donc en particulier, pour $x \in I \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, x \neq x_0$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - f(x_0)\right| \\
&= \left|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(x_0)\,dt\right| \\
&= \frac{1}{|x - x_0|}\left|\int_{x_0}^{x} (f(t) - f(x_0))\,dt\right|.
\end{aligned}$$

Si $x \geqslant x_0$, alors on peut utiliser l'inégalité triangulaire[26] :

$$\left|\int_{x_0}^{x} (f(t) - f(x_0))\,dt\right| \leqslant \int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)|\,dt \leqslant \int_{x_0}^{x} \varepsilon\,dt \leqslant \varepsilon(x - x_0).$$

Si $x < x_0$, il faut prendre quelques précautions supplémentaires :

$$\begin{aligned}
\left|\int_{x_0}^{x} (f(t) - f(x_0))\,dt\right| &= \left|\int_{x}^{x_0} (f(t) - f(x_0))\,dt\right| \\
&\leqslant \int_{x}^{x_0} |(f(t) - f(x_0))|\,dt \\
&\leqslant (x_0 - x)\varepsilon \leqslant |x - x_0|\varepsilon.
\end{aligned}$$

Dans tous les cas, on obtient que pour $|x - x_0| < \eta$,

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \leqslant \frac{1}{|x_0 - x|}|x_0 - x|\varepsilon \leqslant \varepsilon.$$

Et donc c'est bien la définition de $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$.
Donc F est dérivable en x_0, avec $F'(x_0) = f(x_0)$.
Ceci étant vrai pour tout $x_0 \in I$, F est bien une primitive de f sur I. □

[25] Rappelons qu'elle découle essentiellement du fait que deux primitives de f diffèrent d'une constante.

[26] Celle-ci nécessite vraiment d'avoir les bornes de l'intégrale «dans le bon sens».

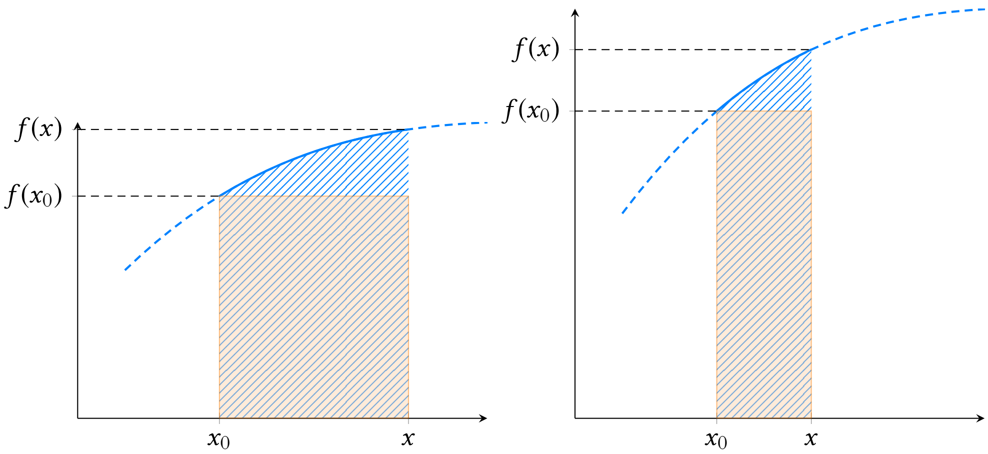
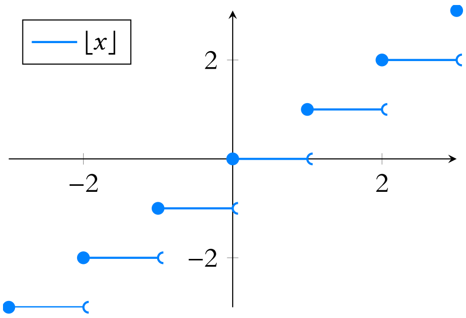
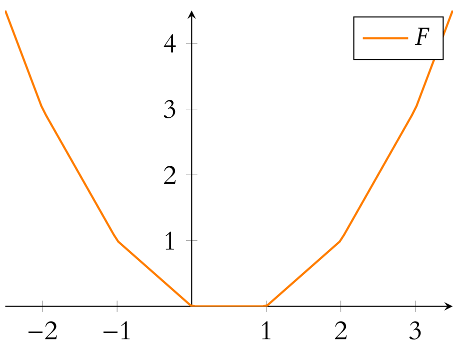


Figure 26.7 – Plus x est proche de x_0, et plus $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ est proche de l'aire d'un rectangle de largeur $|x - x_0|$ et de hauteur $f(x_0)$.

⚠ Ce théorème n'est plus valable pour des fonctions qui ne sont pas continues mais uniquement continues par morceaux.





Par exemple, $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \lfloor t \rfloor\, dt$ n'est pas une primitive de la fonction partie entière. En effet, il est assez facile de se convaincre[27] que F est dérivable à gauche et à droite en $k \in \mathbf{Z}$, mais avec $F'_g(k) = k - 1$ et $F'_d(k) = k$, donc F n'est pas dérivable en k. Une autre raison, un peu plus subtile est un résultat[28] connu sous le nom de théorème de Darboux : la dérivée d'une fonction dérivable sur un intervalle doit satisfaire la propriété des valeurs intermédiaires, au sens où l'image d'un intervalle doit être un intervalle. Or ce n'est clairement pas une propriété vérifiée par la fonction partie entière.

[27] Faire le calcul !

[28] Qui figurait dans le TD sur la dérivabilité.

Soyons bien clair : ce théorème n'est pas une autorisation à dériver sans la moindre précaution toutes les fonctions qui seraient définies par une intégrale.

Tel quel, il ne dit pas que $x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} e^{-t}\, dt$ ou $x \mapsto \displaystyle\int_1^2 \sqrt{t + \cos(x)}\, dt$ sont dérivables, et donne encore moins leurs dérivées.
L'énoncé du théorème fondamental de l'analyse ne vaut que pour des fonctions de la forme $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$, c'est-à-dire que :

1. la borne «du bas» de l'intégrale ne dépend pas de x
2. celle «du haut» est égale à x
3. l'intégrande[29] ne dépend pas de x.

[29] Nom (*masculin*) désignant la fonction intégrée.

Exemples 26.28

► $x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt$ est l'unique primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$ qui s'annule en 0.

► En revanche, moyennant quelques arguments supplémentaires, le théorème fondamental de l'analyse peut aider à dériver d'autres fonctions définies par des intégrales.

Par exemple, considérons la fonction f définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + x^2 e^{2t}}\, dt$.
Alors, grâce au changement de variable $u = xe^t$, pour lequel $t = \ln(u) - \ln(x)$ et donc $dt = \dfrac{du}{u}$, il vient, pour tout $x > 0$, $f(x) = \displaystyle\int_x^{ex} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u}\, du$.
Notons que cette fois, l'intégrande ne dépend plus de x, mais en revanche les bornes de l'intégrale ne permettent pas encore directement d'appliquer le théorème fondamental de l'analyse.

Posons alors $F : x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\sqrt{1+u^2}}{u}\, du$. Par le théorème fondamental de l'analyse, F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$, avec $F'(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.
On a alors $f(x) = F(ex) - F(x)$. Donc déjà f est $\mathscr{C}^1$ par opérations sur les fonctions $\mathscr{C}^1$, et de plus

$$f'(x) = eF'(ex) - F'(x) = e\frac{\sqrt{1+e^2x^2}}{ex} - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{\sqrt{1+e^2x^2} - \sqrt{1+x^2}}{x}.$$

⚠ Les fonctions $x \mapsto \int_a^b \dots$ où la variable x apparaît sous le signe intégral, et pas seulement dans les bornes de l'intégrale ne relèvent généralement pas du théorème fondamental de l'analyse, sauf si on trouve une astuce comme celle de l'intégrale précédente.
En particulier, aucun théorème n'affirme sans hypothèses supplémentaires que la «dérivée de l'intégrale» soit «l'intégrale de la dérivée».
Vous donnerez en spé des théorèmes permettant d'étudier la dérivabilité de telles intégrales, disons que pour l'instant, le seul moyen d'y parvenir est de revenir au taux d'accroissement.

Corollaire 26.29 – *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors f admet des primitives sur I.*
De plus, pour tout $(a, b) \in I^2$, et pour toute primitive F de f sur I,

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Remarque
Rétrospectivement, cela justifie les preuves des propriétés de l'intégrale données en début d'année.
Mais nous avons eu besoin de ces propriétés pour établir le théorème fondamental de l'analyse, et donc il fallait réussir à prouver ces propriétés sans faire usage d'une primitive.

Démonstration. Pour l'existence d'une primitive, il suffit de considérer $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$.
Pour le second point, nous avons déjà prouvé que deux primitives diffèrent d'une constante, et donc que la quantité $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive F de f choisie.
En particulier, si on prend $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$, il vient $F(b) - F(a) = F(b) = \int_a^b f(t)\,dt$. □

26.4.2 Techniques de calcul d'intégrales

Nous ne donnerons pas dans ce chapitre de nouveaux outils pour le calcul d'intégrales, mais notons que maintenant que l'intégrale est correctement définie, tout ce qui a été prouvé précédemment, notamment sur le changement de variable et l'intégration par parties, est désormais correctement justifié.

Attention toutefois aux hypothèses : l'intégration par parties nécessite toujours des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, et le changement de variable un intégrande continu.

Si on souhaite utiliser l'une ou l'autre de ces méthodes pour calculer des intégrales de fonctions continues par morceaux, il faudra commencer par utiliser la relation de Chasles afin de se ramener à des segments où l'utilisation de ces théorèmes est légitime.

Ajoutons tout de même les résultats suivants, graphiquement évidents.

Proposition 26.30 (Intégrale des fonctions paires/impaires/périodiques) :

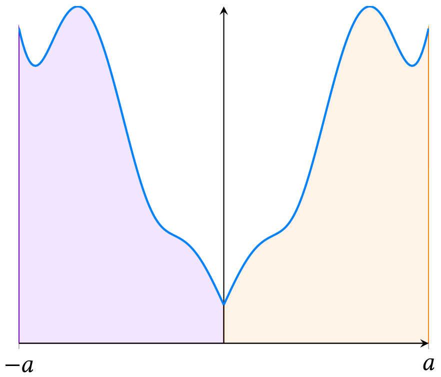
1. *Soit $f \in \mathscr{C}_m([-a, a], \mathbf{R})$ une fonction paire.*
   Alors $\int_{-a}^a f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$.
2. *Soit $f \in \mathscr{C}_m([-a, a], \mathbf{R})$ une fonction impaire.*
   Alors $\int_{-a}^a f(t)\,dt = 0$.
3. *Soit $f \in \mathscr{C}_m(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ une fonction T-périodique. Alors pour tout $a \in \mathbf{R}$, $\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt$.*

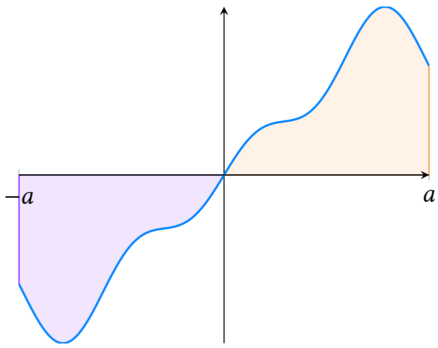
Démonstration. Prouvons-le pour une fonction continue, le cas général s'en déduira à l'aide de la relation de Chasles.
Pour les deux premières assertions, procédons au changement de variable $x = -t$. On a alors, dans le cas d'une fonction paire,

$$\int_{-a}^0 f(t)\,dt = -\int_a^0 f(-x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx.$$

Et dans le cas d'une fonction impaire, $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(t)\,dt = -\int_{a}^{0} f(-x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx$.

Puis la relation de Chasles $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = \int_{-a}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(t)\,dt$ permet de conclure.





Pour le cas d'une fonction périodique, une preuve concise est la suivante : si $\displaystyle F : x \mapsto \int_{x}^{x+T} f(t)\,dt = \int_{0}^{x+T} f(t)\,dt - \int_{0}^{x} f(t)\,dt$, alors F est dérivable[30], de dérivée $x \mapsto f(x+T) - f(x) = 0$.
Donc F est constante. Et en particulier

$$\int_{a}^{a+T} f(t)\,dt = F(a) = \int_{0}^{T} f(t)\,dt.$$

[30] C'est le théorème fondamental de l'analyse.

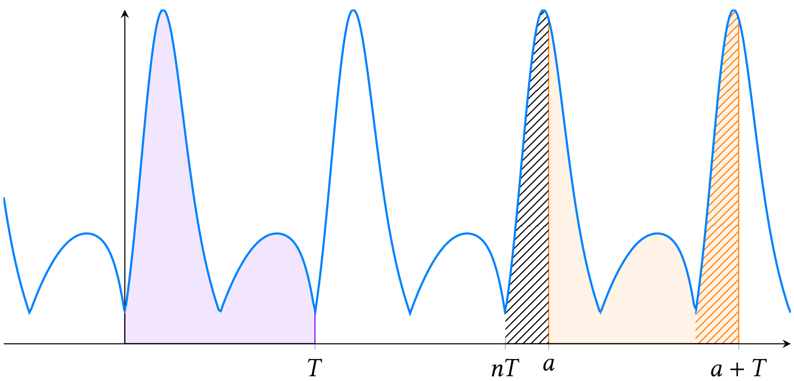
Pour autant, j'aimerais bien en donner une autre preuve, plus laborieuse, mais bien plus claire si l'on réfléchit graphiquement.
Soit donc $a \in \mathbf{R}$, et soit $n = \left\lfloor \frac{a}{T} \right\rfloor$, de sorte que $nT \leqslant a < (n+1)T$.
Alors par le changement de variable $x = t - T$, on a

$$\int_{(n+1)T}^{a+T} f(t)\,dt = \int_{nT}^{a} f(x+T)\,dx = \int_{nT}^{a} f(x)\,dx.$$

Et donc

$$\int_{a}^{a+T} f(t)\,dt = \int_{a}^{(n+1)T} f(t)\,dt + \int_{(n+1)T}^{a+T} f(t)\,dt = \int_{a}^{(n+1)T} f(t)\,dt + \int_{nT}^{a} f(x)\,dx = \int_{nT}^{(n+1)T} f(t)\,dt.$$

Le changement de variable $u = t - nT$ permet alors aisément de conclure.



□

26.4.3 Les formules de Taylor

Nous donnons dans cette partie deux formules de Taylor, qui viennent un peu préciser globalement[31] ce que dit la formule de Taylor-Young.

[31] C'est-à-dire pas seulement au voisinage de a.

Théorème 26.31 (Formule de Taylor avec reste intégral) : *Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur un intervalle I et soit $a \in I$. Alors pour tout $x \in I$,*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt. \end{aligned}$$

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur n.
À l'ordre 0, il s'agit de remarquer que pour f de classe $\mathscr{C}^1$, $\displaystyle\int_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a)$ et donc $f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x f'(t)\,dt$.
Supposons donc le résultat vrai pour une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, et soit donc f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+2}$. Alors pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt.$$

Procédons alors à une intégration par parties sur cette dernière intégrale, en posant $u(t) = f^{(n+1)}(t)$ et $v(t) = -\dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$, qui sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, avec $u'(t) = f^{(n+2)}(t)$ et $v'(t) = \dfrac{(x-t)^n}{n!}$. Alors

$$\begin{aligned} \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt &= \left[-f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^x + \int_a^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\,dt \\ &= f^{(n+1)}(a)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} + \int_a^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\,dt. \end{aligned}$$

Et donc

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\,dt.$$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$, et donc par le principe de récurrence, est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$. □

Remarques. ► Vous aurez sûrement reconnu que la somme est exactement la partie régulière du $DL_n(a)$ de f.
► La grosse différence[32] entre cette formule et la formule de Taylor-Young est que la formule avec reste intégral est une formule exacte.
En effet, elle nous donne une formule pour la différence entre f et son développement limité, valable sur I tout entier, là où Taylor-Young nous donne juste une information sur le comportement de cette différence *au voisinage de a*.
► La formule de Taylor-Young peut se retrouver (dans le cas d'une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$) en prouvant que le reste intégral est négligeable devant $(x-a)^n$.
Le reste intégral[33] représente l'erreur que l'on commet en approchant f par son $DL_n(a)$.

[32] Outre le fait que l'une nécessite f de classe $\mathscr{C}^n$ quand l'autre nécessite f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$.

[33] Nom généralement donné à l'intégrale dans la formule ci-dessus.

Corollaire 26.32 (Inégalité de Taylor-Lagrange) : *Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur un intervalle I, et soient $(a,b) \in I^2$. Notons J le segment d'extrémités a et b. et soit M un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur J. Alors*

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leqslant M\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Notations

Il serait tentant de dire que $J = [a,b]$, mais dans le cas où $b < a$, $J = [b,a]$.

Remarque. Pour $n = 0$, on retrouve l'inégalité des accroissements finis (avec des hypothèses un peu plus contraignantes que celles de l'énoncé donné dans le cours de dérivation).

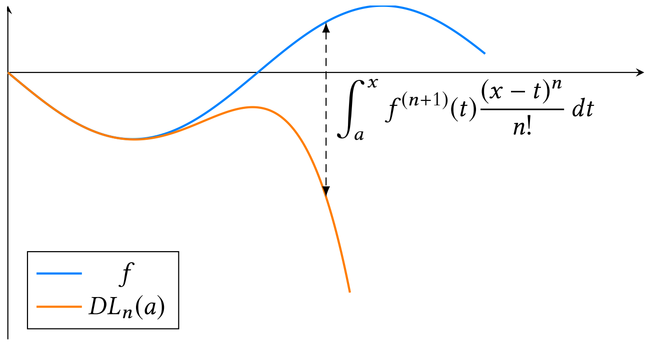


FIGURE 26.8 – Ici l'écart entre la fonction $-\sin$ et son $DL_5(0)$.

Démonstration. Par la formule de Taylor avec reste intégral, on a

$$f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k = \int_a^b f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}\,dt.$$

Il s'agit donc de majorer la valeur absolue de cette intégrale. Si $a \leqslant b$, alors

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}\,dt\right| &\leqslant \int_a^b \left|f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}\right|dt \\
&\leqslant \int_a^b M\frac{(b-t)^n}{n!}\,dt \\
&\leqslant M\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\,dt \\
&\leqslant M\left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^b \\
&\leqslant M\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

Inégalité triangulaire.

Pour $t \in [a, b]$, $b - t \geqslant 0$, donc on peut se passer de la valeur absolue.

Dans le cas où $b < a$, le principe est le même, mais il y a quelques précautions à prendre car l'inégalité triangulaire et la croissance de l'intégrale nécessitent des bornes dans le bon sens.

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}\,dt\right| &= \left|\int_b^a f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}\,dt\right| \\
&\leqslant \int_b^a \left|f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}\right|dt \\
&\leqslant M\int_b^a \frac{(t-b)^n}{n!}\,dt \\
&\leqslant M\left[\frac{(t-b)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_b^a \\
&\leqslant M\frac{(a-b)^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant M\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

☠ Danger !

Cette fois pour $t \in [b, a]$, $b - t \leqslant 0$, et donc il y a des précautions à prendre pour enlever la valeur absolue.

□

Remarque. Bien entendu, si $f^{(n+1)}$ est bornée sur I tout entier, alors on peut prendre pour M un majorant de $|f^{(n+1)}|$, mais la formule reste valable y compris si un tel majorant sur I n'existe pas.

Exemple 26.33

Considérons la fonction $f : t \mapsto e^t$. Alors, pour tout $x \in \mathbf{R}$, sur le segment d'extrémités 0 et x, $|f^{(n+1)}| = f^{(n+1)}$ est majorée par $e^{|x|}$.

Et donc par l'inégalité de Taylor-Lagrange, puisque tous les $f^{(k)}(0)$ valent 1,

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Mais par croissances comparées, on a $\frac{|x|^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

26.5 SOMMES DE RIEMANN

Définition 26.34 – Soient $a < b$ deux réels. On appelle **subdivision pointée** de l'intervalle $[a,b]$ la donnée d'un couple $s = (\sigma, (t_i)_{1\leqslant i\leqslant n})$ où :

- $\sigma = (x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une subdivision de $[a,b]$: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$
- $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

On appelle alors pas de s et on note $\delta(s)$ le pas[34] de la subdivision σ.

[34] Qui, rappelons-le, est la distance maximale entre deux points consécutifs de la subdivision.

Autrement dit, se donner une subdivision pointée, c'est se donner une subdivision et choisir un point dans chacun des intervalles de cette subdivision.

Définition 26.35 – Si $f \in \mathscr{C}_m([a,b], \mathbf{R})$ et si $s = (\sigma, (t_i)_{1\leqslant i\leqslant n})$ est une subdivision pointée de $[a,b]$, alors on note $R(f,s) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(t_i)$.
Le réel $R(f,s)$ est appelé **somme de Riemann** associée à f et s.

Proposition 26.36 : *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, à valeurs réelles. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute subdivision pointée s de $[a,b]$, si $\delta(s) \leqslant \eta$, alors*

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt - R(f,s) \right| \leqslant \varepsilon.$$

Démonstration. Puisque f est continue sur $[a,b]$, par le théorème de Heine, elle y est uniformément continue.
Et donc il existe $\eta > 0$ tel que $\forall (x,y) \in [a,b]^2$, $|x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}$.
Soit alors $s = (\sigma, (t_i)_{1\leqslant i\leqslant n})$ une subdivision pointée de $[a,b]$, avec $\delta(s) \leqslant \eta$ et où la subdivision σ est donnée par $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Alors

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(t)\,dt - \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(t_i) \right| &= \left| \int_a^b f(t)\,dt - \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t_i)\,dt \right| \\
&= \left| \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt - \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t_i)\,dt \right| && \text{Relation de Chasles.} \\
&= \left| \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(t) - f(t_i))\,dt \right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t) - f(t_i)|\,dt && \text{Inégalité(s) triangulaire(s).} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\varepsilon}{b-a}\,dt
\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dt \leqslant \varepsilon.$$

□

Remarques. Le résultat reste valable pour des fonctions qui ne sont que continues par morceaux, mais la preuve en est plus désagréable, car les points de discontinuité de f ne sont pas forcément des points de la subdivision σ.

► Ce que dit ce résultat, c'est que quand le pas tend vers 0, alors $R(f,s)$ tend vers $\int_a^b f(t)\,dt$.

La preuve ci-dessus et même la définition de subdivision pointée ne sont pas du tout importantes.
Ce qui l'est en revanche est ce qui suit, où l'on considère des subdivisions régulières de $[a,b]$, c'est-à-dire avec $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$.
Dans ce cas, parmi toutes les manières de considérer des subdivisions pointées, trois sont sans doute un peu plus «naturelles» que les autres :

- prendre $t_i = x_{i-1}$, la borne de gauche de $[x_{i-1}, x_i]$. On parle alors de la *méthode des rectangles à gauche.*
- prendre $t_i = x_i$, la borne de droite de $[x_{i-1}, x_i]$. On parle alors de la *méthode des rectangles à droite.*
- prendre $t_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$ le milieu de $[x_{i-1}, x_i]$. C'est alors la *méthode du point milieu.*

Graphiquement, $R(f,s)$ est l'approximation de l'aire sous la courbe de f par des rectangles de hauteur $f(t_i)$.

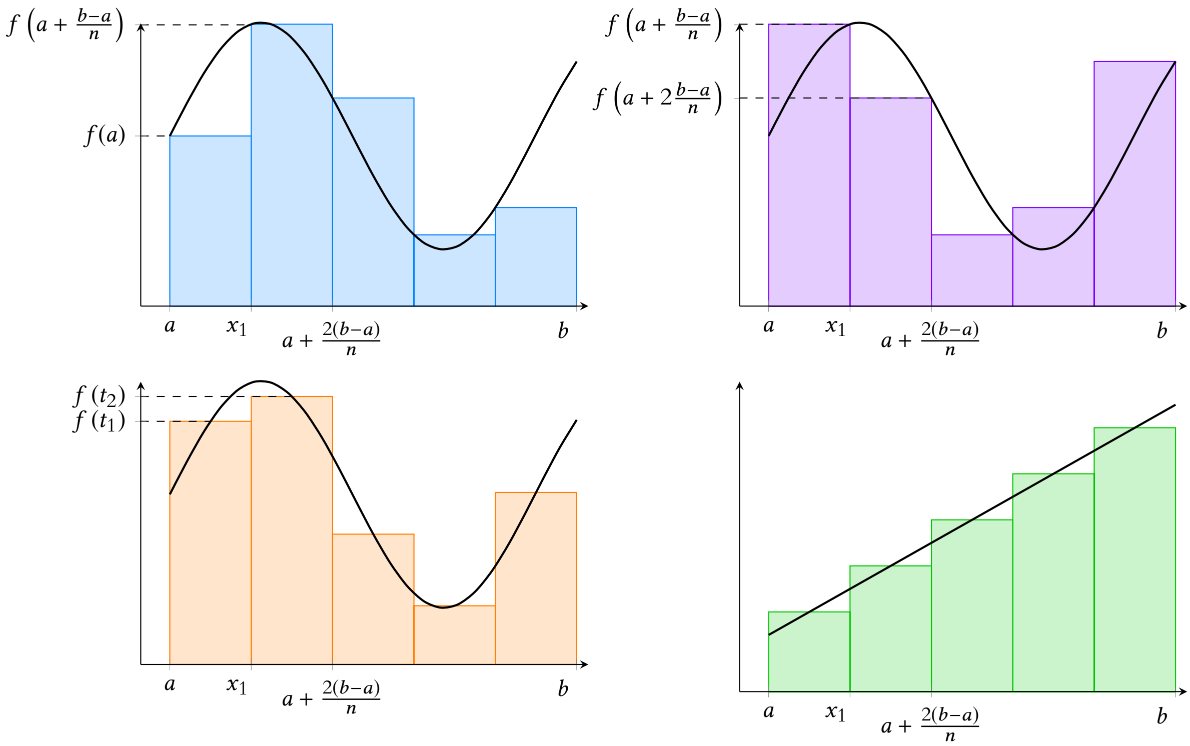


FIGURE 26.9 – Rectangles à gauche, rectangles à droite et point milieu.
Notons que la méthode du point milieu est exacte pour les fonctions affines (dernière figure), c'est-à-dire qu'elle ne retourne pas une valeur approchée de l'intégrale, mais la valeur exacte de l'intégrale.

Théorème 26.37 (Convergence des sommes de Riemann) : *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$

Il est vraiment important de réussir à bien comprendre en quoi les deux sommes ci-dessus correspondent aux deux premiers dessins de la figure 26.9.
En particulier, il est hors de question de les apprendre par cœur, alors qu'il suffit de les comprendre et de savoir les retrouver avec un dessin.
La première limite correspond aux rectangles à gauche, la seconde aux rectangles à droite. Dans les deux cas, le $\frac{b-a}{n}$ est la longueur de chacun des intervalles de la subdivision, c'est-à-dire la longueur de nos petits rectangles.

Graphiquement, cela signifie que plus on considère de points dans notre subdivision régulière, mieux on approche l'intégrale de f avec les sommes de Riemann.

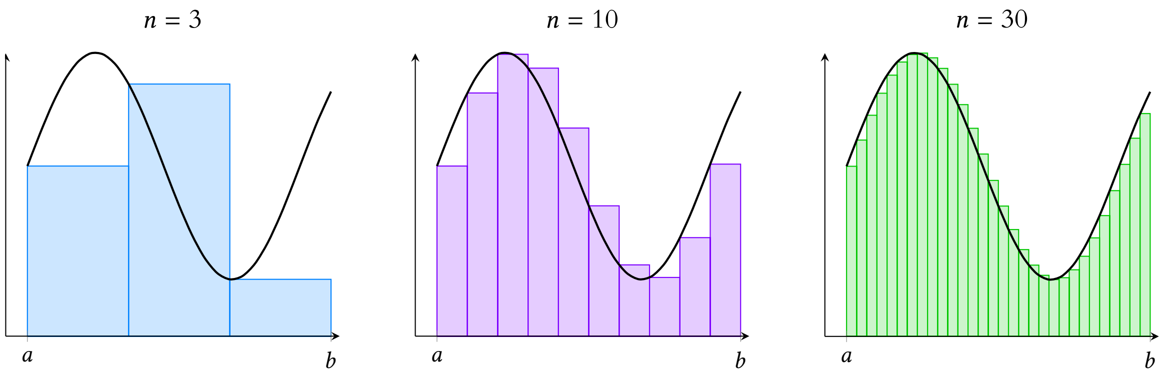


FIGURE 26.10 – Illustration de la convergence des sommes de Riemann (ici avec des rectangle à gauche) vers l'intégrale.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute subdivision pointée s de pas inférieur à η, $\left|\int_a^b f(t)\,dt - R(f,s)\right| \leqslant \varepsilon$.
Soit donc $N \in \mathbf{N}^*$ tel que pour $n \geqslant N$, $\dfrac{b-a}{n} \leqslant \eta$.
Alors en particulier, pour $n \geqslant N$ les subdivisions pointées correspondant aux rectangles à gauche et à droite ont un pas inférieur à η, et donc les sommes de Riemann associées sont à distance moins de ε de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

Or, $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ est la somme de Riemann pour les rectangles à gauche. Donc pour $n \geqslant N$,

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right| \leqslant \varepsilon.$$

C'est exactement la définition[35] de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,dt$.
On raisonne de même pour les rectangles à droite. □

[35] Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que...

Remarque. Bien entendu, le même résultat vaut pour la méthode du point milieu, et je vous laisse trouver la formule correspondante, mais je ne la mentionne pas car elle sert bien moins souvent que les deux précédentes.

Méthode

Le plus difficile dans les sommes de Riemann sera de les reconnaître. Et même une fois qu'on a pensé à une somme de Riemann, il faut encore trouver le a, le b et la fonction f.
Généralement, le plus simple est de prendre $[a, b] = [0, 1]$, de faire apparaître un $\frac{1}{n}$ devant la somme, et alors il n'y a plus de choix pour f.

Exemple 26.38

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$. Alors

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}} = \frac{1-0}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}.$$

Posons alors $a = 0$, $b = 1$ et $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, de sorte que

$$u_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{4}.$$