25 Représentation matricielle des applications linéaires

Une fois n'est pas coutume, sans plus de précisions, $\mathbf{K}$ désignera dans tout le chapitre un corps (disons $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, mais ce n'est pas une obligation).

25.1 Matrice d'une application linéaire dans des bases

Dans cette partie, on considère deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels E et F de **dimension finie**, et sauf mention explicite du contraire, on note $p = \dim E$ et $n = \dim F$.

25.1.1 Définitions

L'idée principale de cette partie est la suivante : étant données une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ de E et une base $\mathscr{C} = (x_1, \dots, x_n)$ de F, il suffit, pour déterminer $f \in \mathscr{L}(E, F)$ de se donner les p vecteurs $(f(e_1), \dots, f(e_p))$.
Mais se donner un vecteur de F, c'est se donner ses n coordonnées dans la base $\mathscr{C}$. Autrement dit, c'est se donner n scalaires.
En résumé, une application linéaire de E dans F est entièrement caractérisée par la donnée de $n \times p$ scalaires. Et si nous mettions ces scalaires dans une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$?

Rappel
Une application linéaire est entièrement caractérisée par l'image d'une base.

Définition 25.1 – Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E, soit $\mathscr{C} = (x_1, \dots, x_n)$ une base de F, et soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
On appelle **matrice de f relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$** (plus souvent appelée matrice de f *dans* les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$) la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ telle que

$$\forall j \in [\![1, p]\!],\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} x_i.$$

Pour le dire autrement, les coefficients de la $j^{\text{ème}}$ colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ sont les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{C}$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_p) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} & \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \end{array}.$$

Dimensions
Le nombre de lignes est la dimension de l'espace d'arrivée de f, alors que le nombre de colonnes est la dimension de l'espace de départ de f.

Dans le cas où $E = F$, c'est-à-dire lorsque f est un endomorphisme de E, on note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ au lieu de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$. Il s'agit alors d'une matrice carrée de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, où $n = \dim E$.

Exemples 25.2

► Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + 2y - z, y - 3z) \end{array} \right.$.
Alors notons $\mathscr{B}_3$ et $\mathscr{B}_2$ les bases canoniques de $\mathbf{R}^3$ et $\mathbf{R}^2$. On a alors

$$f(1, 0, 0) = (1, 0),\ f(0, 1, 0) = (2, 1),\ f(0, 0, 1) = (-1, -3)$$

et donc la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{B}_2$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_2}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(1,0,0) & f(0,1,0) & f(0,0,1) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ (1,0) \\ (0,1) \end{array}$$

► Dans toute base $\mathcal{B}$ de E, la matrice de id_E est I_n, où $n = \dim E$.

► **(Matrice de Vandermonde[1])** Soient $x_1, \dots, x_n$ des scalaires deux à deux distincts, et soit $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}^n \\ P & \longmapsto & (P(x_1), \dots, P(x_n)) \end{array} \right.$.

Notons $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathbf{K}^n$. Alors la matrice de φ dans les bases canoniques de $\mathbf{K}_{n-1}[X]$ et $\mathbf{K}^n$ est

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) & \dots & \varphi(X^{n-1}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ \vdots \\ E_n \end{array} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$$

En revanche, si on note $L_1, \dots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés à $x_1, \dots, x_n$, alors $(L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbf{K}_{n-1}[X]$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\varphi(L_i) = E_i$. Et donc la matrice de φ dans les bases $(L_1, \dots, L_n)$ et $(E_1, \dots, E_n)$ est I_n. En effet, c'est

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \varphi(L_0) & \varphi(L_1) & \dots & \varphi(L_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{array}$$

[1] Alexandre-Théophile Vandermonde, mathématicien français (1735–1796).

Proposition 25.3 : *Étant données une base $\mathcal{B}$ de E et une base $\mathcal{C}$ de F, l'application $f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est une bijection de $\mathcal{L}(E, F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.*

Démonstration. Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, nous savons qu'il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$\forall j \in [\![1, p]\!],\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} x_i.$$

C'est-à-dire telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.
Autrement dit, toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ possède un unique antécédent. □

Ce que signifie la proposition précédente, c'est qu'**une fois des bases fixées**, une application linéaire est parfaitement définie par la donnée de sa matrice dans les bases en question.

Bien que ce soit le contexte dans lequel nous allons le plus souvent utiliser les matrices, il n'est pas indispensable d'avoir une application linéaire, et la donnée de vecteurs de E permet déjà de définir une matrice :

Définition 25.4 – Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, et soient $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs de E.
On appelle **matrice de la famille** $(x_1, \dots, x_p)$ **dans la base** $\mathcal{B}$, et on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p)$ la matrice $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ où

$$\forall j \in [\![1,p]\!],\ x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i.$$

Autrement dit, la $j^{\text{ème}}$ colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p)$ est le vecteur des coordonnées de x_j dans la base $\mathcal{B}$.

Exemple 25.5

Dans $\mathbf{R}^3$, si $u_1 = (1,-2,1)$, $u_2 = (2,-1,3)$, $u_3 = (0,1,1)$, alors la matrice de (u_1,u_2,u_3) dans la base canonique est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(u_1,u_2,u_3) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ (1,0,0) \\ (0,1,0) \\ (0,0,1) \end{array}$$

Notons en particulier que pour une famille formée d'un seul vecteur x, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ formée des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

Proposition 25.6 : *Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E, soit $\mathcal{C} = (x_1, \dots, x_n)$ une base de F, et soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.*
Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f(e_1), \dots, f(e_p))$.

Démonstration. C'est immédiat : par définition de ces deux matrices, qui sont toutes deux dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, leur $j^{\text{ème}}$ colonne est formée des coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$. □

25.1.2 Application(s) canoniquement associée(s) à une matrice

Si E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension p, de base $\mathcal{B}$, F un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n, de base $\mathcal{C}$, et si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, alors il existe une et une seule application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = A$.

En particulier, si $E = \mathbf{K}^p$ et $F = \mathbf{K}^n$ (resp. $E = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ et $F = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$), munis de leurs bases canoniques, alors l'unique $f \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$ (resp. $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}), \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ dont la matrice dans les bases canoniques est A est appelée application canoniquement associée à A.

► **Cas où $E = \mathbf{K}^p$, $F = \mathbf{K}^n$** : si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$, alors l'application canoniquement associée à A est

$$f_A : (x_1, \dots, x_p) \mapsto \left(\sum_{j=1}^{p} a_{1,j} x_j, \sum_{j=1}^{p} a_{2,j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^{p} a_{n,j} x_j \right).$$

Autrement dit, on le déduit de A en lisant A ligne par ligne.
Pour prouver que la matrice de f_A dans la base canonique est bien A, calculons l'image des vecteurs de la base canonique :

$$f(1,0,\dots,0) = (a_{1,1}, a_{2,1}, \dots, a_{n,1})$$
$$f(0,1,0,\dots,0) = (a_{1,2}, a_{2,2}, \dots, a_{n,2})$$

$$\vdots$$
$$f(0,\dots,0,1) = (a_{1,p}, a_{2,p}, \dots, a_{n,p})$$

Et donc on a bien, en notant $\mathscr{B}_p = (e_1,\dots,e_p)$ la base canonique de $\mathbf{K}^p$ et $\mathscr{B}_n = (u_1,\dots,u_n)$ celle de $\mathbf{K}^n$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_p,\mathscr{B}_n}(f_A) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_p) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{array} \end{array} = A.$$

Exemple 25.7

L'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est

$$(x,y,z) \mapsto (2x+4y-z, 2y+z, x+y+3z).$$

► **Cas où $E = \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K})$, $F = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$** : le principe est quand même très semblable, puisque $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ n'est rien d'autre que $\mathbf{K}^n$, les matrices colonne remplaçant les vecteurs lignes. Je vous laisse le soin de vérifier que l'application linéaire de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ canoniquement associée à A est $f_A : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$.

Sous-entendu

Il y a un isomorphisme simple entre $\mathbf{K}^n$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, qui est

$$(x_1,\dots,x_n) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

25.1.3 Compatibilité des opérations

Le premier intérêt d'utiliser une matrice pour représenter une application linéaire est qu'il devient alors extrêmement simple de calculer l'image d'un vecteur si l'on connaît ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$.

Proposition 25.8 (Coordonnées de l'image d'un vecteur) : *Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ des bases respectives de E et F, soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$, et soit $x \in E$. Alors*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x).$$

Démonstration. Notons $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_p)$ et $\mathscr{C} = (u_1,\dots,u_n)$.

Notons également $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix}$.

Alors

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^p \lambda_j e_j\right) = \sum_{j=1}^p \lambda_j f(e_j) = \sum_{j=1}^p \lambda_j \sum_{i=1}^n a_{i,j} u_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p a_{i,j}\lambda_j\right) u_i.$$

Alors la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de $f(x)$ dans la base $\mathscr{C}$ est bien le coefficient à la $i^{\text{ème}}$ ligne du produit $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ □

Proposition 25.9 : *Soient $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{C}$ une base de F. Alors pour $f, g \in \mathscr{L}(E,F)$, et $\lambda \in \mathbf{K}$, on a*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\lambda f + g) = \lambda\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) + \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g).$$

Autrement dit, l'application $f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est un isomorphisme de $\mathscr{L}(E,F)$ sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

Démonstration. Y a-t-il vraiment besoin de prouver quelque chose ?
Si $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} x_i$ et $g(e_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{i,j} x_i$, alors $(\lambda f + g)(e_j) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{i,j} + b_{i,j}) x_i$.
Et donc le coefficient (i,j) de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\lambda f + g)$ est $\lambda a_{i,j} + b_{i,j}$.
Donc l'application $f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est linéaire, nous avons prouvé plus tôt qu'elle était bijective, donc c'est un isomorphisme. □

Remarque
Je vous invite d'ailleurs à regarder de nouveau la preuve qui en avait été donnée : l'application linéaire que nous avions alors nommée $\varphi_{i,j}$ est l'unique antécédent de la matrice élémentaire $E_{i,j}$ par $f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$.

Notons que puisque nous avons là un isomorphisme, nous retrouvons un résultat prouvé «à la main» dans le chapitre de dimension finie :

$$\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}) = n \times p = \dim F \times \dim E.$$

La proposition qui suit légitime (enfin !) la définition du produit matriciel :

Proposition 25.10 : *Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie, de bases respectives $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$. Alors pour $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$, on a*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_G}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f).$$

Démonstration. Notons $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_q)$, $\mathscr{B}_F = (x_1, \dots, x_p)$ et $\mathscr{B}_G = (u_1, \dots, u_n)$.
Alors pour $j \in [\![1,q]\!]$, la $j^{\text{ème}}$ colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(g \circ f)$ est formée des coordonnées de $(g \circ f)(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}_G$.
Or, la $j^{\text{ème}}$ colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)$ n'est rien d'autre que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(f(e_j))$.
Et donc la $j^{\text{ème}}$ colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_G}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_G}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(f(e_j)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_G}(g(f(e_j))).$$

Détails
Il faut ici se souvenir que la $j^{\text{ème}}$ colonne d'un produit AB est obtenue en multipliant A par la $j^{\text{ème}}$ colonne de B.

Puisqu'il s'agit des coordonnées de $(g \circ f)(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}_G$, on reconnaît bien la $j^{\text{ème}}$ colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(g \circ f)$.

Alternative : une autre preuve plus terre à terre.
Notons $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_G}(g)$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)$, de sorte que

$$\forall k \in [\![1,p]\!],\ g(x_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} u_i$$

$$\forall j \in [\![1,q]\!],\ f(e_j) = \sum_{k=1}^{p} b_{k,j} x_j.$$

Alors, pour tout $j \in [\![1,q]\!]$,

$$(g \circ f)(e_j) = g\left(\sum_{k=1}^{p} b_{k,j} x_j\right) = \sum_{k=1}^{p} b_{k,j} f(x_k) = \sum_{k=1}^{p} b_{k,j} \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} u_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}\right) u_i.$$

Mais $\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j} = [AB]_{i,j}$, si bien que le coefficient (i,j) de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(g \circ f)$ est $[AB]_{i,j}$.
Et donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(g \circ f) = AB$. □

⚠ On prendra bien garde au fait qu'il faut la même base de F pour la matrice de f et pour la matrice de g.

Corollaire 25.11 – *Soit $\mathscr{B}$ une base de E, et soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$.*
Alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

Exemple 25.12

Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ est

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \end{array}$$

Puisque $A^2 = A$, on a donc $f^2 = f$, de sorte que f est un projecteur de $\mathbf{R}_2[X]$.
Par ailleurs, pour $P = a + bX + cX^2 \in \mathbf{R}_2[X]$, on a

$$P \in \operatorname{Ker}(f) \Leftrightarrow f(P) = 0_{\mathbf{R}[X]} \Leftrightarrow \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f(P)) = 0 \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soit encore si et seulement si

$$\begin{cases} -a - 2b + c = 0 \\ 2a + 3b - c = 0 \\ 2a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ b = c \end{cases} \Leftrightarrow P \in \operatorname{Vect}(X^2 + X - 1).$$

Donc $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(X^2 + X - 1)$.

Et alors, puisque $X^2 + X - 1 \in \operatorname{Ker} f$, $f(1) = f(X) + f(X^2)$, de sorte que

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(X), f(X^2)) = \operatorname{Vect}(-2 + 3X + 2X^2, 1 - X).$$

Ainsi, f est la projection sur $\operatorname{Vect}(-2 + 3X + 2X^2, 1 - X)$ parallèlement à $\operatorname{Vect}(X^2 + X - 1)$.

Ainsi, nous avons un «dictionnaire[2]» entre $\mathscr{L}(E, F)$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
Donc tout ce qui peut être fait ou dit en termes d'applications linéaires doit pouvoir se traduire matriciellement et vice-versa.
En particulier, le rang, le noyau, l'image d'une application linéaire doivent pouvoir se lire dans sa matrice dans des bases.

Plus exactement, il n'y a pas qu'un seul tel «dictionnaire», mais il y a en a un pour chaque couple de bases $(\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F)$.

[2] Lorsque $E = F$ (et donc $n = p$) il s'agit de ce que vous appellerez l'an prochain un isomorphisme d'algèbres : un isomorphisme d'espaces vectoriels compatible à la structure d'anneau.

25.1.4 Retour sur les matrices inversibles

Proposition 25.13 : *Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension n, de bases respectives $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, et soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.*
Alors f est un isomorphisme si et seulement si $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est inversible. Et dans ce cas,

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1}) = \left(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\right)^{-1}.$$

Autrement dit
La matrice de l'inverse est l'inverse de la matrice.

Démonstration. Notons $A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$.

$$\begin{aligned} f \text{ est bijective} &\Leftrightarrow \exists g \in \mathscr{L}(F, E) \text{ tel que } \begin{cases} g \circ f = \mathrm{id}_E \\ f \circ g = \mathrm{id}_F \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \text{ tel que } BA = AB = I_n \\ &\Leftrightarrow A \text{ est inversible.} \end{aligned}$$

Détails
Pour le sens $\Leftarrow$, considérer g l'unique application linéaire de F dans E telle que $\operatorname{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(g) = B$.

Dans le cas où A est inversible, on a alors

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1})\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f^{-1} \circ f) = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E) = I_n$$

et de même $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\operatorname{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1}) = I_n$, de sorte que $\operatorname{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1})$ est bien l'inverse de $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$. □

Exemple 25.14

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & XP' - 3P + P'' \end{array} \right.$

Alors la matrice de f dans la base canonique est : $\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \end{array}$.

Elle est inversible car triangulaire supérieure sans zéros sur la diagonale.
Donc f est bijective et la matrice de f^{-1} dans la base canonique est
$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f^{-1}(1) & f^{-1}(X) & f^{-1}(X^2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & -2/3 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \end{array}$.

Éclairons d'un regard nouveau un résultat sur les matrices carrées, qui a déjà été prouvé, mais avec une preuve plutôt laborieuse.

Proposition 25.15 : *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors il y a équivalence entre*

1. *A est inversible à gauche (il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $BA = I_n$)*
2. *A est inversible à droite*
3. *A est inversible.*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^n)$ l'application canoniquement associée à A, c'est-à-dire celle dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_{can}$ est A.

Supposons que A est inversible à gauche, et soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $BA = I_n$.
Soit alors $g \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^n)$ canoniquement associée à B.
Alors $BA = I_n \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(g)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(\mathrm{id}_{\mathbf{K}^n}) \Leftrightarrow g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbf{K}^n}$.
Donc f est injective, et alors il est bien connu qu'en dimension finie ceci implique que f est bijective, avec $g = f^{-1}$.
Et donc $AB = I_n$.
Autrement dit, 1) $\Rightarrow$ 2) et 1 $\Rightarrow$ 3).

On prouve de même que 2) $\Rightarrow$ 1) et 2) $\Rightarrow$ 3), et il est évident que 3) implique les deux autres points. □

25.2 RANG D'UNE MATRICE

Jusqu'à présent, nous avons rencontré deux notions de rang : le rang d'une famille de vecteurs, et le rang d'une application linéaire. Ajoutons donc une troisième notion[3], celle de rang d'une matrice.

[3] Fortement reliée aux deux précédentes.

25.2.1 Définition, premières propriétés

Définition 25.16 – Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, et soient $C_1, \dots, C_p$ ses colonnes, qui sont donc dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.
On appelle **rang de** A et on note $\mathrm{rg}(A)$ le rang de la famille[4] $(C_1, \dots, C_p)$.
Autrement dit, $\mathrm{rg}(A) = \dim \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_p)$.

[4] De $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$

Exemples 25.17

- $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ est de rang 3, car on vérifie que ses colonnes forment une famille libre.
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 4 & \dots & 2n \\ 3 & 6 & \dots & 3n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 2n & \dots & n^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est de rang 1. En effet, toutes ses colonnes sont colinéaires, et donc $\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_n) = \mathrm{Vect}(C_1)$, qui est de dimension 1.
  Il est assez facile de prouver qu'une matrice est de rang 1 si et seulement si toutes ses colonnes sont proportionnelles et non toutes nulles[5].

[5] La matrice nulle étant évidemment de rang 0.

> **Proposition 25.18 :** *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, soit $\mathcal{B}$ une base de E et soient $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs de E.*
> *Alors $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) = \mathrm{rg}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p)$.*

Bien que nous donnions, par soucis de concision, une preuve bien plus directe, l'intuition derrière cette proposition est assez simple : toute relation de dépendance linéaire sur $(x_1, \dots, x_p)$ doit se traduire en une relation pour les colonnes de leur matrice.
Et en particulier, une sous-famille libre de $(x_1, \dots, x_p)$ doit correspondre à une sous-famille libre de $(C_1, \dots, C_p)$.
Or le rang d'une famille de vecteurs[6] est le cardinal maximal d'une sous-famille libre.

[6] De E ou de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

Démonstration. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p)$ et $(C_1, \dots, C_p)$ les colonnes de M.

Rappel
On a $C_i = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_i)$.

Alors l'application $f_{\mathcal{B}} : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & E \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \end{array} \right.$ est un isomorphisme.
Or, cette application envoie $\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_p)$ sur $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$.
Ces deux espaces sont donc de même dimension .
Et donc $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) = \mathrm{rg}(M)$. □

Rappel
Un isomorphisme préserve les dimensions.

> **Corollaire 25.19 –** *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases respectives de E et F.*
> *Alors $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\right)$.*

Démonstration. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$.
Par définition, $\mathrm{rg}\, f = \dim \mathrm{Im}\, f = \mathrm{rg}(f(e_1), \dots, f(e_p))$, et donc par la proposition

$$\mathrm{rg}\, f = \mathrm{rg}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f(e_1), \dots, f(e_p)) = \mathrm{rg}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f).$$

□

L'intérêt de ce théorème n'est pas complètement évident pour l'instant, mais nous disposerons bientôt de méthode algorithmique (basées sur le pivot) pour calculer le rang d'une matrice, ce qui nous permettra donc d'en déduire le rang d'applications linéaires.

Déjà vu ?
Ce résultat est évidemment à mettre en parallèle avec $\mathrm{rg}(f) \leqslant \min(\dim E, \dim F)$.

> **Proposition 25.20 :** *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Alors $\mathrm{rg}(A) \leqslant \min(n, p)$.*

Démonstration. Puisque les colonnes de A sont dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, qui est de dimension n, $\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_p)$ est de dimension au plus n, donc $\mathrm{rg}(A) \leqslant n$.

Et ces colonnes sont au nombre de p, donc ne peuvent engendrer un espace de dimension plus grande que p. □

Proposition 25.21 : *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. *Alors A est inversible si et seulement si* $\operatorname{rg}(A) = n$.

> **Autrement dit** Une matrice inversible est une matrice de rang maximal.

Démonstration. Ce résultat a en fait déjà quasiment été prouvé dans l'exercice 19.10, qui dit qu'une matrice carrée est inversible si et seulement si la famille de ses vecteurs colonnes est libre. Puisqu'il y a n vecteurs colonne, c'est le cas si et seulement si il s'agit d'une famille de rang n.

Mais nous pouvons à présent en donner une autre preuve : soit f_A l'endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ canoniquement associé à A.
Alors A est inversible si et seulement si f_A est un isomorphisme, soit si et seulement si f_A est surjectif. Donc si et seulement si $\operatorname{rg}(f_A) = \dim \mathbf{K}^n = n$.
Puisque $\operatorname{rg}(f_A) = \operatorname{rg}(A)$, on a bien le résultat annoncé. □

Proposition 25.22 : *Multiplier une matrice à gauche ou à droite par une matrice inversible ne change pas son rang.*

> **Remarque** Nous l'avions en fait déjà dit pour les matrices de rang n (les matrices inversibles).

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, et soit $f \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$ canoniquement associé à A.
Soit $P \in GL_n(\mathbf{K})$, et soit $g \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^n)$ canoniquement associé à P.
Alors PA est la matrice, dans les bases canoniques, de l'application $g \circ f \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$.
Puisque P est inversible, g est un isomorphisme, et nous avons prouvé précédemment qu'alors $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} f$.
Donc $\operatorname{rg} PA = \operatorname{rg} A$.
On raisonne de même pour la multiplication à droite par une matrice de $GL_p(\mathbf{K})$. □

25.2.2 Calcul pratique du rang d'une matrice

Définition 25.23 – Une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est dite **échelonnée** si chaque ligne commence par strictement plus de zéros que la précédente, ou est nulle si la précédente est nulle.
Le premier coefficient non nul d'une ligne d'une matrice échelonnée est alors appelé un **pivot**.

> **Danger !** Pour une matrice carrée, ne confondra pas matrices échelonnées et matrices triangulaires supérieures à diagonale non nulle (bien que celles-ci soient échelonnées). Voir par exemple la seconde matrice.

Exemples 25.24

$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 9 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont échelonnées.

La première possède trois pivots, les deux autres en ont 2.

En revanche, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas échelonnée, bien qu'elle soit diagonale.

On constate[7] alors que le rang d'une matrice échelonnée est égal au nombre de ses pivots.
En effet, une colonne qui ne contient pas un pivot est nécessairement combinaison linéaire des précédentes.
Et donc l'espace engendré par les colonnes d'une matrice A est aussi engendré par la famille des colonnes contenant un pivot.
Or, il est aisé, en utilisant les 0, de prouver que cette famille est libre.

[7] Et je veux vraiment que vous en soyez convaincus, mais n'insistez pas, je n'en donnerai pas de preuve ! Pas que celle-ci soit terriblement ardue, mais parce qu'une telle preuve noie systématiquement les idées essentielles avec des tonnes de notation. Prenez trois matrices échelonnées, calculez leur rang en cherchant à comprendre pourquoi il est égal au nombre de pivots, cela devrait largement suffire.

Par exemple considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et notons $C_1, \dots, C_5$ ses colonnes.
Rappelons que par définition, $\operatorname{rg}(A) = \dim \operatorname{Vect}(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5)$.
Mais C_1 et C_2 sont colinéaires, donc $\operatorname{Vect}(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5) = \operatorname{Vect}(C_1, C_3, C_4, C_5)$.
De même C_4 est combinaison linéaire de C_1 et C_3, et donc $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}(C_1, C_3, C_5)$.
Mais étant donnée la position des 0 dans ces vecteurs colonnes, on constate facilement que (C_1, C_3, C_5) est libre, et donc de rang 3.

Puisque nous savons que les opérations élémentaires sur les lignes (resp. colonnes) d'une matrice correspondent à la multiplication à gauche (resp. à droite) par une matrice inversible, celles-ci ne changent pas le rang.
Donc si on arrive, par opérations sur les lignes, à transformer A en une matrice échelonnée, le rang de cette matrice (qui est donc son nombre de pivots) sera celui de A.
Or il est toujours possible de transformer, via des opérations élémentaires sur les lignes, une matrice en une matrice échelonnée.
Nous ne prouverons pas ceci, et n'avons pas besoin d'un énoncé aussi général, mais la pratique que vous avez déjà acquise de l'algorithme du pivot doit vous convaincre qu'il est vrai.

Exemple 25.25

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Alors

$$A \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\iff} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\iff} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_4}{\iff} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & -6 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2}}{\iff} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_4 \leftarrow 3L_4 - 2L_3}{\iff} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est échelonnée et possède trois pivots : donc $\operatorname{rg} A = 3$.

25.3 Changement de base, similitude, équivalence

À une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ donnée est associée une matrice dans des bases de E et F.
Mais cette matrice dépend du choix des bases, et il existe donc plusieurs matrices représentant la même application.
Comment passer de l'une à l'autre, et quelles sont les propriétés que doivent partager ces matrices ?

25.3.1 Matrice de passage

Proposition 25.26 : *Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, et soit $\mathscr{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E.*
Alors $\mathscr{F}$ est une base de E si et seulement si $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)$ est inversible.

Cardinal
Il est indispensable de considérer une famille comportant autant de vecteurs que $\dim E$. De toutes façons, une famille de tout autre cardinal n'a aucune chance d'être une base de E !

Démonstration. Puisque $(x_1,\dots,x_n)$ est de cardinal n, c'est une base si et seulement si elle est génératrice de E.
Donc si et seulement si $(x_1,\dots,x_n)$ est de rang n, et donc si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n)$ est de rang n, donc inversible. □

Exemple 25.27

À quelle condition sur $\lambda \in \mathbf{C}$ la famille $(\lambda+X+X^2, 1+\lambda X+X^2, 1+X+\lambda X^2)$ est-elle une base de $\mathbf{C}_2[X]$?

Sa matrice dans la base canonique est $M = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \end{matrix} \end{array}$.

Alors l'inversibilité de M s'étudie facilement à l'aide de la méthode du pivot, par opérations élémentaires sur les lignes :

$$M \underset{L_1\leftrightarrow L_3}{\iff} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-\lambda L_1}}{\iff} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \end{pmatrix} \underset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{\iff} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}$$

M étant triangulaire, elle est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls, soit si et seulement si $\lambda \neq 1$ et $2-\lambda-\lambda^2 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \notin \{-2, 1\}$.
Donc la famille $(\lambda+X+X^2, 1+\lambda X+X^2, 1+X+\lambda X^2)$ est une base de $\mathbf{C}_2[X]$, sauf pour $\lambda = -2$ et $\lambda = 1$.

Définition 25.28 – Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ deux bases d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$. Alors on **appelle matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$** la matrice

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}).$$

Autrement dit, les colonnes de $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}$ sont les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{C}$ dans la base $\mathscr{B}$.
Notons également qu'on a $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E)$.

Proposition 25.29 : *Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont deux bases de E, alors $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}$ est inversible, et $\left(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}\right)^{-1} = P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$.*

Démonstration. C'est évident en utilisant $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E)$, ainsi que le fait que $\mathrm{id}_E^{-1} = \mathrm{id}_E$. □

Exemple 25.30

Dans $\mathbf{R}_2[X]$, considérons la famille (P_1, P_2, P_3) définie par

$$(P_1, P_2, P_3) = (-X^2+3X+3, X, -X^2+3X+4).$$

Alors sa matrice dans la base canonique est

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(P_1, P_2, P_3) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} P_1 & \;P_2 & \;P_3 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \end{matrix} \end{array}.$$

On vérifie que cette matrice est inversible et que son inverse est $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Donc $\mathscr{B} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbf{R}_2[X]$, et on a alors

$$M = P_{\mathscr{B}_{can}}^{\mathscr{B}} \text{ et } P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}_{can}} = M^{-1} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} 1 & X & X^2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \end{array}.$$

Proposition 25.31 : *Si $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ sont trois bases d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}''} = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}''}$.*

Démonstration. On a

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}''} = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E) = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E \circ \mathrm{id}_E) = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E) \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}'}(\mathrm{id}_E) = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}''}.$$

□

25.3.2 Formules de changement de base

L'intérêt des matrices de passage est de nous permettre de passer facilement des représentations matricielles dans une base à des représentations matricielles dans une autre base.

Proposition 25.32 : *Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ deux bases de E. Alors pour tout $x \in E$, on a*

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} \operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}(x).$$

Autrement dit, la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$ permet de passer[8] *des coordonnées d'un vecteur dans la base $\mathscr{C}$ à ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$.*

[8] Contrairement à ce que son nom laisse penser...

Démonstration. Encore une fois, c'est évident en notant que $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} = \operatorname{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E)$.
En effet, $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} \operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}(x)$ est alors égal à[9] $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E(x))$. □

[9] C'est la proposition 25.8.

Exemple 25.33

Reprenons les notations de l'exemple 25.30.
Considérons alors $P = 1 + 3X - 2X^2$.

On a alors $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(P) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \end{array}$.

Si on veut les coordonnées de P dans la base $\mathscr{B} = (P_1, P_2, P_3)$, plutôt que de résoudre un système, on peut calculer

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}_{can}} \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(P) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Autrement dit, $P = 7P_1 - 3P_2 - 5P_3$.

Théorème 25.34 (Formule de changement de base) : *Soient E, F deux espaces vectoriels de dimensions finies, soient $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ deux bases de E et $\mathscr{C}, \mathscr{C}'$ deux bases de F. Alors pour $f \in \mathscr{L}(E,F)$, on a*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f) = P_{\mathscr{C}'}^{\mathscr{C}}\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}.$$

Danger ! Il faut être très vigilant sur l'ordre des bases.

Remarque. Bien comprendre ce que fait chaque matrice permet de ne pas se tromper sur l'ordre des bases : partant des coordonnées de $x \in E$ dans la base $\mathscr{B}'$, la multiplication par $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ donne les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$.
Puis la multiplication par $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ donne les coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathscr{C}$.
Enfin, la multiplication par $P_{\mathscr{C}'}^{\mathscr{C}}$ «traduit» ces coordonnées dans la base $\mathscr{C}'$.
Au final, on a donc bien la matrice qui aux coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}'$ associe celles de $f(x)$ dans la base $\mathscr{C}'$: c'est $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)$.

Démonstration. On a $f = \mathrm{id}_F \circ f \circ \mathrm{id}_E$.
Et donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{C}'}(\mathrm{id}_F)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E) = P_{\mathscr{C}'}^{\mathscr{C}}\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}.$$

□

Corollaire 25.35 (Formule de changement de base pour les endomorphismes) : *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Alors pour $f \in \mathscr{L}(E)$,*

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) &= P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\\ &= \left(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right)^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}.\end{aligned}$$

Démonstration. La première formule découle directement du théorème ci-dessus lorsqu'on prend $\mathscr{B} = \mathscr{C}$ et $\mathscr{B}' = \mathscr{C}'$.
La seconde vient lorsqu'on ajoute en plus le fait que $P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} = \left(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right)^{-1}$. □

Exemple 25.36

Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}_2[X]$ défini par $f(P) = P + P'$, et considérons toujours la base $\mathscr{B}$ de l'exemple 25.30.

$$\text{Alors } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1\\ X\\ X^2 \end{array} \end{array}.$$

Mais alors,

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) &= P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}_{can}} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(f) \times P_{\mathscr{B}_{can}}^{\mathscr{B}}\\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -4\\ 0 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4\\ 3 & 1 & 3\\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\\ &= \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(P_1) & f(P_2) & f(P_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3\\ -2 & 1 & -2\\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} P_1\\ P_2\\ P_3 \end{array} \end{array}.\end{aligned}$$

Notons que sans la formule de changement de base, nous aurions pu obtenir cette matrice en calculant $f(P_1), f(P_2)$ et $f(P_3)$, puis en déterminant leurs coordonnées dans la base (P_1, P_2, P_3) en résolvant **trois** systèmes.

25.3.3 Relation de similitude

Définition 25.37 – Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On dit que A et B sont **semblables** s'il existe $P \in GL_n(\mathbf{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$.

Exemples 25.38

▶ La seule matrice semblable à I_n est I_n elle-même.
En effet si A est semblable à I_n, alors il existe P inversible telle que $A = P^{-1}I_nP = I_n$.
Plus généralement, la seule matrice semblable à une matrice scalaire[10] est elle-même.
▶ Deux matrices qui représentent le même endomorphisme dans deux bases sont semblables.
En effet, si $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$, alors

$$A = \left(P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}\right)^{-1} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}.$$

Cet exemple est en fait fondamental, et l'idée sous-jacente derrière la notion de matrices semblables est justement qu'elles doivent représenter le même endomorphisme dans deux bases.

Précisons un peu cette idée : si A et B sont deux matrices semblables, soit alors $P \in GL_n(\mathbf{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$.
Considérons alors f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ canoniquement associé à B, c'est à-dire $f : X \mapsto BX$.
Sa matrice dans la base canonique est B.
Puisque P est inversible, notons $C_1, \dots, C_n$ ses vecteurs colonnes, qui sont dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.
Puisque P est inversible, la famille de ses vecteurs colonnes est libre[11], et donc par cardinalité, est une base $\mathscr{B}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.
On a alors précisément $P = P_{\mathscr{B}_{can}}^{\mathscr{B}}$, et donc par la formule de changement de base,

$$A = \left(P_{\mathscr{B}_{can}}^{\mathscr{B}}\right)^{-1} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(f) P_{\mathscr{B}_{can}}^{\mathscr{B}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f).$$

Donc A et B sont toutes les deux la matrice du même endomorphisme f dans deux bases différentes.

[10] C'est-à-dire de la forme λI_n.

[11] La matrice de cette famille dans la base canonique est précisément P, qui est inversible.

Proposition 25.39 : *La relation de similitude (c'est-à-dire la relation $\sim$ définie par $A \sim B \Leftrightarrow (\exists P \in GL_n(\mathbf{K}), A = P^{-1}BP)$) est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.*

Démonstration. On a $A = I_n^{-1}AI_n$ et donc $A \sim A$.
Si $A = P^{-1}BP$, alors $B = PAP^{-1} = \left(P^{-1}\right)^{-1} AP^{-1}$ donc $B \sim A$.
Enfin, si $A = P^{-1}BP$ et $B = Q^{-1}CQ$, alors

$$A = P^{-1}Q^{-1}CQP = (QP)^{-1} C(QP).$$

□

Remarque
$GL_n(\mathbf{K})$ étant un groupe, QP est encore inversible.

La détermination des classes d'équivalence[12] de cette relation est un problème complexe. La proposition suivante est un premier pas dans cette direction, et vous approfondirez le sujet (sans répondre complètement à la question) en spé lorsque vous parlerez de valeur propre.

[12] Appelées classes de similitude.

Proposition 25.40 : *Deux matrices semblables ont même rang et même trace.*

Démonstration. Si A et B sont deux matrices semblables, alors nous venons de dire qu'elles représentent le même endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbf{K}^n)$ dans deux bases différentes.

Alternative
Il a déjà été prouvé que la multiplication (à droite ou à gauche) par une matrice inversible ne change pas le rang.

Donc $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(B)$.

Par ailleurs, rappelons que $\operatorname{tr}(UV) = \operatorname{tr}(VU)$, et donc
$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}\left(P^{-1}BP\right) = \operatorname{tr}\left(BPP^{-1}\right) = \operatorname{tr}(B).$$

$\square$

Je n'ai surtout pas dit que la réciproque est vraie. Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ont toutes les deux même rang et même trace que l'identité. Pourtant, aucune n'est semblable à l'identité, puisque seule I_2 est semblable à I_2.
Moins évident[13] est le fait que A et B ne sont pas semblables.

[13] Voir TD.

Exemple 25.41

La proposition qui précède sert surtout à prouver que deux matrices ne sont pas semblables : si elles n'ont pas la même trace et/ou pas le même rang, alors elles ne sont pas semblables, *end of story*.
En revanche, rien ne dit que deux matrices de même rang et même trace soient semblables, et pour prouver que deux matrices sont semblables, le meilleur[14] outil à notre disposition pour l'instant est de prouver qu'elles représentent le même endomorphisme dans deux bases.

[14] Pour ne pas dire le seul.

Considérons par exemple les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Nous souhaitons prouver que A et D sont semblables.
Soit alors $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à A.
On souhaite prouver qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ telle que

$$D = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}.$$

Donc déjà il nous faut $f(e_1) = 0 \Leftrightarrow e_1 \in \operatorname{Ker} f$, et $f(e_2) = e_2$, $f(e_3) = 2e_3$.
Mais on a

$$(x, y, z) \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow {}^{15}(x, y, z) \in \operatorname{Vect}(1, -1, 1)$$

[15] Après résolution...

De même, si $e_2 = (x, y, z)$, alors

$$f(e_2) = e_2 \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y - 2z = x \\ 2x + y + 3z = y \\ -2x - 4y - 2z = z \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) \in \operatorname{Vect}(-2, 1, 0)$$

Et enfin, $f(e_3) = 2e_3 \Leftrightarrow e_3 \in \operatorname{Vect}(0, 1, -1)$.

Posons donc $e_1 = (1, -1, 1)$, $e_2 = (-2, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 1, -1)$.
Alors la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbf{R}^3$ car sa matrice dans la base canonique est

$$P = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(e_1, e_2, e_3) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

dont on vérifie sans grande difficulté qu'elle est inversible.
Donc $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$, et la matrice de f dans cette base est[16] D.

[16] Il n'y a aucun hasard ici : nous avons tout fait pour lors de nos choix de e_1, e_2 et e_3 !

Donc non seulement nous avons prouvé que A et D sont semblables, mais en plus nous avons une matrice $P \in GL_3(\mathbf{R})$ telle que $D = P^{-1}AP$: c'est celle calculée ci-dessus.
En effet, par définition, cette matrice n'est rien d'autre que $P_{\mathscr{B}_{can}}^{\mathscr{C}}$.
Et par la formule de changement de base,

$$D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \left(P_{\mathscr{B}_{can}}^{\mathscr{C}}\right)^{-1} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(f) P_{\mathscr{B}_{can}}^{\mathscr{C}} = P^{-1}AP.$$

Définition 25.42 – Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.
Alors la trace de la matrice de f dans une base $\mathscr{B}$ de E est indépendante de la base $\mathscr{B}$ considérée.
On appelle alors **trace de** f et on note $\mathrm{tr}(f)$ la trace de la matrice de f dans n'importe quelle base.
L'application $\mathrm{tr} : \mathscr{L}(E) \to \mathbf{K}$ ainsi définie est une forme linéaire sur $\mathscr{L}(E)$.

Démonstration. Le fait que la trace soit indépendante de la base vient de ce qui précède : si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont deux bases de E, alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f)$ sont semblables, et donc de même trace. □

Exemple 25.43

Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{K}_n[X]$ qui à P associe $XP' + P''$.
Alors $f(1) = 0$, $f(X) = X$ et pour tout $k \in [\![2, n]\!]$,

$$f\left(X^k\right) = XkX^{k-1} + k(k-1)X^{k-2} = kX^k + k(k-1)X^{k-2}.$$

Donc la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{K}_n[X]$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} f(1) & f(X) & f(X^2) & \dots & f(X^{n-2}) & f(X^{n-1}) & f(X^n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & (n-2) & 0 & n(n-1) \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & n \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^{n-2} \\ X^{n-1} \\ X^n \end{array} \end{array}.$$

Donc $\mathrm{tr}(f) = 1 + 2 + \dots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

25.3.4 Équivalence de matrices

Définition 25.44 – On dit que deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ sont **équivalentes** si il existe $P \in GL_n(\mathbf{K}), Q \in GL_p(\mathbf{K})$ telles que $A = P^{-1}BQ$.

⚠ Attention ! Si A et B ne sont pas forcément carrées, il faut que les deux soient de mêmes dimension.

À la différence de la relation de similitude, l'idée est cette fois que deux matrices équivalentes représentent la même application linéaire, modulo **deux** changements de base : un pour l'espace de départ et un pour l'espace d'arrivée.

Par ailleurs, l'autre exemple important de matrices équivalentes est le suivant : si A est obtenue à partir de $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ par opérations élémentaires sur les lignes et/ou les colonnes,

alors A et B sont équivalentes.
En effet, chaque opération sur les lignes correspond à une multiplication à gauche par une matrice inversible (de taille n), et chaque opération sur les colonnes correspond à la multiplication à droite par une matrice inversible (de taille p).

On prouve comme pour la relation de similitude que la relation d'équivalence des matrices est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
Comme par ailleurs la multiplication[17] par une matrice inversible préserve le rang, si deux matrices A et B sont équivalentes, alors elles ont le même rang.

[17] À droite ou à gauche.

Définition 25.45 – Si r est un entier tel que $0 \leqslant r \leqslant \min(n,p)$, on définit une matrice $J_{r,n,p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ en posant

$$J_{r,n,p} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,p-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{array}\right).$$

Autrement dit, si on note $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ les coefficients de $J_{r,n,p}$, alors

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \textbf{ et } i \leqslant r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque
Il s'agit là d'une matrice définie par blocs.
Elle possède r coefficients égaux à 1, situés sur un «diagonale» partant du coin supérieur gauche. Et tous ses autres coefficients sont nuls.

Puisque $J_{r,n,p}$ est échelonnée et possède r pivots, on a tout de suite $\operatorname{rg} J_{r,n,p} = r$.

Proposition 25.46 : *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, et soit $r = \operatorname{rg}(A)$. Alors A est équivalente à $J_{r,n,p}$.*

Démonstration. Soit $f : \mathbf{K}^p \to \mathbf{K}^n$ l'application dont la matrice dans les bases canoniques est A.
Alors $\operatorname{rg} f = r$, et donc par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} f = p - r$.
Soit alors $(e_{r+1}, \dots, e_p)$ une base de $\operatorname{Ker} f$. On peut alors la compléter[18] en une base $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_p)$ de $\mathbf{K}^p$.
La famille $(f(e_1), \dots, f(e_r))$ est alors génératrice de $\operatorname{Im} f$, puisque les $f(e_{r+1}), \dots, f(e_p)$ sont tous nuls. Par cardinalité, c'est une base de $\operatorname{Im} f$, qui est de dimension r.
Pour $i \in [\![1, r]\!]$, posons $u_i = f(e_i)$, de sorte que $(u_1, \dots, u_r)$ est libre.
Toujours par le théorème de la base incomplète, on peut la compléter en une base $(u_1, \dots, u_n)$ de $\mathbf{K}^n$.
Et alors la matrice de f dans les bases $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{C} = (u_1, \dots, u_n)$ est

[18] C'est le théorème de la base incomplète, qui s'applique car $(e_{r+1}, \dots, e_p)$ est libre.

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_r) & f(e_{r+1}) & \dots & f(e_p) \end{array} & \\ \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \\ u_{r+1} \\ \vdots \\ u_n \end{array} \end{array} = J_{r,n,p}.$$

Par conséquent, si on note P la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base canonique de $\mathbf{K}^n$, et si on note Q la matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{K}^p$ à la base $\mathcal{B}$, alors, par la formule de changement de base,

$$A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_{can}, \mathcal{B}_{can}}(f) = P^{-1} J_{r,n,p} Q.$$

Et donc A et $J_{r,n,p}$ sont bien équivalentes. □

Puisque de plus, $J_{r,n,p}$ et $J_{r',n,p}$ ne sont pas équivalentes si $r \neq r'$, car elles sont de rangs différents, nous avons donc là un **système de représentants des classes d'équivalence**,

c'est-à-dire que l'ensemble $\{J_{r,n,p},\ 0 \leqslant r \leqslant \min(n,p)\}$ contient exactement un élément de chaque classe d'équivalence.
Autrement dit, toute matrice de $M_{n,p}(\mathbf{K})$ est semblable à une et une seule des matrices $J_{0,n,p}, J_{1,n,p}, \dots, J_{\min(n,p),n,p}$.

Remarque

Dans le cas de la relation de congruence modulo n sur les entiers, nous connaissons un système de représentants, il s'agit de $0, 1, 2, \dots, n-1$.

Corollaire 25.47 – *Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ sont équivalentes si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.*

Autrement dit

La relation d'équivalence des matrices est en fait la relation «avoir le même rang».

Démonstration. Si on note r le rang commun de A et B, alors A et B sont toutes deux équivalentes à $J_{r,n,p}$, et par transitivité et symétrie de la relation «être équivalentes», A et B sont équivalentes. □

Ainsi, contrairement à la relation de similitude, la description des classes d'équivalence pour la relation d'équivalence des matrices est facile : une classe d'équivalence est formée de **toutes** les matrices de rang donné.

Corollaire 25.48 : *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\top)$.*

Démonstration. Soit $r = \mathrm{rg}(A)$, et soient $P \in GL_n(\mathbf{K})$, $Q \in GL_p(\mathbf{K})$ telles que $A = P^{-1}J_{r,n,p}Q$.
Alors $A^\top = Q^\top J_{r,n,p}^\top \left(P^\top\right)^{-1} = Q^\top J_{r,p,n} \left(P^\top\right)^{-1}$.
Donc $A^\top$ est équivalente à $J_{r,p,n}$, et donc est de rang r. □

Remarque. Puisque les colonnes de $A^\top$ sont les lignes de A, ce résultat affirme que le rang d'une matrice est aussi le rang de la famille de ses vecteurs lignes.
Et donc que l'espace engendré par les lignes de A est de même dimension que celui engendré par ses colonnes.

Exemple 25.49 **Rang des matrices échelonnés (bis)**

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ une matrice échelonnée, et notons $L_1, \dots, L_n$ ses lignes.
Notons r le nombre de ses pivots, qui sont nécessairement situés sur les r premières lignes de A, les lignes suivantes étant nécessairement nulles.
Alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(L_1, \dots, L_n) = \mathrm{rg}(L_1, \dots, L_r)$.
Mais il est aisé de prouver que $L_1, \dots, L_r$ forment une famille libre.
En effet, soient $\lambda, \dots, \lambda_r$ tels que $\lambda_1 L_1 + \cdots + \lambda_r L_r = 0_{1,p}$.
Si on note j_1 le numéro de la colonne du premier coefficient non nul de L_1, alors les coefficients j_1 de $L_2, \dots, L_r$ sont nuls par définition d'une matrice échelonnée.
Donc $\lambda_1 = 0$. Puis on recommence avec le premier coefficient non nul de L_2, etc.
Et donc $(L_1, \dots, L_r)$ est libre, donc de rang r.
Et par conséquent, le rang de A est égal au nombre de ses pivots.

25.3.5 Caractérisation du rang par les matrices extraites

Définition 25.50 – Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. On appelle **matrice extraite de** A toute matrice de la forme $(a_{i,j})_{\substack{i\in I\\ j\in J}}$, avec $I \subset [\![1,n]\!]$ et $J \subset [\![1,p]\!]$.
Plus simplement, il s'agit d'une matrice obtenue à partir de A par suppression de certaines lignes et colonnes.

Proposition 25.51 : *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, et soit B une matrice extraite de A. Alors $\mathrm{rg}(B) \leqslant \mathrm{rg}(A)$.*

Démonstration. Puisque B est obtenue à partir de A en supprimant certaines lignes et certaines colonnes, notons A' la matrice intermédiaire, à n lignes, obtenue à partir de A

uniquement par suppression de colonnes (et où l'on a gardé uniquement les colonnes qui seront dans B).
Alors les colonnes de A' sont des colonnes de A, donc[19] $\operatorname{rg} A' \leqslant \operatorname{rg}(A)$.
Mais alors B est obtenue à partir de A' par suppression de lignes, et le rang d'une matrice est aussi le rang de la famille de ses lignes. Donc par le même raisonnement, $\operatorname{rg}(B) \leqslant \operatorname{rg}(A')$, de sorte que $\operatorname{rg}(B) \leqslant \operatorname{rg}(A)$. □

[19] Ces colonnes engendrent un sous-espace vectoriel de l'espace engendré par les colonnes de A.

La caractérisation du rang qui suit est assez élégante, mais soyons honnête, assez inefficace pour calculer concrètement un rang.

Proposition 25.52 : *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Le rang de A est la taille maximale d'une matrice inversible[20] extraite de A.*

[20] Et donc carrée.

Démonstration. Nous savons déjà que toute matrice extraite sera de rang inférieur à $\operatorname{rg}(A)$, et donc il ne peut y avoir de matrice extraite inversible de taille supérieure strictement à $\operatorname{rg}(A)$.
Si $r = \operatorname{rg}(A)$, alors il existe une famille libre formée de r colonnes de A. Notons donc B la matrice à n lignes formée de ces r colonnes.
Puisque le rang de B est aussi le rang de la famille de ses lignes, il existe une famille de r lignes de B qui est libre.
Et donc la matrice $C \in \mathcal{M}_r(\mathbf{K})$ formée de ces r lignes est extraite de A et est inversible car ses lignes forment une famille libre. □

Exemple 25.53

[Rang des matrices échelonnées (ter)] Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ une matrice échelonnée, à r pivots.
Nous savons déjà que A est de rang au plus r puisque seules ses r premières lignes sont nulles.
Et alors la matrice extraite de A en ne gardant que les lignes et les colonnes contenant des pivots est triangulaire supérieure, et ses coefficients diagonaux sont les pivots, donc sont non nuls. Donc cette matrice extraite est inversible, et donc A est de rang r.

Par exemple, de $A = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on peut extraire :

$$\begin{pmatrix} -2 & 8 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est de rang 3.

25.4 Retour sur les systèmes linéaires

25.4.1 Image et noyau d'une matrice

Définition 25.54 – Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. On appelle alors

- **noyau de** A l'ensemble $\operatorname{Ker} A = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}) \mid AX = 0\}$
- **image de** A l'ensemble $\operatorname{Im} A = \{AX,\ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})\} \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

Pour le dire autrement, il s'agit tout simplement du noyau et de l'image de l'application linéaire[21] $f_A : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$.
Ce qui permet directement d'affirmer qu'il s'agit de sous-espaces vectoriels respectivement de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.
Une autre conséquence de ce fait est que $\operatorname{Im} A$ est engendré par les AE_i, où, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, E_i désigne le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$.
Mais $AE_i = C_i$, la $i^{\text{ème}}$ colonne de A, donc $\operatorname{Im} A$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ engendré par les colonnes de A.

[21] Qui est l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ canoniquement associé à A.

Proposition 25.55 (Théorème du rang matriciel) : *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Alors* $\dim \operatorname{Ker} A + \operatorname{rg} A = p$.

Démonstration. C'est le théorème du rang appliqué à f_A. □

Notons que si $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est la matrice d'une application linéaire dans deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, alors $\operatorname{Ker} A$ est l'ensemble des vecteurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ des éléments de $\operatorname{Ker} f$.
En effet, $f(x) = 0_F \Leftrightarrow A \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \in \operatorname{Ker} A$.
De même, $\operatorname{Im} A$ est l'ensemble des vecteurs coordonnées, dans la base $\mathcal{C}$ des vecteurs de $\operatorname{Im} f$.

La détermination complète d'une base de $\operatorname{Ker} A$ est aisée : il s'agit de résoudre le système $AX = 0$.
Notons toutefois que toute relation de dépendance linéaire que l'on constaterait **sur les colonnes** de A nous donne un élément du noyau.
En effet, si on a $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i C_i = 0_{n,1}$, alors $A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} = A\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i E_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i A E_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i C_i = 0_{n,1}$.
Et donc $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A$.

Une fois la dimension du noyau connue, on a celle de l'image, et il suffit[22] de trouver $\operatorname{rg}(A)$ colonnes linéairement indépendantes pour obtenir une base de $\operatorname{Im} A$.
Une piste à ne pas négliger : tout élément de $\operatorname{Ker} A$ nous donne, comme ci-dessus, une relation de dépendance entre les colonnes. Ce qui permet d'éliminer une ou plusieurs colonnes de la famille génératrice de $\operatorname{Im} A$.

[22] Bien que ceci ne nous dise pas comment faire pour y arriver.

Exemple 25.56

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Alors ses colonnes sont liées par la relation $3C_1 - C_2 - C_3 = 0 \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$.

Donc A est de rang au plus 2, et n'étant clairement pas[23] de rang 1, elle est bien de rang 2.

Donc son noyau est de dimension 1, égal à $\operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Et puisque $C_3 \in \operatorname{Vect}(C_1, C_2)$, $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(C_1, C_2, C_3) = \operatorname{Vect}(C_1, C_2)$, et on a là une base[24] de l'image.

[23] Ses colonnes ne sont pas proportionnelles.

[24] Car génératrice et de bon cardinal.

Mentionnons également qu'une opération élémentaire sur les lignes ne change pas le noyau d'une matrice[25].
En effet, réaliser une opération sur les lignes de A revient à multiplier à gauche par une

[25] Et c'est une excellente nouvelle puisque c'est la base de la résolution de systèmes ! Les opérations élémentaires sur les équations d'un système n'en changent donc pas les solutions.

matrice inversible P.
Et alors $AX = 0 \Leftrightarrow PAX = 0$. Donc A et PA ont même noyau.
On prouve de même[26] que les opérations élémentaires sur les colonnes ne changent pas l'image.

[26] Et il n'est peut-être pas inintéressant d'essayer de l'écrire...

25.4.2 Systèmes linéaires

Rappelons qu'un système linéaire de n équations à p inconnues peut s'écrire matriciellement sous la forme $AX = B$, avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ l'inconnue, et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ le vecteur colonne des seconds membres.

Définition 25.57 – Un système linéaire est dit **homogène** si son second membre est nul, c'est-à-dire s'il est de la forme $AX = 0$.

Puisque chacune des équations qui composent un système homogène est de la forme $a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,p}x_p = 0$, nous reconnaissons là des équations d'hyperplans.
Et donc résoudre un système homogène revient à déterminer l'intersection de n hyperplans de $\mathbf{K}^p$.
Rappelons que nous avions prouvé (dans le chapitre 21) que l'intersection de n hyperplans de $\mathbf{K}^p$ est de dimension au moins $p - n$.

Proposition 25.58 : *L'ensemble des solutions d'un système homogène $AX = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$, de dimension $p - \operatorname{rg}(A)$.*

Démonstration. L'aspect «sous-espace vectoriel» pourrait se prouver à la main.
Il suffit juste de remarquer que cet ensemble de solutions est $\operatorname{Ker} A$, et d'appliquer le théorème du rang. □

Une conséquence intéressante, que nous comprenions déjà, sans l'avoir complètement rigoureusement prouvée, est que si $p > n$, c'est-à-dire s'il y a davantage d'inconnues que d'équations, alors il existe forcément des solutions non nulles.
En effet, $\operatorname{rg}(A) \leqslant n$, et donc si $n < p$, $p - \operatorname{rg}(A) > 0$. Donc l'ensemble des solutions est de dimension strictement positive, donc contient des vecteurs non nuls.

Si $AX = B$ est un système linéaire, avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, le système $AX = 0$ est appelé système homogène associé.
On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de $AX = B$ et $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions du système homogène $AX = 0$.

Proposition 25.59 : *Soit $AX = B$ un système linéaire. Alors le système est compatible si et seulement si $B \in \operatorname{Im} A$.*
Lorsque c'est le cas, si $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ est une solution du système, alors

$$\mathcal{S} = X_0 + \mathcal{S}_0 = \{X_0 + X,\ X \in \mathcal{S}_0\}.$$

Autrement dit, si on trouve une solution particulière du système avec second membre, toutes les solutions s'obtiennent en ajoutant une solution du système homogène à cette solution particulière.

Déjà vu ?
Cette formulation doit bien évidemment vous faire penser aux équations différentielles linéaires.

Démonstration. Il existe $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ tel que $AX = B$ si et seulement si $B \in \operatorname{Im} A$: c'est la définition même de l'image.
Soit donc $X_0 \in \mathcal{S}$ une solution de $AX = B$.
Alors pour $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$, on a

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{S} &\Leftrightarrow AX = B \Leftrightarrow AX = AX_0 \\ &\Leftrightarrow A(X - X_0) = 0 \Leftrightarrow X - X_0 \in \mathcal{S}_0 \\ &\Leftrightarrow X \in X_0 + \mathcal{S}_0. \end{aligned}$$

□

Ceci nous permet notamment de prouver rigoureusement un fait que nous connaissions déjà : si $\mathbf{K}$ est infini[27], alors un système linéaire ne peut posséder que $0, 1$ ou une infinité de solutions.
En effet, s'il est compatible[28], $\mathscr{S}_0$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Donc soit il est de dimension nulle, et donc $\mathscr{S}_0 = \{0\}$, de sorte que $\mathscr{S} = \{X_0\}$.
Soit il est de dimension strictement positive, et donc est nécessairement de cardinal infini (car il est en bijection avec $\mathbf{K}^n$, qui est évidemment infini).

[27] Ce qui est le cas de **Q**, **R** et **C**, les seuls corps que vous serez amenés à manipuler.

[28] S'il ne l'est pas, il n'y a pas de solutions.

Rappelons que les systèmes de Cramer sont les systèmes carrés possédant une unique solution. Nous avons déjà prouvé qu'une matrice A est inversible si et seulement si pour tout second membre B, $AX = B$ est de Cramer.
En fait, nous pouvons faire mieux :

Proposition 25.60 : *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, et soit $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. Alors $AX = B$ est un système de Cramer si et seulement si A est inversible.*

Démonstration. Nous savons déjà que si A est inversible, alors $AX = B$ est de Cramer.
Inversement, si $AX = B$ possède une unique solution, en vertu de ce qui précède, $\mathscr{S}_0 = \{0\}$.
Et donc $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, de sorte que[29] A est inversible. □

[29] C'est le théorème du rang.

Ce que nous dit cette proposition, c'est que le fait qu'un système possède ou non une unique solution ne dépend que de la matrice A (c'est-à-dire) des coefficients du système, et pas du second membre.
Une fois n'est pas coutume, il ne s'agit pas d'une surprise : pour qu'un système possède une unique solution, il faut et il suffit qu'on puisse le transformer en un système triangulaire à coefficients diagonaux non nuls[30].
Ce qui ne dépend que de A, et pas du second membre B.

[30] Se trouve en filigrane ici le fait que A soit de rang n, et donc inversible...