Fonctions convexes

25

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbf{R}$.

25.1 Fonctions convexes

25.1.1 Notations

Dans tout le chapitre, si f est une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbf{R}$, on notera $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

Si $a \neq b$ sont deux points distincts de I, on note $\Delta_{a,b}$ la droite joignant les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(f))$, appelée la **corde** à $\mathscr{C}_f$ passant par a et b.

Cette droite a pour équation $y = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$, et son coefficient directeur $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, qui est le taux d'accroissement de f entre a et b, sera noté $\tau(a, b)$.

Remarque

Notons tout de suite que $\tau(a, b) = \tau(b, a)$.

25.1.2 Définition

Proposition 25.1 (Paramétrisation d'un segment.) : *Soient $a \leqslant b$ deux réels. Alors* $\{(1 - \lambda)a + \lambda b,\ \lambda \in [0, 1]\} = [a, b]$.

Démonstration. Si $\lambda \in [0, 1]$, alors $1-\lambda \in [0, 1]$, si bien que $a \leqslant b$, et donc $(1-\lambda)a \leqslant (1-\lambda)b$ et $\lambda a \leqslant \lambda b$, si bien que

$$a = (1 - \lambda)a + \lambda a \leqslant (1 - \lambda)a + \lambda b \leqslant (1 - \lambda)b + \lambda b = b.$$

Et donc $\{(1 - \lambda)a + \lambda b,\ \lambda \in [0, 1]\} \subset [a, b]$.
Et inversement, si $x \in [a, b]$, pour $\lambda \in \mathbf{R}$, on a

$$x = (1 - \lambda)a + \lambda b \Leftrightarrow x - a = \lambda(b - a) \Leftrightarrow \lambda = \frac{x - a}{b - a}.$$

Notons que $\dfrac{x - a}{b - a}$ est bien dans $[0, 1]$.
Et donc $[a, b] \subset \{(1 - \lambda)a + \lambda b,\ \lambda \in [0, 1]\}$. □

Remarque. La preuve est assez explicite : si $x \in [a, b]$, alors λ est le rapport de la distance de x à a sur la longueur totale du segment.
Donc $x = a \Leftrightarrow \lambda = 0$, $x = b \Leftrightarrow \lambda = 1$, x est égal à $\frac{a+b}{2}$, le milieu du segment $[a, b]$ si et seulement si $\lambda = \frac{1}{2}$, etc.

Définition 25.2 – Une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ est **convexe** si

$$\forall (a, b) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1],\ f((1 - \lambda)a + \lambda b) \leqslant (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

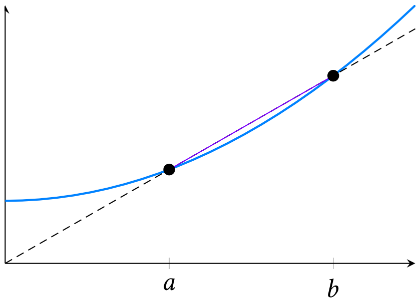
Cette définition a en fait une interprétation géométrique très simple.
Soient $a \neq b$ deux points distincts de I.
Pour $c \in [a, b]$, il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que $c = (1 - \lambda)a + \lambda b$, et donc le point d'abscisse c de $\Delta_{a,b}$ a pour ordonnée

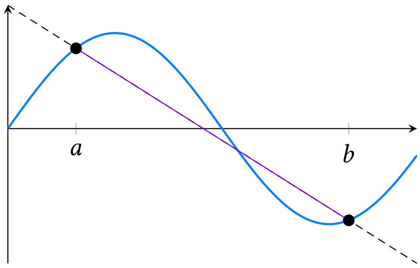
$$\tau(a, b)(c - a) + f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\lambda(b - a) + f(a) = (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

Donc f est convexe si et seulement si pour tout $(a, b) \in I^2$, $\Delta_{a,b}$ est située, sur $[a, b]$, au dessus de $\mathscr{C}_f$.

Plus facilement

Une fonction convexe est une fonction dont le graphe est situé au dessus de ses cordes.





Remarque. Notons que dans la définition de convexe, $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$ n'ont pas beaucoup d'intérêt, car on a alors toujours une égalité[1].
De même, $a = b$ n'a aucun intérêt.

[1] Qui dit juste qu'en a et en b, $\mathscr{C}$ et $\Delta_{a,b}$ coïncident.

Exemples 25.3

▸ Une fonction affine est convexe, puisqu'elle est confondue avec ses cordes.
Plus précisément, si $f : x \mapsto ax + b$, alors pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ et tout $\lambda \in [0, 1]$,

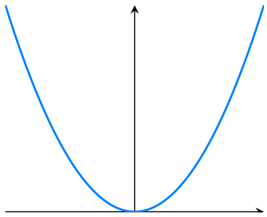
$$f((1-\lambda)x+\lambda y) = a\big((1-\lambda)x+\lambda y\big)+b = (1-\lambda)(ax+b)+\lambda(ay+b) = (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y).$$

▸ La fonction $f : x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbf{R}$.
En effet, soient a, b deux réels, et soit $\lambda \in [0, 1]$. Alors

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) = ((1-\lambda)a + \lambda b)^2 = (1-\lambda)^2 a^2 + 2\lambda(1-\lambda)ab + \lambda^2 b^2.$$

Par ailleurs, $(1-\lambda)f(a) + \lambda f(b) = (1-\lambda)a^2 + \lambda b^2$.
Il est bien connu que $2ab \leqslant a^2 + b^2$, et donc

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) \leqslant (1-\lambda)^2 a^2 + \lambda(1-\lambda)\left(a^2 + b^2\right) + \lambda^2 b^2 \leqslant (1-\lambda)a^2 + \lambda b^2.$$


La fonction $x \mapsto x^2$

▸ La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbf{R}$.
En effet, considérons $a \leqslant b$ deux réels, et notons

$$g : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & e^{(1-t)a+tb} - (1-t)e^a - te^b \end{array} \right.$$

Alors g est deux fois dérivable et pour tout $t \in [0, 1]$, $g'(t) = (b-a)e^{(1-t)a+tb} - e^b + e^a$.

Puis $g''(t) = (b-a)^2 e^{(1-t)a+tb} \geqslant 0$. Donc g' est croissante.
On a alors $g'(0) = (b-a)e^a - e^b + e^a$.
Mais nous savons[2] que $e^{b-a} \geqslant (b-a) + 1$. Donc en multipliant par e^a,

$$e^b \geqslant (b-a)e^a + e^a \Leftrightarrow (b-a)e^a + e^a - e^b = g'(0) \leqslant 0.$$

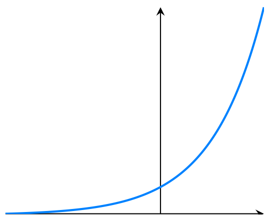
De même, on a $g'(1) = (b-a)e^b - e^b + e^a$.
En partant cette fois de $e^{a-b} \geqslant (a-b) + 1$, il vient

$$e^a \geqslant (a-b)e^b + e^b \Leftrightarrow e^a + (b-a)e^b - e^b \geqslant 0 \Leftrightarrow g'(1) \geqslant 0.$$

Donc g' change de signe sur $[0, 1]$, et donc s'y annule en un point α.
Et alors g est décroissante sur $[0, \alpha]$ et croissante sur $[\alpha, 1]$, avec $g(0) = g(1) = 0$, donc pour tout $t \in [0, 1]$, $g(t) \leqslant 0$, soit encore

$$e^{(1-t)a+tb} \leqslant (1-t)e^a + te^b.$$

Donc $x \mapsto e^x$ est convexe sur $\mathbf{R}$.

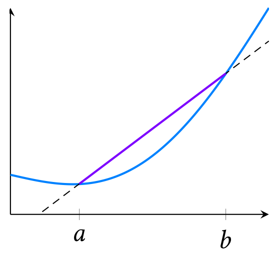

La fonction $x \mapsto e^x$

[2] C'est sûrement un argument de convexité qui se cache derrière l'inégalité $e^x \geqslant 1 + x$, mais nous l'avions prouvée par des études élémentaires de fonctions.

Remarque
Cette preuve, fort désagréable, doit suffire à nous convaincre de l'intérêt de développer des outils plus pratiques d'emploi pour caractériser la convexité. Ce qui va être fait dans la suite.

Affinons un peu le résultat concernant la position relative de $\mathscr{C}_f$ et des cordes.

Proposition 25.4 : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ convexe, soient $a < b$ deux points de I, et soit $c \notin [a, b]$. Alors $f(c) \geqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a) + f(a)$.*
Autrement dit, en dehors de $[a, b]$, le graphe de f est situé au-dessus de $\Delta_{a,b}$.



Démonstration. Traitons le cas où $c > b$, le cas $c < a$ se traitant de la même manière.

Puisque $b \in [a, c]$, il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que $b = (1-\lambda)a + \lambda c$, et nous connaissons λ, c'est $\dfrac{b-a}{c-a}$.
Et donc $f(b) \leqslant \left(1 - \dfrac{b-a}{c-a}\right) f(a) + \dfrac{b-a}{c-a} f(c)$, soit encore

$$\begin{aligned} f(b) \leqslant \frac{c-b}{c-a} f(a) + \frac{b-a}{c-a} f(c) &\Leftrightarrow (c-a)f(b) \leqslant (c-b)f(a) + (b-a)f(c) \\ &\Leftrightarrow f(c) \geqslant \frac{(c-a)f(b) + (b-c)f(a)}{b-a} \\ &\Leftrightarrow f(c) \geqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a) + f(a). \end{aligned}$$

□

Définition 25.5 – Une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ est dite **concave** si

$$\forall (a, b) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1],\ f((1-\lambda)a + \lambda b) \geqslant (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

Autrement dit, f est concave si et seulement si $-f$ est convexe.

Une fonction concave est donc une fonction dont le graphe est situé au dessus des cordes. Dans la suite, nous nous contentons d'énoncer des résultats pour les fonctions convexes, et vous laissons le soin de changer les signes/sens d'inégalités qui ont besoin de l'être pour les fonctions concaves.

Exemple 25.6

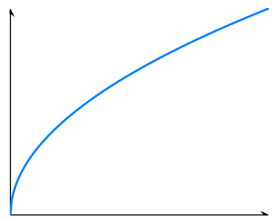
▸ La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbf{R}_+$.
En effet, pour $x, y \in \mathbf{R}_+$ et $\lambda \in [0, 1]$, on a, par convexité de $x \mapsto x^2$,

$$\left((1-\lambda)\sqrt{x} + \lambda\sqrt{y}\right)^2 \leqslant (1-\lambda)\left(\sqrt{x}\right)^2 + \lambda\left(\sqrt{y}\right)^2 \leqslant (1-\lambda)x + \lambda y.$$

Et donc par croissance de la racine carrée,

$$(1-\lambda)\sqrt{x} + \lambda\sqrt{y} \leqslant \sqrt{(1-\lambda)x + \lambda y}.$$

▸ Sur le même principe, puisque l'exponentielle est convexe, ln est concave sur $\mathbf{R}_+^*$.



La fonction $x \mapsto \sqrt(x)$

Croissance
Je vous laisse le soin d'écrire les détails, mais la croissance de ln est importante.

25.1.3 Inégalité des pentes

Proposition 25.7 : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$. Alors f est convexe si et seulement si pour tout $a \in I$, la fonction «pente en a» : $\tau_a : \left| \begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array} \right.$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.*

Notations
$\tau_a(x)$ n'est rien d'autre que ce que nous avions noté $\tau(a, x)$.

Démonstration. Supposons que pour tout $a \in I$, τ_a est croissante.
Soient alors $a, b \in I$ et $\lambda \in [0, 1]$. Comme mentionné précédemment, on peut supposer

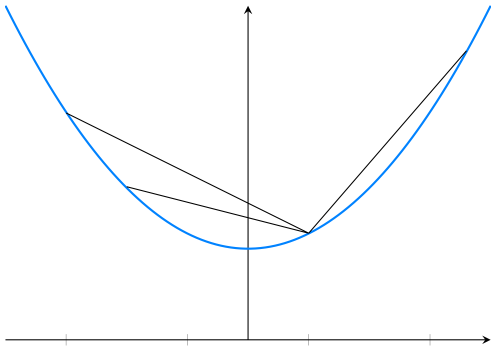


Figure 25.1 – Quelques cordes issues de a. Comparer leurs pentes.

$a \neq b$ et $\lambda \in]0,1[$. Et quitte à échanger a et b, on peut même supposer $a < b$.
Il vient alors $a < (1-\lambda)a + \lambda b < b$.
Et donc par croissance de τ_a, $\tau_a((1-\lambda)a+\lambda b) \leqslant \tau_a(b)$. Soit encore

$$\begin{aligned}\frac{f((1-\lambda)a+\lambda b)-f(a)}{(1-\lambda)a+\lambda b-a} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} &\Leftrightarrow \frac{f((1-\lambda)a+\lambda b)-f(a)}{\lambda(b-a)} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\\ &\Leftrightarrow f((1-\lambda)a+\lambda b)-f(a) \leqslant \lambda f(b)-\lambda f(a)\\ &\Leftrightarrow f((1-\lambda)a+\lambda b) \leqslant (1-\lambda)f(a)+\lambda f(b).\end{aligned}$$

Donc f est bien convexe sur I.

Inversement, supposons f convexe sur I, et soit $a \in I$.
Soient alors $x < y$ deux points de $I \setminus \{a\}$.
▶ **Premier cas** : $y > a$. Alors y est situé à l'extérieur du segment d'extrémités a et x (qui est donc soit $[a,x]$, soit $[x,a]$).
Or à l'extérieur de ce segment, $\Delta_{a,x}$ est en dessous de $\mathscr{C}_f$:

$$f(y) \geqslant \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(y-a)+f(a) \Leftrightarrow \frac{f(y)-f(a)}{y-a} \geqslant \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \Leftrightarrow \tau_a(y) \leqslant \tau_a(x).$$

▶ **Second cas** : $y < a$. Alors y est situé dans le segment $[x,a]$, sur lequel $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\Delta_{x,a}$.
On a donc $f(y) \leqslant \dfrac{f(a)-f(x)}{a-x}(y-a)+f(a) \Leftrightarrow f(y)-f(a) \leqslant \dfrac{f(a)-f(x)}{x-a}(y-a)$.
Mais cette fois $y-a<0$, si bien que $\dfrac{f(y)-f(a)}{y-a} \geqslant \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \Leftrightarrow \tau_a(y) \geqslant \tau_a(x)$.
Donc la fonction τ_a est croissante sur son ensemble de définition. □

Corollaire 25.8 – *Si I est un intervalle **ouvert**, alors une fonction convexe sur I est continue.*

Démonstration. Soit $a \in I$. Alors la fonction τ_a de la proposition précédente est croissante sur $I \setminus \{a\}$.
Par le théorème de la limite monotone, elle admet donc une limite, finie ou infinie lorsque x tend vers a par valeurs inférieures.
Mais puisque I est ouvert, il existe $\eta > 0$ tel que $]a, a+\eta] \subset I$, et donc en particulier, pour tout $x \in I \cap]-\infty, a[$, $\tau_a(x) \leqslant \tau_a(a+\eta)$.
Donc la restriction de τ_a à $I \cap]-\infty, a[$ est croissante majorée, et donc admet une limite **finie** en a.
Et sur le même principe, τ_a admet une limite finie à droite en a.
Mais alors pour $x \neq a$, $f(x) = \tau_a(x) \times (x-a) + f(a) \underset{x \to a^{\pm}}{\longrightarrow} f(a)$.
Et donc $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, si bien que f est continue en a. Et donc est continue sur I. □

Remarque Ceci prouve même un peu mieux qu'annoncé, à savoir que f est dérivable à gauche en a.

⚠ Ceci n'est plus valable sur un intervalle qui n'est pas ouvert, la preuve utilise vraiment le fait que I contient des points de part et d'autre de a pour prouver la finitude des limites

de τ_a.
Par exemple, sur $[-1,1]$, la fonction ci-contre est convexe, mais n'est pas continue en ± 1.

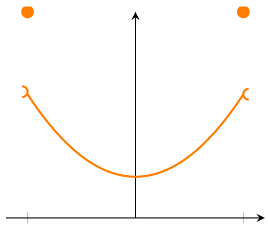


Figure 25.2– Une fonction convexe non continue sur $[-1,1]$.

Corollaire 25.9 (Inégalité des pentes) – *Soit : $I \to \mathbf{R}$ une fonction convexe. Alors pour $a < b < c$ trois éléments distincts de I, on a*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

Ce qui s'écrit encore $\tau(a,b) \leqslant \tau(a,c) \leqslant \tau(b,c)$.

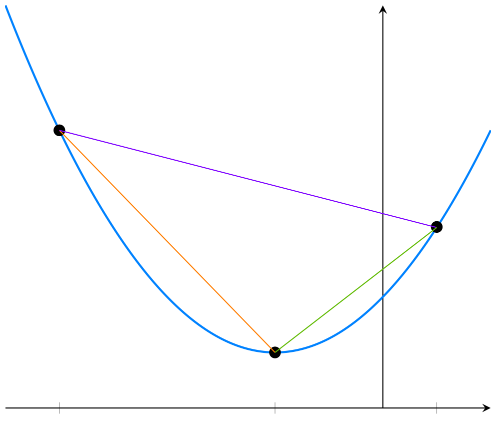


Figure 25.3 – L'inégalité des pentes
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

Démonstration. Puisque τ_a est croissante, $\tau(a,b) = \tau_a(b) \leqslant \tau_a(c) = \tau(a,c)$.
Et puisque τ_c est croissante, $\tau(a,c) = \tau_c(a) \leqslant \tau_c(b) = \tau(b,c)$. □

25.1.4 Inégalité de Jensen

Le résultat qui suit est probablement le seul de ce chapitre qu'il n'est pas facile d'interpréter géométriquement pour l'instant.

Proposition 25.10 (Inégalité de Jensen) : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction convexe. Alors $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall (x_1,\dots,x_n) \in I^n$, $\forall (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in [0,1]^n$*

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

Positivité
Remarquons qu'on pourrait se contenter de demander aux λ_i d'être positifs, puisque s'ils sont positifs et de somme 1, alors tous sont plus petits que 1, et donc dans $[0,1]$.

Démonstration. Procédons par récurrence sur n.
Pour $n=1$, il n'y a rien à dire, puisque nécessairement $\lambda_1 = 1$.
Pour $n=2$, si λ_1, λ_2 sont deux réels positifs tels que $\lambda_1+\lambda_2 = 1$, alors $\lambda_2 = 1-\lambda_1$, et donc il s'agit de la définition de la convexité :

$$\forall (x_1,x_2) \in I^2,\ f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2) = f(\lambda_1x_1+(1-\lambda_1)x_2) \leqslant \lambda_1 f(x_1)+(1-\lambda_1)f(x_2) = \lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2).$$

Supposons la propriété vraie au rang n, et soient $(x_1,\dots,x_{n+1}) \in I^{n+1}$ et $(\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1}) \in [0,1]^{n+1}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$.

▸ Si $\lambda_{n+1} = 1$, alors $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, et donc il n'y a rien à dire.

▸ Si $\lambda_{n+1} \neq 1$, posons $y = \dfrac{1}{1-\lambda_{n+1}} \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$.

Notons $a = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i$ et $b = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i$, de sorte que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a \leqslant x_i \leqslant b$. Alors puisque les λ_i sont positifs,

$$a \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \leqslant b \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Et puisque $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$, $1 - \lambda_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, si bien que $a \leqslant \underbrace{\frac{1}{1-\lambda_{n+1}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i}_{=y} \leqslant b$.

Donc[3] $y \in [a, b] \subset I$.

[3] I est un intervalle.

Et on a alors $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = (1-\lambda_{n+1})y + \lambda_{n+1} x_{n+1}$.
Donc par l'inégalité de convexité,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) = f\left((1-\lambda_{n+1})y + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \leqslant (1-\lambda_{n+1}) f(y) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}).$$

Par ailleurs, on a $f(y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} x_i\right)$, où les $\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}}$ sont des réels positifs tels que $\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} = \frac{1}{1-\lambda_{n+1}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \frac{1-\lambda_{n+1}}{1-\lambda_{n+1}} = 1$.
Donc par l'hypothèse de récurrence,

$$f(y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} f(x_i).$$

Et donc au final,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leqslant (1-\lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i).$$

La propriété est héréditaire, par le principe de récurrence elle est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. □

Remarques. ▸ Pour $n = 2$, on retrouve donc la définition de la convexité.
▸ Le résultat reste valable pour une fonction concave en renversant les inégalités.

Exemple 25.11 L'inégalité arithmético-géométrique

Nous avons déjà mentionné la concavité de la fonction ln sur $\mathbf{R}_+^*$.
Soient donc $x_1, \dots, x_n$ des réels strictement positifs, et posons $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}$, qui sont donc des réels positifs de somme 1.
On a alors, par l'inégalité de Jensen,

$$\ln\left(\frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \cdots + \frac{x_n}{n}\right) \geqslant \frac{1}{n}\ln(x_1) + \cdots + \frac{1}{n}\ln(x_n).$$

Par croissance de l'exponentielle, il vient donc

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geqslant \exp\left(\frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)\right) \Leftrightarrow \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$

Autrement dit, la moyenne arithmétique de $x_1, \dots, x_n$ est supérieure ou égale à leur moyenne géométrique.
Cette inégalité est appelée l'inégalité arithmético-géométrique[4].

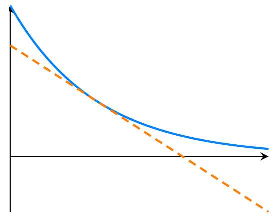
[4] Et nous en avons déjà parlé en DM, c'est de son fait que vous préférez que j'utilise une moyenne arithmétique plutôt qu'une moyenne géométrique sur vos bulletins.

25.2 Convexité et dérivabilité

Proposition 25.12 : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ dérivable. Alors il y a équivalence entre :*

1. *f est convexe*
2. *f' est croissante*
3. *$\mathscr{C}_f$ est, sur I, au dessus de ses tangentes. C'est-à-dire*

$$\forall (a,b) \in I^2,\ f(b) \geqslant f'(a)(b-a) + f(a).$$



Une fonction convexe et une de ses tangentes

Démonstration. *i)* $\Rightarrow$ *ii)* Soient $a < b \in I$. Alors pour tout $x \in]a,b[$, on a, par l'inégalité des pentes,

$$\tau(a,x) \leqslant \tau(a,b) \leqslant \tau(b,x).$$

En faisant tendre x vers a, il vient donc $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \tau(a,x) \leqslant \tau(a,b)$ et en faisant tendre x vers b, $f'(b) = \lim\limits_{x\to b} \tau(b,x) \geqslant \tau(a,b)$.
Et donc $f'(a) \leqslant \tau(a,b) \leqslant f'(b)$, si bien que f est croissante.

ii) $\Rightarrow$ *iii)* Soit $a \in I$, et soit $g : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - f'(a)(x-a) - f(a) \end{array} \right.$.
Alors g est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $g'(x) = f'(x) - f'(a)$, qui est du signe de $x - a$.
Donc g est décroissante sur $I \cap]-\infty, a[$ et croissante sur $I \cap [a, +\infty[$.
Puisque de plus $g(a) = f(a) - f(a) = 0$, g est positive sur I tout entier, et donc pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant f'(a)(x-a) + f(a)$.

iii) $\Rightarrow$ *i)* Soient $a, b \in I$, et soit $\lambda \in [0,1]$. Notons alors $x = (1-\lambda)a + \lambda b$, de sorte que $f(a) \geqslant f'(x)(a-x) + f(x)$ et $f(b) \geqslant f'(x)(b-x) + f(x)$.
Et alors

$$(1-\lambda)f(a) + \lambda f(b) \geqslant f'(x)\big((1-\lambda)(a-x) + \lambda(b-x)\big) + f(x) \geqslant f'(x)\big((1-\lambda)a + \lambda b - x\big) + f(x) \geqslant f(x) \geqslant f\big((1-\lambda)a + \lambda b\big).$$

Donc f est convexe. □

Pour le dire avec les mains, une fonction convexe est une fonction dont la pente augmente, donc qui «tourne vers la gauche». Et une fonction concave est une fonction qui «tourne vers la droite».

Exemple 25.13

On retrouve ainsi deux inégalités classiques déjà rencontrées en début d'année[5] : puisque exp est convexe, et que sa tangente en 0 a pour équation $y = x + 1$, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $e^x \geqslant 1 + x$.
Et de même, ln étant concave, avec une tangente en 1 d'équation $y = x - 1$, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $\ln(x) \leqslant x - 1$.
Ce qui s'écrit encore : $\forall x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

[5] Et prouvées sans parler de convexité.

Corollaire 25.14 – *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ deux fois dérivable. Alors f est convexe si et seulement si f'' est positive.*

Démonstration. f est convexe $\Leftrightarrow$ f' est croissante $\Leftrightarrow$ f'' est positive. □

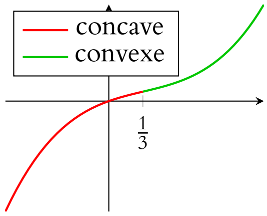
Ceci nous permet de retrouver à peu de frais la convexité de l'exponentielle, ou encore de la fonction carré ou de la fonction inverse sur $\mathbf{R}_+^*$.

Définition 25.15 – Soit $f : I \to \mathbf{R}$, et soit $a \in I$ intérieur à I.
On dit que a est un **point d'inflexion** de f s'il existe $\eta > 0$ tel que f soit convexe sur $I \cap]-\infty, a]$ et concave sur $I \cap [a, +\infty[$, ou le contraire.
Si f est deux fois dérivable sur I, c'est en particulier un point tel que $f''(a) = 0$.

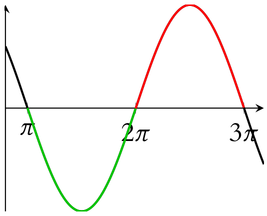
Autrement dit
Un point d'inflexion est un point où f change de convexité.

Exemples 25.16

▸ Soit $f : x \mapsto x^3 - x^2 + x$.
Alors $f''(x) = 6x - 2$, s'annule en $x = \frac{1}{3}$.
De plus, sur $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right]$, f'' est négative, donc f est concave. Et sur $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$, f'' est positive, donc f est convexe. Donc f possède un point d'inflexion en $\frac{1}{3}$.
▸ Soit $f : x \mapsto \sin(x)$. Alors $\forall x \in \mathbf{R}$, $f''(x) = -\sin(x)$.
Donc sur $[\pi, 2\pi]$, $f'' \geqslant 0$, et sur $[2\pi, 3\pi]$, $f'' \leqslant 0$, si bien que f est convexe sur $[\pi, 2\pi]$ et concave sur $[2\pi, 3\pi]$, donc elle possède un point d'inflexion en π.



$x \mapsto x^3 - x^2 + x$



sin a un point d'inflexion en 2π.

⚠ Un point avec $f''(a) = 0$ n'est pas forcément un point d'inflexion, par exemple la fonction $x \mapsto x^4$ a une dérivée seconde qui s'annule en 0, elle n'y change pas de convexité puisqu'elle est convexe sur $\mathbf{R}$ tout entier.

Notons enfin qu'une fonction dérivable qui possède un point d'inflexion en a traverse sa tangente en a. En effet, si elle est par exemple convexe, puis concave, alors $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la tangente à gauche de a et en dessous à droite de a.