24 Dénombrement

Dénombrer, c'est compter le nombre d'éléments d'un ensemble. Autrement dit, déterminer son cardinal.
Il s'agit d'un concept important notamment en probabilités, dans les situations d'équiprobabilité, où on utilise alors le sacro-saint principe[1] du

$$\text{probabilité} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre total de cas}}.$$

[1] Dont nous reparlerons prochainement.

Les outils à notre disposition pour compter sont assez peu nombreux et finalement assez simples, mais dénombrer correctement demande un peu de pratique.

24.1 Retour sur la notion de cardinal

Rappelons qu'un ensemble E est dit fini s'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que E soit en bijection avec $[\![1, n]\!]$.
Nous avons alors prouvé qu'un tel n est unique, et est appelé le cardinal de E. On le note $|E|$, $\operatorname{Card} E$ ou encore $\#E$.

La plupart des propriétés qui suivent sont très intuitives. Nous allons tout de même les prouver proprement à l'aide de la définition du cardinal, mais le programme officiel mentionne clairement :

l'utilisation systématique de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme.

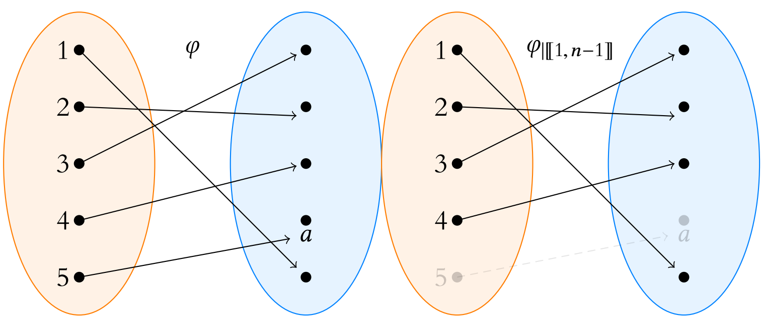
Laissez donc de la place à votre intuition !

> **Proposition 24.1 :** *Si E est de cardinal n et si F est en bijection avec E, alors F est fini, de cardinal n.*

Démonstration. Notons $\varphi : [\![1, n]\!] \to E$ et $\tau : E \to F$ deux bijections.
Alors $\tau \circ \varphi$ est une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans F. Et donc F est fini de cardinal n. □

Lemme 24.2. Si E est un ensemble non vide de cardinal $n \in \mathbf{N}^*$, alors pour $a \in E$, $E \setminus \{a\}$ est de cardinal $n - 1$.

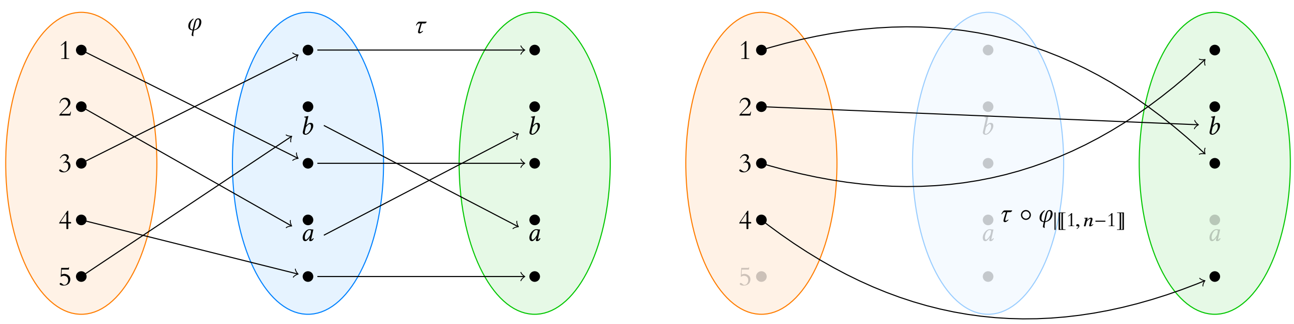
Démonstration. Si $E = \{a\}$, alors $E \setminus \{a\} = \emptyset$ est de cardinal $0 = |E| - 1$.
Si $E \neq \{a\}$, soit $\varphi : [\![1, n]\!] \to E$ une bijection.
► **Si $\varphi(n) = a$**, alors $\varphi_{|[\![1, n-1]\!]}$ est une bijection de $[\![1, n-1]\!]$ sur $E \setminus \{a\}$.



► **Si $\varphi(n) = b \neq a$.** Considérons alors $\tau \in \mathfrak{S}_E$ la permutation[2] de E qui échange a et b et laisse invariants tous les autres éléments de E.

[2] Rappelons que ceci signifie juste bijection de E dans E.

C'est bien une bijection puisqu'il s'agit d'une involution : son carré est égal à l'identité.
Alors $\tau \circ \varphi_{|[\![1,n-1]\!]}$ est une bijection de $[\![1,n-1]\!]$ sur $E \setminus \{a\}$. □



> **Proposition 24.3 :** *Soit E un ensemble fini et soit F une partie de E. Alors F est fini et* $\operatorname{Card} F \leqslant \operatorname{Card} E$.
> *De plus, on a égalité si et seulement si $E = F$.*

Démonstration. Par récurrence sur $\operatorname{Card} E$.
Si E est vide, c'est évident.
Supposons la propriété vraie pour un ensemble de cardinal n et soit E de cardinal $n+1$, soit F une partie de E.
► Si $F = E$, alors F est fini, de même cardinal que E.
► Sinon, soit $a \in E \setminus F$.
Alors $F \subset E \setminus \{a\}$, et ce dernier ensemble est de cardinal n.
Donc F est fini, de cardinal inférieur à n. Et donc de cardinal inférieur à $n+1$.
De plus, on ne peut avoir $\operatorname{Card}(F) = \operatorname{Card}(E)$ dans ce dernier cas, donc il y a égalité si et seulement si $E = F$. □

Remarque. Le cas d'égalité nous dit que pour prouver une égalité entre deux ensembles finis A et B de même cardinal, il suffit de prouver l'une des deux inclusions $A \subset B$ ou $B \subset A$.

Analogie
Cela ressemble au fait que deux espaces vectoriels de dimension finie sont égaux si et seulement si l'un inclus dans l'autre, et qu'ils ont même dimension.

Lemme 24.4. Soit f une application surjective de E dans F, avec E fini. Alors il existe une injection de F dans E.

Démonstration. Notons $\varphi : [\![1,n]\!] \to E$ une bijection.
Soit $y \in F$. Alors y possède des antécédents par f. Posons $n_y = \min\{\varphi^{-1}(x), x \in f^{-1}(\{y\})\}$ et $g(y) = \varphi(n_y)$.
Autrement dit, une fois qu'on voit les éléments de E comme étant numérotés par les entiers de 1 à n, on note $g(y)$ l'élément de numéro minimal parmi les antécédents de y par f.
Alors $g(y)$ étant un antécédent de y par f, on a $f(g(y)) = y$. Et donc $f \circ g = \mathrm{id}_F$. Puisque id_F est injective, il en est de même de g. □

Relecture
Maintenant que vous avez l'explication, relisez la formule définissant g pour vous convaincre qu'il s'agit bien de ce qu'on annonce.

Remarque. Le résultat reste valable même si E n'est pas fini, mais nécessite alors l'axiome du choix[3]. L'idée est que pour choisir un antécédent de y parmi tous ces antécédents, il faut l'axiome du choix.
Sauf si on possède un moyen standard de choisir, par exemple en prenant «le plus petit» d'entre eux, en un sens à préciser.
Mais par exemple, le raisonnement ci-dessus se transposerait au cas où il existe une bijection $\varphi : \mathbf{N} \to E$.

[3] Et comme d'habitude, je ne souhaite pas vous parler de l'axiome du choix.

> **Proposition 24.5 :** *Soient E et F deux ensembles. Alors*
> 1. *S'il existe une injection $E \to F$ avec F fini, alors E est fini et* $\operatorname{Card} E \leqslant \operatorname{Card} F$.
> 2. *S'il existe une surjection $E \to F$ avec E fini, alors F est fini et* $\operatorname{Card} F \leqslant \operatorname{Card} E$.

Démonstration. 1. Soit $f : E \to F$ injective. Alors f réalise une bijection de E sur $f(E)$.
Mais F étant fini, $f(E) \subset F$ est fini, avec $\mathrm{Card}\, f(E) \leqslant \mathrm{Card}\, F$.
Et puisque E est en bijection avec $f(E)$, E est également fini avec $\mathrm{Card}\, E = \mathrm{Card}\, f(E) \leqslant \mathrm{Card}\, F$.

2. Par le lemme précédent, il existe une injection de F dans E, avec E fini, donc par le point 1) F est fini et $\mathrm{Card}\, F \leqslant \mathrm{Card}\, E$.

□

Corollaire 24.6 (Principe des tiroirs de Dirichlet) – *Si E et F sont deux ensembles finis tels que $\mathrm{Card}\, E > \mathrm{Card}\, F$, alors une application $f : E \to F$ n'est jamais injective. Autrement dit, il existe deux éléments distincts de E qui ont même image par f.*
Un énoncé plus parlant[4] est : «si on range n paires de chaussettes dans m tiroirs, avec $m < n$, alors l'un des tiroirs contient au moins deux paires de chaussettes.»

[4] Et bien moins rigoureux.

Démonstration. C'est la contraposée du premier point de la proposition précédente. □

Le résultat qui suit est assez intuitif si on voit une application entre ensembles finis comme un ensemble de flèches reliant les éléments des deux ensembles.
Si les deux ensembles ont le même cardinal, et que vers tout élément de F point une flèche (*i.e.* lorsqu'on a une surjection), alors il n'y en a qu'une seule (donc on a une injection).

Proposition 24.7 : *Soient E et F deux ensembles finis* ***de même cardinal****, et soit $f : E \to F$. Alors il y a équivalence entre :*

1. *f est injective*
2. *f est surjective*
3. *f est bijective.*

Analogie
Vous aurez noté l'analogie avec les applications linéaires entre espaces de même dimension.

Démonstration. Il est clair qu'il suffit de prouver 1) ⇔ 2).

Supposons donc f injective. Alors $f(E)$ est une partie de F, qui est en bijection avec E, donc de même cardinal que E.
Et en particulier de même cardinal que F. Donc $f(E) = F$, de sorte que f est surjective.

Inversement, si f est surjective, raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $x \neq y$ deux éléments distincts de E tels que $f(x) = f(y)$.
Alors f réalise une surjection de $E \setminus \{x\}$ sur F.
Donc $\mathrm{Card}(E \setminus \{x\}) \geqslant \mathrm{Card}\, F$.
Soit encore $\mathrm{Card}\, E - 1 \geqslant \mathrm{Card}\, F$, ce qui contredit notre hypothèse.
Donc f est injective. □

24.1.1 Cardinal et opérations ensemblistes

Proposition 24.8 : *Soit E un ensemble et soient A et B deux parties finies de E. Alors*

1. *si A et B sont disjointes,* $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}\, A + \mathrm{Card}\, B$.
2. $\mathrm{Card}(A \setminus B) = \mathrm{Card}\, A - \mathrm{Card}(A \cap B)$.
   En particulier, si E est fini, $\mathrm{Card}\, \overline{A} = \mathrm{Card}\, E - \mathrm{Card}\, A$.
3. $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}\, A + \mathrm{Card}\, B - \mathrm{Card}(A \cap B)$.

En particulier
Ceci prouve que $A \cup B$ est aussi une partie finie.

Vous rencontrerez parfois la notation $A \sqcup B$ pour désigner l'union de deux ensembles A et B lorsque ceux-ci sont disjoints (on parle d'union disjointe).
Dans ce cas le premier point s'écrit $\mathrm{Card}(A \sqcup B) = \mathrm{Card}\, A + \mathrm{Card}\, B$.

Analogie
Cette notation est à mettre en parallèle avec la somme directe de deux sev : $F \oplus G$ désigne $F + G$, lorsqu'on les sait en somme directe.
De la même manière, $A \sqcup B$ désigne $A \cup B$, quand ils sont disjoints.

Démonstration. 1. Supposons donc A et B disjoints, de cardinaux respectifs n et p.
Soient alors $\varphi : [\![1, n]\!] \to A$ et $\psi : [\![1, p]\!] \to B$ deux bijections.

Soit alors θ la fonction définie sur $[\![1, n+p]\!]$ par

$$\forall k \in [\![1, n+p]\!],\ \theta(k) = \begin{cases} \varphi(k) & \text{si } 1 \leqslant k \leqslant n \\ \psi(k-n) & \text{si } n+1 \leqslant k \leqslant n+p \end{cases}$$

Alors θ est à valeurs dans $A \cup B$ et est surjective, puisque si $x \in A$, $x = \theta(\varphi^{-1}(x))$ et si $x \in B$, $x = \theta(n + \psi^{-1}(x))$.
De plus, θ est injective car si $(k, \ell) \in [\![1, n+p]\!]^2$ sont tels que $\theta(k) = \theta(\ell)$, alors

- soit k et ℓ sont tous deux inférieurs ou égaux à n, auquel cas $\theta(j) = \theta(\ell) \Leftrightarrow \varphi(k) = \varphi(\ell)$. Et puisque φ est injective, on a donc $k = \ell$.
- de même, si k et ℓ sont supérieurs strictement à n, on conclut par injectivité de ψ.
- enfin, on ne peut avoir l'un des deux nombres k, ℓ dans $[\![1, n]\!]$ et l'autre dans $[\![n+1, n+p]\!]$, car alors l'une des deux images par θ serait dans A et l'autre dans B. Et ces deux ensembles étant disjoints, on ne peut avoir $\theta(k) = \theta(\ell)$.

Donc θ est une bijection de $[\![1, n+p]\!]$ sur $A \cup B$, de sorte que

$$\operatorname{Card}(A \cup B) = n + p = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B.$$

2. Il s'agit de noter que[5] $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, et cette union est disjointe. Donc par le point précédent,

$$\operatorname{Card} A = \operatorname{Card}(A \setminus B) + \operatorname{Card}(A \cap B) \Leftrightarrow \operatorname{Card}(A \setminus B) = \operatorname{Card} A - \operatorname{Card}(A \cap B).$$

3. On a $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$, et cette union est disjointe. Donc

$$\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card}(B \setminus A) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card}(A \cap B).$$

□

[5] C'est en fait très exactement la définition de $A \setminus B$.

La formule pour le cardinal d'une union est somme toute assez intuitive : lorsqu'on calcule la somme $\operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B$, on a évidemment compté tous les éléments de $A \cup B$. Mais certains ont été comptés deux fois : ceux de $A \cap B$, et c'est pour cette raison qu'on doit retrancher $\operatorname{Card}(A \cap B)$.

Exemple 24.9

Essayons de généraliser la formule pour le cardinal d'une union à une union de trois parties A, B et C d'un ensemble E. On a

$$\begin{aligned}\operatorname{Card}(A \cup B \cup C) &= \operatorname{Card}((A \cup B) \cup C) = \operatorname{Card}(A \cup B) + \operatorname{Card}(C) - \operatorname{Card}((A \cup B) \cap C) \\ &= \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card}(A \cap B) + \operatorname{Card} C - \operatorname{Card}((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\ &= \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B + \operatorname{Card} C - \operatorname{Card}(A \cap B) - \operatorname{Card}(A \cap C) - \operatorname{Card}(B \cap C) + \operatorname{Card}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

Là encore il est intéressant d'essayer de comprendre l'origine de chacun de ces termes[6].
Il existe une formule plus générale pour le cardinal d'une intersection de n parties de E : c'est la formule du crible[7], hors programme et que nous rencontrerons en TD.

[6] Le seul qui nécessite une vraie réflexion est le dernier.

[7] Parfois appelée *formule du crible de Poincaré* bien qu'elle était déjà connue de de Moivre, né près de deux siècles avant Poincaré.

Corollaire 24.10 – *Si $A_1, \dots, A_n$ sont des parties deux à deux disjointes d'un ensemble E, alors* $\operatorname{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \operatorname{Card}(A_i)$.

Démonstration. Par récurrence sur n. □

Lemme 24.11. Soient E et F deux ensembles, avec F fini, et soit $f : E \to F$.
Si pour tout $y \in F$, $f^{-1}(\{y\})$ est fini alors E est fini et

$$\operatorname{Card}(E) = \sum_{y\in F} \operatorname{Card} f^{-1}(\{y\}).$$

En particulier, si tous les éléments de F ont le même nombre p d'antécédents par f, alors $\operatorname{Card}(E) = p\operatorname{Card}(F)$.

Démonstration. On a $E = \bigcup_{y\in F} f^{-1}(\{y\})$ et les $f^{-1}(\{y\})$ sont deux à deux disjoints[8].
Donc $\operatorname{Card} E = \sum_{y\in F} \operatorname{Card} f^{-1}(\{y\})$. □

[8] Car un élément possède une seul image.

Ce lemme[9] est parfois appelé *lemme des bergers*, qui dit grosso modo que pour connaître le nombre de moutons sous sa garde, un berger n'a qu'à compter le nombre de pattes, puis le diviser par 4.
C'est le cas où f est l'application qui à une patte associe son mouton, et pour laquelle on a donc $p = 4$.

[9] Ou des corollaires de ce lemme, d'énoncé plus simple. Par exemple le fait que si E est partitionné en n ensembles de cardinal p, alors $\operatorname{Card} E = np$.

D'apparence anodine, c'est en fait un résultat fondamental que nous utiliserons tout le temps[10].
Lorsqu'une expérience se passe en plusieurs étapes, avec par exemple n choix possibles à l'étape 1, et **pour chaque choix de l'étape 1**, p choix possibles à l'étape 2, alors le nombre total de choix est np.
En effet, cela revient à partitionner l'ensemble des possibles en n sous-ensembles (correspondant aux n choix de la première étape), de cardinal p (les choix de la seconde étape).

[10] Sans forcément avoir besoin de le reconnaître et encore moins de le citer.

Exemples 24.12

► Un étudiant à l'université doit choisir une majeure et une mineure parmi 10 matières enseignées, ainsi qu'une langue parmi 4.
Il a donc 10 choix pour sa majeure. Une fois celle-ci choisie, il lui reste 9 choix pour la mineure. Et 4 pour la langue.
Soit un total de $10 \times 9 \times 4 = 360$ choix possibles.
► Le nombre de mots de n lettres ne comportant pas deux fois de suite la même lettre est $26 \times 25^{n-1}$.
En effet, il y a 26 choix pour la première lettre, mais à chacune des étapes suivantes, pour obtenir une lettre différente de la précédente, il ne reste que 25 choix.

Proposition 24.13 (Cardinal d'un produit) : *Soient E et F deux ensembles finis. Alors $E \times F$ est fini et*

$$\operatorname{Card}(E\times F) = \operatorname{Card}(E) \times \operatorname{Card}(F).$$

Démonstration. Considérons l'application $\pi : \left|\begin{array}{ccc} E\times F & \longrightarrow & F \\ (x,y) & \longmapsto & y \end{array}\right.$.
Alors pour tout $y \in F$, $\pi^{-1}(\{y\}) = \{(x,y),\ x \in E\}$, qui est en bijection[11] avec E, donc de cardinal $\operatorname{Card}(E)$.
Par le lemme des bergers, $\operatorname{Card}(E\times F) = \operatorname{Card}(E) \times \operatorname{Card}(F)$. □

[11] Via $\varphi : \left|\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \pi^{-1}(\{y\}) \\ x & \longmapsto & (x,y) \end{array}\right.$.

Cette proposition se généralise facilement[12] à un produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles finis.

[12] Par récurrence.

Corollaire 24.14 – *Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et soient $E_1, \dots, E_n$ des ensembles finis. Alors $E_1 \times \cdots \times E_n$ est fini et*

$$\operatorname{Card}(E_1 \times \cdots \times E_n) = \prod_{i=1}^{n} \operatorname{Card}(E_i).$$

Exemple 24.15

Sur un alphabet de 26 lettres, on peut construire 26^5 mots de 5 lettres.

Proposition 24.16 : *Soient E et F deux ensembles finis. Alors $F^E = \mathscr{F}(E,F)$ est fini et* $\operatorname{Card}(F^E) = (\operatorname{Card} F)^{\operatorname{Card} E}$.

Notation
Voici qui justifie la notation F^E.

Démonstration. Notons $E = \{y_1, \dots, y_n\}$, avec $n = \operatorname{Card} E$.
Alors $\psi : \left| \begin{array}{ccc} F^E & \longrightarrow & F^n \\ f & \longmapsto & (f(y_1), \dots, f(y_n)) \end{array} \right.$ est une bijection entre F^E et F^n.
Donc ces deux ensembles ont même cardinal. □

Le résultat suivant a déjà été mentionné :

Corollaire 24.17 (Nombre de parties d'un ensemble) – *Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors $\mathscr{P}(E)$ est fini, de cardinal 2^n.*

Démonstration. Nous avons déjà prouvé que $\psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \{0,1\}^E \\ A & \longmapsto & \mathbb{1}_A \end{array} \right.$ est une bijection[13] de $\mathscr{P}(E)$ sur $\{0,1\}^E$.
Or ce dernier ensemble est de cardinal 2^n. □

[13] Ce qui signifie qu'une partie de E est entièrement caractérisée par sa fonction indicatrice.

Remarque. Ce résultat est en fait assez intuitif : choisir une partie de E, c'est pour chacun des n éléments de E choisir si on le met ou non dans notre partie.
Donc il y a deux choix pour le premier élément (le prendre ou ne pas le prendre), deux pour le second, etc, deux pour le dernier.
Soit un total de 2^n choix, et donc 2^n parties de E.

24.2 ARRANGEMENTS ET PERMUTATIONS D'UN ENSEMBLE FINI

Définition 24.18 – Soit E un ensemble, et $p \in \mathbf{N}$. On appelle ***p*-arrangement** d'éléments de E tout p-uplet[14] d'éléments **distincts** de E.

[14] En combinatoire, on dit plus souvent p-liste.

Remarques. ► Si $p > \operatorname{Card} E$, il est évident qu'il n'existe pas de p-arrangement d'éléments de E.
► Formellement, un p-arrangement de E est un élément de

$$\{(x_1, \dots, x_p) \in E^p \mid \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j\}.$$

Proposition 24.19 : *Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors pour $p \in [\![0,n]\!]$, il existe $n(n-1)\cdots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ p-arrangements distincts de d'éléments de E.*

Démonstration. Pour choisir un arrangement, il faut choisir le premier élément (ce qui nous donne n choix).
Puis pour chaque choix du premier élément, il y a $n-1$ choix possibles d'un second élément différent du premier.
Puis pour chaque choix des deux premiers éléments, il y a $n-2$ choix possibles d'un troisième distinct des deux premiers, etc.
Soit au total $n(n-1)\cdots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Remarque
C'est le lemme des bergers qui justifie qu'on considère des produits.

Vous préférez une preuve plus rigoureuse ? D'accord, mais c'est la dernière fois !
Notons $\mathscr{A}_E^p$ l'ensemble des p-arrangements de E, et A_n^p le nombre de p-arrangements d'un

ensemble de cardinal n. On admettra que ce nombre ne dépend pas de l'ensemble E de cardinal n choisi, puisque si E et F sont deux ensembles de même cardinal n, il est facile de construire une bijection entre $\mathscr{A}_E^p$ et $\mathscr{A}_F^p$ à l'aide d'une bijection $E \to F$.

Prouvons donc par récurrence sur p en prouvant que pour tout $n \geqslant p$, $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Pour $p = 1$, c'est évident puisque $\mathscr{A}_E^1 = E$.

Supposons donc que pour $p \leqslant n$, $\mathscr{A}_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$. Soit alors $n \geqslant p+1$

$$\pi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{A}_n^{p+1} & \longrightarrow & E \\ (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & x_1 \end{array} \right. .$$

Alors pour $y \in E$, $\pi^{-1}(\{y\}) = \left\{(y, x_1, \dots, x_p),\ (x_1, \dots, x_p) \in \mathscr{A}_{E\setminus\{y\}}^p\right\}$, qui est donc en bijection avec $\mathscr{A}_{E\setminus\{y\}}^p$, qui est de cardinal $A_{n-1}^p = \dfrac{(n-1)!}{(n-1-p)!}$.

Et donc par le lemme des bergers,

$$A_n^{p+1} = \sum_{y \in E} \operatorname{Card}(\pi^{-1}(\{y\})) = \sum_{y \in E} \frac{(n-1)!}{(n-1-p)!} = n\frac{(n-1)!}{n-(p+1)!} = \frac{n!}{n-(p+1)!}.$$

□

Exemple 24.20

Trente biathlètes prennent le départ d'une course. Combien y a-t-il de podiums possibles ?

Un podium est une liste ordonnée de trois athlètes. Il y en a donc autant que de 3-arrangements de l'ensemble des athlètes, soit $30 \times 29 \times 28$.

⚠ Dans un arrangement, l'ordre a une importance, puisqu'un p-uplet est ordonné : en général $(a, b) \neq (b, a)$.

Par exemple les arrangements ne sont pas pertinents pour déterminer le nombre de mains de 5 cartes contenant un brelan.

En effet, lorsqu'on dénombre de telles mains, on n'a aucune raison de distinguer 5♠ 4♦ A♣ A♠ A♥ de 5♠ A♥ A♣ A♠ 4♦

En probabilités, nous les utiliserons notamment pour dénombrer des situations de tirages successifs et **sans remise.**

Proposition 24.21 : *Soit E un ensemble à p éléments et F un ensemble à n éléments. Alors l'ensemble des applications injectives de E dans F a pour cardinal* $\begin{cases} \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$

Démonstration. Numérotons[15] les éléments de E : $E = \{x_1, \dots, x_p\}$. Choisir une fonction de E dans F, c'est choisir le p-uplet $(f(x_1), \dots, f(x_p)) \in F^p$.

Ce p-uplet correspond à une injection si et seulement si il ne contient pas deux fois le même élément, c'est-à-dire si et seulement si c'est un p-arrangement de F.

Et donc il y a autant d'injections de E dans F que de p-arrangements de F.

Soit $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ si $p \leqslant n$, et 0 sinon.

Pour le dire autrement, pour choisir une injection, il faut choisir l'image de x_1, et il y a n choix possibles.

Pour chaque choix de $f(x_1)$, il y a $n-1$ choix possibles pour l'image de x_2, qui doit être différente de $f(x_1)$.

Puis une fois l'image des deux premiers choisie, il y a $n-2$ choix possibles pour l'image de x_3, etc. □

[15] Ce qui revient à utiliser une bijection de $[\![1, p]\!]$ dans E.

Rappelons qu'une permutation d'un ensemble E est une bijection de E dans E.
Mais par ce qui a été dit précédemment, si E est fini de cardinal n, alors une application $E \to E$ est une permutation si et seulement si elle est injective. On en déduit le résultat suivant :

Proposition 24.22 : *Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbf{N}^*$. Alors $\operatorname{Card} \mathfrak{S}_E = n!$*
Autrement dit, il existe $n!$ permutations de E.

Exemple 24.23

Soit $n \geqslant 4$. Combien existe-t-il de permutations de $[\![1, n]\!]$ ayant 1, 2 et 3 comme points fixes ? De permutations laissant stable $\{1, 2, 3\}$?

Choisir une permutation ayant 1, 2 et 3 comme points fixes revient à choisir une permutation de $[\![4, n]\!]$. Or il y a $(n-3)!$ telles permutations.
Pour choisir une permutation σ laissant stable $\{1, 2, 3\}$, il faut comme précédemment choisir une permutation de $[\![4, n]\!]$, mais il faut également choisir la manière dont σ agit sur $\{1, 2, 3\}$, c'est-à-dire choisir une permutation de $[\![1, 3]\!]$. Et il y a $3! = 6$ telles permutations.
Soit un total de $6 \times (n-3)!$ permutations stabilisant $\{1, 2, 3\}$.

Remarque
Les valeurs exactes des images de 1, 2 et 3 n'ont pas d'importance : le même résultat vaudrait pour le nombre de permutation qui échangent 1 et 2 et fixent 3.

24.3 COMBINAISONS ET PARTIES D'UN ENSEMBLE

Définition 24.24 – Soit E un ensemble et soit $p \in \mathbf{N}$. On appelle **p-combinaison** de E toute partie de E de cardinal p.

La différence entre un arrangement et une combinaison est que l'arrangement est un p-uplet, donc ordonné, quand la combinaison est un ensemble, donc non ordonné.

Exemple
$(1, 2) \neq (2, 1)$ alors que

$$\{1, 2\} = \{2, 1\}.$$

Théorème 24.25 : *Le nombre de p-combinaisons d'un ensemble fini E de cardinal n est le coefficient binomial $\binom{n}{p}$.*

Autrement dit, $\binom{n}{p}$ est le nombre de parties de E de cardinal p.

Démonstration. Notons tout de suite que pour $p > n$, il n'y a rien à dire : il n'y a pas de parties de E à p éléments, et ça tombe bien puisque $\binom{n}{p} = 0$ si $p > n$.
Nous supposons donc[16] que $p \leqslant n$.
Commençons par noter qu'il y a exactement $p!$ manières d'ordonner totalement un ensemble A de cardinal p.
En effet, cela revient à choisir une bijection entre $[\![1, p]\!]$ et A.
Pour le dire autrement, l'application qui à un p-arrangement $(x_1, \ldots, x_p)$ associe la combinaison correspondante $\{x_1, \ldots, x_p\}$ est une application de l'ensemble des p-arrangements de E à valeurs dans l'ensemble des p-combinaisons de E, telle que toute p-combinaison possède $p!$ antécédents[17].
Par exemple, pour $p = 3$, les antécédents de $\{a, b, c\}$ sont $(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, b, a)$ et (c, a, b), qui sont bien au nombre de $6 = 3!$.
Et donc par le lemme des bergers, le nombre de p-arrangements de E est égal à $p!$ fois le nombre de p-combinaisons de E.
Ainsi, ce nombre de combinaisons est $\dfrac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}$. □

[16] Même si ce n'est pas vraiment indispensable.

[17] Et en particulier est surjective.

Plusieurs résultats sur les coefficients binomiaux, prouvés par le calcul trouvent alors une interprétation en termes de combinaisons.

Commençons par retrouver le fait qu'il existe 2^n parties d'un ensemble E de cardinal n.
En effet, une partie peut avoir de 0 à n éléments, et pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, il existe $\binom{n}{p}$ parties de E à p éléments.
Donc le nombre total de parties de E est $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = (1+1)^n = 2^n$.

Rappelons également que nous avions prouvé que $\binom{n}{p}$ est le nombre de manières d'obtenir p succès en n répétitions d'une expérience à n issues.
Et en effet, ce nombre de manières n'est rien d'autre que le nombre de façons de choisir les numéros des p succès parmi les n répétitions. Autrement dit, le nombre de façons de choisir une partie à p éléments de $[\![1, n]\!]$.

De plus, il est possible de retrouver des formules comme $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
En effet, choisir une partie de $[\![1, n]\!]$, c'est aussi choisir son complémentaire[18].
Or, une partie de $[\![1, n]\!]$ est de cardinal p si et seulement si son complémentaire est de cardinal $n - p$.
Et donc le nombre de manières de choisir le complémentaire d'une partie à p éléments est $\binom{n}{n-p}$, alors que le nombre de manières de choisir une partie à p éléments est $\binom{n}{p}$.

De même, il est possible de réinterpréter la formule de Pascal : $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.
Le terme de gauche est le nombre de manières de choisir une partie à p éléments de $[\![1, n]\!]$.
Mais il y a deux types de parties à p éléments de $[\![1, n]\!]$:

- celles qui contiennent n, et sont donc l'union de $\{n\}$ et d'une partie à $p-1$ éléments de $[\![1, n-1]\!]$
- celles qui ne contiennent pas n, et sont donc des parties à p éléments de $[\![1, n-1]\!]$.

Les premières sont au nombre de $\binom{n-1}{p-1}$ (le nombre de façons de choisir une partie à $p-1$ éléments de $[\![1, n-1]\!]$), et les secondes sont au nombre de $\binom{n-1}{p}$.
Donc on a bien $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.

[18] Pour le dire autrement :
$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ A & \longmapsto & \overline{A} \end{array} \right.$$
est une bijection.

Exemples 24.26

Un jeu de poker est constitué de 32 cartes (8 hauteurs par couleur), et une main est composée de 5 cartes.
► Il y a en tout $\binom{32}{5} = \dfrac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{120} = 201\,316$ mains possibles.
► Il y a 8 carrés possibles, qu'il faut compléter à l'aide d'une des $32 - 4 = 28$ autres cartes pour faire une main. Donc 8×28 mains possibles contenant un carré.
► Un full est une main composée d'un brelan et d'une paire.
Il y a 8 hauteurs possibles pour le brelan, et pour chaque hauteur, il y a $\binom{4}{3}$ brelans possibles. Enfin, une fois le brelan choisi, il reste 7 hauteurs possibles pour la paire, et au sein de chaque hauteur, $\binom{4}{2}$ paires possibles.
Soit un total de $8 \times \binom{4}{3} \times 7 \times \binom{4}{2} = 8 \times 6 \times 7 \times 4 = 1344$ fulls possibles.
► Il y a $8 \times \binom{4}{2}$ paires possibles.
On dit qu'une main est une paire si elle contient une paire et rien de mieux[19].
Une fois la paire choisie, il y a donc 28 choix possibles pour la troisième carte. Puis

[19] C'est-à-dire ni brelan, ni carré, ni full, ni même une autre paire (auquel cas on parlerait de double paire).

la quatrième ne doit être ni de la même hauteur que la troisième, ni de la même hauteur que celles de la paire. Ce qui laisse $32 - 4 - 4 = 24$ choix possible. Et enfin la dernière doit être d'une hauteur différente de toutes les autres, ce qui laisse 20 choix possibles.
Toutefois nous avons compté $3! = 6$ fois chacune des mains possibles, puisque l'ordre dans lequel on reçoit les cartes hors de la paire n'a pas d'importance.
Donc il y a en tout $8 \times \binom{4}{2} \times \dfrac{28 \times 24 \times 20}{3!} = 107\,520$ mains ne contenant qu'une paire[20].

[20] Et donc on a plus d'une chance sur deux d'avoir une telle main.

► Combien y a-t-il de nombres de 6 chiffres (en base 10) formés à l'aide de 5 chiffres différents ?
Autrement dit, combien y a-t-il de nombres de 6 chiffres dont un seul chiffre apparaît en double ?
Pour choisir un tel nombre, on commence par choisir le chiffre qui sera doublé, (ce qui nous fait 10 choix possibles), puis les positions auxquelles se trouvera ce chiffre (soit $\binom{6}{2}$ possibilités).
Il faut ensuite choisir les quatre autres chiffres, ce qui revient à choisir un 4-arrangement de l'ensemble des 9 chiffres restants.
Soit un total de $10 \times \binom{6}{2} \times \dfrac{9!}{5!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 15 = 453\,600$ possibilités.

Alternative

Il y a beaucoup de façons d'arriver à ce résultat.
Par exemple, on peut commencer par choisir 5 nombres ($\binom{10}{5}$ choix), puis de choisir lequel on doublait (5 choix), multiplier par le nombre de permutations des 6 chiffres (6! choix), puis diviser par 2, chaque nombre ayant été compté exactement 2 fois (en raison de la présence du chiffre doublé).
Soit
$$\binom{10}{5} \times 5 \times \frac{6!}{2} = 453\,600.$$

Notons qu'on peut encore discuter pour savoir si les nombres commençant par 0 sont vraiment des nombres de 6 chiffres.
J'aurais tendance à dire que non ! Les 10 chiffres possibles jouant tous des rôles symétriques, il y a autant de nombres commençant par 0 que de nombres commençant par 1, etc.
Donc $\dfrac{9}{10}$ des nombres précédemment trouvés sont bien des nombres de 6 chiffres : il y a donc en tout $9^2 \times 8 \times 7 \times 6 \times 15 = 408\,240$ nombres satisfaisant les conditions requises.