22

Dimension finie

Dans tout le chapitre, $\mathbf{K}$ désigne un corps.

22.1 Dimension d'un espace vectoriel

22.1.1 Espaces vectoriels de dimension finie

Définition 22.1 – Un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E est dit **de dimension finie** s'il possède une famille génératrice finie.
Si ce n'est pas le cas, on dit que E est de **dimension infinie.**

Exemples 22.2

▸ $\mathbf{K}^n, \mathbf{K}_n[X], \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ sont de dimension finie, puisqu'on en connaît des bases[1] finies.
▸ En revanche, $\mathbf{K}[X]$ n'est pas de dimension finie car aucune famille finie $(P_1, \dots, P_r)$ n'est génératrice de $\mathbf{K}[X]$.
En effet si on note $d = \max\{\deg P_i,\ 1 \leqslant i \leqslant r\}$, alors $\mathrm{Vect}(P_1, \dots, P_r) \subset \mathbf{K}_d[X]$.
Et donc par exemple $X^{d+1} \notin \mathrm{Vect}(P_1, \dots, P_r)$.

[1] Les bases que nous avons appelées canoniques.

Proposition 22.3 : *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille génératrice finie de E. On suppose de plus que $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille libre, avec $p \leqslant n$.*
Alors on peut compléter $(e_1, \dots, e_p)$ à l'aide de vecteurs de $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ pour obtenir une base de E.

Démonstration. Notons $A = \{X \in \mathcal{P}(\{e_{p+1}, \dots, e_n\}) \mid \{e_1, \dots, e_p\} \cup X \text{ est libre}\}$, et soit $B = \{\mathrm{Card}(X), X \in A\}$.
Puisque $\emptyset \in A$, A est non vide, et donc B est non vide. C'est donc une partie non vide et majorée[2] de $\mathbf{N}$, qui possède donc un plus grand élément d.
Soit alors $X = \{x_1, \dots, x_p\}$ un élément de A de cardinal k, de sorte que $(e_1, \dots, e_p, x_1, \dots, x_k)$ est libre.
Soit $i \in [\![p+1, n]\!]$, et supposons par l'absurde que $e_i \notin \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p, x_1, \dots, x_k)$. Prouvons qu'alors $(e_1, \dots, e_p, x_1, \dots, x_k, e_i)$ est libre.
Soient alors $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_k, \alpha \in \mathbf{K}$ tels que

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p + \mu_1 x_1 + \cdots + \mu_k x_k + \alpha x_i = 0_E.$$

Alors $\alpha = 0$, faute de quoi $x_i = -\dfrac{1}{\alpha}\left(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p + \mu_1 x_1 + \cdots + \mu_k x_k\right) \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p, x_1, \dots, x_k)$.
Et alors par liberté de $(e_1, \dots, e_p, x_1, \dots, x_k)$, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = \mu_1 = \cdots = \mu_k = 0$.
Donc $(e_1, \dots, e_p, x_1, \dots, x_k, e_i)$ est libre. En particulier, ses vecteurs sont deux à deux distincts[3] si bien que $k+1 \in B$, contredisant le fait que $k = \max B$.
Donc pour tout $i \in [\![p+1, n]\!]$, $e_i \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p, x_1, \dots, x_k)$, et puisque par ailleurs cet ensemble contient déjà $e_1, \dots, e_p$, alors· $E = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) \subset \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p, x_1, \dots, x_k)$, si bien que $(e_1, \dots, e_p, x_1, \dots, x_k)$ est génératrice de E, et donc est une base de E. □

[2] Par $n - p$.

[3] Une famille qui contient deux fois le même vecteur est liée.

Corollaire 22.4 (Théorème de la base extraite) – *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors de toute famille génératrice finie on peut extraire une base de E. En particulier, il existe des bases finies de E.*

Démonstration. Prendre $p = 0$. □

Remarques. ▶ Notons que nous avions déjà deviné ce résultat : si $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice, alors soit elle est libre et alors c'est une base. Soit l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres, et alors on peut l'enlever de notre famille tout en préservant l'aspect générateur. La famille des $n-1$ vecteurs restants est soit libre, et alors c'est une base de E, soit un vecteur est combinaison linéaire des autres et alors on peut l'enlever. Etc.
▶ L'existence de bases dans un espace vectoriel quelconque est plus subtile et nécessite l'axiome du choix. Nous n'aurons jamais besoin de supposer qu'un espace vectoriel de dimension infinie possède des bases.

Corollaire 22.5 – *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de E et soit $(f_1, \dots, f_p)$ une famille génératrice de E. Alors on peut compléter $(e_1, \dots, e_n)$ en une base de E à l'aide de certains des f_i.*

Démonstration. La famille $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p)$ est génératrice de E puisqu'elle contient une famille génératrice. On peut alors lui appliquer la proposition précédente, avec $p = n$. □

22.1.2 Cardinal des familles libres et génératrices, notion de dimension

Proposition 22.6 : *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie qui possède une famille génératrice à n éléments. Alors toute famille de cardinal supérieur ou égal à $n+1$ est liée.*

Démonstration. Il suffit de prouver le résultat pour les familles de $n+1$ vecteurs, puisque toute famille contenant une famille liée est liée.
Nous allons procéder par récurrence sur n en prouvant la propriété $\mathscr{P}(n)$: «pour tout $\mathbf{K}$-espace vectoriel E admettant une famille génératrice à n éléments, toute famille de cardinal $n+1$ est liée.»

▶ **Initialisation** : supposons que $E = \mathrm{Vect}(x)$ soit engendré par un seul vecteur x, et soit (y_1, y_2) une famille de deux vecteurs de E. Alors $\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{K}^2$ tels que $y_1 = \lambda_1 x$ et $y_2 = \lambda_2 x$.
Si $\lambda_1 = 0$, $y_1 = 0_E$, donc (y_1, y_2) est liée.
Si $\lambda_1 \neq 0$, alors $y_2 = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} y_1$ et donc (y_1, y_2) est liée.

▶ **Hérédité** : supposons $\mathscr{P}(n-1)$ vraie. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel engendré par $(x_1, \dots, x_n)$, et soit $(y_1, \dots, y_{n+1}) \in E^{n+1}$.
Alors pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, on peut écrire $y_i = Y_i + \lambda_i x_n$ avec $Y_i \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1})$ et $\lambda_i \in \mathbf{K}$.
Si tous les λ_i sont nuls, alors les y_i sont dans $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1})$, et donc par hypothèse de récurrence, forment une famille liée.
Si l'un des λ_i est non nul, quitte à renuméroter[4], supposons qu'il s'agit de λ_1.
Posons alors pour tout $i \in [\![2, n+1]\!]$, $y_i' = y_i - \dfrac{\lambda_i}{\lambda_1} y_1 = Y_i - \dfrac{\lambda_i}{\lambda_1} Y_1 \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1})$.
Alors par hypothèse de récurrence, $(y_2', \dots, y_{n+1}')$ est liée.
Il existe donc $(\alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}) \in \mathbf{K}^n$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=2}^{n+1} \alpha_i y_i' = 0_E \Leftrightarrow \sum_{i=2}^{n+1} \alpha_i \left(y_i - \frac{\lambda_i}{\lambda_1} y_1 \right) = 0_E.$$

[4] Ce qui ne change rien à la liberté de la famille

Soit encore
$$\left(-\sum_{i=2}^{n+1}\alpha_i\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)y_1+\sum_{i=2}^{n+1}\alpha_i y_i=0_E.$$
Les α_i n'étant pas tous nuls, $(y_1,\dots,y_{n+1})$ est liée. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie, pour tout $n\in\mathbf{N}^*$. □

Corollaire 22.7 – *Si E est engendré par n éléments, alors toute famille libre est finie, et de cardinal au plus n.*

Autrement dit
Toute famille libre possède un cardinal inférieur à celui de toute famille génératrice.

Exemple 22.8

Dans $\mathbf{R}^3$, la famille $(1,0,1),(0,2,-3),(4,1,3),(2,2,2)$ est nécessairement liée, car $\mathbf{R}^3$ est engendré par les trois vecteurs de la base canonique.

Corollaire 22.9 : *Si E est un espace vectoriel de dimension finie, non réduit au vecteur nul, alors toutes les bases*[5] *de E sont finies et de même cardinal.*
Le cardinal commun à toutes les bases de E est appelé ***la dimension de*** E*, notée* $\dim_{\mathbf{K}} E$*, ou plus simplement*[6]*,* $\dim E$.
Par convention[7]*, on pose* $\dim\{0_E\}=0$.

[5] Et nous avons déjà justifié qu'il en existe au moins une.

[6] Lorsqu'il n'y a pas ambiguïté sur $\mathbf{K}$.

[7] $\{0_E\}$ ne possède pas de base, ou alors c'est la famille vide.

Démonstration. Notons $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E de cardinal n.
Si $\mathscr{B}'$ est une autre base de E, supposons par l'absurde que $\mathscr{B}'$ soit infinie. Alors il existe une sous-famille de $\mathscr{B}'$ de cardinal $n+1$, nécessairement libre puisque $\mathscr{B}'$ l'est.
Mais puisque $(e_1,\dots,e_n)$ est génératrice de E, nécessairement $n+1\leqslant n$, ce qui est absurde.
Donc $\mathscr{B}'$ est finie, et le raisonnement ci-dessus prouve que son cardinal m vérifie $m\leqslant n$.
Mais de même, $\mathscr{B}'$ étant génératrice et $\mathscr{B}$ libre, il vient[8] $n\leqslant m$.
Et donc $m=n$. □

[8] Toujours par le corollaire.

Exemple 22.10

La dimension d'un espace vectoriel E doit être comprise comme le nombre de «degrés de liberté» dans le choix d'un élément de E.

Par exemple, soit $F=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x+2y-3z=0\}$.
Alors pour choisir un élément de F, on peut choisir y et z comme on le souhaite, mais alors la valeur de $x=-2y+3z$ est imposée.
Donc «moralement», F doit être de dimension 2.
Plus rigoureusement, on prouve que $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$ est dans F si et seulement si
$$(x,y,z)=(-2y+3z,y,z)=y(-2,1,0)+z(3,0,1)\in\mathrm{Vect}((-2,1,0),(3,0,1)).$$
Donc la famille $(-2,1,0),(3,0,1)$ est génératrice de F, et elle est libre car formée de deux vecteurs non colinéaires : c'est une base de F, de cardinal 2, donc $\dim F=2$.

De même, pour choisir une matrice symétrique $M=(m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, on peut choisir comme on le souhaite les éléments sur la diagonale, et ceux en dessous de la diagonale, mais cela fixe alors la valeur des éléments au dessus la diagonale.
Autrement dit, on peut choisir comme on le souhaite tous les éléments de la première colonne de M (et cela impose alors la valeur de tous ceux de la première ligne : $m_{1,2}=m_{2,1}$, etc), puis comme on veut tous ceux de la seconde colonne sauf le premier $m_{2,1}$ qui a déjà été fixé), etc, le dernier élément de la dernière colonne de M.
Ainsi, intuitivement, $\dim\mathscr{S}_n(\mathbf{K})=n+(n-1)+\dots+2+1=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Plus formellement, soit $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{S}_n(\mathbf{K})$. Alors

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{2,1} & \dots & m_{n,1} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \dots & m_{n,2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & m_{n,n-1} \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \dots & m_{n,n} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}E_{i,i} + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} m_{i,j}\left(E_{i,j}+E_{j,i}\right).$$

Donc la famille formée des $E_{i,i}$ et des $E_{i,j}+E_{j,i}$, $1 \leqslant j < i \leqslant n$ est génératrice de $\mathscr{S}_n(\mathbf{K})$.
On prouve facilement qu'elle est libre, et donc est une base de $\mathscr{S}_n(\mathbf{K})$. Étant de cardinal $n+(n-1)+\dots+1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $\dim \mathscr{S}_n(\mathbf{K}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Sur le même principe, on prouve que $\mathscr{A}_n(\mathbf{K})$, l'ensemble des matrices antisymétriques, est de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$.
En effet, il suffit de choisir les coefficients sous la diagonale, qui sont au nombre de $n-1+n-2+\dots+1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.
Plus rigoureusement, une base de $\mathscr{A}_n(\mathbf{K})$ est la famille des $E_{i,j}-E_{j,i}$, $1 \leqslant j < i \leqslant n$.

Proposition 22.11 : *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$. Alors :*

1. *toute famille libre est de cardinal au plus n.*
2. *toute famille libre de cardinal n est une base de E.*
3. *toute famille génératrice de E est de cardinal supérieur ou égal à n.*
4. *toute famille génératrice de cardinal n est une base de E.*

Démonstration.

1. C'est le corollaire 22.7.
2. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une famille libre de cardinal n. Supposons par l'absurde qu'elle ne soit pas génératrice, et soit $x \notin \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)$. Prouvons alors que $(e_1,\dots,e_n,x)$ est libre.
Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_n,\mu \in \mathbf{K}$ tels que $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n + \mu x = 0_E$.
Si $\mu \neq 0$, alors $x = -\dfrac{1}{\mu}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)$, ce qui est absurde.
Donc $\mu = 0$, et il reste donc $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0_E$, ce qui, par liberté de n, implique $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.
Ainsi, $(e_1,\dots,e_n,x)$ est libre de cardinal $n+1$, contredisant le point 1).
3. C'est encore le corollaire 22.7.
4. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ génératrice de E de cardinal n. Si elle n'est pas libre, alors l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres. Quitte à renuméroter, supposons qu'il s'agit de e_n.
Alors $E = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{n-1},e_n) = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{n-1})$, et donc $(e_1,\dots,e_{n-1})$ est une famille génératrice de E de cardinal $n-1$. C'est absurde car en contradiction avec le point 3).

□

Proposition 22.12 : *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$. Alors*

1. *toute famille libre de cardinal n est une base de E.*
2. *toute famille génératrice de E de cardinal n est une base de E.*

Démonstration. Notons $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base de E.

1. Soit $(x_1,\dots,x_n)$ une famille libre de E de cardinal n.
Par le théorème de la base incomplète, on peut lui ajouter des vecteurs de $\mathscr{B}$ pour

en faire une base de E, qui sera alors nécessairement de cardinal n.
Mais $(x_1, \dots, x_n)$ est déjà de cardinal n, donc on ne lui aura ajouté aucun vecteur : c'est déjà une base de E.

2. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille génératrice de E de cardinal n. Si cette famille n'était pas libre, l'un des vecteurs serait combinaison linéaire des autres. Quitte à les renommer, supposons qu'il s'agit de x_n. Alors $E = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1})$. Donc $(x_1, \dots, x_{n-1})$ est génératrice de E, ce qui est absurde puisqu'il existe une base de cardinal n.

□

Exemple 22.13

La famille $(1,1,0), (0,1,1), (0,2,1)$ est libre[9] dans $\mathbf{R}^3$.
Étant de cardinal $3 = \dim \mathbf{R}^3$, c'est une base de $\mathbf{R}^3$.

[9] Il faut écrire le système pour le prouver proprement, mais la position des 0 permet de se convaincre facilement de sa liberté.

Définition 22.14 – Un espace vectoriel de dimension 1 est appelé une **droite (vectorielle)**, un espace de dimension 2 est appelé un **plan (vectoriel)**.

Notons en particulier que si x est un vecteur non nul d'un espace vectoriel E, alors $\mathrm{Vect}(x)$ est une droite.
En effet, la famille formée du seul vecteur x est libre car $x \neq 0_E$, et elle est génératrice de $\mathrm{Vect}(x)$, donc c'en est une base : $\dim \mathrm{Vect}(x) = 1$.
De même, si x et y sont deux vecteurs non colinéaires, alors $\mathrm{Vect}(x, y)$ est un plan.

22.1.3 Dimension des espaces vectoriels usuels

Nous connaissons déjà des bases[10] d'un certain nombre d'espaces vectoriels. Et donc le cardinal de ces bases nous donne des dimensions :

[10] Les bases dites «canoniques».

- $\dim \mathbf{K}^n = n$
- $\dim \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}) = n \times p$. En particulier, $\dim \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) = n^2$.
- $\dim \mathbf{K}_n[X] = n + 1$

En revanche, $\mathbf{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.
De même, $\mathscr{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ n'est pas de dimension finie : nous avons prouvé en TD qu'il existe des familles libres de cardinal infini.
De même pour $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbf{K}$.

Exemples 22.15

Certains résultats d'analyse se reformulent en termes de dimension.
Nous avions prouvé que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 : $y'(t) + a(t)y = 0$ est un espace vectoriel.
De plus, nous savons que les solutions sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$ où A est une primitive de a, et $\lambda \in \mathbf{K}$.
Donc nous avons là un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension 1, et dont une base est formée de la fonction $t \mapsto e^{-A(t)}$.

De même, on prouve que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, homogène, à coefficients constants est un espace vectoriel de dimension 2.
Il faut pour cela distinguer plusieurs cas. Par exemple pour $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, dans le cas où le polynôme caractéristique possède deux solutions distinctes r_1 et r_2, il faut prouver que les fonctions $t \mapsto e^{r_1 t}$ et $t \mapsto e^{r_2 t}$ sont linéairement indépendantes, et forment une base[11] de l'ensemble des solutions.

[11] Nous savons déjà qu'il s'agit d'une famille génératrice !

Et de même pour les autres cas.

Proposition 22.16 : *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbf{K}$. Alors $E \times F$ est encore de dimension finie et* $\dim(E\times F) = \dim E + \dim F$.

Démonstration. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F.

Soit alors $(x, y) \in E\times F$. Alors il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et $\mu_1, \dots, \mu_p$ tels que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ et $y = \displaystyle\sum_{j=1}^p \mu_j f_j$. Et donc

$$(x,y) = (x, 0_F) + (0_E, y) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, 0_F\right) + \left(0_E, \sum_{j=1}^p \mu_j f_j\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot (e_i, 0_F) + \sum_{j=1}^p \mu_j (0_E, f_j).$$

Donc la famille $(e_1, 0_F) \dots, (e_n, 0_F), (0_E, f_1), \dots, (0_E, f_p)$ est génératrice de $E \times F$.
Il n'est pas difficile [12] de prouver qu'elle est libre, et donc est une base de $E \times F$, de cardinal $n + p = \dim E + \dim F$. □

[12] Et je vous invite à essayer de le faire.

Les seules vraies confusions possibles sur le corps $\mathbf{K}$ sont pour les $\mathbf{C}$-espaces vectoriels, qui peuvent aussi être vus comme des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels.

Proposition 22.17 : *Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension n, c'est-à-dire tel que $\dim_{\mathbf{C}} E = n$. Alors $\dim_{\mathbf{R}} E = 2n$.*

Démonstration. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E (en tant que $\mathbf{C}$-espace vectoriel).
Considérons alors la famille $(e_1, \dots, e_n, i\cdot e_1, \dots, i \cdot e_n)$.
Soient alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n)$ des **réels** tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k + \sum_{k=1}^n \mu_k \cdot i \cdot e_k = 0_E$.

Alors $\displaystyle\sum_{k=1}^n (\lambda_k + i\mu_k)\cdot e_k = 0_E$, et par liberté de la famille $(e_1, \dots, e_n)$, vue comme famille du $\mathbf{C}$-espace vectoriel E, pour tout k, $\lambda_k + i\mu_k = 0$ et donc $\lambda_k = \mu_k = 0$.
Donc $(e_1, \dots, e_n, i\cdot e_1, \dots, i\cdot e_n)$ est une famille libre du $\mathbf{R}$-espace vectoriel E.

D'autre part, pour tout $x \in E$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{C}^n$ tels que $x = \displaystyle\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$, et donc

$$x = \sum_{k=1}^n \underbrace{\mathrm{Re}(\lambda_k)}_{\in\mathbf{R}} \cdot e_k + \sum_{k=1}^n \underbrace{\mathrm{Im}(\lambda_k)}_{\in\mathbf{R}} \cdot i \cdot e_k.$$

Et donc $(e_1, \dots, e_n, i\cdot e_1, \dots, i\cdot e_n)$ est une famille génératrice du $\mathbf{R}$-espace vectoriel E.
C'est donc une base, de sorte que $\dim_{\mathbf{R}} E = 2n = 2\dim_{\mathbf{C}} E$. □

Exemple 22.18

Une base du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{C})$ est $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}$.

22.1.4 Cardinal des familles libres et génératrices

22.2 SOUS-ESPACES VECTORIELS EN DIMENSION FINIE

22.2.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Proposition 22.19 : *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et soit F un sous-espace vectoriel de E.*
Alors F est de dimension finie, et $\dim F \leqslant \dim E$, avec égalité si et seulement si $F = E$.

Démonstration. Si $F = \{0_E\}$, il n'y a rien à dire. Nous supposons donc $F \neq \{0_E\}$.

Une famille libre d'éléments de F est une famille libre de vecteurs de E, et donc de cardinal inférieur ou égal à $\dim E$.
L'ensemble des cardinaux possibles des familles libres de vecteurs de F est donc une partie de $\mathbf{N}^*$, non vide (car F contient des vecteurs non nuls), et majorée par $\dim E$.
Il possède donc un plus grand élément $p \in [\![1, n]\!]$.
Soit alors $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de p vecteurs de F.
Pour tout $x \in F$, $(e_1, \dots, e_p, x)$ n'est pas libre, et donc il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda_x$ non tous nuls tels que

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p + \lambda_x x = 0_E.$$

Si $\lambda_x = 0$, alors $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p = 0_E$, avec les λ_i non tous nuls, ce qui contredit la liberté de $(e_1, \dots, e_p)$.

Donc $\lambda_x \neq 0$, si bien que $x = -\dfrac{1}{\lambda_x} \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.

Donc $(e_1, \dots, e_p)$ est génératrice de F. Ceci prouve donc que F est de dimension finie, et que $p = \dim F \leqslant \dim E$.

Si $F = E$, il est évident que $\dim F = \dim E$.
Inversement, si $\dim F = \dim E$, alors une base $\mathscr{B}$ de F est une famille libre de vecteurs de E, de cardinal $\dim E$. C'est donc une famille génératrice de E, de sorte que $F = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}) = E$. □

Exemple 22.20

Voici une autre preuve du fait que $\mathbf{K}[X]$ est de dimension infinie : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$, de dimension $n+1$, donc si $\mathbf{K}[X]$ était de dimension finie, sa dimension serait supérieure ou égale à tout entier $n \in \mathbf{N}$, ce qui est absurde.

22.2.2 Dimension d'une somme

Proposition 22.21 : *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E (de dimension finie ou non), de bases respectives $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$.*
Alors $F + G$ est de dimension finie et $\dim(F + G) \leqslant \dim F + \dim G$.
De plus, on a équivalence entre :

1. *la somme $F + G$ est directe*
2. *la concaténation[13] de $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ est une base de $F + G$*
3. $\dim F + \dim G = \dim(F + G)$

Démonstration. Notons $\mathscr{B}_F = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}_G = (f_1, \dots, f_p)$ une base de G.
Alors nous avons déjà prouvé que $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p)$ est génératrice de $F + G$, qui est donc de dimension finie[14] et avec

$$\dim(F + G) \leqslant \mathrm{Card}(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p) = n + p = \dim F + \dim G.$$

[13] Qui est la famille obtenue en mettant bout à bout les vecteurs de $\mathscr{B}_F$ et ceux de $\mathscr{B}_G$, en gardant les éventuels doublons (à la différence d'une union).

[14] Car il possède une famille génératrice finie.

Pour le cas d'égalité, pour une fois, ne procédons pas par un raisonnement circulaire :
1) $\Rightarrow$ 2) Nous savons déjà que $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p)$ est génératrice de $F + G$, il s'agit de prouver qu'elle est libre.
Soient donc $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_p$ des scalaires tels que

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i}_{\in F} + \underbrace{\sum_{j=1}^{p} \mu_j f_j}_{\in G} = 0_E$$

Donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E$, et par liberté de $\mathscr{B}_F$, $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. De même, $\mu_1 = \dots = \mu_r = 0$.

2) $\Rightarrow$ 1). Supposons $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p)$ libre, et soit $x \in F \cap G$. Alors il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_p$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{j=1}^{p} \mu_j f_j$.

Et donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i - \sum_{j=1}^{p} \mu_j f_j = 0_E$, donc par liberté de $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p)$, $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ et donc $x = 0_E$.
2) $\Rightarrow$ 3) Évident par définition de la dimension.

3) $\Rightarrow$ 2) Nous savons que $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p)$ est génératrice de $F + G$. Elle est de cardinal $\dim F + \dim G = \dim(F + G)$, donc c'est une base de $F + G$. □

Définition 22.22 – Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, de dimension finie, en somme directe, alors on appelle **base adaptée à la somme directe** $F \oplus G$ toute base de $F \oplus G$ obtenue par concaténation d'une base de F et d'une base de G.

⚠ Une proposition précédente nous dit que lorsque la somme est directe, la concaténation de toute base de F avec toute base de G est une base de $F + G$, il n'y a pas de réciproque : toutes les bases de $F \oplus G$ ne sont pas forcément adaptées à la somme directe.

Corollaire 22.23 – *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. Si F et G sont supplémentaires dans E, alors :*

1. $F \cap G = \{0_E\}$
2. $E = F + G$
3. *E est de dimension finie et* $\dim E = \dim F + \dim G$.

Inversement, dès que deux de ces trois propriétés sont vraies, alors la troisième l'est aussi et F et G sont supplémentaires dans E.

Démonstration. Le sens direct ne pose pas de problèmes : les deux premiers points ont déjà été vus, dimension finie ou non, et le dernier découle directement de la proposition 22.21 : $\dim E = \dim(F + G) = \dim F + \dim G$.

Inversement :

1. Supposons que 1) et 2) sont vrais. Alors F et G sont en somme directe, et la somme directe est égale à E. Donc ils sont supplémentaires, et donc 3) est vrai.
2. Supposons que 1) et 3) soient vrais. Alors F et G sont en somme directe par 1), et donc $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension $\dim F + \dim G = \dim E$. Donc $E = F + G$, et donc $E = F \oplus G$.
3. Supposons que 2) et 3) soient vrais. Alors $\dim(F + G) = \dim E = \dim F + \dim G$. Donc[15] F et G sont en somme directe, et par 2) sont supplémentaires dans E.

□

[15] C'est encore la proposition 22.21.

Corollaire 22.24 – *Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors tous les supplémentaires de F dans E ont même dimension* $\dim E - \dim F$.

L'inégalité $\dim(F+G) \leqslant \dim F + \dim G$ peut être précisée par la formule suivante :

Théorème 22.25 (Formule de Grassmann) : *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. Alors*

$$\dim(F+G) + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G.$$

Démonstration. Si $F \cap G = \{0_E\}$, c'est déjà fait, donc nous pouvons supposer $\dim(F \cap G) = p \geqslant 1$.
Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $F \cap G$.
Alors il s'agit d'une famille libre, et par le théorème de la base incomplète, nous pouvons la compléter en une base $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_r)$ de F.
Notons qu'alors $\dim F = p + r$.
De même, il est possible de compléter $(e_1, \dots, e_p)$ en une base $(e_1, \dots, e_p, g_1, \dots, g_m)$ de G, avec $\dim G = p + m$.

La famille $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_m)$ est alors une famille génératrice de $F+G$ car concaténation d'une famille génératrice de F et d'une famille génératrice de G.

Remarque
En réalité, la concaténation de ces deux familles génératrices contient deux fois chacun des e_i, mais les doublons peuvent évidemment être éliminés d'une famille génératrice tout en préservant l'aspect générateur.

Il nous reste donc à prouver que $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_m)$ est une famille libre.
Soient donc $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_r, \nu_1, \dots, \nu_m$ des scalaires tels que

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{r} \mu_j f_j + \sum_{k=1}^{m} \nu_k g_k = 0_E.$$

Alors

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{r} \mu_j f_j}_{\in F} = \underbrace{-\sum_{k=1}^{m} \nu_k g_k}_{\in G}.$$

Et donc les deux membres de l'égalité ci-dessus sont dans $F \cap G$.
En particulier, il existe $\beta_1, \dots, \beta_p \in \mathbf{K}$ tels que

$$\sum_{k=1}^{m} \nu_k g_k = \sum_{i=1}^{p} \beta_i e_i.$$

Or $(e_1, \dots, e_p, g_1, \dots, g_m)$ est libre[16], et donc

$$\beta_1 = \cdots = \beta_p = \nu_1 = \cdots = \nu_m = 0.$$

Et donc il vient

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{r} \mu_j f_j = 0_E.$$

Mais la famille $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_r)$ est également libre[17] et donc

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = \mu_1 = \cdots = \mu_r = 0.$$

Ceci achève bien de prouver que $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_m)$ est libre, et donc est une base de $F+G$.

Par définition de la dimension, il vient donc

$$\dim(F+G) = p + r + m = (p+r) + (p+m) - p = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

soit encore

$$\dim(F+G) + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G.$$

□

[16] Car c'est une base de G.

[17] C'est une base de F.

Le lemme suivant caractérise les sommes directes de n sous-espaces vectoriels, où il est l'analogue du bien connu «F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$». Si je l'utilise dans la preuve suivante, il est en pratique assez peu exploitable[18]

[18] Ce qui justifie qu'il ne possède que le statut de lemme.

Lemme 22.26. Soit E un espace vectoriel et soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E ($n \geqslant 2$).
Alors la somme $F_1 + F_2 + \dots + F_n$ est directe si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

i la somme $F_1 + \dots + F_{n-1}$ est directe

ii $F_1 + \dots + F_{n-1}$ et F_n sont en somme directe (autrement dit si $(F_1 + F_2 + \dots + F_{n-1}) \cap F_n = \{0_E\}$.)

Démonstration. Supposons $F_1, F_2, \dots, F_n$ en somme directe.
Soient alors $x_1 \in F_1, x_2 \in F_2, \dots, x_{n-1} \in F_{n-1}$ tels que $x_1 + \dots + x_{n-1} = 0_E$. Alors

$$\underbrace{x_1}_{\in F_1} + \underbrace{x_2}_{\in F_2} + \dots + \underbrace{x_{n-1}}_{\in F_{n-1}} + \underbrace{0_E}_{\in F_n} = 0_E$$

si bien que $x_1 = \dots = x_{n-1} = 0_E$.
Donc déjà $F_1, F_2, \dots, F_{n-1}$ sont en somme directe.
De plus, soit $x \in (F_1 + \dots + F_{n-1}) \cap F_n$.
Alors il $x_1, \dots, x_{n-1} \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_{n-1}$ tels que $x = x_1 + \dots + x_{n-1}$. Et donc

$$0_E = x - x = \underbrace{x_1}_{\in F_1} + \dots + \underbrace{x_{n-1}}_{\in F_{n-1}} + \underbrace{(-x)}_{\in F_n}$$

de sorte que $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = -x = 0_E$.
Ceci prouve bien que $F_1 + \dots + F_{n-1}$ et F_n sont en somme directe.

Réciproquement, supposons $F_1, \dots, F_{n-1}$ en somme directe et $\left(\bigoplus_{i=1}^{n-1} F_i\right) \cap F_n = \{0_E\}$.
Soient alors $x_1 \in F_1, \dots, x_n \in F_n$ tels que $x_1 + \dots + x_{n-1} + x_n = 0_E$.
Alors $\underbrace{x_1 + \dots + x_{n-1}}_{\in F_1 \oplus \dots \oplus F_{n-1}} + \underbrace{x_n}_{\in F_n} = 0_E$.
Et donc par définition d'une somme directe, $x_1 + \dots + x_{n-1} = x_n = 0_E$.
Puisque $F_1, \dots, F_{n-1}$ sont en somme directe, $x_1 = \dots = x_{n-1} = 0_E$.
Et donc on a bien prouvé que $x_1 = \dots = x_n = 0_E$, de sorte que $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe. □

Proposition 22.27 : *Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. Alors $\sum_{i=1}^n F_i$ est de dimension finie, avec*

$$\dim\left(\sum_{i=1}^n F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^n \dim F_i.$$

De plus, il y a égalité si et seulement si la somme $\sum_{i=1}^n F_i$ est directe.

Démonstration. L'inégalité est facile : nous savons déjà que la concaténation de familles génératrices de F_i est une famille génératrice de $F_1 + \dots + F_n$.
Et donc en particulier, la concaténation de bases, qui est de cardinal $\sum_{i=1}^n \dim F_i$ est génératrice, donc de cardinal supérieur ou égal à $\dim\left(\sum_{i=1}^n F_i\right)$.

Alternative
Voir l'exercice 20 du TD21 pour une preuve alternative utilisant un théorème (le théorème du rang) prouvé un peu plus loin.

Pour le cas d'égalité, procédons par récurrence sur n, en prouvant la propriété :
$\mathscr{P}(n)$: «si $F_1, \dots, F_n$ sont des sous-espaces vectoriels de E de dimension finie, alors

$\dim(F_1+\cdots+F_n) = \dim F_1 + \cdots + \dim F_n$, si et seulement si $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est directe».

Pour $n=2$, le résultat a déjà été prouvé à la proposition 22.21.
Supposons donc $\mathscr{P}(n)$ vraie et soient $F_1, \dots, F_{n+1}$ des sous-espaces vectoriels de E de dimension finie.
S'ils sont en somme directe, alors par le lemme précédent, $\bigoplus_{i=1}^{n+1} F_i = \left(\bigoplus_{i=1}^{n} F_i\right) \oplus F_{n+1}$. Et donc

$$\begin{aligned}\dim \bigoplus_{i=1}^{n+1} F_i &= \dim\left(\left(\bigoplus_{i=1}^{n} F_i\right)\oplus F_{n+1}\right) = \dim \bigoplus_{i=1}^{n} F_i + \dim F_{n+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \dim F_i + \dim F_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \dim F_i.\end{aligned}$$

C'est le cas $n=2$.

C'est l'hypothèse de récurrence.

Et inversement, supposons que $\dim\left(\sum_{i=1}^{n+1} F_i\right) = \sum_{i=1}^{n+1} \dim F_i$.
Nous savons déjà que $\dim\left(\sum_{i=1}^{n+1} F_i\right) \leqslant \dim\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right) + \dim F_{n+1}$ et que $\dim\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$.
Si l'une de ces inégalités était stricte, alors on aurait

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{n+1} F_i\right) < \sum_{i=1}^{n+1} \dim F_i$$

ce qui est contraire à notre hypothèse. Donc en fait, les deux inégalités sont des égalités, de sorte que

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i \text{ et } \dim\left(\sum_{i=1}^{n+1} F_i\right) = \dim\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right) + \dim F_{n+1}.$$

Par hypothèse de récurrence, la première égalité nous dit que $F_1+\cdots+F_n$ est directe, et la seconde que $\bigoplus_{i=1}^{n} F_i$ et F_{n+1} sont en somme directe.

Par le lemme précédent, ceci signifie donc que $\sum_{i=1}^{n+1} F_i$ est directe.

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, et par principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$. □

Corollaire 22.28 – *Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E, et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, soit $\mathscr{B}_i$ une base de F_i.*
Alors $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe si et seulement si la concaténation de $\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_n$ est libre (et donc est une base de $F_1+\cdots+F_n$).

Démonstration. Nous savons déjà que la concaténation $\mathscr{B}$ des $\mathscr{B}_i$ est génératrice de $\sum_{i=1}^{n} F_i$.
Elle sera donc libre si et seulement si

$$\dim \sum_{i=1}^{n} F_i = \mathrm{Card}(\mathscr{B}) = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i.$$

Par la proposition précédente, c'est le cas si et seulement si la somme $F_1+\cdots+F_n$ est directe. □

22.2.3 Existence de supplémentaires

Proposition 22.29 : *Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$, et soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors il existe au moins un supplémentaire de F dans E, et tous les supplémentaires de F dans E ont même dimension* $\dim E - \dim F$.

Démonstration. Soit $\mathscr{B}$ une base de E, et soit $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F.
Alors, $(f_1, \dots, f_p)$ est libre et $\mathscr{B}$ est génératrice de E.
Donc par le théorème de la base incomplète, on peut compléter $(f_1, \dots, f_p)$ en une base de E à l'aide de vecteurs de $\mathscr{B}$.
Notons $(e_1, \dots, e_q)$ ces vecteurs, de sorte que $(f_1, \dots, f_p, e_1, \dots, e_q)$ est une base de E, et notons $G = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_q)$.
Alors la concaténation de la base $(f_1, \dots, f_p)$ de F et de la base $(g_1, \dots, g_q)$ de G est une base de $F + G = E$.
Donc[19] F et G sont en somme directe.
Et donc sont supplémentaires dans E.

[19] C'est la proposition 22.21.

Enfin, par la formule de Grassmann, si G' est un supplémentaire de F dans E, alors

$$\dim F + \dim G' = \dim E \Leftrightarrow \dim G' = \dim E - \dim F.$$

□

22.3 Applications linéaires en dimension finie

22.3.1 Dimension de $\mathscr{L}(E, F)$

Commençons par un résultat qui n'est pas spécifique à la dimension finie.

Proposition 22.30 : *Soient E et F deux espaces vectoriels, soit $\mathscr{B} = (e_i)_{i \in I}$ une base de E. Alors une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est nulle si et seulement si elle est nulle sur $\mathscr{B}$, c'est-à-dire si et seulement si $\forall i \in I$, $f(e_i) = 0_F$.*

Démonstration. Si f est nulle, il est évident que les $f(e_i)$ le sont.
Et inversement, si tous les $f(e_i)$ sont nuls, soit $x \in E$. Alors il existe une famille presque nulle $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbf{K}^{(I)}$ de scalaires telle que $x = \sum\limits_{i \in I} \lambda_i e_i$.
Et alors, par linéarité de f, $f(x) = \sum\limits_{i \in I} \lambda_i f(e_i) = 0_F$.
Donc f est l'application linéaire nulle. □

Corollaire 22.31 – *Soient E et F deux espaces vectoriels, et soit $\mathscr{B}$ une base de E. Alors deux applications linéaires $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$ sont égales si et seulement si elles coïncident sur une base de E.*

Démonstration. Appliquer la proposition précédente à $f - g$. □

Ceci implique notamment que pour définir une application linéaire sur E, il suffit de la définir sur une base : étant donnée une base $(e_i)_{i \in I}$ de E, et étant donnés des vecteurs $(y_i)_{i \in I}$ de F, il existe une et une seule application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $\forall i \in I$, $f(e_i) = y_i$.
Cette application est l'application qui à $x = \sum\limits_{i \in I} \lambda_i e_i$ associe $f(x) = \sum\limits_{i \in I} \lambda_i y_i$.

Proposition 22.32 : *Si E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie, alors $\mathscr{L}(E, F)$ est de dimension finie, et*

$$\dim \mathscr{L}(E, F) = \dim E \times \dim F.$$

Démonstration. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F.
Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, on pose alors

$$\varphi_{i,j} : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k & \longmapsto & \alpha_i f_j \end{array} \right.$$

Il est facile de voir que $\varphi_{i,j}$ est linéaire, et que $\varphi_{i,j}(e_k) = \delta_{k,i} f_j$.

Soient $(\lambda_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ des scalaires tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \lambda_{i,j} \varphi_{i,j} = 0_{\mathscr{L}(E,F)}$.
Alors pour $k \in [\![1, n]\!]$, en évaluant en e_k, il vient

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \lambda_{i,j} \delta_{k,i} f_j = \sum_{j=1}^{p} \lambda_{k,j} f_j = 0_F.$$

Et donc par liberté de $(f_1, \dots, f_p)$, $\lambda_{k,1} = \dots = \lambda_{k,p} = 0$.
Donc la famille $(\varphi_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ est libre.
Prouvons à présent qu'elle est génératrice de $\mathscr{L}(E, F)$.
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, et pour $i \in [\![1, n]\!]$, notons $(\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,p})$ les coordonnées de $f(e_i)$ dans la base $(f_1, \dots, f_p)$, de sorte que $f(e_i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \alpha_{i,j} f_j$.

Prouvons qu'alors $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \alpha_{i,j} \varphi_{i,j}$.

Par le corollaire ci-dessus, il suffit de prouver que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $f(e_k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \alpha_{i,j} \varphi_{i,j}(e_k)$.

Mais $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \alpha_{i,j} \varphi_{i,j}(e_k) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_{k,j} f_j = f(e_k)$.

Ainsi, la famille $(\varphi_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ est une base de $\mathscr{L}(E, F)$, de cardinal $n \times p = \dim E \times \dim F$. □

Autrement dit
$\varphi_{i,j}$ est l'unique application linéaire qui à e_i associe f_j et à $e_k, k \neq i$ associe 0_F.

Détails
Par définition,

$$\varphi_{i,j}(e_k) = \begin{cases} e_j & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

22.3.2 Isomorphismes entre espaces vectoriels de dimension finie

Proposition 22.33 : *Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, avec E de dimension finie. S'il existe un isomorphisme $\varphi : E \to F$, alors F est de dimension finie et* $\dim E = \dim F$.

Remarque
Le résultat reste valable si c'est F qui est supposé de dimension finie : il suffit de considérer φ^{-1}.

Démonstration. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors nous savons que $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ est une base de F.
Donc F est de dimension finie, et $\dim F = \mathrm{Card}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = n = \dim E$. □

Exemple 22.34

Soient a, b deux réels, et soit $E = \left\{(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n\right\}$.
Soit alors $\Phi : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (u_n)_{n\in\mathbf{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array} \right.$.
Alors Φ est un isomorphisme, et donc E est un espace vectoriel de dimension 2.
Notons que nous en connaissons déjà des bases, par exemple dans le cas où $X^2 - aX - b$ possède une racine double r, une base est formée des deux suites $(r^n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(nr^n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Proposition 22.35 : *Deux espaces vectoriels de dimensions finies E et F sont isomorphes*[20] *si et seulement si* $\dim E = \dim F$.

[20] C'est-à-dire qu'il existe un isomorphisme $\varphi : E \to F$

Démonstration. Il suffit de prouver que si $\dim E = \dim F$, alors il existe un isomorphisme de E dans F.
Supposons donc que $\dim E = \dim F = n$, et soit $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $\mathscr{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F.

Nous savons que $f_{\mathscr{B}_E} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \longrightarrow & E \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \end{array} \right.$ est un isomorphisme de $\mathbf{K}^n$ dans E,

et de même $f_{\mathscr{B}_F} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \longrightarrow & F \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \end{array} \right.$ est un isomorphisme de $\mathbf{K}^n$ dans F.

Alors $f_{\mathscr{B}_E}^{-1} \circ f_{\mathscr{B}_F}$ est un isomorphisme[21] de E dans F. □

[21] Car composée d'isomorphismes.

22.3.3 Le théorème du rang

Le théorème du rang va nous donner une relation entre la dimension du noyau d'une application linéaire et celle de son image.
Essayons de nous faire une intuition avant de l'énoncer proprement : soit $\varphi : \mathbf{K}^n \to F$ une application linéaire.

Nous savons que $f(1, 0, \dots, 0), f(0, 1, 0, \dots, 0), \dots, f(0, \dots, 0, 1)$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$, qui est donc de dimension inférieure ou égale à n.
Mais si $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0_{\mathbf{K}^n}$ est un élément du noyau de f, alors

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0_F \Leftrightarrow \alpha_1 f(1, 0, \dots, 0) + \cdots + \alpha_n f(0, \dots, 0, 1) = 0_F.$$

Donc nous avons une combinaison linéaire des $f(e_i)$, nulle et à coefficients non tous nuls.
Donc l'un des $f(e_i)$ est combinaison linéaire des autres, et donc $(f(e_j))_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}}$ est encore génératrice de $\operatorname{Im} f$, qui est donc de dimension au plus $n - 1$.
Si le noyau contient un autre élément, non colinéaire à $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, alors il existe une autre[22] relation de dépendance linéaire entre les $f(e_i)$.
Et donc on peut enlever un autre vecteur de notre famille génératrice de $\operatorname{Im} f$, de sorte que $\dim \operatorname{Im} f \leqslant n - 2$. Etc
L'idée sous-jacente au théorème du rang est donc que plus le noyau de f est gros, plus son image est petite.

[22] Au sens où ce n'est pas un multiple de celle déjà utilisée ci-dessus.

Proposition 22.36 : *Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Supposons qu'il existe S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E. Alors $f_{|S}^{|\operatorname{Im} f}$ est un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} f$.*

Remarque
L'existence d'un tel supplémentaire est toujours vérifiée si E est de dimension finie

Démonstration. Il est clair que $u = f_{|S}^{|\operatorname{Im} f}$ est une application linéaire bien définie de S dans $\operatorname{Im} f$.
Montrons que u est surjective : soit $y \in \operatorname{Im} f$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
Mais alors x s'écrit de manière unique $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in \operatorname{Ker} f$ et $x_2 \in S$. Et donc

$$y = f(x) = \underbrace{f(x_1)}_{=0_F} + f(x_2) = f(x_2) = u(x_2).$$

Donc u est surjective.

Soit à présent $x \in \operatorname{Ker} u$. Alors $u(x) = 0_F \Leftrightarrow f(x) = 0_F$.
Donc $x \in \operatorname{Ker} f$. Mais $x \in S$ par définition, et donc $x \in S \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.
Donc $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$, de sorte que u est injectif. □

Théorème 22.37 (Théorème du rang) : *Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, avec E de dimension finie, et soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
Alors $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie et*

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f.$$

Remarque
$\operatorname{Ker} f$ est automatiquement de dimension finie car sous-espace vectoriel de E qui est de dimension finie.

Démonstration. Par le lemme précédent, un supplémentaire S de $\operatorname{Ker} f$ dans E, et il en existe si E est de dimension finie, est isomorphe à $\operatorname{Im} f$.
Mais $\dim S = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f$, donc

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim S = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f.$$

□

⚠ On n'a surtout pas dit que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires dans E. Cela peut bien entendu se produire, mais il n'est pas obligatoire d'avoir $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.
Par exemple, si f est non nul et vérifie $f^2 = 0$, comme c'est par exemple le cas de $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(0)X \end{array}\right.$, alors $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.
Et donc $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(X) \neq \{0_E\}$.

22.3.4 Rang d'une application linéaire

Définition 22.38 – Si $f : E \to F$ est une application linéaire, on dit que f est **de rang fini** si $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie.
Dans ce cas, on appelle **rang de** f et on note $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f$.

Remarques. Si F est de dimension finie, alors $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F, donc est de dimension finie, donc f est de rang fini.
Le théorème du rang nous dit aussi que si E est de dimension finie, alors f est de rang fini, et $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f$.
Si E et F sont tous deux de dimension infinie, il existe tout de même des applications linéaires de rang fini de E dans F. Par exemple $\varphi : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ P & \longmapsto & P(0)X \end{array}\right.$ a une image de dimension 1.

Définition 22.39 – Si $(e_1, \dots, e_n)$ sont des vecteurs d'un espace vectoriel E, on appelle **rang de la famille** $(e_1, \dots, e_n)$ et on note $\operatorname{rg}(e_1, \dots, e_n)$ la dimension de l'espace engendré par cette famille :

$$\operatorname{rg}(e_1, \dots, e_n) = \dim \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_n).$$

Remarquons que $\operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ étant engendré par n vecteurs, on a toujours

$$\operatorname{rg}(e_1, \dots, e_n) \leqslant \operatorname{Card}(e_1, \dots, e_n) = n.$$

De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, donc si et seulement si elle est libre.

Cette notion de rang est alors directement reliée à celle du rang d'une application linéaire :

Proposition 22.40 : *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, de base $(e_1, \dots, e_n)$, soit F un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, et soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.*
Alors $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

Démonstration. C'est une simple reformulation du fait que $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$ et donc

$$\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \operatorname{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

□

Proposition 22.41 : *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ où E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie. Alors :*

1. *f est surjective si et seulement si $\operatorname{rg} f = \dim F$*
2. *f est injective si et seulement si $\operatorname{rg} f = \dim E$.*

Démonstration.

1. Puisque $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F, $\operatorname{Im} f = F$ si et seulement si $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = \dim F$.
2. f est injective si et seulement si $\dim \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$, ce qui d'après le théorème du rang est équivalent à $\operatorname{rg} f = \dim E$.

□

Corollaire 22.42 : *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, où E et F sont deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, avec $\dim E = \dim F$. Alors il y a équivalence entre :*

1. *f est un isomorphisme*
2. *f est surjective*
3. *f est injective*

Dimensions
L'hypothèse sur les dimensions est indispensable, mais notons qu'elle est en particulier vérifiée dès que f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E **de dimension finie**.

Démonstration. 1) ⇒ 2) : c'est évident, par définition une bijection est surjective.
2) ⇒ 3). Si f est surjective, alors $\operatorname{rg} f = \dim F = \dim E$.
Donc par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim E - \operatorname{rg} f = 0$.
On en déduit que $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ et donc que f est injective.
3 ⇒ 1) Si f est injective, alors $\dim \operatorname{Ker} f = 0$, et donc $\operatorname{rg} f = \dim E = \dim F$. Donc f est surjective, et donc est bijective. □

Exemples 22.43

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & XP' - P'' \end{array} \right.$.
Alors pour $P \in \mathbf{R}_n[X]$, on a $P \in \operatorname{Ker} f$ si et seulement si $XP' = P''$.
Pour des raisons de degré, ceci n'est possible que si P' est nul, c'est-à-dire si P est constant.
Donc $\operatorname{Ker} f = \mathbf{R}_0[X]$. Par conséquent, f n'est pas injective, et donc n'est pas surjective.

En revanche, $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & 2P - P' - (X+1)P'' \end{array} \right.$ est injective (toujours pour des raisons de degré), et donc est surjective.

Remarque
Ceci ne nous donne toutefois pas un élément qui ne serait pas dans l'image de f, il faut travailler davantage pour trouver un tel élément sans antécédent.

Proposition 22.44 : *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors il y a équivalence entre :*

1. *f est un inversible de l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$, c'est-à-dire un isomorphisme de E*
2. *f est inversible à gauche (c'est-à-dire il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f = \mathrm{id}_E$)*
3. *f est inversible à droite*

Remarque
Vous avez peut-être remarqué la similitude avec un résultat concernant les matrices : si A, B sont deux matrices carrées, alors $AB = I_n$ implique A inversible et $A^{-1} = B$.
Il y a bien un lien entre ces deux résultats, qui sera explicité dans un chapitre ultérieur.

Démonstration. Si f est inversible, alors elle est inversible à droite et à gauche.
Si elle est inversible à gauche, alors elle est injective, et donc est bijective.
Et si elle est inversible à droite, alors elle est surjective, et donc est bijective. □

Proposition 22.45 : *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\operatorname{rg} f \leqslant \min(\dim E, \dim F)$.*
En particulier :

1. *si $\dim E < \dim F$, alors f ne peut pas être surjective*
2. *si $\dim E > \dim F$, alors f ne peut pas être injective.*

Remarque. Notons que le second point vient préciser le fait que si f est un isomorphisme, alors $\dim E = \dim F$: en effet, dès qu'il n'y a pas égalité, f ne peut pas être injective ou ne peut pas être surjective[23].

[23] Et n'est souvent ni l'un ni l'autre !

Démonstration. Puisque $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F, $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f \leqslant \dim F$.
Et par le théorème du rang, $\operatorname{rg} f = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f \leqslant \dim E$.
Et donc $\operatorname{rg}(f) \leqslant \min(\dim E, \dim F)$.

Si $\dim F > \dim E$, alors $\operatorname{rg} f \leqslant \dim E < \dim F$, donc on ne peut pas avoir $\operatorname{Im} f = F$: f ne peut pas être surjective.
Si $\dim F < \dim E$, alors $\dim \operatorname{Ker} f = \dim E - \operatorname{rg} f$, avec $\operatorname{rg} f < \dim E$, donc $\dim \operatorname{Ker} f > 0$, et donc $\operatorname{Ker} f \neq \{0_E\}$: f n'est pas injective. □

Exemple 22.46

Une application linéaire de $\mathbf{K}^n$ dans $\mathbf{K}^p$ n'est jamais injective si $p < n$, jamais surjective si $n < p$.
Notons que ce dernier point était assez évident : une application linéaire ne peut jamais augmenter la dimension. En effet, si $f : E \to F$, et si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$, qui est donc de dimension inférieure ou égale à $n = \dim E$.

Proposition 22.47 : *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et soit $u \in GL(E)$. Alors pour tout sous-espace vectoriel F de E, de dimension finie, $u(F)$ est de dimension finie et $\dim u(F) = \dim F$.*

Démonstration. Il suffit de noter que $u_{|F}$ réalise un isomorphisme de F sur $u(F)$.
En effet, cette restriction est surjective par définition de $u(F)$, elle est injective car u l'est. □

En particulier, l'image d'une droite par un isomorphisme est une droite, l'image d'un plan est un plan, etc.

Proposition 22.48 (Invariance du rang par automorphisme) : *Soient E et F deux espaces vectoriels, et soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de rang fini. Alors :*

1. *$\forall v \in GL(E)$, $\operatorname{rg}(u \circ v) = \operatorname{rg} u$*
2. *$\forall w \in GL(F)$, $\operatorname{rg}(w \circ u) = \operatorname{rg} u$.*

Démonstration.
1. Si v est bijective, alors $\operatorname{Im}(v) = E$, et donc $\operatorname{Im}(u \circ v) = \operatorname{Im} u$.
2. On a $\operatorname{Im}(w \circ u) = w(\operatorname{Im} u)$. Et donc la proposition précédente s'applique.
   Puisque w réalise un isomorphisme de $\operatorname{Im} u$ sur $\operatorname{Im}(w \circ u)$, ces deux espaces sont de même dimension[24].

□

[24] Et en particulier $\operatorname{Im}(w \circ u)$ est bien de dimension finie.

22.3.5 Formes linéaires et hyperplans

Définition 22.49 – Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. On appelle **forme linéaire** sur E toute application linéaire $\varphi : E \to \mathbf{K}$.
On note généralement E^* au lieu de $\mathcal{L}(E, \mathbf{K})$ l'ensemble des formes linéaires sur E.

Terminologie
L'ensemble des formes linéaires sur E s'appelle le dual de E.

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$.

Pour $i \in [\![1, n]\!]$, soit alors $\varphi_i : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i & \longmapsto & \lambda_i \end{array} \right.$.

Alors φ_i est une forme linéaire sur E.

Et alors, pour toute forme linéaire $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbf{K})$, et pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, on a

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\varphi(e_i)}_{\in \mathbf{K}} \varphi_i(x).$$

La famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est donc génératrice de $\mathscr{L}(E, \mathbf{K})$.
Mais $\dim \mathscr{L}(E, \mathbf{K}) = \dim E = n$, donc cette famille est une base de $\mathscr{L}(E, \mathbf{K})$.
Pour le dire autrement, une fois une base de E fixée, toute forme linéaire sur E s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire des formes linéaires qui à x associent sa $i^{\text{ème}}$ coordonnée.

Exemples 22.50

- $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & 2x - 3y + z \end{array} \right.$ est une forme linéaire.
Et c'est $2\varphi_1 - 3\varphi_2 + \varphi_3$ où

$$\varphi_1(x, y, z) = x,\ \varphi_2(x, y, z) = y,\ \varphi_3(x, y, z) = z.$$

- $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ P & \longmapsto & \int_0^1 P(t)\, dt \end{array} \right.$ est une forme linéaire sur $\mathbf{R}_n[X]$.
Si on prend comme base de $\mathbf{R}_n[X]$ la base canonique, alors avec les notations précédentes, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$,

$$\varphi_i : a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \mapsto a_i.$$

Et ici, on a $\varphi(X^i) = \int_0^1 t^i\, dt = \frac{1}{i+1}$.
Donc $\varphi(a_0 + \dots + a_n X^n) = a_0 \varphi(1) + \dots + a_n \varphi(X^n) = a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{n+1}$.
Donc $\varphi = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1} \varphi_i$.

Définition 22.51 – Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, et soit H un sous-espace vectoriel de E. On dit que H est un **hyperplan** de E s'il existe une forme linéaire $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbf{K})$, non nulle[25], telle que $H = \operatorname{Ker} \varphi$.

[25] C'est-à-dire qui ne prend pas toujours la valeur 0. Ce qui ne l'empêche pas de s'annuler en certains points de E, notamment 0_E.

Exemple 22.52

Dans $\mathbf{R}^4$, $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + 2y - t = 0\}$ est un hyperplan : c'est le noyau de la forme linéaire $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^4 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & x + 2y - t \end{array} \right.$.
Notons que celle-ci est non nulle puisque $\varphi(1, 0, 0, 0) = 1 \neq 0$.

En dimension finie, avec les notations ci-dessus, une forme linéaire est de la forme $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i$, où $a_1, \dots, a_n$ sont des scalaires.

Et donc l'hyperplan $\operatorname{Ker}\varphi$ est

$$\{x \in E \mid \varphi(x) = 0\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i = 0 \right\}.$$

Autrement dit, une fois une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E fixée, un hyperplan possède toujours une équation qui est une équation linéaire en les coordonnées dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

Cas particuliers — Dans le plan, vous savez déjà que $ax + by = 0$ est l'équation d'une droite (qui passe par l'origine) et que dans $\mathbf{R}^3$, $ax + by + cz = 0$ est l'équation d'un plan (qui passe par l'origine aussi).

Exemple 22.53

Dans $\mathbf{R}_n[X]$, $\left\{ P \in \mathbf{R}_n[X] \mid \int_0^1 P(t)\,dt = 0 \right\}$ est un hyperplan.
Il a une équation simple dans la base canonique : c'est l'ensemble des $a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ tels que $a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_{n+1}}{n+1} = 0$.

Proposition 22.54 : *Soit E un espace vectoriel, et soit H un sous-espace vectoriel de E. Alors H est un hyperplan de E si et seulement si il possède un supplémentaire de dimension 1 (une droite), c'est-à-dire si et seulement si il existe $u \in E$, non nul, tel que $E = H \oplus \operatorname{Vect}(u)$.*

Terminologie — On dit aussi que H est de codimension 1.

Démonstration. Supposons que H soit un hyperplan de E et soit $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbf{K})$ tel que $\operatorname{Ker}\varphi = H$.
Puisque φ est non nulle, il existe $u \in E$ tel que $\varphi(u) \neq 0$.
Montrons alors par analyse-synthèse que $E = H \oplus \operatorname{Vect}(u)$.
Soit $x \in E$. Supposons[26] que $x = y + \lambda u$, avec $y \in H$ et $\lambda \in \mathbf{K}$.
Alors $\varphi(x) = \varphi(y) + \lambda\varphi(u) = \lambda\varphi(u)$.
Donc $\lambda = \frac{\varphi(x)}{\varphi(u)}$. Et par conséquent, $y = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(u)} u$.
Inversement[27], posons $\lambda = \frac{\varphi(x)}{\varphi(u)} \in \mathbf{K}$, de sorte que $\lambda \cdot u \in \operatorname{Vect}(u)$, et soit $y = x - \lambda \cdot u$.
Alors $\varphi(y) = \varphi(x) - \lambda\varphi(u) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0$, et donc $y \in \operatorname{Ker}\varphi = H$.
Enfin, on a bien $x = y + \lambda \cdot u$, donc x s'écrit bien de manière unique comme somme d'un élément de H et d'un élément de $\operatorname{Vect}(u)$.
Et donc $E = H \oplus \operatorname{Vect}(u)$: $\operatorname{Vect}(u)$ est un supplémentaire de H de dimension 1.

Inversement, supposons que $E = H \oplus \operatorname{Vect}(u)$. Alors tout vecteur de E s'écrit de manière unique $x = x_H + \lambda_x u$, avec $x_H \in H$ et $\lambda_x \in \mathbf{K}$.
Soit alors $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x = x_H + \lambda_x u & \longmapsto & \lambda_x \end{array} \right.$.
Alors φ est linéaire[28], et donc est une forme linéaire.
Et alors, pour $x = x_H + \lambda_x u$, on a

$$x \in \operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow \lambda_x = 0 \Leftrightarrow x = x_H \in H.$$

Et donc $\operatorname{Ker}\varphi = H$, donc H est un hyperplan de E. □

[26] C'est l'analyse.

[27] C'est la synthèse.

[28] Le prouver.

Corollaire 22.55 – *Si E est un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, les hyperplans de E sont les sous-espaces vectoriels de E de dimension $\dim E - 1$.*

Cas particuliers — Dans un plan, les hyperplans sont les droites.
Dans $\mathbf{R}^3$, les hyperplans sont des plans.

Démonstration. En dimension n, un sous-espace vectoriel possède un supplémentaire de dimension 1 si et seulement si il est de dimension $n - 1$. □

Exemple 22.56

L'ensemble $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \mid \operatorname{tr}(M) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, et donc de dimension $n^2 - 1$.
C'est très intuitif : pour choisir une matrice de trace nulle, on peut choisir comme on le souhaite tous les coefficients hors diagonale, et $n-1$ coefficients de la diagonale, le dernier étant alors nécessairement l'opposé de la somme des autres.
Mais ceci est pénible à écrire proprement, il faut exhiber une base alors que l'argument «c'est un hyperplan car noyau d'une forme linéaire» est bien plus efficace.

Exemple 22.57

Dans $\mathbf{R}^3$, considérons $F = \operatorname{Vect}((1,1,0),(-1,2,1))$, qui est clairement[29] de dimension 2, et donc un hyperplan de $\mathbf{R}^3$.
Cherchons alors à déterminer une équation de E. Nous cherchons donc une forme linéaire $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, non nulle, telle que $F = \operatorname{Ker}\varphi$.
Soit φ une forme linéaire non nulle sur $\mathbf{R}^3$. Nous savons qu'il existe alors un unique triplet $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ tel que

$$\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ \varphi(x,y,z) = ax + by + cz.$$

Puisque F et $\operatorname{Ker}\varphi$ sont de même dimension, on aura $F = \operatorname{Ker}(\varphi)$ si et seulement si l'un est inclus dans l'autre[30]
Soit si et seulement si $\begin{cases} (1,1,0) \in \operatorname{Ker}\varphi \\ (-1,2,1) \in \operatorname{Ker}\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ -a+2b+c=0 \end{cases}$
Les solutions de ce système sont les $(a,-a,3a)$, $a \in \mathbf{R}$, et donc $F = \operatorname{Ker}\varphi$ si et seulement si il existe $a \in \mathbf{R}^*$ tel que $\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}^3$, $\varphi(x,y,z) = a(x-y+3z)$.

[29] Les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

[30] L'égalité des dimensions garantissant alors que l'inclusion est en fait une égalité.

Proposition 22.58 : *Soient φ_1 et φ_2 deux formes linéaires non nulles sur E. Alors $\operatorname{Ker}\varphi_1 = \operatorname{Ker}\varphi_2$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbf{K}^*$ tel que $\varphi_1 = \lambda\varphi_2$.*

Autrement dit
Deux formes linéaires qui définissent le même hyperplan sont proportionnelles.

Démonstration. Nous savons déjà que pour $\lambda \in \mathbf{K}^*$, $\operatorname{Ker}(\lambda\varphi_1) = \operatorname{Ker}\varphi_1$.

Inversement, soient φ_1 et φ_2 deux formes linéaires de même noyau, et soit $u \notin \operatorname{Ker}\varphi_2$.
Soit alors $\lambda = \dfrac{\varphi_1(u)}{\varphi_2(u)} \in \mathbf{K}$.
Pour $x \in E$, il existe $y \in \operatorname{Ker}\varphi_1$ et $\mu \in \mathbf{K}$ tels que $x = y + \mu u$.
Et alors $\varphi_1(x) = \mu\varphi_1(u)$ et $\lambda\varphi_2(x) = \dfrac{\varphi_1(u)}{\varphi_2(u)}\varphi_2(\mu u) = \mu\varphi_1(u) = \varphi_1(x)$.
Donc $\varphi_1 = \lambda\varphi_2$. □

Supposons que H_1 et H_2 soient deux hyperplans distincts de E, avec $\dim E = n$.
Puisqu'ils ont même dimension, ils ne peuvent être inclus l'un dans l'autre. Donc $H_1 \cap H_2$ est strictement inclus dans H_1 , de sorte que $\dim(H_1 \cap H_2) \leqslant n-2$.
Par ailleurs, par la formule de Grassmann, $\dim(H_1 \cap H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 + H_2)$.
Or $H_1 + H_2$ contient strictement[31] H_1, donc $\dim(H_1 + H_2) > \dim H_1 = n-1$.
Nécessairement, $\dim(H_1 + H_2) = n$, et donc

$$\dim(H_1 \cap H_2) = n - 1 + n - 1 - n = n - 2.$$

Rappel
On a $A \cap B = B$ si et seulement si $B \subset A$.

[31] Il contient aussi les vecteurs de H_2 qui ne sont pas dans H_1.

Notons qu'il y a un cas où nous avions déjà l'intuition géométrique de ce fait : l'intersection de deux plans distincts est une droite.

Le résultat qui suit généralise ceci à l'intersection de m hyperplans.
On n'a alors qu'une inégalité, et pas une égalité, même si on suppose les H_i distincts. Par exemple, l'intersection de trois plans de $\mathbf{R}^3$ peut tout à fait être une droite, qui est alors de dimension 1.

Parallélisme ?
Nous parlons ici de vecteurs, tous les plans contiennent le vecteur nul, il ne peuvent donc pas être disjoints.
Pour avoir des plans parallèles, il va falloir attendre d'avoir la notion d'espace affine.

Proposition 22.59 : *Soit $p \in \mathbf{N}^*$, et soient $H_1, \dots, H_p$ des hyperplans d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors*

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{p} H_i\right) \geqslant \dim E - p.$$

Remarque. Bien qu'il reste vrai, ce théorème n'a d'intérêt que lorsque p, le nombre d'hyperplans est inférieur à la dimension de E. Si $p > \dim E$, il vous dit juste qu'une dimension est positive...

Démonstration. Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, soit φ_i une forme linéaire de noyau H_i, et soit

$$\psi : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{K}^p \\ x & \longmapsto & (\varphi_1(x), \cdots, \varphi_p(x)) \end{array} \right.$$

Il est clair que ψ est linéaire, et $\operatorname{Ker} \psi = \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} \varphi_i = \bigcap_{i=1}^{p} H_i$.
Alors, par le théorème du rang appliqué à ψ, il vient

$$\dim E = \dim \operatorname{Im} \psi + \dim \operatorname{Ker} \psi \Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker} \psi = \dim E - \dim \operatorname{Im} \psi \geqslant \dim E - p.$$

□

Détails
$\operatorname{Im} \psi$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^p$, donc de dimension inférieure ou égale à p.

Notons que le résultat précédent nous donne des informations au sujet de certains systèmes d'équations linéaires, à savoir les systèmes homogènes : ceux dont le second membre est nul[32].
En effet, résoudre un tel système, de p équations à n inconnues, ce n'est rien d'autre que déterminer l'intersection des p hyperplans de $\mathbf{K}^n$ correspondant à chacune des équations du système.
Lorsque $n > p$, donc qu'on a moins d'équations que d'inconnues, le théorème précédent nous dit que la dimension de l'espace des solutions est strictement positive, donc qu'il y a des solutions non triviales (autres que $(0, \dots, 0)$), et donc qu'il y a une infinité de solutions.

[32] Qui matriciellement s'écrivent sous la forme $AX = 0_p$.

Il existe une réciproque à ce résultat, qui dit que tout espace de dimension $n - p$ est intersection de p hyperplans.

Proposition 22.60 : *Soit F un sous-espace vectoriel de dimension $n - p$ d'un espace vectoriel E de dimension n. Alors il existe des hyperplans $H_1, \dots, H_p$ tels que $\bigcap_{i=1}^{p} H_i = F$.*

Démonstration. Soit $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de F.
Complétons-la[33] en une base de E : $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$.

Et alors pour $i \in [\![1, p]\!]$, posons φ_i la forme linéaire définie sur E par $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \mapsto x_i$.

Et soit alors $H_i = \operatorname{Ker} \varphi_i = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_{p+1}, \dots, e_n)$.

Alors $F = \bigcap_{i=1}^{p} H_i$. □

[33] C'est toujours possible par le théorème de la base incomplète.

Détails
H_i est l'ensemble des vecteurs de E dont la composante suivant e_i est nulle.