22 Dérivabilité

Dans tout le chapitre, I désigne un **intervalle** non réduit à un point, et $\mathbf{K}$ désigne, sauf mention explicite du contraire, n'importe lequel des deux corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Un point est dit **intérieur à** I si ce n'est pas une borne de I. On note $\mathring{I}$ l'ensemble[1] des points intérieurs à I.
On peut prouver sans difficultés que a est intérieur à I si et seulement si il existe un voisinage de a inclus dans I, ou encore s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset I$.

[1] Appelé intérieur de I.

22.1 Dérivabilité : l'aspect local

22.1.1 Définition

Nous ne nous attardons pas sur les définitions qui suivent, avec lesquelles vous êtes déjà familiers depuis la première.

Définition 22.1 – Soit $f : I \to \mathbf{K}$, et soit $a \in I$.
On dit que f est **dérivable en** a si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe dans $\mathbf{K}$ (c'est-à-dire est finie).
On note alors $f'(a)$ cette limite, qu'on appelle **nombre dérivé de** f **en** a.

Notons qu'une formulation équivalente[2] est de demander que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe.

[2] Via le changement de variable $x = a + h$.

Définition 22.2 – Si f est dérivable en tout point $a \in I$, on dit que f **est dérivable sur** I, et on note f' la fonction $a \mapsto f'(a)$, qu'on appelle la **fonction dérivée de** f.
On note alors $\mathscr{D}(I, \mathbf{K})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I et à valeurs dans $\mathbf{K}$.

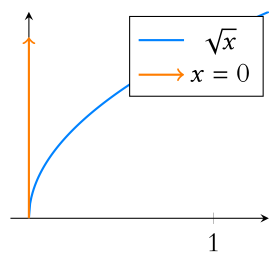
Définition 22.3 – ▸ Si f est dérivable en $a \in I$, on appelle **tangente à** $\mathscr{C}_f$ **au point d'abscisse** a la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.
▸ Si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$, on appelle tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a la droite verticale d'équation $x = a$.

Formule
Vous pouvez bien entendu retrouver cette formule en vous souvenant qu'il s'agit de la droite de coefficient directeur $f'(a)$ qui passe par le point de coordonnées $(a, f(a))$, mais mieux vaut la connaître par cœur.

⚠ Dans le second cas, la dérivée n'est pas définie en a (donc f n'est pas dérivable en a), un nombre dérivé est toujours un réel, et ne peut en aucun cas être égal à $\pm\infty$.

Exemple 22.4

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.
En effet, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.
Donc le graphe de f possède une tangente verticale en 0.
Plus généralement $x \mapsto x^\alpha$, avec $\alpha \in]0,1[$ n'est pas dérivable en 0.



Rappelons le résultat suivant, déjà prouvé dans le chapitre de développements limités.

Proposition 22.5 : *La fonction f est dérivable en a si et seulement si il existe $\ell \in \mathbf{K}$ tel que $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \ell(x-a) + o((x-a))$.*
Dans ce cas, $\ell = f'(a)$.

Remarque
On retrouve donc la formule de Taylor-Young à l'ordre 1.

Corollaire 22.6 – *Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.*

Démonstration. Si $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o((x-a))$, alors $f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$, et donc f est continue en a. □

Remarque. Ceci se fait aussi très bien à la main, sans toute la machinerie des o : si f est dérivable en a, alors pour $x \neq a$,

$$f(x) - f(a) = (x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$$

si bien que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Dans le chapitre 7, nous avions décrété[3] qu'une fonction à valeurs complexes était dérivable en a si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire étaient dérivables en a.
Ce n'est a priori pas la même définition que celle donnée ci-dessus. Il s'agit toutefois bien de la même notion, comme l'affirme la proposition ci-dessous :

[3] Il s'agissait donc d'une définition.

Proposition 22.7 : *Si $f : I \to \mathbf{C}$ est une fonction à valeurs complexes, alors f est dérivable en $a \in I$ si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont, et alors*

$$f'(a) = (\mathrm{Re}(f))'(a) + i\,(\mathrm{Im}(f))'(a).$$

Démonstration. Nous avons prouvé[4] qu'une fonction $g : I \to \mathbf{C}$ admet une limite $u + iv$ en un point a adhérent à I si et seulement si $\begin{cases} \lim_{x\to a} \mathrm{Re}(g)(x) = u \\ \lim_{x\to a} \mathrm{Im}(g)(x) = v \end{cases}$.
Ceci s'applique notamment au taux d'accroissement de f. □

[4] Dans le chapitre sur les limites.

22.1.2 Dérivées à gauche et à droite

Définition 22.8 – Soit $f : I \to \mathbf{K}$, et soit $a \in I$.

- Si a n'est pas la borne de gauche de I, on dit que f **est dérivable à gauche en** a si $\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe dans $\mathbf{R}$, et on note alors $f'_g(a)$ cette limite (appelée dérivée à gauche de f en a).
- Si a n'est pas la borne de droite de I, on dit que f **est dérivable à droite en** a si $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe dans $\mathbf{R}$, et on note alors $f'_d(a)$ cette limite (c'est la dérivée à droite de f en a).

Proposition 22.9 : *Soit $f : I \to \mathbf{K}$ et soit $a \in \mathring{I}$. Alors f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en a et que $f'_g(a) = f'_d(a)$.*

Démonstration. C'est la caractérisation des limites via l'égalité des limites à droite/limite à gauche. Notons que le taux d'accroissement de f en a n'étant pas défini en a, on n'a pas à se préoccuper de sa valeur en a, il suffit que sa limite à gauche et sa limite à droite soient égales. □

Remarque. Notons que ceci ne vaut que pour un point intérieur à I. En une borne de I, la question ne se pose pas : la limite ne peut être calculée que d'un côté.

Exemple 22.10

La fonction $f : x \mapsto |x|$ est dérivable à droite et à gauche en 0.
En effet, pour $x < 0$, on a $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{-x}{x} = -1 \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} -1$. Donc $f'_g(0) = -1$.
De même, pour $x > 0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{x}{x} = 1 \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$. Donc $f'_d(0) = 1$.
En revanche, f n'est pas dérivable en 0 puisque $f'_g(0) \neq f'_d(0)$.

Exemple 22.11 Une subtilité

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \sin(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$
Alors $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, de sorte que f est dérivable à droite en 0, et $f'_d(0) = 1$.
De même, $f'_g(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2}{x} = 0$.
Et donc f n'est pas dérivable en 0.

Pourtant, $f_{|\mathbf{R}_+}$ est dérivable en 0, puisque le taux d'accroissement de $f_{|\mathbf{R}_+}$ en 0 n'est défini que sur $\mathbf{R}_+^*$, et donc que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_{|\mathbf{R}_+}(x) - f_{|\mathbf{R}_+}(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Et de même, $f_{|\mathbf{R}_-}$ est dérivable en 0, avec une dérivée en 0 qui est nulle.
Moralité : pour qu'une fonction f soit dérivable en a, il ne suffit pas que $f_{|]-\infty,a]}$ et $f_{|[a,+\infty[}$ soient dérivables en a.
C'est une différence notable avec la continuité, car si $f_{|]-\infty,a]}$ et $f_{|[a,+\infty[}$ sont continues en a, alors f est continue en a puisque $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ (car $f_{|[a,+\infty[}$ est continue) et $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$ (car $f_{|]-\infty,a[}$ est continue).

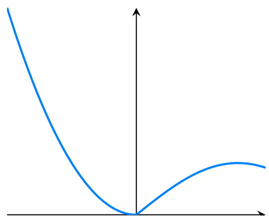


Figure 22.1– La fonction f.

22.1.3 Opérations sur les dérivées

Il est grand temps de prouver enfin toutes les formules que vous connaissez depuis longtemps au sujet de la dérivée d'un produit, d'un quotient, etc.

Proposition 22.12 : *Soient $f, g : I \to \mathbf{K}$, soit $a \in I$ tel que f et g soient dérivables en a. Alors*

1. *pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, λf est dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$*
2. *$f+g$ est dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$*
3. *fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$*
4. *si $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{g}$ est dérivable en a avec $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(a) = \dfrac{-g'(a)}{g(a)^2}$ et $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a avec $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$*

Démonstration.

1. On a $\lambda f(x) \underset{x\to a}{=} \lambda f(a) + \lambda f'(a)(x-a) + o(x-a)$, donc λf est dérivable en a, avec $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.
2. On a $f(x) + g(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + g(a) + (f'(a) + g'(a))(x-a) + o((x-a))$.
Donc[5] $f+g$ est dérivable en a, avec $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

[5] C'est la proposition 22.5 : $f+g$ possède un développement limité d'ordre 1 en a.

3. On a

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &\underset{x\to a}{=} \left(f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a)\right)\left(g(a)+g'(a)(x-a)+o(x-a)\right)\\ &\underset{x\to a}{=} f(a)g(a)+\left(f'(a)g(a)+f(a)g'(a)\right)(x-a)+\underbrace{f'(a)g'(a)(x-a)^2}_{\underset{x\to a}{=}o(x-a)}+o(x-a)+o((x-a)^2)\\ &\underset{x\to a}{=} f(a)g(a)+\left(f'(a)g(a)+f(a)g'(a)\right)(x-a)+o(x-a). \end{aligned}$$

Donc, toujours par la caractérisation de la dérivabilité à l'aide des développements limités d'ordre 1, fg est dérivable en a avec $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

4. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(x)} &\underset{x\to a}{=} \frac{1}{g(a)+g'(a)(x-a)+o(x-a)}\\ &\underset{x\to a}{=} \frac{1}{g(a)}\frac{1}{1+\frac{g'(a)}{g(a)}(x-a)+o(x-a)}\\ &\underset{x\to a}{=} \frac{1}{g(a)}\left(1-\frac{g'(a)}{g(a)}(x-a)+o(x-a)+o\left(-\frac{g'(a)}{g(a)}(x-a)+o(x-a)\right)\right)\\ &\underset{x\to a}{=} \frac{1}{g(a)}\left(1-\frac{g'(a)}{g(a)}(x-a)+o(x-a)\right)\\ &\underset{x\to a}{=} \frac{1}{g(a)}-\frac{g'(a)}{g(a)^2}(x-a)+o(x-a). \end{aligned}$$

Détails
C'est la formule
$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1-x+o(x).$$

La formule pour la dérivée d'un quotient en découle en notant que $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$.

Notons que les preuves données ci-dessous utilisent toutes les développements limités d'ordre 1, ce qui est probablement le plus naturel, notamment car elles ne nécessitent pas de savoir à l'avance quel sera le résultat.
Juste pour vous montrer que ces formules étaient déjà largement prouvables à l'aide des outils de lycée, donnons des preuves plus «terre à terre» des deux derniers points :

$$\begin{aligned} \frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} &= \frac{f(x)((g(x)-g(a))+(f(x)-f(a))g(a)}{x-a}\\ &= f(x)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}+\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(a) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)g'(a)+f'(a)g(a). \end{aligned}$$

Et de même,

$$\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(a)}}{x-a} = \frac{\frac{g(a)-g(x)}{g(x)g(a)}}{x-a} = -\frac{1}{g(x)g(a)}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\frac{g'(a)}{g(a)^2}.$$

□

Corollaire 22.13 – *L'ensemble $\mathscr{D}(I,\mathbf{K})$ est à la fois un sous-anneau et un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(I,\mathbf{K})$ (et donc de $\mathscr{F}(I,\mathbf{K})$).*

Démonstration. La proposition précédente prouve qu'il est stable par combinaisons linéaires (donc notamment par différence) et par produit. □

Proposition 22.14 : *Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbf{K}$, où J est un intervalle de $\mathbf{R}$. Soit $a \in I$, tel que f soit dérivable en a et g soit dérivable en $f(a)$. Alors $g\circ f$ est dérivable en a et $(g\circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$.*

Démonstration. Puisque g est dérivable en $f(a)$,

$$g(x) \underset{x\to f(a)}{=} g(f(a)) + g'(f(a))(x-f(a)) + o(x-f(a)).$$

Soit encore[6]

$$g(f(x)) \underset{x\to a}{=} g(f(a)) + g'(f(a))(f(x)-f(a)) + o(f(x)-f(a)).$$

Mais f est dérivable en a, donc

$$f(x)-f(a) \underset{x\to a}{=} f'(a)(x-a) + o(x-a).$$

En particulier, $f(x)-f(a) \underset{x\to a}{=} O(x-a)$ et donc $o(f(x)-f(a)) \underset{x\to a}{=} o(x-a)$.
Et donc

$$g(f(x)) \underset{x\to a}{=} g(f(a)) + g'(f(a))f'(a)(x-a) + o(x-a).$$

Donc $g\circ f$ est dérivable en a, avec $(g\circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$. □

[6] C'est de la composition à droite par f.

Proposition 22.15 : *Soit $f : I \to J$ une bijection continue, et soit $a \in J$ tel que f soit dérivable en $f^{-1}(a)$. Alors f^{-1} est dérivable en a si et seulement si $f'(f^{-1}(a)) \neq 0$ et dans ce cas,*

$$\left(f^{-1}\right)'(a) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(a)\right)}.$$

Démonstration. Si f^{-1} est dérivable en a, alors en dérivant en a la relation $x = f(f^{-1}(x))$, alors il vient $1 = \left(f^{-1}\right)'(a) \times f'\left(f^{-1}(a)\right)$.
Donc en particulier, $f'(f^{-1}(a)) \neq 0$.

Astuce
Ceci donne un moyen simple de retrouver la formule si on l'a oubliée.
Malheureusement, ça ne saurait en aucun cas suffire à prouver que f^{-1} est dérivable...

Supposons à présent cette condition vérifiée. Alors, pour $x \in J\setminus\{a\}$,

$$\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(a)}{x-a} = \frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(a)}{f(f^{-1}(x))-f(f^{-1}(a))}.$$

Mais f étant continue, f^{-1} l'est aussi, et en particulier, $\lim\limits_{x\to a} f^{-1}(x) = f^{-1}(a)$.

Et donc, par composition de limites, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(f^{-1}(x))-f(f^{-1}(a))}{f^{-1}(x)-f^{-1}(a)} = f'(f^{-1}(a)) \neq 0$.

Et alors, en passant à l'inverse,

$$\lim_{x\to a}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{1}{\frac{f(f^{-1}(x))-f(f^{-1}(a))}{f^{-1}(x)-f^{-1}(a)}} = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}.$$

Donnons-en également une preuve à l'aide de développements limités.
Souvenons-nous que la continuité de la bijection réciproque a déjà été prouvée précédemment.
Soit donc $a\in J$ tel que $f'(f^{-1}(a)) \neq 0$.
On a alors, pour tout $x \in J$, $x = f(f^{-1})(x)$.
Or, f étant dérivable, $f(u) \underset{u\to f^{-1}(a)}{=} \underbrace{f(f^{-1}(a))}_{=a} + f'(f^{-1}(a))\left(u - f^{-1}(a)\right) + o\left(u-f^{-1}(a)\right)$.

Donc en particulier puisque $f^{-1}(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f^{-1}(a)$, il vient par composition

$$x = f\left(f^{-1}(x)\right) \underset{x\to a}{=} a + f'(f^{-1}(a))\left(f^{-1}(x)-f^{-1}(a)\right) + o\left(f^{-1}(x)-f^{-1}(a)\right).$$

Soit encore

$$\begin{aligned} x-a &\underset{x\to f^{-1}(a)}{=} f'(f^{-1}(a))\left(f^{-1}(x)-f^{-1}(a)\right) + o\left(f^{-1}(x)-f^{-1}(a)\right) \\ &\underset{x\to a}{\sim} f'(f^{-1}(a))(f^{-1}(x)-f^{-1}(a)). \end{aligned}$$

Et donc $f^{-1}(x) - f^{-1}(a) \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{1}{f'(f^{-1}(a))}(x-a)$.
Ce qui nous donne donc

$$f^{-1}(x) \underset{x\to a}{=} f^{-1}(a) + \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}(x-a) + o(x-a)$$

qui permet bien de conclure que f^{-1} est dérivable en a, avec $(f^{-1})'(a) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(a))}$. □

On retrouve alors notamment les dérivées de l'exponentielle[7], et des fonctions trigonométriques inverses. Et également le fait que Arcsin et Arccos ne soient pas dérivables en -1 et en 1.

[7] Qui, rappelons-le, est définie comme la bijection réciproque de ln, qui par définition est dérivable, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$.

22.1.4 Dérivée $k^{\text{ème}}$, fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Définition 22.16 – Soit $f : I \to \mathbf{K}$. On note $f^{(0)} = f$, et pour tout $k \in \mathbf{N}$, si $f^{(k)}$ existe et est dérivable sur I, on note $f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'$.
Si la fonction $f^{(k)}$ est définie, on l'appelle alors dérivée $k^{\text{ème}}$ de f, et on dit que f est k-fois dérivable.

Remarque. En particulier une fonction k fois dérivable est continue, dérivable, deux fois dérivables, etc, $(k-1)$ fois dérivable.

Définition 22.17 – On note $\mathscr{C}^0(I, \mathbf{K})$ l'ensemble des fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbf{K}$.
Pour $k \in \mathbf{N}^*$, une fonction $f : I \to \mathbf{K}$ est dite **de classe $\mathscr{C}^k$ sur** I si elle est k fois dérivable sur I et que $f^{(k)}$ est continue sur I.
On note alors $\mathscr{C}^k(I, \mathbf{K})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.
Enfin, on dit que $f : I \to \mathbf{K}$ est **de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur** I si elle de classe $\mathscr{C}^k$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$. Autrement dit, si elle est dérivable autant de fois que l'on veut.
On note alors $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbf{K}) = \bigcap_{k \in \mathbf{N}^*} \mathscr{C}^k(I, \mathbf{K})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

Remarque
Nous avions déjà une notation pour l'ensemble des fonctions continues, et on utilisera indifféremment $\mathscr{C}(I, \mathbf{K})$ ou $\mathscr{C}^0(I, \mathbf{K})$.

Remarque. Une fonction est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ si et seulement si elle est dérivable et que sa dérivée est de classe $\mathscr{C}^n$.

⚠ On ne confondra pas «dérivable» et «de classe $\mathscr{C}^1$», «deux fois dérivable» et «de classe $\mathscr{C}^2$», etc.
Par exemple, considérons la fonction définie sur $\mathbf{R}^*$ par $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$.
Alors f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
La fonction ainsi prolongée est dérivable en 0 puisqu'alors

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = x \sin \frac{1}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Détails
Il s'agit du produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0.

Par ailleurs, f' est dérivable sur $\mathbf{R}^*$, avec, pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$.
Donc f est dérivable sur $\mathbf{R}$. Pour autant, elle n'est pas $\mathscr{C}^1$ puisque sa dérivée n'est pas continue en 0 : $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ n'existe pas[8].

Une fois acquise l'existence d'une fonction f dérivable qui n'est pas $\mathscr{C}^1$, on peut utiliser le théorème fondamental de l'analyse[9] : une primitive F de f sera deux fois dérivable (car sa dérivée est f, qui est elle-même dérivable), mais pas $\mathscr{C}^2$ puisque sa dérivée seconde est f' qui n'est pas continue.
Puis une primitive de F sera trois fois dérivable et pas $\mathscr{C}^3$, etc.

[8] $2x \sin \frac{1}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ mais $\cos \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0 puisque cos n'a pas de limite en $+\infty$.

[9] Toujours admis à ce stade.

De même, la valeur absolue étant continue et non dérivable, par le théorème fondamental de l'analyse, une primitive F_1 de $x \mapsto |x|$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, mais pas deux fois dérivable.
Et une primitive de F_1 sera $\mathscr{C}^2$ mais pas trois fois dérivable, etc.

En résumé, en notant $\mathscr{D}^n(I, \mathbf{K})$ l'ensemble des fonctions n fois dérivables sur I, on a

$$\mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbf{K}) \subsetneq \mathscr{D}^{n+1}(I, \mathbf{K}) \subsetneq \mathscr{C}^n(I, \mathbf{K}) \subsetneq \mathscr{D}^n(I, \mathbf{K}) \subsetneq \dots$$

Proposition 22.18 (Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^n$) : *Soit $n \in \mathbf{N}^*$.*

1. *Si $f, g \in \mathscr{C}^n(I, \mathbf{K})$, alors $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda f + g \in \mathscr{C}^n(I, \mathbf{K})$.*
2. *Si $f, g \in \mathscr{C}^n(I, \mathbf{K})$, alors $fg \in \mathscr{C}^n(I, \mathbf{K})$. De plus*
$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \qquad \text{(Formule de Leibniz).}$$
3. *Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, et que g ne s'y annule pas, alors $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.*
4. *Si $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbf{C}$ sont de classe $\mathscr{C}^n$, alors $g \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.*
5. *Si $f : I \to J$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^n$, et que sa dérivée ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^n$ sur J.*

Tous ces énoncés restent valables en changeant «de classe $\mathscr{C}^n$» en «n fois dérivable» ou encore en «de classe $\mathscr{C}^\infty$».

Démonstration. Toutes ces preuves se font par récurrence sur n.

1. La somme de deux fonctions continues est continue. Supposons donc qu'une combinaison linéaire de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ est $\mathscr{C}^n$, et soient f, g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, et $\lambda \in \mathbf{K}$.
Alors $\lambda f + g$ est dérivable, avec $(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$.
Puisque f' et g' sont de classe $\mathscr{C}^n$, $(\lambda f + g)'$ est $\mathscr{C}^n$, et donc $\lambda f + g$ est $\mathscr{C}^{n+1}$.
2. Prouvons simplement $\mathscr{P}(n)$: «$\forall f, g \in \mathscr{C}^n(I, \mathbf{K})$, $fg \in \mathscr{C}^n(I, \mathbf{K})$».
Pour $n = 1$, c'est un résultat bien connu.
Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, et soient f, g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I.
Alors fg est dérivable et $(fg)' = f'g + fg'$.
Mais f, f', g, g' sont toutes de classe $\mathscr{C}^n$, donc par hypothèse de récurrence[10], $(fg)' \in \mathscr{C}^n(I, \mathbf{K})$.
Et donc $fg \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbf{K})$, de sorte que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Une fois acquis le fait que (fg) soit n fois dérivable sur I, la preuve de la formule de Leibniz est exactement la même que pour les polynômes (et donc quasiment la même que celle de la formule du binôme).
3. Il s'agit de prouver que l'inverse d'une fonction $\mathscr{C}^n$ qui ne s'annule pas est de classe $\mathscr{C}^n$, le quotient s'obtenant alors comme d'habitude par produit[11].
Supposons donc que l'inverse d'une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ soit de classe $\mathscr{C}^n$, et soit g une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ qui ne s'annule pas sur I.
Alors $\dfrac{1}{g}$ est dérivable, et a pour dérivée $-\dfrac{g'}{g^2}$. Par hypothèse de récurrence, $\dfrac{1}{g}$ est $\mathscr{C}^n$, et donc par produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^n$, $\left(\dfrac{1}{g}\right)'$ est $\mathscr{C}^n$, de sorte que $\dfrac{1}{g}$ est $\mathscr{C}^{n+1}$.

Les points 4. et 5. se prouvent exactement de la même manière : on suppose le résultat vrai pour des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$, on calcule une première dérivée, et on utilise alors l'hypothèse de récurrence pour prouver que cette dérivée est elle-même $\mathscr{C}^n$. □

[10] Et par le point 1) pour la somme.

[11] $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$.

Corollaire 22.19 – *Pour tout $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, $\mathscr{C}^k(I, \mathbf{K})$ est à la fois un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathscr{F}(I, \mathbf{K})$.*

Démonstration. Les fonctions constantes égales à 0 et 1 sont évidemment de classe $\mathscr{C}^k$. Les points 1 et 2 de la proposition précédente prouvent la stabilité de $\mathscr{C}^k(I, \mathbf{K})$ par combinaisons linéaires, et le point 3 prouve la stabilité par produit. □

22.1.5 Retour sur la dérivabilité des fonctions usuelles

Il est grand temps de prouver que les fonctions usuelles sont $\mathscr{C}^\infty$ (et accessoirement qu'elles ont bien les dérivées que nous leur connaissons, mais pour la plupart d'entre elles ceci a déjà été prouvé plus tôt, en admettant la formule pour la dérivée d'une bijection réciproque).

Commençons par une remarque simple : la fonction id : $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbf{R}$, et sa dérivée est constante égale à 1.
En effet, pour tout $a \in \mathbf{R}$, $\dfrac{\mathrm{id}(x) - \mathrm{id}(a)}{x-a} = \dfrac{x-a}{x-a} = 1 \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1$.
Puisque les fonctions constantes sont[12] de classe $\mathscr{C}^\infty$, id est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$.
Par produit, les $\mathrm{id}^n : x \mapsto x^n$ sont également $\mathscr{C}^\infty$, et donc par combinaison linéaire, toutes les fonctions polynomiales sont de classe $\mathscr{C}^\infty$.

[12] Toutes leurs dérivées sont nulles.

De plus, toujours par produit, $\mathrm{id}^2 : x \mapsto x^2$ est dérivable, de dérivée égale à $\mathrm{id}' \times \mathrm{id} + \mathrm{id} \times \mathrm{id}' = 2\mathrm{id} : x \mapsto 2x$, et une récurrence facile prouve que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x \mapsto x^n$ est dérivable, de dérivée égale à $x \mapsto nx^{n-1}$.
Les bijections réciproques de ces fonctions, qui sont les $x \mapsto \sqrt[n]{x}, n \geqslant 2$ sont également de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$ (et pas sur $\mathbf{R}_+$ car la dérivée de $x \mapsto x^n$ s'annule en 0), avec pour dérivée

$$x \mapsto \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n}\frac{\sqrt[n]{x}}{x} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Si n est impair, alors $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est également $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_-^*$, avec la même dérivée que ci-dessus.

Par inverse, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$ et sur $\mathbf{R}_-^*$.
Donc ln, qui par définition[13] possède $x \mapsto \frac{1}{x}$ pour dérivée, est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$.
Et donc sa bijection réciproque, la fonction exponentielle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.

[13] Modulo le théorème fondamental de l'analyse, toujours non prouvé, mais dont la preuve ne reposera aucunement sur les dérivés des fonctions usuelles.

Par composition, toutes les $x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ et $x \mapsto a^x = e^{x \ln(a)}$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leurs ensembles de définition.

Remarque

Notons qu'on retrouve en particulier les $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ sur $\mathbf{R}_+^*$.

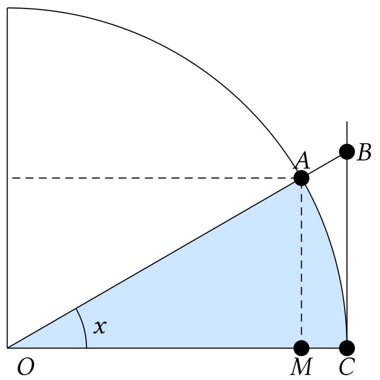
De plus, les fonctions ch, sh et th sont également $\mathscr{C}^\infty$ par somme et quotient de fonctions qui le sont.

Reste le cas un peu plus délicat des fonctions trigonométriques.
Il s'agit essentiellement de prouver que les fonctions sin et cos sont $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$. En effet, par quotient, la tangente le sera sur son ensemble de définition, et les fonctions trigonométriques réciproques suivront alors par le point 5. de 22.18, et on retrouvera alors les dérivées calculées plus tôt dans l'année.

Comme nous ne disposons toujours que d'une définition géométrique un peu «bancale» de ces fonctions, il va falloir accepter quelques arguments géométriques...

Lemme 22.20. Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$.

Démonstration. Nous avons déjà rencontré l'une ou l'autre de ces inégalités, mais la preuve donnée reposait à chaque fois sur une étude de fonction, et passait donc par la dérivée.
Considérons plutôt le dessin suivant :



Alors l'aire du triangle OAC est $\frac{\sin x}{2}$, celle du triangle OBC est $\frac{\tan x}{2}$.
Et l'aire du secteur angulaire (en couleur sur le dessin) OCA est $\frac{x}{2}$.
En effet, l'aire du cercle trigonométrique entier est[14] π, pour un angle de 2π, donc pour

[14] Et on ne peut que l'admettre faute de bonne définition d'une aire pour l'instant.

un angle de x, le secteur angulaire possède une aire de $\frac{x}{2}$.
Et donc on a bien $\frac{\sin x}{2} \leqslant \frac{x}{2} \leqslant \frac{\tan x}{2}$, soit $\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$. □

Par imparité du sinus, il en découle notamment que pour $x \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $|\sin x| \leqslant |x|$, et donc $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x) = 0 = \sin(0)$, de sorte que sin est continue en 0.
Mais sur ce même intervalle, on a $\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)}$, qui est donc également continue en 0 par opérations usuelles sur les fonctions continues.

De l'inégalité ci-dessus, on obtient alors, pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{\sin x}{x} \leqslant 1 \leqslant \frac{1}{\cos x}\frac{\sin x}{x}$.
Soit encore $\cos x \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant 1$, de sorte que par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.
Et par imparité de sin, $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, et donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.
Ainsi, sin est dérivable en 0, avec $\sin'(0) = 1$.
Et puisque sur $\left]0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)}$, cos est dérivable en 0, de dérivée égale à $-\dfrac{\sin'(0)\sin(0)}{\cos(0)} = 0$.
Le plus dur est fait, une fois qu'on sait sin et cos dérivables en 0, le reste vient facilement :

> **Proposition 22.21 :** *Les fonctions* sin *et* cos *sont* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbf{R}$, *avec* $\sin' = \cos$ *et* $\cos' = -\sin$.

Démonstration. Soit $a \in \mathbf{R}$. Alors pour tout $h \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} &= \frac{\sin(a)\cos(h)+\cos(a)\sin(h)-\sin(a)}{h}\\ &= \sin(a)\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(a)\frac{\sin(h)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \sin(a)\cos'(0)+\cos(a)\sin'(0) = \cos(a).\end{aligned}$$

Donc sin est dérivable en a, avec $\sin'(a) = \cos(a)$.
Sur le même principe, pour $h \neq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{\cos(a+h)-\cos(a)}{h} &= \frac{\cos(a)\cos(h)-\sin(a)\sin(h)-\cos(a)}{h}\\ &= \cos(a)\frac{\cos(h)-1}{h}-\sin(a)\frac{\sin(h)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} -\sin(a).\end{aligned}$$

Donc cos est dérivable en a, avec $\cos'(a) = -\sin(a)$.

Une récurrence[15] prouverait alors que sin et cos sont $\mathscr{C}^\infty$, avec $\sin' = \cos$, $\sin'' = -\sin$, $\sin^{(3)} = -\cos$, $\sin^{(4)} = \sin$, $\sin^{(5)} = \cos$, etc.
Plus simplement, on peut noter que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\sin'(x) = \cos(x) = \sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$, et donc sin′ est dérivable, avec pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\sin''(x) = \cos'\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin(x+\pi)$.
Une récurrence facile permet alors de prouver que sin est de classe $\mathscr{C}^\infty$, et que pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $n \in \mathbf{N}$, $\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$.
Et alors $\cos = \sin'$ est également $\mathscr{C}^\infty$. □

[15] Sans grande difficulté, mais probablement un peu pénible à écrire.

22.2 Les théorèmes de Rolle et des accroissements finis

22.2.1 Extrema locaux

Définition 22.22 – Soit $f : I \to \mathbf{R}$, et soit $a \in I$. On dit que f possède un **maximum local** en a s'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in]a-\eta, a+\eta[\cap I,\ f(x) \leqslant f(a).$$

On dit que f possède un **minimum local en** a s'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in]a-\eta, a+\eta[\cap I,\ f(x) \geqslant f(a).$$

Si f possède un maximum local ou un minimum local en a, on dit que f possède **un extremum local en** a.

Bien entendu, un maximum ou un minimum de f sur I est un extremum local, mais la réciproque n'est pas forcément vraie.

Par exemple, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - x$ possède en -1 et en 1 un maximum et un minimum local, qui ne sont pas des extrema globaux, puisque f n'est ni minorée ni majorée.

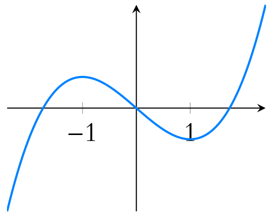


FIGURE 22.2– La fonction $x \mapsto \frac{x^3}{3} - x$

Proposition 22.23 : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$, et soit a intérieur à I. Si f est dérivable en a et possède un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.*

Démonstration. Supposons que f possède un maximum local en a, et soit $\eta > 0$ tel que pour $x \in I \cap]a-\eta, a+\eta[$, $f(x) \leqslant f(a)$.
Puisque a est intérieur à I, quitte à diminuer η, on peut supposer que $]a-\eta, a+\eta[\subset I$.
Alors pour $a - \eta < x < a$, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$, et donc par passage à la limite

$$f'_g(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0.$$

De même, pour $a < x < a + \eta$, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0$, et donc par passage à la limite,

$$f'_d(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0.$$

Mais $f'_g(a) = f'_d(a) = f'(a)$, donc $f'(a)$ est à la fois positif et négatif : il est nul. □

⚠ On a vraiment utilisé le fait que a soit intérieur à I pour justifier l'existence des dérivées à gauche et à droite de f en a.
Le résultat n'est absolument plus vrai si a est une borne de I. Par exemple la fonction $f : \begin{array}{|ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ possède un maximum local en 1, mais sa dérivée en 1 vaut 2 !

⚠ Il n'y a pas de réciproque[16] comme le prouve le cas de la fonction $f : x \mapsto x^3$.
Elle possède un point critique en 0, mais n'a pas d'extremum local en 0 : dans tout voisinage de 0, f prend des valeurs strictement supérieures à $f(0) = 0$ (en les réels supérieures stricts à 0) et des valeurs strictement inférieures à $f(0)$.

[16] En tous cas pas sans hypothèse supplémentaire.

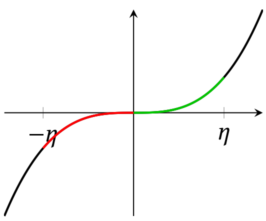


FIGURE 22.3 – Dans tout voisinage $]-\eta, \eta[$ de 0, $x \mapsto x^3$ prend des valeurs positives (en vert) et négatives (en rouge).

Définition 22.24 – Soit $f : I \to \mathbf{R}$, et soit $a \in I$. On dit que a est **un point critique de** f si f est dérivable en a et $f'(a) = 0$.

Remarque. Ce que nous dit la proposition précédente, c'est qu'un extremum local de f est nécessairement atteint en un point critique.

22.2.2 Le théorème de Rolle

Théorème 22.25 (Théorème de Rolle[17]) : *Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, avec $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

[17] Michel Rolle (1652–1719).
Contemporain de Newton et Leibniz, il était très critique à l'égard du calcul différentiel, qui n'apportait selon rien de très nouveau.
Il est amusant de constater que son nom est passé à la postérité justement pour un théorème de calcul différentiel (que Rolle avait toutefois énoncé uniquement en termes algébriques, et pour des polynômes).

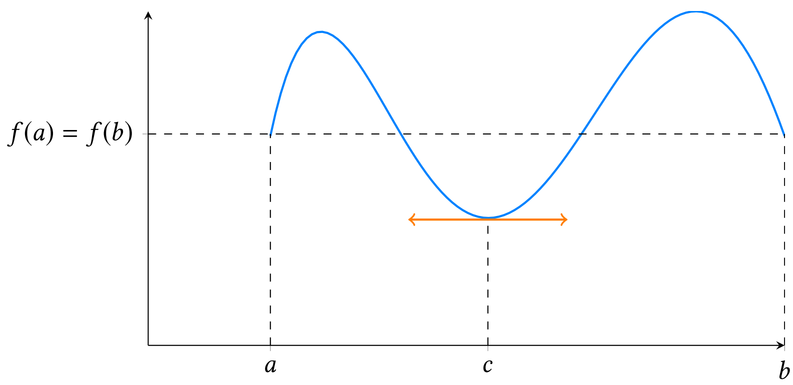


Figure 22.4 – Notons qu'il n'y a aucunement unicité d'un tel c. Sur la figure ci-dessus, il y en a 3.

Démonstration. La preuve est somme toute assez intuitive, et c'est probablement celle que vous imaginez sur la figure.
Puisque f est continue sur $[a, b]$, elle est bornée et atteint ses bornes.
Elle possède donc un minimum m et un maximum M sur $[a, b]$.
▸ Si $m = M$, alors f est constante sur $[a, b]$, et n'importe quel $c \in]a, b[$ fait le job.
▸ Sinon, l'un des deux extremums, soit m, soit M n'est pas égal à $f(a)$. Et donc est atteint en un point $c \in [a, b]$ qui ne peut être ni a ni b, qui est donc dans $]a, b[$.
Par conséquent, f possède un extremum local[18] en c, qui est intérieur à $]a, b[$, et donc $f'(c) = 0$. □

[18] Et en fait global.

⚠ Ceci ne vaut plus du tout pour les fonctions complexes. Par exemple $f : t \mapsto e^{it}$ est dérivable sur $[0, 2\pi]$, avec $f(0) = f(2\pi) = 1$, mais pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $f'(t) = ie^{it}$ est de module 1, donc non nul.

Exemple 22.26

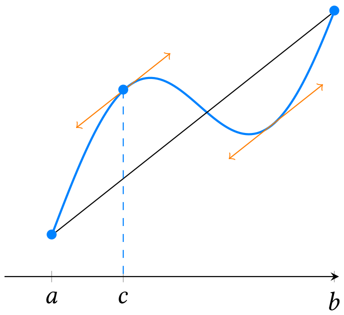
Entre deux racines réelles d'un polynôme de $\mathbf{R}[X]$ se trouve toujours une racine, réelle elle aussi, de son polynôme dérivé.
En effet, si $a < b$ sont deux racines de $P \in \mathbf{R}[X]$, alors P est bien continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et avec $P(a) = P(b) = 0$. Donc il existe $c \in]a, b[$ tel que $P'(c) = 0$.
Mieux : si $P \in \mathbf{R}[X]$ est scindé à racines simples, c'est-à-dire qu'il possède n racines distinctes $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$.
Mais dans chacun des $]\lambda_i, \lambda_{i+1}[$, P' possède une racine, et donc possède $n - 1$ racines distinctes. C'est-à-dire autant que son degré : P' est scindé à racines simples.

22.2.3 Le théorème des accroissements finis

Théorème 22.27 (Égalité des accroissements finis) : *Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Leftrightarrow f'(c)(b - a) = f(b) - f(a).$$

Graphiquement, cela signifie qu'il existe toujours une tangente à $\mathscr{C}_f$ parallèle à la corde passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Notons qu'il n'y a pas unicité d'un tel c, comme le prouve la figure ci-dessous.



Démonstration. Soit d la fonction affine[19] $x \mapsto \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$.
Soit alors $g = f - d$, qui est la distance entre $\mathscr{C}_f$ et la corde.
Il s'agit clairement d'une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ car f l'est.
On a alors $g(a) = f(a) - f(a) = 0$ et $g(b) = f(b) - f(b) = 0$.
Donc par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.
Mais la dérivée de g est $g' : x \mapsto f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
Donc on a $g'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. □

[19] Vous aurez peut-être reconnu qu'il s'agit de la corde joignant les points a et b.

Exemple 22.28

Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, la fonction ln est continue et dérivable sur $[k, k + 1]$.
Donc il existe $c_k \in]k, k + 1[$ tel que $\ln(k + 1) - \ln(k) = \dfrac{(k + 1) - k}{c_k} = \dfrac{1}{c_k}$.
Mais alors $\dfrac{1}{k + 1} < \dfrac{1}{c_k} < \dfrac{1}{k}$, de sorte que

$$\frac{1}{k + 1} < \ln(k + 1) - \ln(k) < \frac{1}{k}.$$

En sommant ces inégalités pour k allant de 1 à n, on obtient

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Soit encore $\ln(n) \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n) + 1 - \frac{1}{n + 1}$, ce qui prouve que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$.

Nous sommes alors en mesure de prouver un résultat admis dans le chapitre de développements limités :

Proposition 22.29 : *Soit f une fonction continue sur un intervalle I qui possède un développement limité d'ordre n au voisinage de a :*

$$f(x) \underset{x\to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right).$$

Si F est une primitive de f sur I, alors F possède un développement limité d'ordre $n+1$ au voisinage de a, donné par

$$\begin{aligned} F(x) &\underset{x\to a}{=} F(a) + c_0(x-a) + \frac{c_1}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + o\left((x-a)^{n+1}\right) \\ &\underset{x\to a}{=} F(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + o\left((x-a)^{n+1}\right). \end{aligned}$$

⚠ Attention !

Ne pas oublier la constante d'intégration, qui dépend de la primitive choisie.

Démonstration. Soit $\varphi : x \mapsto F(x) - F(a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{k+1}(x-a)^{k+1}$.

Alors F est dérivable sur I, et sa dérivée est $\varphi' : x \mapsto f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k$.

Donc $\varphi'(x) \underset{x\to a}{=} o\left((x-a)^n\right)$.

A présent, pour $x \in I$, par le théorème des accroissements finis[20], il existe $c_x \in]a, x[$ (ou $]x, a[$ si $x < a$) tel que $\varphi(x) - \varphi(a) = \varphi'(c_x)(x-a)$.
Mais $|c_x - a| < |x-a|$, et donc $c_x \underset{x\to a}{\longrightarrow} a$.
Donc $\varphi'(c_x) \underset{x\to a}{=} o\left((x-a)^n\right)$.
Et par conséquent, par produit $\varphi(x) - \underbrace{\varphi(a)}_{=0} \underset{x\to a}{=} o\left((x-a)^{n+1}\right)$ de sorte que

$$F(x) \underset{x\to a}{=} F(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + o\left((x-a)^{n+1}\right).$$ □

[20] C'est ici qu'on a besoin d'un intervalle.

22.2.4 L'inégalité des accroissements finis

Bien que ni Rolle ni le théorème des accroissements finis ne soient valables pour des fonctions à valeurs complexes, l'inégalité qui suit est valable aussi en complexe.

Théorème 22.30 (Inégalité des accroissements finis) : *Soit $f : I \to \mathbf{C}$ une fonction dérivable sur I. S'il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que $\forall t \in I$, $|f'(t)| \leqslant M$, alors*

$$\forall (x, y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|.$$

Démonstration. Si f est une fonction réelle, il suffit de remarquer que pour $x < y$ deux éléments de I, il existe $c \in]x, y[\subset I$ tel que $f'(c)(y-x) = f(y) - f(x)$. Mais alors $|f'(c)| \leqslant M$ et donc en passant à la valeur absolue,

$$|f(y) - f(x)| = |f'(c)| \cdot |y-x| \leqslant M|y-x|.$$

Dans le cas où f est à valeurs complexes, fixons $x < y$ dans I.
▶ <u>1er cas</u> : supposons que $f(y) - f(x) \in \mathbf{R}$.
Alors la fonction[21] $\mathrm{Re}(f)$ est dérivable sur $[x, y]$, avec $|\mathrm{Re}(f)'| = |\mathrm{Re}(f')| \leqslant |f'| \leqslant M$.
Et donc par le cas réel, $|f(y) - f(x)| = |\mathrm{Re}(f)(y) - \mathrm{Re}(f)(x)| \leqslant M|y-x|$.
▶ <u>Cas général</u> : soit $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $f(y) - f(x) = e^{i\theta}|f(y) - f(x)|$. Alors $e^{-i\theta}(f(y) - f(x)) \in \mathbf{R}$.

[21] À valeurs réelles, donc pour laquelle le théorème des accroissements finis s'applique.

Remarque

θ n'est rien d'autre qu'un argument de $f(x) - f(y)$.

Soit alors $\varphi : t \mapsto e^{-i\theta} f(t)$. C'est une fonction dérivable sur I, avec $\varphi'(t) = e^{-i\theta} f'(t)$, et donc $|\varphi'(t)| = |f'(t)| \leqslant M$.
Puisque d'autre part, $\varphi(y) - \varphi(x) \in \mathbf{R}$, on est dans le cas traité ci-dessus :

$$|\varphi(y) - \varphi(x)| \leqslant M|y-x|.$$

Mais $|\varphi(y) - \varphi(x)| = |f(y) - f(x)|$. □

Exemple 22.31

Pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$.
En effet, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a $|\sin'(t)| = |\cos t| \leqslant 1$.
Et en particulier, lorsque $y = 0$, il vient : $\forall x \in \mathbf{R}$, $|\sin x| \leqslant |x|$.

Remarque
Cette inégalité n'a vraiment d'intérêt que pour x proche de 0, puisque pour $|x| \geqslant 1$, elle est triviale...

Définition 22.32 – Soit D une partie de $\mathbf{R}$, soit $f : D \to \mathbf{C}$ et soit $k > 0$. On dit que f est ***k*-lipschitzienne**[22] si

$$\forall (x, y) \in D^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|.$$

S'il existe $k > 0$ tel que f soit k-lipschitzienne, on dit simplement que f est **lipschitzienne.**

[22] Du nom de Rudolph LIPSCHITZ (1832–1903).

Graphiquement, une fonction k-lipschitzienne est une fonction pour laquelle pour $x \neq y$, $\left|\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leqslant k$, c'est-à-dire dont les pentes des cordes restent comprises entre $-k$ et k.

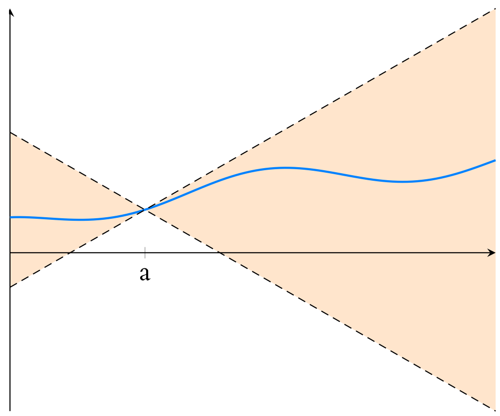


FIGURE 22.5 – Le graphe de f reste compris entre les droites passant par $(a, f(a))$ et de pentes $\pm k$.

Proposition 22.33 : *Si f est k-lipschitzienne sur D, alors elle est continue sur D.*

Démonstration. Soit $a \in D$, et soit $\varepsilon > 0$, et soit $\eta = \dfrac{\varepsilon}{k}$.
Alors pour $x \in D$, $|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < k\eta \leqslant \varepsilon$.
Donc $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, de sorte que f est continue en a. Et ceci étant vrai pour tout a, f est continue sur D. □

⚠ La réciproque est fausse il existe des fonctions continues qui ne sont pas k-lipschitziennes pour aucun $k > 0$.
C'est par exemple le cas de la fonction $f : x \mapsto x^2$ sur $\mathbf{R}$.
En effet, quel que soit $k > 0$, pour $x > k$, on a $f(x) - f(0) = x^2 > k|x - 0|$.

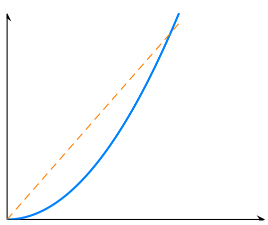


FIGURE 22.6– Les pentes des cordes de la fonction carré ne sont pas bornées : elle n'est pas lipschitzienne.

L'inégalité des accroissements finis prouve alors que si f est dérivable, et que f' est bornée, alors f est lipschitzienne. En particulier, si f est $\mathscr{C}^1$ sur un segment $[a, b]$, alors f' y est bornée, et donc f est k-lipschitzienne, pour $k = \max\limits_{x \in [a,b]} |f'(x)|$.

22.3 DÉRIVABILITÉ ET MONOTONIE

Commençons par un résultat bien connu, qu'il est temps de prouver, et que nous avons déjà utilisé à maintes reprises[23].

[23] Par exemple pour dire que deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Proposition 22.34 : *Soit $f : I \to \mathbf{K}$ une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors f est constante sur I si et seulement si $\forall x \in I$, $f'(x) = 0$.*

Démonstration. Le sens direct est évident : si f est constante, alors sa dérivée est la fonction nulle.
Inversement, supposons que f' soit la fonction nulle, et soient $x < y$ deux éléments de I.
On a alors pour tout $t \in I$, $|f'(t)| \leqslant 0$, si bien que par l'inégalité des accroissements finis, pour tous $(x, y) \in I^2$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant 0|x - y| \Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

□

⚠ Rappelons qu'il est fondamental que I soit un intervalle.
Par exemple, $x \mapsto \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\,\frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbf{R}^*$, de dérivée nulle, mais n'est pas constante sur $\mathbf{R}^*$.
Mais elle est bien constante sur chacun des intervalles $\mathbf{R}_+^*$ et $\mathbf{R}_-^*$.

Proposition 22.35 : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur I, dérivable sur l'intérieur de I. Alors f est croissante si et seulement si $\forall x \in \overset{\circ}{I}$, $f'(x) \geqslant 0$.*

Démonstration. Si f est croissante, alors pour tout x intérieur à I et tout $y \neq x$, on a $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \geqslant 0$, et donc par passage à la limite, $f'(x) = \lim\limits_{y \to x} \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \geqslant 0$.
Inversement, supposons f' positive sur $\overset{\circ}{I}$, et soient $x < y$ deux points de I.
Alors par les accroissements finis, il existe $c \in]x, y[\subset \overset{\circ}{I}$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) \geqslant 0$.
Et donc $f(x) \leqslant f(y)$: f est croissante. □

Bien entendu, en appliquant cette proposition à $-f$, on obtient que f est décroissante si et seulement si $f' \leqslant 0$ sur $\overset{\circ}{I}$.

Proposition 22.36 : *Soit f une fonction continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$. Si f' est positive sur $\overset{\circ}{I}$ et ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I.*

Démonstration. Puisque f' est positive sur $\overset{\circ}{I}$, f est croissante sur I.
Supposons qu'elle ne soit pas strictement croissante, et soient $x < y$ deux éléments de I avec $f(x) \geqslant f(y)$. Alors par croissance de f, pour tout $t \in [x, y]$, $f(y) \leqslant f(x) \leqslant f(t) \leqslant f(y)$ si bien que f est constante sur $[x, y]$.
Et donc sa dérivée est nulle sur $]x, y[$, qui contient une infinité de points, ce qui est absurde.
Donc f est strictement croissante. □

Ce résultat s'applique notamment si $\forall x \in \overset{\circ}{I}$, $f'(x) > 0$.

Exemple 22.37

Encore une fois, il ne s'agit pas d'une équivalence.
Par exemple, considérons $f : x \mapsto x + \cos x$.
Alors f est dérivable et $f'(x) = 1 - \sin(x)$ est positive sur $\mathbf{R}$ et s'annule en tous les nombres de $\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{Z}$.
Pourtant f est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.
En effet, soient $x < y$ deux réels. Alors f' s'annule un nombre fini de fois sur $[x, y]$, et donc y est strictement croissante, de sorte que $f(x) < f(y)$.

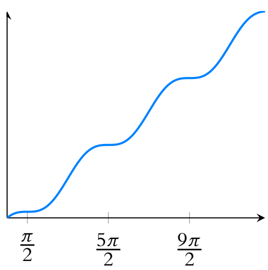


FIGURE 22.7– $x \mapsto x + \cos(x)$

22.4 Théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$

Théorème 22.38 (Théorème de la limite de la dérivée) : *Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction vérifiant :*

1. *f est continue sur $[a,b]$*
2. *f est dérivable sur $]a,b]$*
3. *$\lim\limits_{x\to a^+} f'(x) = \ell \in \overline{\mathbf{R}}$*

Alors $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$.
En particulier, si $\ell \in \mathbf{R}$, alors f est dérivable[24] en a, avec $f'(a) = \ell$ et f' est continue en a.

[24] À droite.

Remarques. ► Il existe évidemment un énoncé analogue avec des limites à gauche en b.
► L'intérêt de ce théorème réside dans le fait qu'il n'y a qu'une limite à calculer. Alors que si on avait voulu prouver «à la main» que f est $\mathscr{C}^1$, il aurait fallu commencer par prouver que f est dérivable en a (soit un premier calcul de limite), puis étudier la continuité de f' en a (second calcul de limite). Le théorème de la limite de la dérivée nous dit que seul ce second calcul est nécessaire.

Démonstration. Soit $x \in]a,b]$. Alors par le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in]a,x[$ tel que $f(x)-f(a) = f'(c_x)(x-a)$.
Mais alors $a \leqslant c_x \leqslant x$, de sorte que par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to a^+} c_x = a$.
Et donc par composition de limites, $\lim\limits_{x\to a} f'(c_x) = \lim\limits_{t\to a} f'(t) = \ell$.
Et donc $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$.
Ainsi, f est dérivable en a, avec $f'(a) = \ell$, et donc $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = f'(a)$, donc f' est continue en a. □

Composition
La notation c_x est trompeuse : il s'agit en fait d'une fonction
$$c : \left|\begin{array}{ccc}]a,b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & c_x \end{array}\right.$$

Exemple 22.39

Soit $f : \left|\begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{Arcsin}(1-x^4) \end{array}\right.$.
Alors f est continue sur $[-1,1]$ par composition de fonctions continues.
La fonction $x \mapsto 1-x^4$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[-1,0[\cup]0,1]$, à valeurs dans $[0,1[$.
Or, sur $[0,1[$, Arcsin est $\mathscr{C}^1$. Donc par composition f est $\mathscr{C}^1$ sur $[-1,0[\cup]0,1]$.
Pour x dans cet ensemble, on a $f'(x) = \dfrac{-4x^3}{\sqrt{1-(1-x^4)^2}} = \dfrac{-4x^3}{\sqrt{2x^4-x^8}} = -\dfrac{4x}{\sqrt{2-x^4}}$.
Et en particulier, $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$.
Donc f est dérivable en 0, avec $f'(0) = 0$.
Et donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-1,1]$ tout entier.

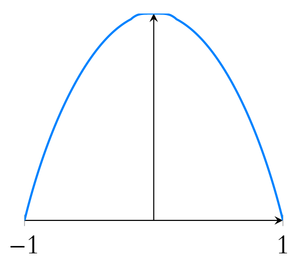


FIGURE 22.8– La fonction f.

En revanche, la fonction $g : \left|\begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{Arcsin}(1-x^2) \end{array}\right.$ n'est pas dérivable en 0.
En effet, le même raisonnement que précédemment reste valable sur $[1,0[\cup]0,1]$, avec $g'(x) = \dfrac{-2x}{\sqrt{2x^2-x^4}}$.
Pour $x > 0$, ceci se simplifie en $g'(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{2-x^2}}$, mais pour $x < 0$, on obtient $g'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2-x^2}}$.
Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} g'(x) = -\sqrt{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} g'(x) = \sqrt{2}$.
Donc par le théorème de la limite de la dérivée, g est dérivable à gauche en 0 avec $g'_g(0) = \sqrt{2}$ et dérivable à droite avec $g'_d(0) = -\sqrt{2}$.
Par conséquent, g n'est pas dérivable en 0.

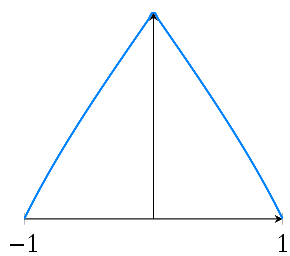


FIGURE 22.9– La fonction g.

Bien que la preuve utilise le théorème des accroissements finis, ce résultat reste valable pour les fonctions à valeurs complexes, il suffit pour cela de séparer partie réelle et partie imaginaire.

Corollaire 22.40 (Théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$) – *Soit $f :]a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a, b]$.*
Si f et f' possèdent des limites finies en a, alors le prolongement par continuité de f en a est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$.

Démonstration. Notons $\ell = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, de sorte que le prolongement par continuité de f à $[a, b]$ est $\tilde{f} : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x > a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$
Alors $\tilde{f}$ est continue sur $[a, b]$, et $\mathscr{C}^1$ sur $]a, b]$.
Et alors, le théorème de la limite de la dérivée s'applique à $\tilde{f}$, de sorte que $\tilde{f}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$. □

Corollaire 22.41 (Théorème de prolongement $\mathscr{C}^k$) – *Soit $k \in \mathbf{N}^*$ et soit $f \in \mathscr{C}^k(]a, b], \mathbf{R})$. Si $\lim\limits_{x\to a} f^{(i)}(x)$ existe et est finie pour tout $i \in [\![0, k]\!]$, alors le prolongement par continuité de f à $[a, b]$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $[a, b]$.*

Et si $k = \infty$?
Il n'est pas difficile de constater que ceci reste valable pour des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur k.
Pour $k = 1$, c'est la proposition précédente.
Supposons le résultat vrai au rang k, et soit $f \in \mathscr{C}^{k+1}(]a, b])$, telle que $\lim\limits_{x\to a} f^{(i)}(x)$ existe pour tout $i \in [\![0, k+1]\!]$.
Alors par hypothèse de récurrence, le prolongement par continuité[25] de f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $[a, b]$.
Donc $f^{(k)}$ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b]$, car f y est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$, et $(f^{(k)})' = f^{(k+1)}$ possède une limite finie en a.
Donc par le théorème de la limite de la dérivée appliqué à $f^{(k)}$, $f^{(k)}$ est dérivable en a, et $f^{(k+1)}$ est continue en a.
Donc f est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ sur $[a, b]$. □

[25] Qui existe puisque f admet une limite finie en a.