Développements limités 20

Nous avons déjà rencontré la notion de développement limité d'ordre 1 pour les fonctions dérivables.
Il s'agissait alors d'approximer, au voisinage de a, une fonction f par sa tangente en a.
C'est-à-dire par un polynôme de degré 1
Les développements limités viennent généraliser cette approximation, en donnant des polynômes de degré quelconque qui approchent localement à f.

Les développements limités nous fourniront notamment un outil pour résoudre certaines des formes indéterminées pour lesquelles les équivalents usuels ne suffisaient pas.

Même si dans ce chapitre, nous nous concentrons essentiellement sur la pratique du calcul, les développements limités n'ont pas pour seul utilité de vous faire calculer. Vous serez en permanence amenés à utiliser des développements limités, non seulement pour trouver des équivalents ou calculer des limites, mais aussi plus tard pour étudier l'existence de certaines sommes infinies, de certaines intégrales, ou encore pour étudier l'allure de certaines courbes. Ne négligez donc pas ce chapitre, il est central en analyse.

20.1 Définitions, premières propriétés

Définition 20.1 – Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur une partie I de $\mathbf{R}$, soit a un réel adhérent à I, et soit $n \in \mathbf{N}$.
On dit que f possède un **développement limité d'ordre n au voisinage de a** s'il existe des réels $c_0, c_1, \dots, c_n$ tels que

$$f(x) \underset{x\to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right).$$

En abrégé
On notera souvent $DL_n(a)$ pour désigner un développement limité à l'ordre n en a.

Pour le dire autrement, f possède un développement limité d'ordre n au voisinage de a s'il existe un polynôme $P \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que $f(x) \underset{x\to a}{=} P(x-a) + o\left((x-a)^n\right)$.

Exemples 20.2

▶ Une formule bien connue nous dit que pour $x \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.
Mais $\dfrac{x^{n+1}}{1-x} \underset{x\to 0}{\sim} x^{n+1} \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$.
Donc $\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$ est un développement limité à l'ordre n en 0 de $\dfrac{1}{1-x}$.

▶ Notons que chercher un développement limité en a de f revient, quitte à composer par $x-a$, à chercher le développement limité en 0 de la fonction $x \mapsto f(x+a)$.
Par exemple, nous connaissons le développement limité d'ordre 1 en 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$: c'est $x + o(x)$.
Mais alors pour $x \geqslant 0$, $\ln(x) = \ln(1+(x-1)) \underset{x\to 1}{=} x - 1 + o(x-1)$.
Nous avons là un développement limité à l'ordre 1 de ln au voisinage de 1.

Notons tout de suite que si f possède un développement limité à l'ordre n, alors elle possède un développement limité à tout ordre $m \leqslant n$.

En effet,

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_m(x-a)^m + \underbrace{c_{m+1}(x-a)^{m+1} + \cdots + c_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)}_{=o((x-a)^m)} \\ &\underset{x\to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_m(x-a)^m + o\left((x-a)^m\right). \end{aligned}$$

On dit alors qu'on a **tronqué** le développement limité à l'ordre m.

> **Rappel**
> En 0, si $k \leqslant p$, alors
> $$x^p \underset{x\to 0}{=} x^k.$$
> Par changement de variable,
> $$(x-a)^p \underset{x\to a}{=} o\left((x-a)^k\right).$$

Proposition 20.3 : *Si f possède un développement limité d'ordre n au voisinage de a, alors celui-ci est unique : si*

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right) \\ &\underset{x\to a}{=} b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right) \end{aligned}$$

alors $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $b_i = c_i$.
La fonction polynomiale $x \mapsto c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n$ est appelée ***partie régulière*** *du développement limité.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que les deux développements limités sont différents, et soit p le plus petit entier de $[\![0, n]\!]$ tel que $b_p \neq c_p$.
Alors, en tronquant les développements limités à l'ordre p, il vient

$$f(x) \underset{x\to a}{=} b_p(x-a)^p + o\left((x-a)^p\right) \underset{x\to a}{=} c_p(x-a)^p + o\left((x-a)^p\right)$$

et donc par différence, $(b_p - c_p)(x-a)^p \underset{x\to a}{=} o\left((x-a)^p\right)$, ce qui est impossible puisque $b_p - c_p \neq 0$. □

> **Pas convaincu ?**
> Calculez la limite du quotient !

Un développement limité nous donne tout de suite un équivalent :

Proposition 20.4 : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction qui possède un développement limité d'ordre n au voisinage de $a \in I$: $f(x) \underset{x\to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$.*
On suppose que la partie régulière du développement limité n'est pas nulle, et on note p le plus petit entier tel que $c_p \neq 0$. Alors

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} c_p(x-a)^p.$$

Démonstration. Par hypothèse, $p \leqslant n$.
Divisons la relation indiquée par $c_p(x-a)^p$:

$$\frac{f(x)}{c_p(x-a)^p} = 1 + \frac{c_{p+1}}{c_p}(x-a) + \cdots + \frac{c_n}{c_p}(x-a)^{n-p} + \frac{1}{c_p}\frac{o((x-a)^{n-p})}{(x-a)^{n-p}} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1.$$

□

C'est là une grande partie de l'intérêt des développements limités : ils vont nous aider à trouver des équivalents simples[1] de certaines quantités.
Notons tout de suite que ce résultat ne vaut que pour des fonctions dont on a poussé le développement limité à un ordre suffisamment important pour que sa partie régulière soit non nulle.

[1] Car polynomiaux.

Exemple 20.5

En utilisant le $DL_1(0)$ de l'exponentielle, et en composant à droite par $x \mapsto x^2$, on obtient $e^{x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 + o(x^2)$, qui est donc le $DL_2(0)$ de e^{x^2}.

Et alors $e^{x^2} - \cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 - 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{3}{2}x^2$.
Un développement limité d'ordre 1 n'aurait en revanche pas suffit à déterminer un

équivalent, puisque ce développement limité possède une partie régulière nulle : $e^{x^2} - \cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + o(x) - 1 + o(x) \underset{x\to 0}{=} o(x)$.

Proposition 20.6 : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et soit $a \in I$. Alors :*

1. *f possède un développement limité d'ordre 0 au voisinage de a si et seulement si elle est continue en a, et alors $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + o(1)$.*
2. *f possède un développement limité d'ordre 1 au voisinage de a si et seulement si elle est dérivable en a, et alors $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o((x-a))$.*

Démonstration. 1. f possède un développement limité d'ordre 0 au voisinage de a si et seulement si elle possède une limite en a. C'est le cas si et seulement si f est continue en a, et alors cette limite vaut $f(a)$.

2. Si f est dérivable en a, alors

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} f'(a) \Leftrightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{=} f'(a) + o(1).$$

Et donc $f(x)-f(a) \underset{x\to a}{=} f'(a)(x-a)+o(x-a)$ donc $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a)$, si bien que f possède un développement limité d'ordre 1 au voisinage de a.

Inversement, si elle possède un tel développement limité :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + o(x-a),$$

alors $f(x) \underset{x\to a}{=} c_0 + o(1)$, de sorte que $c_0 = f(a)$.

Et alors $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{=} c_1 + o(1) \underset{x\to a}{\longrightarrow} c_1$.

□

⚠ Pour $n \geqslant 2$, il n'y a pas de lien entre l'existence d'un développement limité d'ordre n au voisinage de a et le fait que f soit n fois dérivable.

Exemple 20.7

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \sin\frac{1}{x} \end{array} \right.$.

Alors f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

On a alors, pour $x > 0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x^2 \sin\frac{1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$

Donc f est dérivable en 0, avec $f'(0) = 0$.

Par ailleurs, f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, avec $f'(x) = -x\cos\frac{1}{x} + 3x^2\sin\frac{1}{x}$, qui tend vers 0 en 0.

Donc f' est continue sur $\mathbf{R}_+$.

En revanche, $\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x} = -\cos\dfrac{1}{x} + 3x\sin\dfrac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0, donc f n'est pas deux fois dérivable.

Par ailleurs, $\sin\frac{1}{x}$ étant borné, on a $f(x) \underset{x\to 0}{=} O(x^3) \underset{x\to 0}{=} o(x^2)$.

Et donc f possède un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0, qui est simplement $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^2) \underset{x\to 0}{=} 0 + 0x + 0x^2 + o(x^2)$.

La fonction f est donc un exemple de fonction possédant un développement limité d'ordre 2 en 0 et qui n'est pas deux fois dérivable sur un voisinage de 0.

Détails
Produit d'une fonction bornée par une fonction de limite nulle.

Proposition 20.8 : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur un ensemble symétrique, tel que 0 soit adhérent à I.*
On suppose que f possède un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} c_0 + \cdots + c_n x^n + o(x^n).$$

1. *Si f est paire, alors tous les coefficients de degré impair de son développement limité sont nuls : si k impair, $c_k = 0$.*
2. *Si f est impaire, alors tous les coefficients de degré pair de son développement limité sont nuls : si k pair, $c_k = 0$.*

Autrement dit
La partie régulière a même parité que f.

Démonstration. Il s'agit essentiellement de se rappeler que la composition à droite est autorisée dans les o, et donc que si on a

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + o(x^n)$$

alors $f(-x) \underset{x\to 0}{=} c_0 + c_1(-x) + \ldots c_n(-x)^n + o((-x)^n) = c_0 - c_1 x + \cdots + (-1)^n c_n x^n + o(x^n)$.
Ceci prouve notamment que la fonction $x \mapsto f(-x)$ possède un développement limité d'ordre n en 0.
Si f est paire, alors $f(x) = f(-x)$, et donc par unicité du développement limité d'ordre n, par identification des coefficients : $c_1 = -c_1, c_3 = -c_3, \ldots$, et donc tous les coefficients de degré impair sont nuls.
On raisonne de même si f est impaire. □

20.2 DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS USUELS

20.2.1 La formule de Taylor-Young

Le résultat qui suit est admis pour l'instant, car il nécessite un résultat[2] qui sera prouvé dans le chapitre de dérivation.

[2] Le théorème des accroissements finis.

Proposition 20.9 (Intégration de développements limités) : *Soit f une fonction continue sur un intervalle I qui possède un développement limité d'ordre n au voisinage de a :*

$$f(x) \underset{x\to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

Si F est une primitive de f sur I, alors F possède un développement limité d'ordre $n+1$ au voisinage de a, donné par

$$\begin{aligned}F(x) &\underset{x\to a}{=} F(a) + c_0(x-a) + \frac{c_1}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + o\left((x-a)^{n+1}\right)\\ &\underset{x\to a}{=} F(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + o\left((x-a)^{n+1}\right).\end{aligned}$$

⚠ Attention !
Ne pas oublier la constante d'intégration, qui dépend de la primitive choisie.

⚠ Il n'y a pas de résultat analogue sur la dérivation des développements limités : dériver un développement limité de f ne fournit pas toujours un développement limité de f'.

Définition 20.10 – Soit $n \in \mathbf{N}$, et soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ si elle est n fois dérivable, et que $f^{(n)}$ est continue.
On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I si elle est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Remarque. Notons tout de suite qu'une fonction qui est $n+1$ fois dérivable est automatiquement de classe $\mathscr{C}^n$. En effet, elle est n fois dérivable, et $f^{(n)}$ est encore dérivable, donc en particulier est continue.
Par conséquent, une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ est aussi de classe $\mathscr{C}^k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

Nous reviendrons en détail sur la notion de fonction de classe $\mathscr{C}^n$ dans le chapitre de dérivation.

Théorème 20.11 (Formule de Taylor-Young) : *Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle I et soit $a \in I$. Alors f possède un développement limité d'ordre n au voisinage de a, donné par*

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right).$$

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$.
Pour $n = 1$, nous avons déjà prouvé ce résultat.
Supposons donc le résultat vrai pour une fonction de classe $\mathscr{C}^n$, et soit f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$.
Alors f' est de classe $\mathscr{C}^n$, et donc par hypothèse de récurrence,

$$f'(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right).$$

Mais alors, par primitivation[3] de développement limité,

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}\frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + o\left((x-a)^{n+1}\right) \\ &\underset{x\to a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + o\left((x-a)^{n+1}\right) \\ &\underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

[3] Ce mot n'existe pas, mais il est tellement pratique !

Donc par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et toute fonction f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ au voisinage de a, f possède un développement limité d'ordre n au voisinage de a, donné par la formule annoncée. □

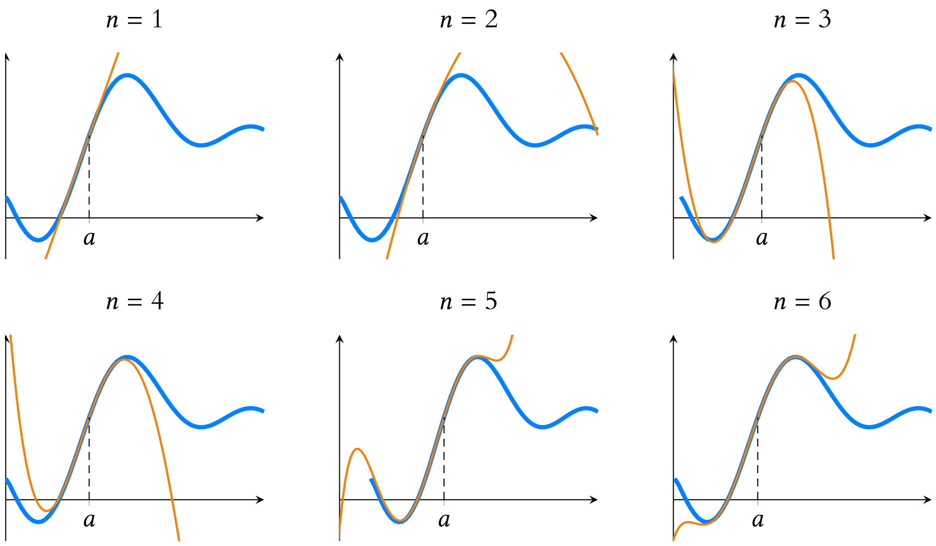


FIGURE 20.1 – Les premiers développements limités d'une fonction f.
On constate qu'au voisinage de a, f est très bien approximée par ses développements limités, et que plus n est grand, plus l'approximation reste correcte «loin» de a.

Remarques. ▶ Pour $n = 1$, on retrouve bien la formule déjà vue précédemment.
▶ En particulier, une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ possède des développements limités de tout ordre en tout point.
▶ Le lien avec la formule de Taylor polynomiale est assez évident. La principale différence

vient du fait que cette formule ne s'applique pas qu'aux fonctions polynomiales.
Le reste (le $o((x-a)^n)$) vient donc quantifier la différence entre f et la partie régulière de son développement limité, alors que pour Taylor polynomial, pour un ordre suffisamment grand, on avait directement une égalité entre f et son développement limité.

20.2.2 Développements limités usuels

Tous les développements limités qui suivent sont à connaître **par cœur**[4].

[4] Et généralisent très largement les développements limités d'ordre 1 que vous connaissiez déjà.

Théorème 20.12 (Développements limités usuels au voisinage de 0) :
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors

- $$e^x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$
- $$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$
- $$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$
- $$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$
- $$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k!)} + o\left(x^{2n+1}\right) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$
- $$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + o\left(x^{2n+2}\right)$$
- $$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$
- $$\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$
- $$\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

Astuce
Dans le développement limité de l'exponentielle, on ne garde que les termes de degré pair (car cos est pair), avec alternance de signe.

Astuce
Idem que pour le cos, mais avec les termes de degré impair.

Astuce
Si $\alpha \in \mathbf{N}$, alors
$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$
n'est autre que le coefficient binomial $\binom{\alpha}{k}$.
On retrouve ainsi une formule qui ressemble beaucoup au binôme de Newton.

Astuce
On ne garde que les termes de degré pair (car ch est paire) du DL de e^x.

Remarquons que le développement de $(1+x)^\alpha$ nous fournit notamment

$$\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\cdot\frac{3-2n}{2}\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

et $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{-1}{2}\dfrac{-3}{2}\dfrac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!}x^n + o(x^n)$.

Démonstration. La totalité de ces développements limités peuvent se prouver à l'aide de la formule de Taylor, même si les preuves données ci-dessous emploient parfois d'autres méthodes.

1. La fonction $f : x \mapsto e^x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, et pour tout $k \in \mathbf{N}$, $f^{(k)}(x) = e^x$. En particulier, $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$, et donc
$$e^x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$
2. Rappelons une formule classique : pour $x \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.
Et donc $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}$.
Or au voisinage de 0, $\dfrac{x^{n+1}}{1-x} \underset{x\to 0}{\sim} x^{n+1} \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$.
3. Il suffit de changer[5] x en $-x$ pour obtenir le développement de $\dfrac{1}{1+x}$.
4. Notons que $x \mapsto \ln(1+x)$ est l'unique primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ qui s'annule en 0.
Et donc, en intégrant le développement limité de $\dfrac{1}{1+x}$, il vient
$$\ln(1+x) = \underbrace{\ln(1+0)}_{=0} + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$
5. Rappelons que la dérivée $k^{\text{ème}}$ de cos est $x \mapsto \cos\left(x + \dfrac{k\pi}{2}\right)$, et donc en particulier,
$\cos^{(k)}(0) = \cos\left(\dfrac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{est impair} \\ (-1)^p & \text{si } k = 2p \text{ est pair} \end{cases}$.
Donc par la formule de Taylor-Young, à l'ordre $2n+1$, qui s'applique car cos est $\mathscr{C}^\infty$, et donc en particulier $\mathscr{C}^{2n+1}$,
$$\begin{aligned} \cos(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{2n+1} \cos^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + o\left(x^{2n+1}\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n+1} \cos^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + o\left(x^{2n+1}\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{p=0}^{n} \cos^{(2p)}(0)\frac{x^{2p}}{(2p)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right). \end{aligned}$$
6. C'est le même principe.
7. La dérivée $k^{\text{ème}}$ en de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est $\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$, qui en 0 vaut $\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$.
La formule de Taylor permet alors de conclure.
8. Une récurrence immédiate prouve que pour tout $k \in \mathbf{N}$, ch est k fois dérivable, que $\mathrm{ch}^{(k)} = \mathrm{ch}$ si k est pair, et $\mathrm{ch}^{(k)} = \mathrm{sh}$ si k est impair.
Donc par la formule de Taylor-Young à l'ordre $2n+1$,
$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{\mathrm{ch}^{(k)}(0)}{k!}x^k + o\left(x^{2n+1}\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{pair}}}^{2n+1} \frac{x^k}{(k)!} + o(x^{2n+1}) \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right). \end{aligned}$$

[5] Opération qui est permise, nous avons déjà justifié ceci dans le chapitre 18.

Remarque
Notons que ce DL ne contenant pas de termes de degré impair, il ne coûte pas plus cher de le donner à l'ordre $2n+1$ qu'à l'ordre $2n$, seul le o change.

9. Sur le même principe, dans $\operatorname{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, les termes pairs se simplifient, et il ne reste donc que les termes de degré impair de l'exponentielle.

□

Ne sont pas à connaître par cœur, mais à savoir retrouver très rapidement : les développements limités en 0 des fonctions trigonométriques réciproques.
On sait que Arctan est la primitive qui s'annule en 0 de

$$x \mapsto \frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}),$$

Détails C'est de la composition : on a remplacé les x par x^2 dans le $DL_n(0)$ de $\frac{1}{1+x}$.

et donc par intégration,

$$\operatorname{Arctan} x \underset{x\to 0}{=} \underbrace{\operatorname{Arctan} 0}_{=0} + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+1}\right).$$

Et de même, Arcsin est la primitive qui s'annule en 0 de

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!}x^{2n} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

de sorte que

$$\operatorname{Arcsin}(x) \underset{x\to 0}{=} \underbrace{\operatorname{Arcsin}(0)}_{=0} + x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{1\cdot 2\cdots(2n)(2n+1)}x^{2n+1} + o\left(x^{2n+2}\right).$$

On peut faire un petit peu mieux en se souvenant que

$$\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{1\cdot 2\cdots(2n)} = \frac{(2n)!}{(1\cdot 2\cdots 2n)^2} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}.$$

Et donc $\operatorname{Arcsin} x \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k(2k+1)}\binom{2k}{k}x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$.
On obtient le développement limité de Arccos sur le même principe, ou à l'aide de la relation $\operatorname{Arcsin} + \operatorname{Arccos} = \dfrac{\pi}{2}$.
Si la fonction tangente possède des développements limités en 0 à tout ordre par la formule de Taylor, il est difficile de donner une formule close pour son développement limité d'ordre n.
En revanche, il est bon de connaître son développement limité à l'ordre 3 :

Remarque Une telle formule existe, mais elle est compliquée, et fait apparaître une suite classique (et mystérieuse) : les nombres de Bernoulli.

Proposition 20.13 : $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$.

Démonstration. Si la formule de Taylor s'applique, personne n'a envie de calculer la dérivée troisième de la tangente...
Notons plutôt que nous savons déjà, par la formule de Taylor à l'ordre 1 que $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$.
Et donc $\tan^2(x) \underset{x\to 0}{=} (x + o(x))^2 \underset{x\to 0}{=} x^2 + o(x^2)$.
Mais $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \underset{x\to 0}{=} x^2 + o(x^2)$, donc par intégration de développement limité,

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} \tan(0) + x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Notons que cette méthode permettrait d'aller plus loin[6] *: maintenant que nous avons le $DL_3(0)$ de* tan, *on peut en déduire le $DL_4(0)$ de $1+\tan^2$, puis intégrer...* □

[6] Et nous le ferons en TD.

20.3 OPÉRATIONS SUR LES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Nous ne ferons aucune théorie, et conformément au programme officiel il s'agit surtout de comprendre sur des exemples comment bien calculer avec des développements limités.

20.3.1 Somme

La somme de développements limités ne pose pas de problème, en gardant à l'esprit que la somme d'un $DL_n(a)$ de f et d'un $DL_m(a)$ de g, avec $m \geqslant n$, ne donne qu'un développement limité à l'ordre n de $f+g$.
En effet, les termes de degré supérieur strict à n sont «absorbés» par le $o\left((x-a)^n\right)$.

Exemple 20.14

Cherchons le $DL_3(0)$ de $\operatorname{Arctan}(x) + 2\ln(1+x)$.
On a $\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.
Et $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.
Donc le développement limité de la somme est

$$\operatorname{Arctan}(x) + 2\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} 3x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

20.3.2 Produits

Les produits ne posent pas non plus de difficultés. Notons tout de même que lorsqu'on multiplie deux développements limités à l'ordre n, des termes d'ordre $n+1$ ou plus risquent d'apparaître. On n'oubliera donc pas de tronquer le développement limité obtenu : lorsqu'on fait le produit de deux développements limités d'ordre n tous les termes en $(x-a)^{n+1}$, $(x-a)^{n+2}$, etc ne sont pas pertinents car ils sont «absorbés» par le $(x-a)^n$.

⚠ Attention !
On n'en déduira pas non plus un DL_{2n} à l'aide du produit de deux DL_n.

Exemple 20.15

Cherchons le $DL_2(0)$ de $e^x\sqrt{1+x}$. On a

$$\begin{aligned}
e^x\sqrt{1+x} &\underset{x\to 0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}x^2 + o(x^2) + \underbrace{\frac{1}{8}x^3 + o(x^3) - \frac{x^4}{16} + o(x^4)}_{=o(x^2)}\\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}x^2 + o(x^2).
\end{aligned}$$

⚠ Attention !
Soyez attentifs dans les calculs, ici les termes de degré 2 proviennent de 3 endroits : les deux termes de degré 2 de chacun des facteurs, et le produit des deux termes de degré 1.

Ceci s'applique bien entendu à l'obtention du développement limité d'une puissance.

Exemple 20.16

On a

$$\begin{aligned}
\cos^2 x &\underset{x\to 0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)\right)^2\\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o\left(x^4\right)
\end{aligned}$$

et donc

$$\cos^3 x \underset{x\to 0}{=} \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o\left(x^4\right)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)\right) = 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{8}x^4 + o\left(x^4\right).$$

Parité
Notons que la fonction $\cos^3$ étant paire, il n'est pas surprenant (et même il était prévisible) qu'il n'y ait aucun terme de degré impair.

20.3.3 Composition

Comme tout ce que nous avons dit sur les compositions de o reste valable ici, on peut bien entendu composer des développements limités.

Exemple 20.17

Cherchons le $DL_4(0)$ de $\ln(1+\sin(x))$. Puisque $\sin(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a

$$\ln(1+\sin(x)) \underset{x\to 0}{=} \sin(x) - \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^4 x}{4} + o\left(\sin x^4\right).$$

Or, $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, donc $\sin^4 x \underset{x\to 0}{\sim} x^4$, et donc $o\left(\sin^4 x\right) = o\left(x^4\right)$.

De plus, $\sin^2 x \underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 \underset{x\to 0}{=} x^2 - 2\frac{x^4}{6} + o(x^4)$ et

$$\sin^3(x) = \sin^2(x)\sin x \underset{x\to 0}{=} \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \underset{x\to 0}{=} x^3 + o(x^4).$$

$$\sin^4(x) \underset{x\to 0}{=} \left(\sin^2 x\right)^2 \underset{x\to 0}{=} \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right)^2 \underset{x\to 0}{=} x^4 + o(x^4).$$

Et donc

$$\begin{aligned}\ln(1+\sin x) &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)\\ &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6}x^3 - \frac{x^4}{12} + o(x^4).\end{aligned}$$

Un bon moyen de présenter les calculs est de faire un tableau avec $DL_4(0)$ des puissances successives de $\sin x$, et dans lequel on ne s'embête pas avec les o.

$\sin(x)$	$x - \frac{x^3}{6}$
$\sin^2(x)$	$x^2 - \frac{x^4}{3}$
$\sin^3(x)$	x^3
$\sin^4(x)$	x^4

Chacune des lignes de ce tableau est alors obtenue en multipliant la ligne précédente par la première ligne.

Un cas très particulier de composition : les quotients de développements limités.
Notons tout de suite que le quotient de deux fonctions admettant un développement limité en a n'admet pas forcément de développement limité, même à l'ordre 0.
Par exemple, $\frac{e^x}{\sin x}$ n'a pas de limite en 0, et donc ne peut pas posséder de développement limité à aucun ordre en 0.
Malgré tout, nous serons souvent amenés à étudier des développements limités de quotients, l'outil fondamental dans ce cas étant alors le développement limité de $\frac{1}{1\pm x}$, qui nous ramène à de la composition/du produit de développements limités.

Exemples 20.18

▸ Cherchons un $DL_4(0)$ de th. On a $\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$ et

$$\operatorname{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right) \text{ et } \operatorname{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right).$$

Donc $\dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{1+\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)}$.

En se souvenant que $\dfrac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1-u+u^2-u^3+u^4+o(u^4)$, il vient

$$\begin{aligned}\frac{1}{\operatorname{ch}(x)} &\underset{x\to 0}{=} 1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)+\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)^2-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)^3\\ &\quad+\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)^4+o\left(\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)^4\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+o\left(x^4\right).\end{aligned}$$

Et donc par produit,

$$\operatorname{th}(x) \underset{x\to 0}{=} \left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+o\left(x^4\right)\right)=x-\frac{x^3}{3}+o(x^4).$$

Oui, je sais ce que vous pensez : tous ces calculs pour en arriver là ? On avait vraiment besoin du $\frac{5}{24}x^4$?
Non, pas si on s'y prend bien, mais c'est la suite...

► Cherchons un $DL_3(0)$ de $\dfrac{1}{1+e^{2x}}$.

On a $e^{2x} \underset{x\to 0}{=} 1+2x+2x^2+\dfrac{4}{3}x^3+o\left(x^3\right)$.

Donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+e^{2x}} &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+o(x^3)}\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x+x^2+\frac{2}{3}x^3+o(x^3)}\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}\left(1-\left(x+x^2+\frac{2}{3}x^3\right)+\left(x+x^2\right)^2-x^3+o(x^3)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}-\frac{1}{2}x+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right).\end{aligned}$$

Dans le cas d'un dénominateur qui tend vers 0, cette méthode fonctionne encore dans la plupart des cas, mais il y a des précautions à prendre.

Exemple 20.19

Cherchons le $DL_2(0)$ de $\dfrac{e^x-1}{\ln(1+x)}$.

On sait que $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$ et $e^x-1 \underset{x\to 0}{=} x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{24}+o(x^4)$.

Donc dans le quotient $\dfrac{e^x-1}{\ln(1+x)}$, on peut simplifier numérateur et dénominateur par x.
On prendra alors garde au fait que ceci diminue les ordres des développements limités.

$$\begin{aligned}\frac{e^x-1}{\ln(1+x)} &\underset{x\to 0}{=} \frac{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)}\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)}{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}\end{aligned}$$

On va à l'ordre 3 car la simplification par x va faire baisser les ordres d'une unité.

$$\underset{x\to 0}{=} \left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)\left(1-\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\right)+\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\right)^2+o(x^2)\right)$$
$$\underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{3}+o(x^2).$$

20.3.4 Optimisation des calculs

Un premier bon réflexe, pour éviter ce qui s'est produit sur th peut être de s'intéresser à la parité[7] de la fonction qui nous intéresse.
Par exemple, si on cherche, comme sur l'exemple de th un développement limité à l'ordre 4 en 0, on sait qu'il suffit d'obtenir le développement limité à l'ordre 3 en 0.

[7] Dans le cas de développements limités en 0.

Une autre bonne habitude est, dans les produits, de s'intéresser au degré du premier terme non nul[8].
Par exemple, si on cherche un $DL_3(0)$ de $e^x \sin x$, on sait que le développement limité de $\sin x$ va commencer par x. Et donc il suffit d'utiliser un $DL_2(0)$ de e^x pour faire le produit :

[8] C'est-à-dire au degré de l'équivalent.

$$e^x \sin(x) \underset{x\to 0}{=} \left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)+x^2+\underbrace{x\cdot o(x^2)}_{=o(x^3)}+o(x^3).$$

Notons qu'en revanche, il nous a bien fallu[9] le $DL_3(0)$ de $\sin(x)$.

[9] Car le DL de e^x possède un terme constant.

Par exemple ceci ne vaut plus pour un $DL_3(0)$ de $e^x\cos(x)$n puisque cos possède un terme constant non nul.

Et par exemple, pour un $DL_4(0)$ de $\sin(x)\ln(1+x^2)$ il suffit d'un $DL_2(0)$ de $\sin(x)$ et d'un $DL_3(0)$ de $\ln(1+x^2)$.

Détails ?
Faites-le, vous devriez comprendre !

De manière générale, avoir une idée de ce qui peut se produire dans les calculs, avant d'avoir à les faire permet souvent d'anticiper, et de calculer les développements limité juste au bon ordre. C'est-à-dire sans trop en faire, mais également sans rien oublier.

20.3.5 Et ailleurs qu'en 0 ?

Quasiment tous les exemples que nous avons donnés ici sont des développements limités en 0, mais ce ne sont pas les seuls que nous sachions calculer.
Dans le cas d'un développement limité en $a \neq 0$, la formule de Taylor-Young reste valable en a.
Sinon un changement de variable $x = a + h$ est souvent pertinent.

Exemple 20.20

Cherchons un développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 3 de de $\ln(x)$.
On a $\ln(x) = \ln(3+h) = \ln(3) + \ln\left(1+\frac{h}{3}\right)$.
Et donc puisque $h \underset{x\to 3}{\longrightarrow} 0$,

$$\ln(x) \underset{x\to 3}{=} \ln(3) + \left(\frac{h}{3}-\frac{h^2}{18}+\frac{h^3}{81}+o\left(h^3\right)\right)$$
$$\underset{x\to 3}{=} \ln(3)+\frac{1}{3}(x-3)-\frac{1}{18}(x-3)^2+\frac{1}{81}(x-3)^3+o\left((x-3)^3\right).$$

20.4 Applications des développements limités

20.4.1 Les équivalents et les limites

Le principal intérêt des développements limités est l'obtention d'équivalents et par conséquent, le calcul de limites.
Rappelons encore une fois la règle : une fonction qui possède un développement limité

non nul en a est équivalente, au voisinage de a, au terme non nul de plus bas degré de son développement limité.

Exemple 20.21

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-\tan(x)}{\sin x - \tan x}$.

On a $\ln(1+x)-\tan x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} - x + o(x^2) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$.

D'autre part, on a

$$\sin(x)-\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} - x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{2}.$$

Et donc $\dfrac{\ln(1+x)-\tan x}{\sin x - \tan x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-\frac{x^2}{2}}{-\frac{x^3}{2}} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

20.4.2 Position d'une courbe par rapport à sa tangente et nature de points critiques

Soit f une fonction possédant un développement limité d'ordre 2 au voisinage de a.

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + c_2(x-a)^2 + o\left((x-a)^2\right).$$

Alors nous savons que f est dérivable en a, et que l'équation de la tangente à Γ_f en a est $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.

La position de la courbe par rapport à la tangente est donc donnée par le signe de $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$.

Or $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \underset{x\to a}{=} c_2(x-a)^2 + o\left((x-a)^2\right)$.

Si $c_2 \neq 0$, on a donc $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \underset{x\to a}{\sim} c_2(x-a)^2$.

Mais souvenons nous que deux fonctions équivalentes au voisinage de a sont de même signe au voisinage de a.

Donc si $c_2 > 0$, pour tout x au voisinage de a, $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) > 0$, et donc $\mathscr{C}_f$ est, au voisinage de a, au-dessus de sa tangente.

Si $c_2 < 0$, on prouve de même que $\mathscr{C}_f$ est en dessous de sa tangente en a.

En revanche, dans le cas où $c_2 = 0$, on ne peut pas conclure sur la base du développement limité d'ordre 2.

Une solution serait alors d'aller chercher le terme suivant non nul dans un développement limité d'ordre supérieur[10] de f.

> **Danger !**
> Toute la subtilité est cachée dans le «au voisinage de a» : on ne sait pas si le voisinage en question est $\mathbf{R}$, $]a-1, a+1[$ ou $]a-10^{-10}, a+10^{-10}[$.
> Donc il n'est pas question d'en déduire des inégalités «pour tout x».
> Si on souhaite une telle inégalité, il n'y a guère d'autre solution que d'étudier la fonction $x \mapsto f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$.

[10] S'il existe.

Exemple 20.22

Prenons l'exemple du sinus en 0 : sa tangente est la droite d'équation $y = x$.

On a alors $\sin(x) - x \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^3}{6}$.

Donc $\sin(x) - x$ est, au voisinage de 0, du même signe que $-\dfrac{x^3}{6}$, c'est-à-dire du signe opposé à x.

Le fait que ce signe ne soit pas constant signifie que le graphe de f traverse sa tangente.

Ceci s'applique particulièrement pour l'étude des points critiques d'une fonction. En effet, nous savons que si f possède un extremum local en a, alors elle possède un point critique en a. Mais que la réciproque est fausse.

Soit donc f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$, et a un point critique de f.

Alors au voisinage de a, $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\dfrac{(x-a)^2}{2} + o(x^2)$.

Donc $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ est du même signe que $f''(a)\dfrac{(x-a)^2}{2}$.

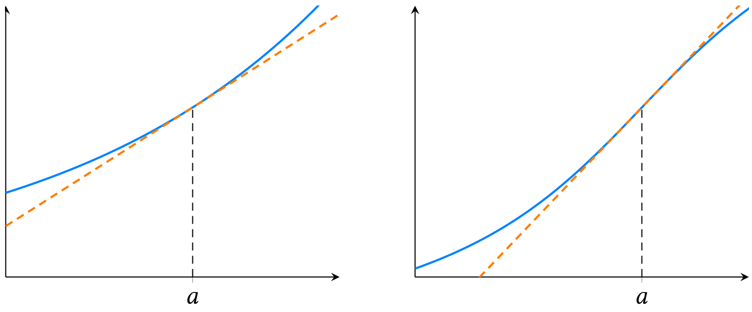


FIGURE 20.2 – Une fonction qui reste au dessus de sa tangente et une fonction qui traverse sa tangente.

Autrement dit, c'est le signe de $f''(a)$ qui déterminera si f est au dessus de sa tangente horizontale.
Si $f''(a) > 0$, alors $f''(a)(x-a)^2$ est strictement positif au voisinage de a, donc le graphe de f est au-dessus de sa tangente. Et possède donc un minimum local en a.
De même, si $f''(a) < 0$, on prouve que f possède un minimum local en a.
Enfin, si $f''(a) = 0$, et si f est $\mathscr{C}^n$, alors il faut pousser la formule de Taylor-Young un (ou plusieurs) ordre(s) plus loin, jusqu'à obtenir un $f^{(k)}(a)$ non nul. Si k_0 désigne la plus petite valeur[11] de k telle que $f^{k_0}(a) \neq 0$, alors :

[11] Si elle existe.

1. si k_0 est pair, f possède un extremum local en a, dont la nature est donnée par le signe de $f^{(k_0)}(a)$.
   En effet, au voisinage de a, $f(x)-f(a) \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{f^{(k_0)}(a)}{k_0!}(x-a)^{k_0}$, qui est de signe constant.
2. si k_0 est impair, $f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{f^{(k_0)}(a)}{k_0!}(x-a)^{k_0}$ n'est pas de signe constant au voisinage de a, et donc f ne possède pas d'extremum local en a.

20.4.3 Développements asymptotiques

Enfin, les développements limités permettent d'exprimer le comportement de fonctions qui n'ont pas forcément de développement limité, ou en $\pm\infty$.

Prenons par exemple la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f : x \mapsto \sin(x\ln(x))$.
Elle est prolongeable par continuité en posant $f(0) = 0$. Et possède donc un développement limité à l'ordre 0.
Il n'est pas très dur de constater que $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$, et donc, par le théorème de la limite de la dérivée, f n'est pas dérivable en 0.
Elle n'a donc de développement limité à aucun ordre plus grand que 1.
Pourtant, on peut avoir envie d'en trouver des équivalents plus simples, ou de l'exprimer à l'aide de fonctions plus simples.
C'est possible à l'aide du développement limité de sin en 0 :

$$\sin(x\ln x) \underset{x\to 0}{=} x\ln(x) - \frac{1}{6}(x\ln(x))^3 + o\left(x^3\ln(x)^3\right).$$

Ceci nous donne un équivalent $(x\ln(x))$, mais nous permettrait aussi de quantifier la différence en f et son équivalent.

On appelle alors **développement asymptotique** tout développement de ce type, faisant intervenir une gamme de fonctions plus large que celles que l'on s'autorise dans les développements limités, à savoir les fonctions polynomiales.

Exemple 20.23

Considérons la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{\ln(1+x)}{\sin^2 x}}$.

On a alors , au voisinage de 0,

$$\frac{\ln(1+x)}{\sin^2(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}\frac{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}{\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)^2}$$
$$\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}\left(1-\frac{x}{2}+\frac{2}{3}x^2+o(x^2)\right)$$

Et alors, il vient

$$\sqrt{\frac{\ln(1+x)}{\sin^2(x)}} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{1-\frac{x}{2}+\frac{2}{3}x^2+o(x^2)}$$
$$\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{\sqrt{x}}\left(1-\frac{x}{4}+\frac{29}{96}x^2+o(x^2)\right)$$
$$\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{4}+\frac{29}{96}x\sqrt{x}+o\left(x\sqrt{x}\right).$$

On parle alors de développement asymptotique à la précision $x\sqrt{x}$, même si je ne donnerai aucune définition rigoureuse de ceci.

Détails
Je vous épargne le détail du calcul du développement limité, le seul moyen de vous convaincre qu'il est juste est de la calculer….

Enfin, il est possible d'obtenir des «développement limités en $\pm\infty$», c'est-à-dire des développements asymptotiques faisant apparaître des $\frac{1}{x^k}$.

Exemple 20.24

Considérons la fonction $f : x \mapsto (x+1)e^{1/x}$.
Alors, lorsque $x \to \pm\infty$, $\frac{1}{x} \to 0$, et donc nous pouvons utiliser le développement limité de l'exponentielle en 0 :

$$e^{1/x} \underset{x\to\pm\infty}{=} 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

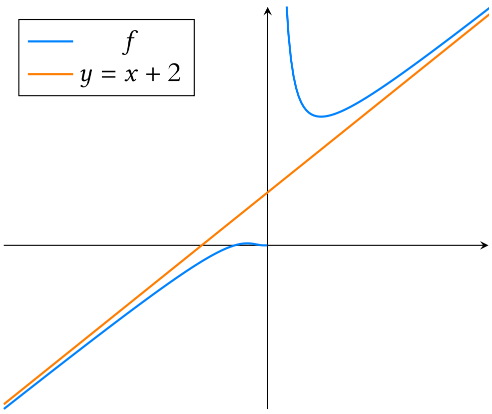
Et donc

$$(x+1)e^{1/x} \underset{x\to\pm\infty}{=} (x+1)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$
$$\underset{x\to\pm\infty}{=} x+1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
$$\underset{x\to\pm\infty}{=} x+2+\frac{3}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

En particulier, ceci nous dit que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-x-2=0$, et donc Γ_f possède pour asymptote, en $-\infty$ et en $+\infty$ la droite d'équation $y=x+2$.
De plus, on a $f(x)-(x+2) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \frac{3}{2x}$, qui est du signe de x.
Donc au voisinage de $+\infty$, Γ_f est au dessus de son asymptote, et au voisinage $-\infty$, Γ_f est en dessous de son asymptote.

⚠ Attention !
Soyez vigilants sur les o, ici les termes en $\frac{1}{x^2}$ sont «absorbés» par le terme en $\frac{1}{x}$.

Remarque
Bien qe nous ayons ici utilisé d'autres moyens, la méthode classique pour trouver une asymptote oblique aurait fonctionné ici.


f
$y = x + 2$