

ESPACES VECTORIELS ET APPLICATIONS LINÉAIRES

Dans tout le chapitre, \mathbf{K} désigne soit \mathbf{R} soit \mathbf{C} , mais tous les résultats annoncés restent valables pour un corps quelconque.

Les éléments de \mathbf{K} seront appelés les **scalaires**.

20.1 STRUCTURE D'ESPACE VECTORIEL

20.1.1 Définition

Définition 20.1 – Soit E un ensemble. On dit que E est un **\mathbf{K} -espace vectoriel** (ou un espace vectoriel sur \mathbf{K}) s'il est muni de deux opérations notées

$$+ : \begin{cases} E \times E & \longrightarrow E \\ (x, y) & \longmapsto x + y \end{cases} \text{ (loi de composition interne) et } \cdot : \begin{cases} \mathbf{K} \times E & \longrightarrow E \\ (\lambda, x) & \longmapsto \lambda \cdot x \end{cases}$$

(appelée loi de composition externe) telles que :

1. $(E, +)$ soit un groupe abélien dont l'élément neutre est noté 0_E et est appelé le **vecteur nul** de E .
2. $\forall x \in E, 1 \cdot x = x$
3. $\forall \lambda \in \mathbf{K}, \forall (x, y) \in E^2, \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
4. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2, \forall x \in E, (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
5. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2, \forall x \in E, (\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$.

Les éléments de E sont alors appelés des **vecteurs**.

Remarque

Ce simple point requiert en fait la vérification de 4 axiomes (associativité, commutativité, élément neutre, existence d'un inverse).

Exemples 20.2

- ▶ \mathbf{K} lui-même est un \mathbf{K} -espace vectoriel muni de sa somme et de son produit¹.
- ▶ $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est un \mathbf{K} -espace vectoriel.
- ▶ $\mathbf{K}[X]$ est un \mathbf{K} -espace vectoriel, de même que $\mathbf{K}_n[X]$.

¹ Qui peut donc être vu soit comme une loi de composition interne, soit comme une loi de composition externe.

Proposition 20.3 : Si E est un \mathbf{K} -espace vectoriel et A est un ensemble quelconque, alors sur $\mathcal{F}(A, E)$, on définit une loi de composition interne $+$ et une loi de composition externe \cdot en posant

$$\forall (f, g) \in \mathcal{F}(A, E)^2, f + g : \begin{cases} A & \longrightarrow E \\ x & \longmapsto f(x) + g(x) \end{cases}$$

et

$$\forall f \in \mathcal{F}(A, E), \forall \lambda \in \mathbf{K}, \lambda \cdot f : \begin{cases} A & \longrightarrow E \\ x & \longmapsto \lambda \cdot f(x) \end{cases}.$$

Alors, muni de ces lois, $\mathcal{F}(A, E)$ est un \mathbf{K} -espace vectoriel dont le vecteur nul est la fonction nulle.

Démonstration. On sait déjà qu'il s'agit d'un groupe abélien², d'élément neutre la fonction nulle.

Il suffit donc de prouver que la multiplication externe vérifie bien les points 2 à 5 ci-dessus.

² Cf ce qui a été fait dans le cas des fonctions sur un anneau.

C'est assez évident vu qu'ils sont vérifiés dans E .

Prouvons par exemple les deux premiers : soit $f \in \mathcal{F}(A, E)$.

Alors pour tout $x \in A$, $(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$, donc $1 \cdot f = f$. Donc 2) est vérifié.

Soient $f, g \in \mathcal{F}(A, E)$, et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors pour tout $x \in A$, on a

$$(\lambda \cdot (f + g))(x) = \lambda \cdot (f + g)(x) = \lambda \cdot (f(x) + g(x)) = \lambda \cdot f(x) + \lambda \cdot g(x).$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in A$, $\lambda \cdot (f + g) = \lambda \cdot f + \lambda \cdot g$.

Donc 3) est vérifié. Etc. \square

Proposition 20.4 : Si E et F sont deux \mathbf{K} -espaces vectoriels, alors $E \times F$, muni des opérations $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ et $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y)$ est encore un \mathbf{K} -espace vectoriel.

Démonstration. Nous avons déjà prouvé³ que $(E \times F, +)$ est un groupe abélien, dont le vecteur nul est $(0_E, 0_F)$.

Soit $(x, y) \in E \times F$. Alors $1 \cdot (x, y) = (1 \cdot x, 1 \cdot y) = (x, y)$.

Soit $\lambda \in \mathbf{K}$ et soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E \times F$. Alors

$$\begin{aligned} \lambda \cdot ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= \lambda \cdot (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (\lambda \cdot (x_1 + x_2), \lambda \cdot (y_1 + y_2)) = (\lambda \cdot x_1 + \lambda \cdot x_2, \lambda \cdot y_1 + \lambda \cdot y_2) \\ &= (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot y_1) + (\lambda \cdot x_2, \lambda \cdot y_2) = \lambda \cdot (x_1, y_1) + \lambda \cdot (x_2, y_2). \end{aligned}$$

Les deux autres points se prouvent de la même manière, en exploitant le fait qu'ils soient vrais dans E et dans F . \square

Ceci se généralise bien entendu au produit de n espaces vectoriels.

En particulier, $\mathbf{K}^n = \mathbf{K} \times \mathbf{K} \times \dots \times \mathbf{K}$ est un \mathbf{K} -espace vectoriel, de vecteur nul $(0, 0, \dots, 0)$.

Proposition 20.5 (Règles de calcul dans un espace vectoriel) :

► Pour $(\lambda, x) \in \mathbf{K} \times E$, on a $\lambda \cdot x = 0_E \Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E)$.

► Pour tout $x \in E$, $(-1) \cdot x = -x$. Autrement dit, $(-1) \cdot x$ est l'opposé de x : $(-1) \cdot x + x = 0_E$.

Démonstration. ► On a déjà $0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$, et donc⁴ $0 \cdot x = 0_E$.

De même, pour $\lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot (0_E + 0_E) = \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E$, et donc $\lambda \cdot 0_E = 0_E$.

Enfin, si $\lambda \cdot x = 0_E$ et $\lambda \neq 0$, alors $x = \left(\frac{1}{\lambda}\right) \cdot x = \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot x) = 1 \cdot 0_E = 0_E$.

► $(-1) \cdot x + x = (-1) \cdot x + 1 \cdot x = (-1 + 1) \cdot x = 0 \cdot x = 0_E$.

Et donc $(-1) \cdot x$ est l'opposé de x . \square

Dans toute la suite du chapitre, sauf mention explicite du contraire, E désigne un \mathbf{K} -espace vectoriel.

20.1.2 Sous-espace vectoriel

Définition 20.6 – Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel, et soit F une partie de E .

On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si :

1. F est stable par $+$: $\forall (x, y) \in F^2, x + y \in F$
2. F est stable par multiplication par un scalaire : $\forall \lambda \in \mathbf{K}, \forall x \in F, \lambda \cdot x \in F$
3. muni des lois induites $+$ et \cdot , F est un \mathbf{K} -espace vectoriel.

Proposition 20.7 (Caractérisation des sous-espaces vectoriels) : Une partie F d'un \mathbf{K} -espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

- i) $0_E \in F$
- ii) F est stable par combinaison linéaire⁵ : $\forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbf{K}, \lambda \cdot x + y \in F$.

³ Cf le produit direct de deux groupes.

Remarque

On note bien 0 : le scalaire nul, à ne pas confondre avec 0_E , le vecteur nul. 0 est dans \mathbf{K} , 0_E est dans E .

⁴ On peut simplifier par $0 \cdot x$: tout élément d'un groupe est régulier.

Démonstration. Si F est un sous-espace vectoriel, alors $0_E \in F$ puisqu'il s'agit d'un sous-groupe. Et pour $(x, y) \in F^2$, et $\lambda \in \mathbf{K}$, alors $\lambda x \in F$ puisque $x \in F$ et que F est stable par la multiplication externe.

Ensuite, F étant stable par somme, $\lambda x + y \in F$.

Inversement, supposons que F contienne le vecteur nul et soit stable par combinaison linéaire.

Alors, en prenant $\lambda = 1$, pour tout $(x, y) \in F^2$, $x + y \in F$, donc F est stable par +.

Et en prenant $y = 0_E$, alors $\forall x \in F$ et $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda \cdot x + 0_E = \lambda \cdot x \in F$.

Puisqu'en particulier, pour tout $(x, y) \in F^2$, on a $(-1) \cdot x + y = y - x \in F$, alors F est un sous-groupe abélien de E .

Et alors les quatre derniers points⁶ sont évidents, puisqu'ils découlent directement du fait que E soit un espace vectoriel.

Par exemple, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$, $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$. □

⁶ C'est-à-dire les points 2 à 5 de la définition d'espace vectoriel, qui concernent le comportement de la multiplication externe.

Exemples 20.8

- ▶ $\{0_E\}$ et E sont toujours des sous-espaces vectoriels de E .
- ▶ Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$.
- ▶ L'ensemble des matrices triangulaires supérieures est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
- ▶ L'ensemble des fonctions continues sur un intervalle I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbf{K})$.
- ▶ L'ensemble des suites convergentes est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$.
- ▶ $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^3 .

Remarques. ▶ Vous trouverez parfois la condition $0_E \in F$ remplacée par $F \neq \emptyset$.

C'est équivalent car si $0_E \in F$, alors $F \neq \emptyset$. Et inversement s'il existe $u \in F$, alors en prenant $\lambda = -1$ et $x = y = u$ dans le point 2), il vient $-u = u = 0_E \in F$.

▶ De même, il se peut que vous croisie la stabilité par combinaison linéaire sous la forme suivante :

$$2') \quad \forall (x, y) \in F^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2, \lambda x + \mu y \in F.$$

Déjà $2') \Rightarrow 2)$, puisqu'il suffit de prendre $\mu = 1$.

Inversement, supposons 2) vrai, et soient $(x, y) \in F^2$, et $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$. Alors $\mu \cdot y + 0_E \in F$, et donc $\lambda \cdot x + (\mu \cdot y) \in F$. Donc $2) \Rightarrow 2')$.

Proposition 20.9 : Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E .

Alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est encore un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration. Puisque 0_E est dans tout sous-espace vectoriel, il est dans $\bigcap_{i \in I} F_i$.

Soient $x, y \in \bigcap_{i \in I} F_i$ et soit $\lambda \in \mathbf{K}$.

Alors, pour tout $i \in I$, puisque F_i est stable par combinaison linéaire, $\lambda \cdot \underbrace{x}_{\in F_i} + \underbrace{y}_{\in F_i} \in F_i$.

Et donc $\lambda \cdot x + y \in \bigcap_{i \in I} F_i$.

Donc $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E . □

Remarques. ▶ Notons que ceci vaut en particulier pour l'intersection de deux sous-espaces vectoriels, ou de $n \in \mathbf{N}^*$ sous-espaces vectoriels.

▶ En revanche, l'union de deux sous-espaces vectoriels n'est que rarement un sous-espace vectoriel. Ce n'est pas une grande surprise, puisque nous avons déjà prouvé en TD qu'une union de deux sous-groupes n'est un sous-groupe que si l'un est inclus dans l'autre⁷.

⁷ Et le même résultat reste valable pour des sous-espaces vectoriels.

20.2 FAMILLES DE VECTEURS

20.2.1 Combinaisons linéaires, sous-espace engendré par une partie

Définition 20.10 – Soit (e_1, \dots, e_n) une famille de n vecteurs de E . Un vecteur $x \in E$ est dit **combinaison linéaire** de (e_1, \dots, e_n) s'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ tels

$$\text{que } x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot e_i.$$

On note alors $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de e_1, \dots, e_n :

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n \right\}.$$

Remarque. Le vecteur nul est combinaison linéaire de toute famille, puisque quels que

$$\text{soient } e_1, \dots, e_n \in E^n, 0_E = \sum_{i=1}^n 0 \cdot e_i.$$

Exemple 20.11

► Dans \mathbf{R}^4 , considérons la famille de deux vecteurs $u = (1, 2, -1, 3)$ et $v = (4, 1, 0, 1)$. Alors $(-10, 1, -2, 3)$ est combinaison linéaire de (u, v) puisque

$$(-10, 1, -2, 3) = 2 \cdot (1, 2, -1, 3) - 3 \cdot (4, 1, 0, 1).$$

En revanche, $(1, 0, 1, 2)$ n'est pas combinaison linéaire de u et v .

En effet, $(1, 0, 1, 2)$ est combinaison linéaire de u et v si et seulement si

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2, (1, 0, 1, 2) = \lambda u + \mu v \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2, \begin{cases} \lambda + 4\mu = 1 \\ 2\lambda + \mu = 0 \\ -\lambda = 1 \\ 3\lambda + \mu = 2 \end{cases}$$

donc si et seulement si le système $\begin{cases} \lambda + 4\mu = 1 \\ \lambda = -1 \\ \mu = 2 \\ 3\lambda + \mu = 2 \end{cases}$ possède des solutions. Ce qui

n'est pas le cas.

► Tout polynôme de $\mathbf{C}_n[X]$ est combinaison linéaire des $(X+1)^k$, $0 \leq k \leq n$. En effet, par la formule de Taylor,

$$\forall P \in \mathbf{C}_n[X], P = \sum_{k=0}^n \underbrace{\frac{P^{(k)}(-1)}{k!}}_{\in \mathbf{C}} (X+1)^k.$$

Proposition 20.12 :

1. $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ est un sous-espace vectoriel de E , qui contient e_1, \dots, e_n .
2. $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ est le plus petit, au sens de l'inclusion, sous-espace vectoriel de E qui contient les e_i : si F est un sous-espace vectoriel de E tel que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, e_i \in F$, alors $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n) \subset F$.

On dit alors que $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ est le **sous-espace vectoriel engendré** par e_1, \dots, e_n .

Démonstration. 1. Le vecteur nul 0_E est bien dans $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ car

$$0_E = 0 \cdot e_1 + \dots + 0 \cdot e_n.$$

Soient $x, y \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$. Alors il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ et $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbf{K}^n$

tels que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot e_i$.

Et alors pour tout $\alpha \in \mathbf{K}$,

$$\alpha \cdot x + y = \alpha \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot e_i + \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot e_i = \sum_{i=1}^n (\alpha \lambda_i + \mu_i) \cdot e_i \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n).$$

Donc $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ est un sous-espace vectoriel de E .

Il contient tous les e_i puisque $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$e_i = 0 \cdot e_1 + \dots + 0 \cdot e_{i-1} + 1 \cdot e_i + 0 \cdot e_{i+1} + \dots + 0 \cdot e_n \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n).$$

2. Soit F un sous-espace vectoriel de E qui contient les e_i , et soit $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot e_i \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.

Alors, par stabilité de F par combinaison linéaire,

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \underbrace{e_i}_{\in F} \in F.$$

Donc $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n) \subset F$. □

Proposition 20.13 :

1. Si (e_1, \dots, e_n) est une famille de vecteurs de E , alors pour tout $m \leq n$, $\text{Vect}(e_1, \dots, e_m) \subset \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.
2. Si $e_n \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$, alors $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$.

Démonstration. 1. $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient tous les e_i , $1 \leq i \leq m$.

Donc il contient $\text{Vect}(e_1, \dots, e_m)$.

2. Par le point précédent, $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}) \subset \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.

Mais $e_n \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$, donc tous les e_i , $1 \leq i \leq n$ sont dans $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$.

Et donc $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$ est un sous-espace vectoriel qui contient e_1, \dots, e_n : il contient $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.

Et donc par double inclusion, $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$. □

Autrement dit

Si on prend moins de vecteurs, l'espace engendré est plus petit, et enlever un vecteur qui est combinaison linéaire des autres ne change pas l'espace engendré.

Exemple 20.14

Revenons sur le dernier point, et considérons la famille de vecteurs de \mathbf{R}^3

$$u_1 = (1, 2, -1), u_2 = (3, 1, 4), u_3 = (1, -3, 6).$$

Alors $u_3 = -2 \cdot u_1 + u_2 \in \text{Vect}(u_1, u_2)$.

Donc $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3) = \text{Vect}(u_1, u_2)$.

Cela se comprend bien car un vecteur $x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$ de $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ s'écrit encore

$$x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 (-2u_1 + u_2) = (\lambda_1 - 2\lambda_3)u_1 + (\lambda_2 + \lambda_3)u_2 \in \text{Vect}(u_1, u_2).$$

20.2.2 Familles génératrices

Définition 20.15 – Une famille (e_1, \dots, e_n) de vecteurs de E est dite **génératrice** de E si $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = E$.

Autrement dit, si tout vecteur de E est combinaison linéaire d'éléments de (e_1, \dots, e_n) .

Familles

On décrira souvent les familles de vecteurs de E comme des n -uplets d'éléments de E , mais en réalité, l'ordre est rarement important.

Exemples 20.16

► La famille $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1)$ est une famille génératrice de \mathbf{K}^n .

En effet, si on note e_i le vecteur de \mathbf{K}^n dont tous les coefficients sont nuls, sauf le $i^{\text{ème}}$ qui vaut 1, alors

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n, (x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i.$$

Et donc tout vecteur de \mathbf{K}^n est combinaison linéaire de (e_1, \dots, e_n) .

► Si M est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ alors il existe $(a, b, c) \in \mathbf{K}^3$ tels que

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et donc l'ensemble $\mathcal{S}_2(\mathbf{K})$ des matrices symétriques est inclus dans $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

L'inclusion réciproque est évidente puisque $\mathcal{S}_2(\mathbf{K})$ est un sous-espace vectoriel contenant ces trois matrices.

Donc $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $\mathcal{S}_2(\mathbf{K})$.

► La famille $(1, X, \dots, X^n)$ est génératrice de $\mathbf{K}_n[X]$.

Notons que trouver une partie génératrice d'un sous-espace vectoriel F de E , c'est écrire F sous forme de Vect . Ce qui permet de prouver à la fois qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel⁸ et d'en déterminer une famille génératrice.

⁸ Si cela n'a pas déjà été fait avant.

Exemples 20.17

► Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$.

Soit alors $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in F &\Leftrightarrow x - 2y + 3z = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2y - 3z \\ &\Leftrightarrow (x, y, z) = (2y - 3z, y, z) \\ &\Leftrightarrow (x, y, z) = y \cdot (2, 1, 0) + z \cdot (-3, 0, 1) \\ &\Leftrightarrow (x, y, z) \in \text{Vect}((2, 1, 0), (-3, 0, 1)). \end{aligned}$$

Donc $F = \text{Vect}((2, 1, 0), (-3, 0, 1))$. Ceci prouve à la fois que F est un sous-espace vectoriel⁹ de \mathbf{R}^3 , et qu'il est engendré par la famille de deux vecteurs $(2, 1, 0), (-3, 0, 1)$.

► Soit $F = \{P \in \mathbf{R}_2[X] \mid P - (X + 1)P' = 0\}$.

Pour $P = aX^2 + bX + c \in \mathbf{R}_2[X]$, on a

$$\begin{aligned} P \in F &\Leftrightarrow P - (X + 1)P' = 0 \\ &\Leftrightarrow aX^2 + bX + c - (X + 1)(2aX + b) = 0 \\ &\Leftrightarrow -aX^2 - 2aX + (c - b) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow P = bX + b = b(X + 1) \\ &\Leftrightarrow P \in \text{Vect}(X + 1). \end{aligned}$$

Ainsi, $F = \text{Vect}(X + 1)$, ce qui prouve à la fois que F est¹⁰ un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_2[X]$, mais en plus que la famille formée du seul polynôme $X + 1$ en est une famille génératrice.

⁹ Comme tout Vect .

Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients.

¹⁰ Comme tout Vect .

Définition 20.18 – Un sous-espace vectoriel D de E engendré par un seul vecteur non nul, c'est-à-dire tel qu'il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $D = \text{Vect}(x)$, est appelé une **droite** (vectorielle).

Exemple 20.19

Dans $\mathbf{R}[X]$, considérons $F = \text{Vect}((1, 1), (-1, -1))$.

A priori, il ne s'agit pas d'une droite, puisqu'engendré par deux vecteurs.

Mais $(-1, -1) = -1 \cdot (1, 1)$, de sorte que $F = \text{Vect}((1, 1))$, qui est doc bien une droite.

20.2.3 Familles libres

Définition 20.20 – Soit (e_1, \dots, e_n) une famille finie de vecteurs de E . On dit que (e_1, \dots, e_n) est **libre**, ou encore que e_1, \dots, e_n sont **linéairement indépendants** si

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n, \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot e_i = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Remarque. En fait, lorsqu'elle est vérifiée, l'implication ci-dessus est une équivalence puisque si les λ_i sont tous nuls, alors on a toujours¹¹ $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot e_i = 0_E$.

¹¹ Que la famille soit libre ou non.

Exemples 20.21

► Dans $\mathbf{R}_2[X]$, la famille $(P_1, P_2, P_3) = (X^2 + X + 1, X^2 - 1, X - 2)$ est libre.

En effet, soient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ trois réels tels que

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i P_i = 0_{\mathbf{R}[X]} \Leftrightarrow (\lambda_1 + \lambda_2)X^2 + (\lambda_1 + \lambda_3)X + (\lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Alors $\lambda_2 = \lambda_3 = -\lambda_1$, et donc la dernière équation est $4\lambda_1 = 0$, donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

► Dans \mathbf{R}^2 , la famille $((2, 1), (-1, 3), (0, 2))$ est liée.

En effet, $(2, 1) + 2(-1, 3) - \frac{7}{2}(0, 2) = (0, 0)$ est une combinaison linéaire nulle dont tous les coefficients ne sont pas nuls.

► Une famille formée d'un seul vecteur non nul x est libre puisque $\lambda \cdot x = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0$.

Définition 20.22 – Si (e_1, \dots, e_n) n'est pas libre, on dit qu'il s'agit d'une **famille liée**, ou encore que e_1, \dots, e_n sont linéairement dépendants.

Proposition 20.23 : Une famille (e_1, \dots, e_n) est liée si et seulement si l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres :

$$\exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists (\lambda_j)_{\substack{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \neq i}}, e_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \lambda_j \cdot e_j.$$

Démonstration. Si (e_1, \dots, e_n) est liée, alors il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot e_i = 0_E$.

Soit alors $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\lambda_i \neq 0$.

$$\text{Alors } e_i = -\frac{1}{\lambda_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \lambda_j \cdot e_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n -\frac{\lambda_j}{\lambda_i} \cdot e_j.$$

Donc e_i est combinaison linéaire de $e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n$.

Et inversement, si $e_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \lambda_j \cdot e_j$, alors $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \lambda_j \cdot e_j + (-1) \cdot e_i = 0_E$ est une combinaison linéaire nulle des e_k , à coefficients non tous nuls, donc (e_1, \dots, e_n) est liée. \square

Définition 20.24 – Deux vecteurs x et y sont dits **colinéaires** si la famille (x, y) est liée. Par la proposition précédente, c'est le cas si et seulement si

$$\exists \lambda \in \mathbf{K}, x = \lambda \cdot y \text{ ou } y = \lambda \cdot x.$$

Remarque

Si x et y sont non nuls, alors un tel λ est toujours non nul.

Proposition 20.25 : Une famille contenue dans une famille libre est libre. Par contraposée, une famille qui contient une famille liée est liée.

Démonstration. Quitte à renuméroter les vecteurs, on peut supposer que (e_1, \dots, e_n) est libre, et prouver que pour tout $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, (e_1, \dots, e_p) est encore libre.

Soient alors $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbf{K}$ tels que $\sum_{i=1}^p \lambda_i \cdot e_i = 0_E$.

Alors $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p \cdot e_p + 0 \cdot e_{p+1} + \dots + 0 \cdot e_n = 0_E$.

Par définition d'une famille libre, on a donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$.

Et donc (e_1, \dots, e_p) est libre. \square

Corollaire 20.26 – Une famille qui contient le vecteur nul est liée.

Démonstration. La famille formée du seul vecteur nul est liée, car $1 \cdot 0_E = 0_E$, avec $1 \neq 0$.

Donc toute famille contenant le vecteur nul est liée car contient la famille liée $\{0_E\}$. \square

En pratique, il suffit de savoir étudier la liberté des familles finies, pour étudier la liberté des familles infinies, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 20.27 : Une famille (e_1, \dots, e_n) est libre si et seulement si tout vecteur de $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ s'écrit de manière **unique** comme combinaison linéaire des e_i :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n, \forall (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbf{K}^n, \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot e_i = \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot e_i \Rightarrow (\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = \mu_i).$$

Remarque

Le point important ici est l'unicité, l'existence découle de la définition même d'un Vect.

Démonstration. Supposons (e_1, \dots, e_n) libre, et soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n), (\mu_1, \dots, \mu_n)$ deux familles

de scalaires telles que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot e_i = \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot e_i$.

Alors

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot e_i - \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot e_i = 0_E \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \mu_i) \cdot e_i = 0_E.$$

Mais par définition d'une famille libre, alors $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i - \mu_i = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = \mu_i$.

Inversement, si tout vecteur de $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des e_i , en particulier, c'est le cas du vecteur nul : si $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ est telle que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot e_i = 0_E = \sum_{i=1}^n 0 \cdot e_i$$

alors par unicité de l'écriture, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_i = 0$, donc la famille (e_1, \dots, e_n) est libre. \square

Autrement dit, les familles libres sont celles dans lesquelles le principe d'identification des coefficients d'une combinaison linéaire est valable.

L'exemple qui suit est souvent utile :

Proposition 20.28 : *Toute famille finie de $\mathbf{K}[X]$ formée de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre.*

Démonstration. Soit P_1, \dots, P_n une famille de polynômes de degrés deux à deux distincts. Quitte à les renuméroter, on peut supposer que $\deg P_1 < \deg P_2 < \dots < \deg P_n$.

Soient alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i = 0_{\mathbf{K}[X]}$ (\star).

Alors, le terme de degré $\deg P_n$ est λ_n fois le coefficient dominant a_n de P_n , qui est non nul par définition.

Donc¹² $\lambda_n a_n = 0$, et donc $\lambda_n = 0$.

Mais alors le terme de degré $\deg P_{n-1}$ est λ_{n-1} fois le coefficient dominant de P_{n-1} qui est non nul. Donc $\lambda_{n-1} = 0$.

De proche en proche¹³, on prouve que $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. \square

¹² Par identification des coefficients dans (\star).

¹³ Mon astuce préférée pour masquer une récurrence...



La réciproque est fautive. Par exemple, considérons $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ des scalaires deux à deux distincts, et soient L_0, \dots, L_n les polynômes d'interpolation de Lagrange associés aux λ_i .

Alors les L_i sont tous de degré n . Pourtant il s'agit d'une famille libre de $\mathbf{K}_n[X]$.

En effet, soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des scalaires tels que $\sum_{i=0}^n \alpha_i L_i = 0_{\mathbf{K}[X]}$.

Alors en particulier, pour $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, par évaluation en λ_j ,

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i L_i(\lambda_j) = 0 \Leftrightarrow \alpha_j = 0.$$

Donc $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$: la famille (L_0, L_1, \dots, L_n) est libre.

20.2.4 Généralisation aux familles infinies

Définition 20.29 – Soit X une partie de E non vide. On peut supposer¹⁴ que $X = \{e_i, i \in I\}$. Un vecteur $x \in E$ est dit **combinaison linéaire de X** s'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ et $(e_1, \dots, e_n) \in X^n$ tels que x soit combinaison linéaire de (e_1, \dots, e_n) .

Pourquoi veut-on des sommes finies ? Tout simplement parce qu'on ne sait pas ce que serait une somme infinie ! On pourra lui donner du sens par exemple dans \mathbf{R} , en utilisant des limites de sommes finies, mais dans un espace quelconque, ce n'est pas toujours possible. Par exemple dans $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, que serait une somme infinie de suites ?

Un moyen pratique de manipuler les combinaisons linéaires de X dans le cas où X est infini est la notion de famille presque nulle :

¹⁴ Cela revient à «numéroter» les éléments de X , ce qui est toujours possible, quitte à les numéroter par eux-mêmes...

Remarque

Une combinaison linéaire est donc toujours une somme d'un nombre **fini** de vecteurs.

Définition 20.30 – Soit I un ensemble quelconque. Une famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ de scalaires est dite **presque nulle**¹⁵ si tous ses éléments, **sauf un nombre fini** sont nuls. On note $\mathbf{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles presque nulles de scalaires indexées par I . Ainsi, pour $X = \{e_i, i \in I\}$ partie de E , un vecteur $y \in E$ est combinaison linéaire de X si et seulement si il existe $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbf{K}^{(I)}$ telles que $y = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$.

¹⁵ On parle aussi parfois de famille à support fini.

Notation

Le fait d'écrire $X = \{e_i, i \in I\}$ est particulièrement pratique lorsque X est fini de cardinal n , où on peut alors prendre $I = \llbracket 1, n \rrbracket$, et «numéroter» les éléments de X :

$$X = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}.$$

Exemple 20.31

Dans $\mathbf{K}[X]$, tout polynôme est combinaison linéaire des éléments de $(X^k)_{k \in \mathbf{N}}$. En effet, un tel polynôme est dans l'un des $\mathbf{K}_n[X]$, et donc est combinaison linéaire de $1, X, \dots, X^n$, c'est-à-dire d'un nombre fini d'éléments de $(X^k)_{k \in \mathbf{N}}$.

Définition 20.32 – Soit X une partie de E . On note alors $\text{Vect}(X)$, et on appelle **sous-espace engendré par X** l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de X .

On a alors encore les résultats suivants :

Proposition 20.33 : Pour toute partie non vide X de E , $\text{Vect}(X)$ est un sous-espace vectoriel de E .
C'est même le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel qui contient X : si F est un sous-espace vectoriel de E avec $X \subset F$, alors $\text{Vect}(X) \subset F$.

Démonstration. On a toujours $0_E \in \text{Vect}(X)$, et si $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot e_i$ et $y = \sum_{j=1}^p \mu_j \cdot f_j$ sont deux combinaisons linéaires de X , alors pour tout $\alpha \in \mathbf{K}$,

$$\alpha \cdot x + y = \sum_{i=1}^n (\alpha \lambda_i) \cdot e_i + \sum_{j=1}^p \mu_j \cdot e_j$$

est encore combinaison linéaire de X .

Donc $\text{Vect}(X)$ est stable par combinaison linéaire, et est un sous-espace vectoriel de E . Il est trivial qu'il contient tous les éléments de X car pour $x \in X$, $x = 1 \cdot x \in \text{Vect}(X)$.

Inversement, si F est un sous-espace vectoriel de E qui contient x , soit alors $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot e_i \in \text{Vect}(X)$.

Alors e_1, \dots, e_n sont dans F , et par stabilité de F par combinaison linéaire, $x \in F$.
Donc $\text{Vect}(X) \subset F$. □

Proposition 20.34 :

1. Si $X \subset Y$ sont deux parties de E , alors $\text{Vect}(X) \subset \text{Vect}(Y)$.
2. Si $x \in \text{Vect}(X \setminus \{x\})$, alors $\text{Vect}(X \setminus \{x\}) = \text{Vect}(X)$.

Intuition

On peut toujours enlever un vecteur combinaison linéaire des autres sans changer l'espace engendré.

Démonstration. 1. Toute combinaison linéaire d'éléments de X est en particulier combinaison linéaire d'éléments de Y .

2. On a toujours $\text{Vect}(X \setminus \{x\}) \subset \text{Vect}(X)$.

D'autre part, $x \in \text{Vect}(X \setminus \{x\})$ par hypothèse, et si $y \in X$ est différent de x , alors $y \in X \setminus \{x\}$, donc tout élément de X est dans $\text{Vect}(X \setminus \{x\})$, de sorte que $\text{Vect}(X) \subset \text{Vect}(X \setminus \{x\})$. □

Définition 20.35 – Une partie X est **génératrice de E** si $\text{Vect}(X) = E$.

Exemple 20.36

La famille $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est génératrice de $\mathbf{K}[X]$ puisque tout polynôme est combinaison linéaire¹⁶ des X^k .

La notion de liberté se généralise également :

Définition 20.37 – Soit $X = \{e_i, i \in I\}$. On dit que $(e_i)_{i \in I}$ est une famille libre si

$$\forall (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbf{K}^{(I)}, \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot e_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in I, \lambda_i = 0.$$

Une famille contenue dans une famille libre est toujours libre, et une famille qui contient le vecteur nul est toujours liée.

Proposition 20.38 : Une famille infinie¹⁷ $(e_i)_{i \in I}$ est libre si et seulement si toutes ses sous-familles finies sont libres.

Démonstration. Prouvons plutôt¹⁸ qu'une famille est liée si et seulement si elle possède une sous-famille finie liée.

Si $(e_i)_{i \in I}$ est liée, alors il existe une combinaison linéaire, nécessairement finie, nulle à coefficients non tous nuls.

Et donc la sous-famille finie des vecteurs qui forment cette combinaison linéaire est liée (par la même relation de dépendance linéaire).

Inversement, s'il existe une sous-famille finie de $(e_i)_{i \in I}$ qui est liée, alors il existe une combinaison linéaire des vecteurs de cette sous-famille, nulle et à coefficients non tous nuls.

Donc il existe une combinaison linéaire des $(e_i)_{i \in I}$, qui est nulle et à coefficients non tous nuls.

Donc $(e_i)_{i \in I}$ est une famille liée. \square

Exemple 20.39

Dans $\mathbf{K}[X]$, $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est libre. En effet, toute sous-famille finie est formée de polynômes non nuls de degré deux à deux distincts, donc est libre.

20.2.5 Bases

Définition 20.40 – Une **base** de E est une famille qui est à la fois libre et génératrice de E .

Proposition 20.41 : Une famille $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit **de manière unique** comme combinaison linéaire des $(e_i)_{i \in I}$.

Démonstration. L'existence vient de l'aspect générateur : $E = \text{Vect}(e_i, i \in I)$, et l'unicité de la liberté. \square

¹⁶ Donc combinaison linéaire d'un nombre **fini** d'entre eux.

¹⁷ Le résultat reste vrai pour les familles finies, mais n'est d'aucun intérêt.

¹⁸ Ce qui est équivalent.

Exemple 20.42

Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ des scalaires deux à deux distincts, et soient L_0, L_1, \dots, L_n les polynômes de Lagrange associés.

Alors nous avons prouvé que tout polynôme $P \in \mathbf{K}_n[X]$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des L_i , donc (L_0, \dots, L_n) est une base de $\mathbf{K}_n[X]$.

Nous serons surtout amenés à manipuler les bases finies¹⁹. Dans ce cas, on dispose de la notion suivante, qui nous permet de nous ramener à \mathbf{K}^n :

¹⁹ L'existence d'une telle base n'est pas toujours vraie et fera l'objet d'un chapitre à part.

Définition 20.43 – Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Alors tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot e_i$.

On dit alors que $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ est le vecteur des coordonnées de x dans la base \mathcal{B} .

Remarque. Autant l'ordre dans lequel on prend les vecteurs d'une famille n'influe pas sur le fait qu'elle soit libre ou génératrice, autant il est important lorsqu'on manipule une base, puisque les coordonnées dépendent de l'ordre dans laquelle on a ordonné les vecteurs de la base.

Exemples 20.44 Bases canoniques

► La famille $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$ est une base de \mathbf{K}^n , appelée **base canonique de \mathbf{K}^n** .

En effet, nous avons déjà vu qu'elle est à la fois libre et génératrice.

► La famille $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbf{K}_n[X]$, appelée **base canonique de $\mathbf{K}_n[X]$** .

En effet, tout polynôme $P \in \mathbf{K}_n[X]$ s'écrit de manière unique $P = \sum_{i=0}^n \alpha_i X^i$.

► Plus généralement, la famille $(X^k)_{k \in \mathbf{N}}$ est une base de $\mathbf{K}[X]$, appelée base canonique de $\mathbf{K}[X]$.

► La famille des matrices élémentaires $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, appelée base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.



«Canonique» veut dire standard, et désigne donc une base qui est sans doute un peu plus naturelle que les autres. Elles sont ainsi appelées par convention, et ce n'est pas vous qui décidez si une base est canonique ou non : les bases ci-dessus sont appelées bases canoniques, et ce sont les seules.

Pour un espace vectoriel quelconque, il n'y a pas de raison qu'une base soit privilégiée par rapport à une autre et mérite le qualificatif de «canonique».

En particulier, je ne veux surtout pas voir de raisonnement du type : «soit E un espace vectoriel et soit \mathcal{B} une base canonique».

Soit on est dans l'un des cas ci-dessus, et il y a la base canonique, et c'est celle-ci et aucune autre que l'on peut nommer ainsi, soit on est dans un espace quelconque et il y a²⁰ des bases, mais aucune n'est plus canonique que les autres.

²⁰ Ce qui sera prouvé plus tard.

20.3 SOMMES DE SOUS-ESPACES VECTORIELS**20.3.1 Sommes de deux sous-espaces**

Définition 20.45 – Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On appelle alors **somme de F et G** , et on note $F + G$ la partie de E définie par :

$$F + G = \{x + y, (x, y) \in F \times G\}.$$

Donc par définition, tout vecteur de $F + G$ est somme d'un élément de F et d'un élément de G .

En revanche, rien n'indique qu'une telle écriture soit unique.

Exemple 20.46

Dans \mathbf{R}^3 , considérons les deux sous-espaces vectoriels $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x - y = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x + 2z + y = 0\}$.

Alors $(4, -2, 0) \in F + G$ puisque

$$(4, -2, 0) = \underbrace{(2, 2, -1)}_{\in F} + \underbrace{(2, -4, 1)}_{\in G} = \underbrace{(1, 1, 0)}_{\in F} + \underbrace{(3, -3, 0)}_{\in G}.$$

Donc il s'écrit de deux²¹ manières différentes comme somme d'un élément de F et d'un élément de G .

²¹ Au moins. On montrerait en fait qu'il y en a une infinité.

Proposition 20.47 : Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors

1. $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E , qui contient à la fois F et G .
2. Si H est un sous-espace vectoriel de E tel que $F \cup G \subset H$, alors $F + G \subset H$.

Autrement dit, $F + G$ est le plus petit²² sous-espace vectoriel de E qui contient à la fois F et G .

²² Au sens de l'inclusion.

Démonstration. 1. Puisque $0_E = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$, $0_E \in F + G$.

Soient $x, y \in F + G$, et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors il existe $(x_F, x_G) \in F \times G$ et $(y_F, y_G) \in F \times G$ tels que $x = x_F + x_G$ et $y = y_F + y_G$.

Alors

$$\lambda \cdot x + y = \lambda \cdot (x_F + x_G) + (y_F + y_G) = \underbrace{\lambda \cdot x_F + y_F}_{\in F} + \underbrace{\lambda \cdot x_G + y_G}_{\in G} \in F + G.$$

Donc $F + G$ est stable par combinaisons linéaires, et donc est un sous-espace vectoriel de E .

Si $x \in F$, alors $x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} \in F + G$.

Donc $F \subset F + G$, et de même $G \subset F + G$.

2. Soit H un sous-espace vectoriel de E qui contient à la fois F et G .

Alors, $\forall (x, y) \in F \times G$, $\underbrace{x}_{\in H} + \underbrace{y}_{\in H} \in H$, et donc $F + G \subset H$.

□

Proposition 20.48 : Soient X et Y deux parties de E . Alors $\text{Vect}(X \cup Y) = \text{Vect}(X) + \text{Vect}(Y)$.

Ainsi, si X est une famille génératrice de F et Y est une famille génératrice de G , alors $X \cup Y$ est une famille génératrice de la somme $F + G$.

Démonstration. Il est évident que $\text{Vect}(X) \subset \text{Vect}(X \cup Y)$ et $\text{Vect}(Y) \subset \text{Vect}(X \cup Y)$, donc $\text{Vect}(X) + \text{Vect}(Y) \subset \text{Vect}(X \cup Y)$.

Inversement, si $x \in \text{Vect}(X \cup Y)$, alors il existe $x_1, \dots, x_n \in X$, $y_1, \dots, y_p \in Y$ et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_p$ tels que

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot x_i}_{\in \text{Vect}(X)} + \underbrace{\sum_{k=1}^p \mu_k \cdot y_k}_{\in \text{Vect}(Y)} \in \text{Vect}(X) + \text{Vect}(Y).$$

□

20.3.2 Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Définition 20.49 – Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On dit que F et G sont en **somme directe** si

$$\forall x \in F, \forall y \in G, x + y = 0_E \Rightarrow x = y = 0_E.$$

Dans ce cas, on note $F \oplus G$ au lieu de $F + G$.

Notation

$F \oplus G$ n'est pas un nouvel objet : c'est le sous-espace vectoriel $F + G$. Mais la notation $F \oplus G$ nous donne une information supplémentaire : F et G sont en somme directe.

Exemple 20.50

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, soit $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid \text{tr}(M) = 0\}$, et soit $G = \text{Vect}(I_n) = \{\lambda I_n, \lambda \in \mathbf{R}\}$.

Alors F et G sont en somme directe. En effet, soit $M \in F$ et soit $N \in G$, de sorte qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $N = \lambda I_n$. Alors

$$M + \lambda I_n = 0_n \Rightarrow \text{tr}(M + \lambda I_n) = 0 \Rightarrow \text{tr}(M) + \lambda \text{tr}(I_n) = 0 \Rightarrow \lambda n = 0.$$

Et donc $\lambda = 0$, donc $N = 0_n$, et il vient donc $M + 0 \cdot I_n = 0_n \Leftrightarrow M = 0_n$.

Proposition 20.51 : Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors il y a équivalence entre :

1. F et G sont en somme directe
2. $F \cap G = \{0_E\}$
3. tout vecteur de $F + G$ s'écrit de manière **unique** comme somme d'un élément de F et d'un élément de G . Autrement dit :

$$\forall x \in F + G, \exists!(u, v) \in F \times G, x = u + v.$$

Remarque

Notons que l'apport essentiel ici est l'unicité, l'existence découle de la définition même de $F + G$.

Démonstration. 1) \Rightarrow 2). Supposons que F et G soient en somme directe, et soit $x \in F \cap G$. Alors $x \in F$ et $-x \in G$. Or $x + (-x) = 0_E$, donc $x = -x = 0_E$. Et donc $F \cap G \subset \{0_E\}$, l'inclusion réciproque étant toujours vérifiée, on a bien $F \cap G = \{0_E\}$.

2) \Rightarrow 3). Soit $x \in F + G$, et supposons que $x = f_1 + g_1 = f_2 + g_2$, avec $f_1, f_2 \in F$ et $g_1, g_2 \in G$. Alors $f_1 + g_1 = f_2 + g_2 \Leftrightarrow f_1 - f_2 = g_2 - g_1$.

Mais $f_1 - f_2 \in F$ et $g_2 - g_1 \in G$, donc $f_1 - f_2 \in F \cap G = \{0_E\}$ et donc $f_1 - f_2 = 0_E \Leftrightarrow f_1 = f_2$. Et de même, $g_1 = g_2$.

Donc l'écriture de x comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.

3) \Rightarrow 1). Supposons unique l'écriture des vecteurs de $F + G$, et soient $x \in F$ et $y \in G$ tels que $x + y = 0_E$.

Comme on a d'autre part $0_E = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$, alors, par unicité de la décomposition de 0_E ,

$$x = 0_E \text{ et } y = 0_E.$$

Donc F et G sont en somme directe. □

20.3.3 Sous-espaces supplémentaires

Définition 20.52 – Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont **supplémentaires dans E** si $E = F \oplus G$, c'est-à-dire s'ils sont en somme directe, et que leur somme est égale à E tout entier.

Proposition 20.53 : Les sous-espaces F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme un élément de F plus un élément de G .

Démonstration. L'existence d'une telle écriture est équivalente au fait que $E = F + G$, l'unicité est équivalente au fait que F et G soient en somme directe. \square

Exemple 20.54

Pour l'instant, la proposition précédente est le meilleur outil dont nous disposons pour prouver que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires, et nécessite souvent des raisonnements par analyse-synthèse.

► Par exemple, nous savons déjà prouvé que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Cela signifie donc que les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ formés des matrices symétriques et des matrices antisymétriques sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

► De même, nous avons prouvé que les sous-espaces des fonctions paires et impaires sont supplémentaires dans $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

► Si $P \in \mathbf{K}[X]$ est non nul, alors $F = \{Q \in \mathbf{K}[X] \mid \deg Q < \deg P\}$ et $G = \{PQ, Q \in \mathbf{K}[X]\}$ sont supplémentaires dans $\mathbf{K}[X]$. En effet, c'est tout simplement la division euclidienne.

! Si $E = F \oplus G$, on dit bien que G est **un** supplémentaire de F , mais jamais **le** supplémentaire de F , tout simplement car il n'y a pas unicité : il y a généralement²³ une infinité de supplémentaires de F .

Par exemple, dans \mathbf{R}^3 , soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x = y\}$.

Soit alors $G = \text{Vect}(1, -1, 0)$.

Alors $\mathbf{R}^3 = F \oplus G$.

En effet, si $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, supposons que $(x, y, z) = u + v$, avec $u \in F$ et $v \in G$.

Alors il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $v = \lambda(1, -1, 0)$, et u est de la forme $u = (a, a, b)$.

Alors $(x, y, z) = (a, a, b) + \lambda(1, -1, 0)$, de sorte que $b = z$, $x = a + \lambda$, $y = a - \lambda$.

Donc $a = \frac{x+y}{2}$, et donc $\lambda = \frac{x-y}{2}$.

Donc si une telle écriture $(x, y, z) = u + v$ existe, c'est

$$(x, y, z) = \underbrace{\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, z\right)}_{\in F} + \underbrace{\frac{x-y}{2}(1, -1, 0)}_{\in G}.$$

Inversement, il est facile de vérifier que cette écriture convient, et qu'on a alors la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G .

Mais on pourrait sur le même principe prouver que $G' = \text{Vect}(1, -2, 0)$ et $G'' = \text{Vect}(-2, 1, 0)$ sont des supplémentaires de F .

De manière générale, ne confondez surtout pas un supplémentaire avec le complémentaire : le complémentaire d'un sous-espace vectoriel ne contient pas 0_E . Ce n'est donc pas un sous-espace vectoriel de E .

²³ Sauf dans les cas $F = E$ et $F = \{0_E\}$.

Méthode

Notons que le raisonnement que nous venons de tenir n'est rien d'autre qu'une analyse-synthèse, qui est souvent un bon outil pour prouver que deux sous-espaces sont supplémentaires.

20.3.4 Somme et somme directe de n sous-espaces

Définition 20.55 – Soient F_1, F_2, \dots, F_n des sous-espaces vectoriels de E . On appelle alors **somme de** F_1, \dots, F_n , et on note

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum_{i=1}^n F_i = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i, (x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n \right\}.$$

On généralise alors sans difficultés les propriétés rencontrées dans le cas de deux sous-espaces vectoriels :

Proposition 20.56 :

- $\sum_{i=1}^n F_i$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient tous les F_i .
- si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, X_i est une partie génératrice (finie ou non) de F_i , alors $\bigcup_{i=1}^n X_i$ est une partie génératrice de $\sum_{i=1}^n F_i$.

Définition 20.57 – La somme $F_1 + \dots + F_n$ de n sous-espaces vectoriels est dite **directe** si

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n, x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0_E \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0_E.$$

On note alors $\bigoplus_{i=1}^n F_i$ au lieu de $\sum_{i=1}^n F_i$.

⚠ Attention !

Toujours comme pour le cas de deux sous-espaces vectoriels, on ne définit pas ici de nouvel objet.

⚠ Contrairement aux sommes directes de deux sous-espaces vectoriels, on n'a pas de caractérisation facile de la somme directe de $n \geq 3$ sous-espaces vectoriels à l'aide d'une intersection.

En particulier, il ne suffit pas que $\bigcap_{i=1}^n F_i = \{0_E\}$ ni que $\forall i \neq j, F_i \cap F_j = \{0_E\}$.

Exemple 20.58

Dans \mathbf{R}^3 , considérons $F_1 = \text{Vect}((1, 1, 1))$, $F_2 = \text{Vect}((1, 0, 1))$ et $F_3 = \text{Vect}((0, 1, 0))$. Alors $F_1 \cap F_2 = \{0_{\mathbf{R}^3}\}$ puisque si $x \in F_1 \cap F_2$, alors il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ tels que $x = \lambda_1(1, 1, 1) = \lambda_2(1, 0, 1)$.

Donc $\lambda_1(1, 1, 1) - \lambda_2(1, 0, 1) = 0_{\mathbf{R}^3}$. Mais $(1, 1, 1)$ et $(1, 0, 1)$ ne sont pas colinéaires, si bien que la famille $(1, 1, 1), (1, 0, 1)$ est libre et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, si bien que $x = 0_E$. Le même raisonnement, en remarquant que $(0, 1, 0)$ n'est colinéaire ni à $(1, 1, 1)$ ni à $(1, 0, 1)$ prouve que $F_1 \cap F_3 = F_2 \cap F_3 = \{0_E\}$.

Pourtant, la somme $F_1 + F_2 + F_3$ n'est pas directe puisque

$$\underbrace{(1, 1, 1)}_{\in F_1} + \underbrace{(-1, 0, -1)}_{\in F_2} + \underbrace{(0, -1, 0)}_{\in F_3} = 0_{\mathbf{R}^3}.$$

Proposition 20.59 : Soient F_1, \dots, F_n des sous-espaces vectoriels de E . Alors la somme

$\sum_{i=1}^n F_i$ est directe si et seulement si tout vecteur de $\sum_{i=1}^n F_i$ s'écrit de manière **unique** comme somme d'éléments des F_i .

Démonstration. Supposons la somme directe, et soit $x \in F_1 + \dots + F_n$, qui s'écrit de deux manières $x = x_1 + \dots + x_n = y_1 + \dots + y_n$, avec $x_i, y_i \in F_i$.

$$\text{Alors } 0_E = x - x = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i).$$

Et donc, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i - y_i = 0_E \Leftrightarrow x_i = y_i$.

L'autre implication se prouve en remarquant que $0_E = 0_E + \dots + 0_E$ est la seule décomposition possible du vecteur nul. \square

Exemple 20.60

Soit (e_1, \dots, e_n) une famille libre de E . Alors pour tout $p \leq n$ les sous-espaces vectoriels $\text{Vect}(e_1), \text{Vect}(e_2), \dots, \text{Vect}(e_p)$ sont en somme directe.

En effet, si $0_E = x_1 + x_2 + \dots + x_p$, avec $x_i \in \text{Vect}(e_i)$, alors il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que $x_i = \lambda_i e_i$.

Et alors $0_E = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p$.

La famille (e_1, \dots, e_p) étant libre²⁴ il vient $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$, et donc $x_1 = \dots = x_p = 0_E$, donc la somme est directe.

Si de plus (e_1, \dots, e_n) est une base de E , alors $E = \bigoplus_{i=1}^n \text{Vect}(e_i)$.

²⁴ Car sous-famille d'une famille libre.

Remarque. Sans chercher à trop formaliser, il est facile de se convaincre que la notion de

somme directe est stable par sous-famille : si $\sum_{i=1}^n F_i$ est directe, alors la somme de toute

sous-famille de (F_1, \dots, F_n) est directe.

En particulier, deux quelconques des F_i sont en somme directe, et donc $F_i \cap F_j = \{0_E\}$ pour $i \neq j$.

En fait, on a même mieux : par exemple si $F_1 + F_2 + F_3$ est directe, alors on a $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 = F_1 \oplus (F_2 \oplus F_3)$, ce qui signifie que :

- ▶ la somme $F_2 + F_3$ est directe
- ▶ la somme $F_1 + (F_2 \oplus F_3)$ est directe.

20.4 APPLICATIONS LINÉAIRES**20.4.1 Définition, premières propriétés**

Les applications linéaires sont les morphismes d'espaces vectoriels, c'est-à-dire les applications entre deux espaces vectoriels qui sont compatibles à la fois avec la loi de composition interne + et la multiplication externe.

Définition 20.61 – Soient E et F deux \mathbf{K} -espaces vectoriels. Une application $f : E \rightarrow F$ est appelée **application linéaire** si

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbf{K}, f(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot f(x) + f(y).$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

Remarques. ▶ Notons qu'une application linéaire n'est rien d'autre qu'un morphisme de groupes²⁵ vérifiant en plus $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$.

▶ On dit parfois \mathbf{K} -linéaire au lieu de linéaire, mais cette distinction n'a lieu d'être que lorsqu'il y a ambiguïté sur le corps.

Par exemple, l'application $f : \begin{cases} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \bar{z} \end{cases}$ est \mathbf{R} -linéaire, c'est-à-dire est une application linéaire du \mathbf{R} -espace vectoriel \mathbf{C} dans lui-même.

Mais elle n'est pas \mathbf{C} -linéaire :

$$\forall z \in \mathbf{C}^*, f(iz) = \overline{iz} = -i\bar{z} \neq i\bar{z}.$$

Remarque

Il est important que le corps \mathbf{K} soit le même pour E et F : deux espaces vectoriels réels ou deux espaces vectoriels complexes.

²⁵ Prendre $\lambda = 1$ dans la définition pour s'en convaincre.

Exemples 20.62

- ▶ L'application constante $E \rightarrow F$ égale à 0_F est linéaire.
- ▶ L'identité $\text{id}_E : E \rightarrow E$ est linéaire puisque

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbf{K}, \text{id}_E(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot x + y = \lambda \cdot \text{id}_E(x) + \text{id}_E(y).$$

Plus généralement, pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, λid_E est une application linéaire de E dans E . Une application linéaire de la forme λid_E est appelée homothétie de rapport λ .

- L'application $f : \begin{cases} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}[X] \\ P & \longmapsto & 2P + P(0) - XP' \end{cases}$ est linéaire.
- Nous avons déjà vu que la trace et la transposition sont des applications linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ (à valeurs dans \mathbf{K} pour la trace, dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ pour la transposition).
- Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, alors l'application $f_A : \begin{cases} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{cases}$ est une application linéaire, appelée application linéaire canoniquement associée à A .

Proposition 20.63 : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

1. $f(0_E) = 0_F$
2. pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tous $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, alors

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

Démonstration. 1. Ceci a déjà été prouvé pour les morphismes de groupes, donc reste en particulier vrai pour une application linéaire.

2. Par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$, prouvons

$$\mathcal{P}(n) : \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n, f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

Pour $n = 1$, il suffit de prendre $y = 0_E$ dans la définition de la linéarité : pour $x \in E$ et $\lambda \in \mathbf{K}$,

$$f(\lambda x) = f(\lambda \cdot x + 0_E) = \lambda \cdot f(x) + f(0_E) = \lambda \cdot f(x).$$

Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et soient $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in E^{n+1}$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbf{K}^{n+1}$. Alors

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot f(x_i) + \lambda_{n+1} \cdot f(x_{n+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i). \end{aligned}$$

C'est la définition de la linéarité.

Hypothèse de récurrence.

Donc par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. □

Proposition 20.64 : Soit $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$, et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors $\lambda f + g$ est encore linéaire, c'est-à-dire dans $\mathcal{L}(E, F)$.

Démonstration. Soient $x, y \in E$ et soit $\mu \in \mathbf{K}$. Alors

$$\begin{aligned} (\lambda f + g)(\mu x + y) &= \lambda f(\mu x + y) + g(\mu x + y) \\ &= \lambda (\mu f(x) + f(y)) + \mu g(x) + g(y) \\ &= \mu (\lambda f(x) + g(x)) + (\lambda f(y) + g(y)) \end{aligned}$$

□

Corollaire 20.65 – Si E et F sont deux \mathbf{K} -espaces vectoriels, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, F)$. En particulier, c'est un \mathbf{K} -espace vectoriel.

Proposition 20.66 (Composition d'applications linéaires) : Soient E, F, G trois espaces vectoriels sur \mathbf{K} , et soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ deux applications linéaires. Alors $g \circ f : E \rightarrow G$ est linéaire.

Démonstration. Soient $(x, y) \in E^2$ et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors

$$(g \circ f)(\lambda x + y) = g(f(\lambda x + y)) = g(\lambda f(x) + f(y)) = \lambda g(f(x)) + g(f(y)) = \lambda(g \circ f)(x) + (g \circ f)(y).$$

Donc $g \circ f$ est linéaire. \square

Définition 20.67 – Une application linéaire de E dans E est appelée un **endomorphisme** de E .

On note $\mathcal{L}(E)$ au lieu de $\mathcal{L}(E, E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .

Proposition 20.68 : $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau.

Démonstration. Nous savons déjà que $(\mathcal{L}(E), +)$ est un groupe abélien²⁶, d'élément neutre l'application linéaire nulle $0_{\mathcal{L}(E)}$.

La proposition précédente prouve que $\mathcal{L}(E)$ est stable par composition, et la composition est associative²⁷, et possède pour élément neutre id_E . De plus, pour $(f, g, h) \in \mathcal{L}(E)^3$ et $x \in E$, on a

$$(f \circ (g + h))(x) = f(g(x) + h(x)) = f(g(x)) + f(h(x)) = (f \circ g)(x) + (f \circ h)(x).$$

Donc $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$.

On prouve de même la distributivité à droite. \square

Remarques. ► Les inversibles de cet anneau sont les endomorphismes bijectifs (du moins ceux dont la bijection réciproque est encore linéaire, mais ceci est automatique et sera prouvé dans un instant).

► Toutes les règles de calculs valables dans un anneau le sont donc dans $\mathcal{L}(E)$, et en particulier le binôme de Newton et la troisième identité remarquable généralisée, sous réserve qu'on soit en présence de deux endomorphismes **qui commutent**.

Proposition 20.69 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et soit F un sous-espace vectoriel de E stable²⁸ par f .

Alors l'application induite par f sur F , qu'on notera $f|_F$ (au lieu de $f|_F^F$) est un endomorphisme de F .

Démonstration. Il s'agit simplement de prouver la linéarité, mais elle est évidente et découle de celle de f .

En effet, si $x, y \in F$ et $\lambda \in \mathbf{K}$, alors

$$f|_F(\lambda x + y) = f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y) = \lambda f|_F(x) + f|_F(y).$$

Donc $f|_F$ est linéaire. \square

 **Danger !**

◀ Généralement, cet anneau n'est pas commutatif

²⁶ Puisque $\mathcal{L}(E)$ est un espace vectoriel.

²⁷ Puisqu'elle l'est sur $\mathcal{F}(E, E)$.

²⁸ C'est-à-dire tel que $f(F) \subset F$.

Exemple 20.70

Dans $\mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, soit u l'application $f \mapsto f''$.

Alors pour tout $\omega \in \mathbf{R}^*$, $F_\omega = \text{Vect}(x \mapsto \cos(\omega x), x \mapsto \sin(\omega x))$ est stable par u et $u|_{F_\omega} = -\omega^2 \text{id}_{F_\omega}$.

20.4.2 Noyau et image

La définition qui suit n'est pas nouvelle : une application linéaire est en particulier un morphisme de groupes, et donc son noyau a déjà été défini.

Définition 20.71 – Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle alors **noyau** de f et on note $\text{Ker } f$ l'ensemble

$$\text{Ker } f = \{x \in E, f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\}).$$

De même, comme toute application, une application linéaire possède une image :

Définition 20.72 – Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire. On appelle **image** de f et on note $\text{Im } f$ l'ensemble

$$\text{Im } f = \{f(x), x \in E\} = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\}.$$

Proposition 20.73 : Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors

1. $\text{Ker } f$ est un sous-espace vectoriel de E
2. $\text{Im } f$ est un sous-espace vectoriel de F .

Démonstration. 1. Commençons par noter que $\text{Ker } f \subset E$ par définition.

Puisque $f(0_E) = 0_F$, $0_E \in \text{Ker } f$.

Soient $x, y \in \text{Ker } f$, et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors

$$f(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot f(x) + f(y) = \lambda \cdot 0_F + 0_F = 0_F$$

et donc $\lambda \cdot x + y \in \text{Ker } f$.

Donc $\text{Ker } f$ est bien un sous-espace vectoriel de E .

2. Puisque $f(0_E) = 0_F$, 0_F est bien²⁹ dans $\text{Im } f$.

Soient $y_1, y_2 \in \text{Im } f$ et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors il existe $x_1, x_2 \in E$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Et donc

$$f(\lambda \cdot x_1 + x_2) = \lambda \cdot f(x_1) + f(x_2) = \lambda \cdot y_1 + y_2.$$

Donc $\lambda \cdot y_1 + y_2$ possède un antécédent par f , et donc est dans $\text{Im } f$.

Ainsi, $\text{Im } f$ est un sous-espace vectoriel de F . □

Remarque. Le premier point permet souvent de gagner du temps lorsqu'il s'agit de prouver qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel : si on arrive à l'écrire comme le noyau d'une application linéaire, c'est automatique.

Par exemple, $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \text{tr}(M) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, puisque c'est le noyau de l'application linéaire $\text{tr} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \mathbf{R})$.

De même, l'ensemble des matrices symétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ puisqu'il s'agit du noyau de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ $M \mapsto M^T - M$.

Proposition 20.74 : Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors :

1. f est injective si et seulement si $\text{Ker } f = \{0_E\}$
2. f est surjective si et seulement si $\text{Im } f = F$.

²⁹ Les éléments de $\text{Im } f$ sont ceux qui possèdent au moins un antécédent par f .

Remarque

A priori il faut tout de même prouver que cette application est bien linéaire, mais nous savons déjà que la transposition est linéaire, que l'identité est linéaire, et que toute combinaison linéaire d'applications linéaires l'est encore, donc en fait, il n'y a rien à dire.

Démonstration. 1. Une application linéaire est un morphisme de groupes, et donc est injective si et seulement si son noyau est réduit à $\{0_E\}$.

Redonnons tout de même la preuve. Si f est injective, alors pour tout $x \in E$, on a

$$x \in \text{Ker } f \Leftrightarrow f(x) = 0_F = f(0_E) \Leftrightarrow x = 0_E$$

donc $\text{Ker } f = \{0_E\}$.

Et si $\text{Ker } f = \{0_E\}$, alors pour $(x, y) \in E^2$,

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow f(x) - f(y) = 0_E \Leftrightarrow f(x-y) = 0_E \Leftrightarrow x-y \in \text{Ker } f \Leftrightarrow x-y = 0_E \Leftrightarrow x = y$$

donc f est injective.

2. C'est juste la définition de la surjectivité, la linéarité n'est ici d'aucune importance. \square

La proposition suivante est plus évidente, mais mérite d'être mentionnée : multiplier une application linéaire par un scalaire non nul ne change ni son noyau, ni son image.

Proposition 20.75 : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et soit $\lambda \in \mathbf{K}^*$. Alors

$$\text{Ker}(\lambda f) = \text{Ker } f \text{ et } \text{Im}(\lambda f) = \text{Im } f.$$

Démonstration. Soit $x \in E$. Alors

$$x \in \text{Ker}(\lambda f) \Leftrightarrow \lambda f(x) = 0_F \Leftrightarrow f(x) = 0_F \Leftrightarrow x \in \text{Ker } f.$$

Soit $y \in \text{Im } f$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x) = f(\lambda \frac{x}{\lambda}) = \lambda f(\frac{x}{\lambda}) \in \text{Im}(\lambda f)$.

Donc $\text{Im } f \subset \text{Im}(\lambda f)$.

Et alors $\text{Im}(\lambda f) \subset \text{Im}\left(\frac{1}{\lambda} \lambda f\right) = \text{Im } f$.

Par double inclusion, $\text{Im}(f) = \text{Im}(\lambda f)$. \square

Proposition 20.76 : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille génératrice de E . Alors $(f(e_i))_{i \in I}$ est génératrice de $\text{Im}(f)$.

Démonstration. Soit $y \in \text{Im } f$. Par définition, ceci signifie que y possède un antécédent $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Mais puisque $(e_i)_{i \in I}$ est génératrice de E , il existe $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbf{K}^{(I)}$ tel que $x = \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot e_i$.

Et alors, par linéarité de f ,

$$y = f(x) = f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i \cdot e_i\right) = \sum_{i \in I} \lambda_i f(e_i) \in \text{Vect}(f(e_i), i \in I).$$

Ainsi, tout vecteur de $\text{Im } f$ est combinaison linéaire des $f(e_i)$, donc $\text{Im } f \subset \text{Vect}(f(e_i), i \in I)$.

Mais puisque $\text{Im } f$ est un sous-espace vectoriel de F qui contient les $f(e_i)$, on a³⁰

$\text{Vect}(f(e_i), i \in I) \subset \text{Im } f$.

Donc $\text{Im } f = \text{Vect}(f(e_i), i \in I)$, de sorte que $(f(e_i))_{i \in I}$ est génératrice de $\text{Im } f$. \square

³⁰ $\text{Vect}(f(e_i))$ est le plus petit sous-espace vectoriel de F qui contient tous les $f(e_i)$.

20.4.3 Isomorphismes

Définition 20.77 – Une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est un **isomorphisme** si elle est bijective.

Dans le cas où de plus $E = F$, on dit que f est un **automorphisme de E** .

Autrement dit

Un automorphisme est une application linéaire qui est à la fois un endomorphisme et un isomorphisme.

Proposition 20.78 : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire bijective. Alors $f^{-1} : F \rightarrow E$ est linéaire, donc est dans $\mathcal{L}(F, E)$.

Démonstration. Soient $(x, y) \in F^2$, et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors

$$f(\lambda f^{-1}(x) + f^{-1}(y)) = \lambda f(f^{-1}(x)) + f(f^{-1}(y)) = \lambda x + y.$$

En appliquant f^{-1} , il vient $\lambda f^{-1}(x) + f^{-1}(y) = f^{-1}(f(\lambda f^{-1}(x) + f^{-1}(y))) = f^{-1}(\lambda x + y)$.
Donc f^{-1} est linéaire. \square

Définition 20.79 – On appelle **groupe linéaire sur E** , et on note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E .
C'est un sous-groupe de $(\mathfrak{S}(E), \circ)$.

Démonstration. L'application identité id_E , qui est l'élément neutre de $\mathfrak{S}(E)$ est bien dans $GL(E)$.

Si f, g sont deux éléments de $GL(E)$, alors $f \circ g^{-1}$ est encore linéaire car composée d'applications linéaires, et est évidemment bijective, donc est dans $GL(E)$.

Et ainsi, $GL(E)$ est bien un sous-groupe de $\mathfrak{S}(E)$. \square

Proposition 20.80 : Une famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs de E est une base de E si

$$\text{et seulement si } f_{\mathcal{B}} : \begin{array}{l} \mathbf{K}^n \longrightarrow E \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \end{array} \text{ est un isomorphisme de } \mathbf{K}^n \text{ sur } E.$$

Démonstration. Il s'agit de commencer par prouver la linéarité de $f_{\mathcal{B}}$, ce qui est sans difficulté.

On a alors

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{B}} \text{ bijective} &\Leftrightarrow \forall x \in E, \exists!(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n, x = f_{\mathcal{B}}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in E, \exists!(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n, x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \\ &\Leftrightarrow \mathcal{B} \text{ est une base de } E. \end{aligned}$$

\square

Ce que nous dit la proposition précédente, c'est que si on a une base de E de cardinal n , alors E a les mêmes propriétés, en tant que \mathbf{K} -espace vectoriel, que \mathbf{K}^n .

Proposition 20.81 : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ une base de E . Alors f est un isomorphisme si et seulement si $(f(e_i))_{i \in I}$ est une base de F .

Démonstration. Si f est un isomorphisme, alors $\text{Im}(f) = F$, et donc $(f(e_i))_{i \in I}$ est génératrice de F .

Prouvons qu'elle est libre en prouvant que toute sous-famille finie en est libre.

Soient donc i_1, \dots, i_n des éléments deux à deux distincts de I , et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ tels

$$\text{que } \sum_{k=1}^n \lambda_k f(e_{i_k}) = 0_F.$$

$$\text{Alors } f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_{i_k}\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(e_{i_k}) = 0_F, \text{ si bien que par injectivité de } f, \sum_{k=1}^n \lambda_k e_{i_k} = 0_E.$$

La famille $(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$ étant libre³¹, nécessairement $\lambda_{i_1} = \dots = \lambda_{i_n} = 0$.

Ainsi, $(f(e_{i_1}), \dots, f(e_{i_n}))$ est libre, et donc toute sous-famille finie de $(f(e_i))_{i \in I}$ étant libre, il s'agit d'une famille libre. Et donc d'une base de F .

Inversement, supposons que $(f(e_i))_{i \in I}$ soit une base de F .

Alors en particulier elle est génératrice de F , et donc $\text{Im } f = F$: f est surjective.

Soit $x \in E$ tel que $f(x) = 0_F$. Alors il existe $i_1, \dots, i_n \in I$ deux à deux distincts et

Détails

Il s'agit de l'une des caractérisation des bases : (e_1, \dots, e_n) est une base si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des e_i .

³¹ Car sous-famille d'une base, donc d'une famille libre.

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K} \text{ tels que } x = \sum_{k=1}^n \lambda_{i_k} e_{i_k}.$$

$$\text{Et donc } 0_F = f(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_{i_k} f(e_{i_k}).$$

Mais par liberté de $(f(e_{i_1}), \dots, f(e_{i_n}))$, $\lambda_{i_1} = \dots = \lambda_{i_n} = 0$, et donc $x = 0_E$.

Donc $\text{Ker } f = \{0_E\}$, si bien que f est injective, et donc est un isomorphisme. \square

Remarque. Cette proposition dit notamment que si l'image d'une base³² de E est une base de F , alors f est un isomorphisme, et donc l'image de toute base de E est une base de F .

³² Une seule, peu importe laquelle.

20.4.4 Endomorphismes remarquables

Définition 20.82 – Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. On appelle **homothétie de rapport λ** l'application linéaire λid_E .

Les homothéties sont en quelques sorte les endomorphismes les plus simples que l'on puisse imaginer. En particulier, l'application nulle et l'identité sont deux homothéties (de rapports respectifs 0 et 1).

Définition 20.83 – Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E .

Alors tout élément $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = x_F + x_G$, $x_F \in F$, $x_G \in G$.

On appelle **projection sur F parallèlement à G** l'application

$$p : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x = x_F + x_G & \longmapsto & x_F \end{cases}.$$

Notons tout de suite que si p est la projection sur F parallèlement à G et si q est la projection sur G parallèlement à F , alors $p + q = \text{id}_E$.

En effet, pour $x = x_F + x_G \in E$, on a $p(x) = x_F$ et $q(x) = x_G$, donc $p(x) + q(x) = x = \text{id}_E$.

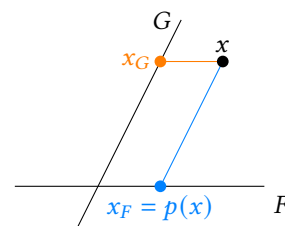


FIGURE 20.1– La projection sur F parallèlement à G .

Proposition 20.84 : La projection p sur F parallèlement à G est un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$.

Démonstration. Prouvons que p est linéaire. Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbf{K}$.

Alors, de manière unique, $x = x_F + x_G$, avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$ et de même, $y = y_F + y_G$, avec $y_F \in F$ et $y_G \in G$.

Alors

$$\lambda \cdot x + y = \lambda \cdot (x_F + x_G) + (y_F + y_G) = \underbrace{\lambda \cdot x_F + y_F}_{\in F} + \underbrace{\lambda \cdot x_G + y_G}_{\in G}.$$

Nous avons donc là l'unique décomposition de $\lambda \cdot x + y$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G .

Et donc $p(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot x_F + y_F = \lambda \cdot p(x) + p(y)$.

Donc p est linéaire.

De plus, pour $x = x_F + x_G \in E$, on a $p(x) = x_F = \underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$ et donc $p(p(x)) = x_F = p(x)$.

Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, $p \circ p = p$. \square

Définition 20.85 – On appelle **projecteur de E** tout $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p \circ p = p$.

Exemple 20.86

L'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $M \mapsto \frac{M + M^T}{2}$ est un projecteur de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

En effet, elle est clairement³³ linéaire, et

$$f^2(M) = \frac{f(M) + f(M)^T}{2} = \frac{1}{4} (M + M^T + (M + M^T)^T) = \frac{M + M^T}{2} = f(M).$$

Ceci étant vrai pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $f^2 = f$.

³³ C'est une combinaison linéaire des deux applications linéaires $M \mapsto M^T$ et $M \mapsto M$.

A priori, projecteurs et projections sont deux notions différentes. Le théorème suivant prouve qu'il s'agit en fait de la même chose :

Théorème 20.87 : Soit E un espace vectoriel et $p \in \mathcal{L}(E)$. Alors p est un projecteur si et seulement si p est une projection.

Dans ce cas, p est la projection sur $\text{Im } p$ parallèlement à $\text{Ker } p$.

Remarque

En particulier, si p est un projecteur, $\text{Im } p$ et $\text{Ker } p$ sont supplémentaires dans E .

Démonstration. Supposons que $p \circ p = p$. Montrons que $\text{Im } p$ et $\text{Ker } p$ sont supplémentaires dans E .

Un moyen de le prouver serait de procéder par analyse-synthèse pour montrer que tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de $\text{Im } p$ et d'un vecteur de $\text{Ker } p$.

Trichons un peu, et commençons par montrer que $\text{Im } p$ et $\text{Ker } p$ sont en somme directe. Soit $x \in \text{Im } p \cap \text{Ker } p$. Alors $p(x) = 0_E$, et il existe $x' \in E$ tel que $x = p(x')$.

Et donc $p(x) = 0_E \Leftrightarrow p(p(x')) = 0_E \Leftrightarrow p(x') = 0_E \Leftrightarrow x = 0_E$.

Ainsi, $\text{Im } p \cap \text{Ker } p = \{0_E\}$.

⚠ Attention !

À ce stade, nous savons que la somme est directe, mais il se pourrait encore que $\text{Im } p \oplus \text{Ker } p \neq E$.

Reste donc à prouver que $\text{Im } p + \text{Ker } p = E$.

Soit $x \in E$. Alors $x = p(x) + (x - p(x))$.

Il est clair que $p(x) \in \text{Im } p$, et $p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0_E$, de sorte que $x - p(x) \in \text{Ker } p$.

Et donc tout vecteur de E s'écrit bien d'au moins une manière comme somme d'un élément de $\text{Im } p$ et d'un élément de $\text{Ker } p$, et donc $E = \text{Im } p + \text{Ker } p$, si bien que $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$.

Enfin, si $x \in E$, $x = \underbrace{p(x)}_{\in \text{Im } p} + \underbrace{x - p(x)}_{\in \text{Ker } p}$ et $p(x) = p(x)$.

Donc p est l'application qui à x associe sa composante $p(x)$ suivant $\text{Im } p$: c'est donc la projection sur $\text{Im } p$ parallèlement à $\text{Ker } p$.

Inversement, si p est la projection sur F parallèlement à G , avec $E = F \oplus G$, nous avons déjà prouvé que p est un projecteur.

Et alors, $\text{Ker } p = \{x_1 + x_2, x_1 \in F, x_2 \in G \mid x_1 = 0_E\} = \{x_2, x_2 \in G\} = G$.

De même, il est clair que $\text{Im } p \subset F$.

Soit $x \in F$. Alors $p(x) = x$, et donc $x \in \text{Im } p$. Ceci prouve que $F \subset \text{Im } p$, et donc $\text{Im } p = F$. \square

Mais d'où ça sort ?

Est-on censé deviner que cette formule est la décomposition de x comme somme d'un élément de $\text{Im } p$ et d'un élément de $\text{Ker } p$?
Non : pour l'obtenir, j'ai fait l'analyse-synthèse mentionnée ci-dessus : la phase d'analyse m'a donné la décomposition, et j'ai écrit la synthèse. Seule elle ne prouve pas l'unicité de la décomposition, mais juste son existence. Toutefois, le fait que nous ayons déjà prouvé que la somme est directe garantit l'unicité de cette décomposition. Cf le point 3) de la proposition 20.51

Exemple 20.88

Si f est le projecteur $M \mapsto \frac{M + M^T}{2}$, alors

$$M \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \frac{M + M^T}{2} = 0 \Leftrightarrow M = -M^T$$

et donc $\text{Ker}(f)$ l'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

D'autre part, il est clair que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $f(M)$ est une matrice

symétrique, puisque $f(M)^\top = \left(\frac{M + M^\top}{2}\right)^\top = \frac{M + M^\top}{2} = f(M)$.

Donc déjà $\text{Im}(f) \subset \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$. De plus, pour tout $M \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$, on a $f(M) = M$, et donc $M \in \text{Im}(f)$.

Ainsi, $\text{Im}(f) = \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$.

Puisque nous savons déjà que f est un projecteur, il vient donc $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbf{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$, et f est la projection sur $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$.

Proposition 20.89 : Si $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur, alors

$$\text{Im } p = \{x \in E \mid p(x) = x\} = \text{Ker}(p - \text{id}_E).$$

Démonstration. Nous avons déjà prouvé que si $x \in \text{Im } p$, alors $p(x) = x$.

Et inversement, si x est un point fixe de p , $x = p(x)$, alors $x \in \text{Im } p$.

Le fait que l'ensemble des points fixes de p soit le noyau de $p - \text{id}_E$ est en fait vrai pour tout endomorphisme :

$$\{x \in E \mid p(x) = x\} = \{x \in E \mid p(x) - \text{id}_E(x) = 0_E\} = \text{Ker}(p - \text{id}_E).$$

□

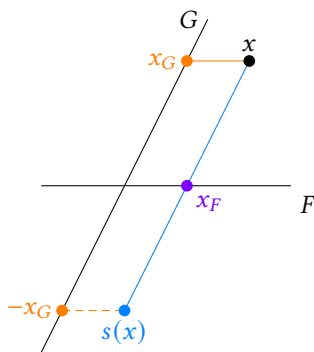
Autrement dit

Im p est l'ensemble des points fixes de p .

Définition 20.90 – Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E . Alors tout vecteur de E s'écrit de manière unique $x = x_F + x_G$, $x_F \in F$, $x_G \in G$.

On appelle alors **symétrie par rapport à F parallèlement à G** l'application

$$s : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x = x_F + x_G & \longmapsto & x_F - x_G \end{cases}$$



75110 F

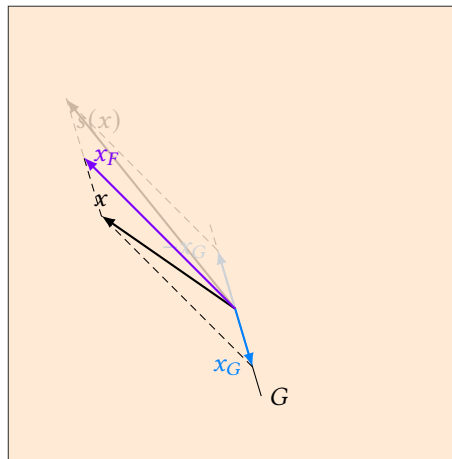


FIGURE 20.2 – Deux symétries par rapport à F parallèlement à G , dans le plan et dans l'espace.

Notons que x_F est la projection de x sur F parallèlement à G .

Proposition 20.91 : La symétrie s par rapport à F parallèlement à G est un endomorphisme de E , qui vérifie $s^2 = \text{id}_E$.

Démonstration. Notons simplement que si p désigne la projection sur F parallèlement à G , alors $s = 2p - \text{id}_E$.

En effet, pour $x \in E$, qui s'écrit $x = x_F + x_G$, $x_F \in F$, $x_G \in G$, on a

$$2p(x) - \text{id}_E(x) = 2x_F - (x_F + x_G) = x_F - x_G = s(x).$$

Donc s est linéaire car combinaison linéaire d'applications linéaires, et

$$s \circ s = (2p - \text{id}_E) \circ (2p - \text{id}_E) = 4p^2 - 4p + \text{id}_E = 4p - 4p + \text{id}_E = \text{id}_E.$$

□

Remarque

On a ici utilisé le fait que p et id_E commutent.

Remarque. Les applications dont le carré est égal à l'identité, ou de manière équivalente, qui sont égales à leur propre bijection réciproque sont nommées involutions. Ce que dit la proposition qui suit, c'est que les involutions **linéaires** sont exactement les symétries.

Proposition 20.92 : Si s est un endomorphisme de E tel que $s^2 = \text{id}_E$, alors

1. $\text{Ker}(s - \text{id}_E)$ et $\text{Ker}(s + \text{id}_E)$ sont supplémentaires dans E
2. s est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - \text{id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(s + \text{id}_E)$.

Démonstration. Notons $p = \frac{s + \text{id}_E}{2}$.

$$\text{Alors } p^2 = \frac{s^2 + 2s + \text{id}_E}{4} = \frac{s + \text{id}_E}{2} = p.$$

Donc p est un projecteur dont l'image et le noyau sont supplémentaires dans E .

Mais $\text{Ker } p = \text{Ker}(s + \text{id}_E)$.

D'autre part, on a

$$\text{Im } p = \text{Ker}(p - \text{id}_E) = \text{Ker}\left(\frac{s - \text{id}_E}{2}\right) = \text{Ker}(s - \text{id}_E).$$

Donc $E = \text{Ker}(s - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}_E)$, ce qui prouve 1).

De plus, pour $x \in E$, alors de manière unique, $x = x_I + x_K$ avec $x_I \in \text{Im } p$ et $x_K \in \text{Ker } p$.

Et donc $s(x) = 2p(x) - \text{id}_E(x) = 2x_I - (x_I + x_K) = x_I - x_K$.

On reconnaît bien là l'expression de la symétrie par rapport à $\text{Im } p = \text{Ker}(s - \text{id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(p) = \text{Ker}(s + \text{id}_E)$. □

20.4.5 Détermination d'une application par restriction à des supplémentaires

Proposition 20.93 : Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E , et soit H un \mathbf{K} -espace vectoriel.

Alors pour tout couple $(u, v) \in \mathcal{L}(F, H) \times \mathcal{L}(G, H)$, il existe un unique $f \in \mathcal{L}(E, H)$ tel que $f|_F = u$ et $f|_G = v$.

Démonstration. Supposons qu'un tel f existe, et soit $x \in E$. Alors, de manière unique $x = x_F + x_G$.

Et donc $f(x) = u(x_F) + v(x_G)$.

Inversement, soit $f : x_F + x_G \mapsto u(x_F) + v(x_G)$.

Prouvons que f est linéaire : soient $x = x_F + x_G$ et $y = y_F + y_G$, et soit $\lambda \in \mathbf{K}$.

Alors $\lambda x + y = \underbrace{\lambda x_F + y_F}_{\in F} + \underbrace{\lambda y_G + y_G}_{\in G}$. Donc

$$\begin{aligned} f(\lambda x + y) &= u(\lambda x_F + y_F) + v(\lambda x_G + y_G) \\ &= \lambda u(x_F) + u(y_F) + \lambda v(x_G) + v(y_G) \\ &= \lambda(u(x_F) + v(x_G)) + u(y_F) + v(y_G) = \lambda f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Donc f est bien un élément de $\mathcal{L}(E)$.

Si $x \in F$, alors $x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$ de sorte que $f(x) = u(x) + v(0_E) = u(x)$, et donc $f|_F = u$.

De même, $f|_G = v$. □

En particulier, la projection sur F parallèlement à G aurait pu être définie comme l'unique endomorphisme de E dont la restriction à F est id_F et la restriction à G est l'application nulle.

Et de même, la symétrie par rapport à F parallèlement à G est l'unique endomorphisme de E dont la restriction à F est id_F et la restriction à G est $-\text{id}_G$.

Cette proposition se généralise sans difficulté au cas d'une somme directe de n sous-espaces vectoriels.

Vous passerez une bonne partie de l'année prochaine à déterminer quand, étant donné un endomorphisme f de E , E se «casse» en une somme directe de sous-espaces vectoriels sur lesquels la restriction de f est une homothétie.

Un tel endomorphisme sera appelé *diagonalisable*.