20 Espaces vectoriels et applications linéaires

Dans tout le chapitre, **K** désigne soit **R** soit **C**, mais tous les résultats annoncés restent valables pour un corps quelconque.
Les éléments de **K** seront appelés les **scalaires**.

20.1 Structure d'espace vectoriel

20.1.1 Définition

Définition 20.1 – Soit E un ensemble. On dit que E est un **K-espace vectoriel** (ou un espace vectoriel sur **K**) s'il est muni de deux opérations notées $+ : \left| \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \right.$ (loi de composition interne) et $\cdot : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda \cdot x \end{array} \right.$ (appelée loi de composition externe) telles que :

1. $(E,+)$ soit un groupe abélien dont l'élément neutre est noté 0_E et est appelé **le vecteur nul** de E.
2. $\forall x \in E,\ 1 \cdot x = x$
3. $\forall \lambda \in \mathbf{K},\ \forall (x,y) \in E^2,\ \lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
4. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2,\ \forall x \in E,\ (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
5. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2,\ \forall x \in E,\ (\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$.

Les éléments de E sont alors appelés des **vecteurs.**

Remarque
Ce simple point requiert en fait la vérification de 4 axiomes (associativité, commutativité, élément neutre, existence d'un inverse).

Exemples 20.2

- **K** lui-même est un **K**-espace vectoriel muni de sa somme et de son produit[1].
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est un **K**-espace vectoriel.
- $\mathbf{K}[X]$ est un **K**-espace vectoriel, de même que $\mathbf{K}_n[X]$.

[1] Qui peut donc être vu soit comme une loi de composition interne, soit comme une loi de composition externe.

Proposition 20.3 : *Si E est un **K**-espace vectoriel et A est un ensemble quelconque, alors sur $\mathcal{F}(A,E)$, on définit une loi de composition interne $+$ et une loi de composition externe $\cdot$ en posant*

$$\forall (f,g) \in \mathcal{F}(A,E)^2,\ f+g : \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array} \right.$$

et

$$\forall f \in \mathcal{F}(A,E),\ \forall \lambda \in \mathbf{K},\ \lambda \cdot f : \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda \cdot f(x) \end{array} \right. .$$

*Alors, muni de ces lois, $\mathcal{F}(A,E)$ est un **K**-espace vectoriel dont le vecteur nul est la fonction nulle.*

Démonstration. On sait déjà qu'il s'agit d'un groupe abélien[2], d'élément neutre la fonction nulle.
Il suffit donc de prouver que la multiplication externe vérifie bien les points 2 à 5 ci-dessus.

[2] Cf ce qui a été fait dans le cas des fonctions sur un anneau.

C'est assez évident vu qu'ils sont vérifiés dans E.
Prouvons par exemple les deux premiers : soit $f \in \mathcal{F}(A, E)$.
Alors pour tout $x \in A$, $(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$, donc $1 \cdot f = f$. Donc 2) est vérifié.
Soient $f, g \in \mathcal{F}(A, E)$, et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors pour tout $x \in A$, on a

$$(\lambda \cdot (f+g))(x) = \lambda \cdot (f+g)(x) = \lambda \cdot (f(x) + (x)) = \lambda \cdot f(x) + \lambda \cdot g(x).$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in A$, $\lambda \cdot (f+g) = \lambda \cdot f + \lambda \cdot g$.
Donc 3) est vérifié. Etc. □

Proposition 20.4 : *Si E et F sont deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, alors $E \times F$, muni des opérations $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ et $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y)$ est encore un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.*

Démonstration. Nous avons déjà prouvé[3] que $(E \times F, +)$ est un groupe abélien, dont le vecteur nul est $(0_E, 0_F)$.
Soit $(x, y) \in E \times F$. Alors $1 \cdot (x, y) = (1 \cdot x, 1 \cdot y) = (x, y)$.
Soit $\lambda \in \mathbf{K}$ et soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E \times F$. Alors

$$\begin{aligned}\lambda \cdot ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= \lambda \cdot (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (\lambda \cdot (x_1 + x_2), \lambda \cdot (y_1 + y_2)) = (\lambda \cdot x_1 + \lambda \cdot x_2, \lambda \cdot y_1 + \lambda \cdot y_2) \\ &= (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot y_1) + (\lambda \cdot x_2, \lambda \cdot y_2) = \lambda \cdot (x_1, y_1) + \lambda \cdot (x_2, y_2).\end{aligned}$$

Les deux autres points se prouvent de la même manière, en exploitant le fait qu'ils soient vrais dans E et dans F. □

[3] Cf le produit direct de deux groupes.

Ceci se généralise bien entendu au produit de n espaces vectoriels.
En particulier, $\mathbf{K}^n = \mathbf{K} \times \mathbf{K} \times \cdots \times \mathbf{K}$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, de vecteur nul $(0, 0, \ldots, 0)$.

Remarque
On note bien 0 : le scalaire nul, à ne pas confondre avec 0_E, le vecteur nul.
0 est dans $\mathbf{K}$, 0_E est dans E.

Proposition 20.5 (Règles de calcul dans un espace vectoriel) :
- *Pour $(\lambda, x) \in \mathbf{K} \times E$, on a $\lambda \cdot x = 0_E \Leftrightarrow (\lambda = 0$ **ou** $x = 0_E)$.*
- *Pour tout $x \in E$, $(-1) \cdot x = -x$. Autrement dit, $(-1) \cdot x$ est l'opposé de x : $(-1) \cdot x + x = 0_E$.*

Démonstration. ▸ On a déjà $0 \cdot x = (0+0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$, et donc[4] $0 \cdot x = 0_E$.
De même, pour $\lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot (0_E + 0_E) = \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E$, et donc $\lambda \cdot 0_E$.
Enfin, si $\lambda \cdot x = 0_E$ et $\lambda \neq 0$, alors $x = \left(\frac{1}{\lambda}\lambda\right) \cdot x = \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot x) = 1 \cdot 0_E = 0_E$.

▸ $(-1) \cdot x + x = (-1) \cdot x + 1 \cdot x = (-1+1) \cdot x = 0 \cdot x = 0_E$.
Et donc $(-1) \cdot x$ est l'opposé de x. □

[4] On peut simplifier par $0 \cdot x$: tout élément d'un groupe est régulier.

Dans toute la suite du chapitre, sauf mention explicite du contraire, E désigne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

20.1.2 Sous-espace vectoriel

Définition 20.6 – Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, et soit F une partie de E.
On dit que F est un **sous-espace vectoriel de** E si :
1. F est stable par $+$: $\forall (x, y) \in F^2$, $x + y \in F$
2. F est stable par multiplication par un scalaire : $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\forall x \in F$, $\lambda \cdot x \in F$
3. muni des lois induites $+$ et $\cdot$, F est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Proposition 20.7 (Caractérisation des sous-espaces vectoriels) : *Une partie F d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si*
i) $0_E \in F$
ii) *F est stable par combinaison linéaire*[5] : $\forall (x, y) \in F^2$, $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda \cdot x + y \in F$.

[5] La définition précise de combinaison linéaire viendra en temps voulu, pour l'instant c'est un package «stable par combinaison linéaire».

Démonstration. Si F est un sous-espace vectoriel, alors $0_E \in F$ puisqu'il s'agit d'un sous-groupe. Et pour $(x, y) \in F^2$, et $\lambda \in \mathbf{K}$, alors $\lambda x \in F$ puisque $x \in F$ et que F est stable par la multiplication externe.
Ensuite, F étant stable par somme, $\lambda x + y \in F$.

Inversement, supposons que F contienne le vecteur nul et soit stable par combinaison linéaire.
Alors , en prenant $\lambda = 1$, pour tout $(x, y) \in F^2$, $x + y \in F$, donc F est stable par $+$.
Et en prenant $y = 0_E$, alors $\forall x \in F$ et $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda \cdot x + 0_E = \lambda \cdot x \in F$.
Puisqu'en particulier, pour tout $(x, y) \in F^2$, on a $(-1) \cdot x + y = y - x \in F$, alors F est un sous-groupe abélien de E.
Et alors les quatre derniers points[6] sont évidents, puisqu'ils découlent directement du fait que E soit un espace vectoriel.
Par exemple, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$, $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$. □

[6] C'est-à-dire les points 2 à 5 de la définition d'espace vectoriel, qui concernent le comportement de la multiplication externe.

Exemples 20.8

- $\{0_E\}$ et E sont toujours des sous-espaces vectoriels de E.
- Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$.
- L'ensemble des matrices triangulaires supérieures est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
- L'ensemble des fonctions continues sur un intervalle I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbf{K})$.
- L'ensemble des suites convergentes est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$.
- $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

Remarques. ► Vous trouverez parfois la condition $0_E \in F$ remplacée par $F \neq \emptyset$.
C'est équivalent car si $0_E \in F$, alors $F \neq \emptyset$. Et inversement s'il existe $u \in F$, alors en prenant $\lambda = -1$ et $x = y = u$ dans le point 2), il vient $-u = u = 0_E \in F$.
► De même, il se peut que vous croisiez la stabilité par combinaison linéaire sous la forme suivante :

$$2') \qquad \forall (x, y) \in F^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2,\ \lambda x + \mu y \in F.$$

Déjà $2') \Rightarrow 2)$, puisqu'il suffit de prendre $\mu = 1$.
Inversement, supposons 2) vrai, et soient $(x, y) \in F^2$, et $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$. Alors $\mu \cdot y + 0_E \in F$, et donc $\lambda \cdot x + (\mu \cdot y) \in F$. Donc $2) \Rightarrow 2')$.

Proposition 20.9 : *Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E.*
Alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est encore un sous-espace vectoriel de E.

Autrement dit
Une intersection de sous-espaces vectoriels est encore un sous-espace vectoriel.

Démonstration. Puisque 0_E est dans tout sous-espace vectoriel, il est dans $\bigcap_{i \in I} F_i$.
Soient $x, y \in \bigcap_{i \in I} F_i$ et soit $\lambda \in \mathbf{K}$.
Alors, pour tout $i \in I$, puisque F_i est stable par combinaison linéaire, $\lambda \cdot \underbrace{x}_{\in F_i} + \underbrace{y}_{\in F_i} \in F_i$.
Et donc $\lambda \cdot x + y \in \bigcap_{i \in I} F_i$.
Donc $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E. □

Remarques. ► Notons que ceci vaut en particulier pour l'intersection de deux sous-espaces vectoriels, ou de $n \in \mathbf{N}^*$ sous-espaces vectoriels.
► En revanche, l'union de deux sous-espaces vectoriels n'est que rarement un sous-espace vectoriel. Ce n'est pas une grande surprise, puisque nous avons déjà prouvé en TD qu'une union de deux sous-groupes n'est un sous-groupe que si l'un est inclus dans l'autre[7].

[7] Et le même résultat reste valable pour des sous-espaces vectoriels.

20.2 FAMILLES DE VECTEURS

20.2.1 Combinaisons linéaires, sous-espace engendré par une partie

Définition 20.10 – Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de n vecteurs de E. Un vecteur $x \in E$ est dit **combinaison linéaire de** $(e_1, \dots, e_n)$ s'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i$.
On note alors $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $e_1, \dots, e_n$:

$$\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i,\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n \right\}.$$

Remarque. Le vecteur nul est combinaison linéaire de toute famille, puisque quels que soient $e_1, \dots, e_n \in E^n$, $0_E = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot e_i$.

Exemple 20.11

► Dans $\mathbf{R}^4$, considérons la famille de deux vecteurs $u = (1, 2, -1, 3)$ et $v = (4, 1, 0, 1)$. Alors $(-10, 1, -2, 3)$ est combinaison linéaire de (x, y) puisque

$$(-10, 1, -2, 3) = 2 \cdot (1, 2, -1, 3) - 3 \cdot (4, 1, 0, 1).$$

En revanche, $(1, 0, 1, 2)$ n'est pas combinaison linéaire de u et v.
En effet, $(1, 0, 1, 2)$ est combinaison linéaire de u et v si et seulement si

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2,\ (1, 0, 1, 2) = \lambda u + v \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2,\ \begin{cases} \lambda + 4\mu = 1 \\ 2\lambda + \mu = 0 \\ -\lambda = 1 \\ 3\lambda + \mu = 2 \end{cases}$$

donc si et seulement si le système $\begin{cases} \lambda + 4\mu = 1 \\ \lambda = -1 \\ \mu = 2 \\ 3\lambda + \mu = 2 \end{cases}$ possède des solutions. Ce qui n'est pas le cas.

► Tout polynôme de $\mathbf{C}_n[X]$ est combinaison linéaire des $(X+1)^k$, $0 \leqslant k \leqslant n$. En effet, par la formule de Taylor,

$$\forall P \in \mathbf{C}_n[X],\ P = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{P^{(k)}(-1)}{k!}}_{\in \mathbf{C}} (X+1)^k.$$

Proposition 20.12 :

1. $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ *est un sous-espace vectoriel de* E*, qui contient* $e_1, \dots, e_n$.
2. $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ *est le plus petit, au sens de l'inclusion, sous-espace vectoriel de* E *qui contient les* e_i *: si* F *est un sous-espace vectoriel de* E *tel que* $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $e_i \in F$, *alors* $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) \subset F$.

On dit alors que $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ *est le* ***sous-espace vectoriel engendré par*** $e_1, \dots, e_n$.

Démonstration. 1. Le vecteur nul 0_E est bien dans $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ car

$$0_E = 0 \cdot e_1 + \dots + 0 \cdot e_n.$$

Soient $x, y \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$. Alors il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ et $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbf{K}^n$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot e_i$.
Et alors pour tout $\alpha \in \mathbf{K}$,

$$\alpha \cdot x + y = \alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot e_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha\lambda_i + \mu_i) \cdot e_i \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n).$$

Donc $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ est un sous-espace vectoriel de E.
Il contient tous les e_i puisque $\forall i \in [\![1, n]\!]$,

$$e_i = 0 \cdot e_1 + \dots + 0 \cdot e_{i-1} + 1 \cdot e_i + 0 \cdot e_{i+1} + \dots + 0 \cdot e_n \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n).$$

2. Soit F un sous-espace vectoriel de E qui contient les e_i, et soit $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.

   Alors, par stabilité de F par combinaison linéaire,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \underbrace{e_i}_{\in F} \in F.$$

   Donc $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) \subset F$.

□

Proposition 20.13 :

1. *Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille de vecteurs de E, alors pour tout $m \leqslant n$, $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_m) \subset \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n)$.*
2. *Si $e_n \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$, alors $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$.*

Autrement dit
Si on prend moins de vecteurs, l'espace engendré est plus petit, et enlever un vecteur qui est combinaison linéaire des autres ne change pas l'espace engendré.

Démonstration. 1. $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient tous les e_i, $1 \leqslant i \leqslant m$.
Donc il contient $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_m)$.

2. Par le point précédent, $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}) \subset \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.
Mais $e_n \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$, donc tous les e_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ sont dans $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$.
Et donc $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$ est un sous-espace vectoriel qui contient $e_1, \dots, e_n$: il contient $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.
Et donc par double inclusion, $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.

□

Exemple 20.14

Revenons sur le dernier point, et considérons la famille de vecteurs de $\mathbf{R}^3$
$u_1 = (1, 2, -1)$, $u_2 = (3, 1, 4)$, $u_3 = (1, -3, 6)$.
Alors $u_3 = -2 \cdot u_1 + u_2 \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$.
Donc $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$.
Cela se comprend bien car un vecteur $x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$ de $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ s'écrit encore

$$x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3(-2u_1 + u_2) = (\lambda_1 - 2\lambda_3)u_1 + (\lambda_2 + \lambda_3)u_2 \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2).$$

20.2.2 Familles génératrices

Définition 20.15 – Une famille $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs de E est dite **génératrice de** E si $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) = E$.
Autrement dit, si tout vecteur de E est combinaison linéaire d'éléments de $(e_1, \dots, e_n)$.

Familles
On décrira souvent les familles de vecteurs de E comme des n-uplets d'éléments de E, mais en réalité, l'ordre est rarement important.

Exemples 20.16

► La famille $(1,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,0,1)$ est une famille génératrice de $\mathbf{K}^n$.
En effet, si on note e_i le vecteur de $\mathbf{K}^n$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf le $i^{\text{ème}}$ qui vaut 1, alors

$$\forall (x_1,\dots,x_n)\in\mathbf{K}^n,\ (x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n} x_i\cdot e_i.$$

Et donc tout vecteur de $\mathbf{K}^n$ est combinaison linéaire de $(e_1,\dots,e_n)$.
► Si M est une matrice symétrique de $\mathscr{M}_2(\mathbf{K})$ alors il existe $(a,b,c)\in\mathbf{K}^3$ tels que

$$M=\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Comb. lin.
Remarquons que nous avons là une combinaison linéaire.

Et donc l'ensemble $\mathscr{S}_2(\mathbf{K})$ des matrices symétriques est inclus dans $\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$.
L'inclusion réciproque est évidente puisque $\mathscr{S}_2(\mathbf{K})$ est un sous-espace vectoriel contenant ces trois matrices.
Donc $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $\mathscr{S}_2(\mathbf{K})$.
► La famille $(1,X,\dots,X^n)$ est génératrice de $\mathbf{K}_n[X]$.

Notons que trouver une partie génératrice d'un sous-espace vectoriel F de E, c'est écrire F sous forme de Vect. Ce qui permet de prouver à la fois qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel[8] et d'en déterminer une famille génératrice.

[8] Si cela n'a pas déjà été fait avant.

Exemples 20.17

► Soit $F=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x-2y+3z=0\}$.
Soit alors $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$. On a

$$\begin{aligned}(x,y,z)\in F &\Leftrightarrow x-2y+3z=0\\ &\Leftrightarrow x=2y-3z\\ &\Leftrightarrow (x,y,z)=(2y-3z,y,z)\\ &\Leftrightarrow (x,y,z)=y\cdot(2,1,0)+z\cdot(-3,0,1)\\ &\Leftrightarrow (x,y,z)\in\operatorname{Vect}((2,1,0),(-3,0,1)).\end{aligned}$$

Donc $F=\operatorname{Vect}((2,1,0),(-3,0,1))$. Ceci prouve à la fois que F est un sous-espace vectoriel[9] de $\mathbf{R}^3$, et qu'il est engendré par la famille de deux vecteurs $(2,1,0),(-3,0,1)$.

[9] Comme tout Vect.

► Soit $F=\{P\in\mathbf{R}_2[X] \mid P-(X+1)P'=0\}$.
Pour $P=aX^2+bX+c\in\mathbf{R}_2[X]$, on a

$$\begin{aligned}P\in F &\Leftrightarrow P-(X+1)P'=0\\ &\Leftrightarrow aX^2+bX+c-(X+1)(2aX+b)=0\\ &\Leftrightarrow -aX^2+-2aX+(c-b)=0\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}a=0\\ c=b\end{cases}\\ &\Leftrightarrow P=bX+b=b(X+1)\\ &\Leftrightarrow P\in\operatorname{Vect}(X+1).\end{aligned}$$

Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients.

Ainsi, $F=\operatorname{Vect}(X+1)$, ce qui prouve à la fois que F est[10] un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_2[X]$, mais en plus que la famille formée du seul polynôme $X+1$ en est une famille génératrice.

[10] Comme tout Vect.

Définition 20.18 – Un sous-espace vectoriel D de E engendré par un seul vecteur non nul, c'est-à-dire tel qu'il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $D = \mathrm{Vect}(x)$, est appelé une **droite** (vectorielle).

Exemple 20.19

Dans $\mathbf{R}[X]$, considérons $F = \mathrm{Vect}((1,1),(-1,-1))$.
A priori, il ne s'agit pas d'une droite, puisqu'engendré par deux vecteurs.
Mais $(-1,-1) = -1 \cdot (1,1)$, de sorte que $F = \mathrm{Vect}((1,1))$, qui est donc bien une droite.

20.2.3 Familles libres

Définition 20.20 – Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille finie de vecteurs de E. On dit que $(e_1, \dots, e_n)$ est **libre**, ou encore que $e_1, \dots, e_n$ sont **linéairement indépendants** si

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Remarque. En fait, lorsqu'elle est vérifiée, l'implication ci-dessus est une équivalence puisque si les λ_i sont tous nuls, alors on a toujours[11] $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i = 0_E$.

[11] Que la famille soit libre ou non.

Exemples 20.21

▸ Dans $\mathbf{R}_2[X]$, la famille $(P_1, P_2, P_3) = (X^2 + X + 1, X^2 - 1, X - 2)$ est libre.
En effet, soient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ trois réels tels que

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i P_i = 0_{\mathbf{R}[X]} \Leftrightarrow (\lambda_1+\lambda_2)X^2+(\lambda_1+\lambda_3)X+(\lambda_1-\lambda_2-2\lambda_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Alors $\lambda_2 = \lambda_3 = -\lambda_1$, et donc la dernière équation est $4\lambda_1 = 0$, donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
▸ Dans $\mathbf{R}^2$, la famille $((2,1),(-1,3),(0,2)$ est liée.
En effet, $(2,1) + 2(-1,3) - \frac{7}{2}(0,2) = (0,0)$ est une combinaison linéaire nulle dont les coefficients ne sont pas tous nuls.
▸ Une famille formée d'un seul vecteur non nul x est libre puisque $\lambda \cdot x = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0$.

Définition 20.22 – Si $(e_1, \dots, e_n)$ n'est pas libre, on dit qu'il s'agit d'une **famille liée**, ou encore que $e_1, \dots, e_n$ sont linéairement dépendants.

Proposition 20.23 : *Une famille $(e_1, \dots, e_n)$ est liée si et seulement si l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres :*

$$\exists i \in [\![1,n]\!],\ \exists (\lambda_j)_{\substack{j \in [\![1,n]\!] \\ j \neq i}} \in \mathbf{K},\ e_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j \cdot e_j.$$

Démonstration. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est liée, alors il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i = 0_E$.

Soit alors $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\lambda_i \neq 0$.
Alors $e_i = -\frac{1}{\lambda_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \lambda_j \cdot e_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} -\frac{\lambda_j}{\lambda_i} \cdot e_j$.
Donc e_i est combinaison linéaire de $e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n$.

Et inversement, si $e_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \lambda_j \cdot e_j$, alors $\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \lambda_j \cdot e_j + (-1) \cdot e_i = 0_E$ est une combinaison linéaire nulle des e_k, à coefficients non tous nuls, donc $(e_1, \dots, e_n)$ est liée. □

Définition 20.24 – Deux vecteur x et y sont dits **colinéaires** si la famille (x, y) est liée. Par la proposition précédente, c'est le cas si et seulement si

$$\exists \lambda \in \mathbf{K},\ x = \lambda \cdot y \textbf{ ou } y = \lambda \cdot x.$$

Remarque
Si x et y sont non nuls, alors un tel λ est toujours non nul.

Proposition 20.25 : *Une famille contenue dans une famille libre est libre.*
Par contraposée, une famille qui contient une famille liée est liée.

Démonstration. Quitte à renuméroter les vecteurs, on peut supposer que $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, et prouver que pour tout $p \in [\![1, n-1]\!]$, $(e_1, \dots, e_p)$ est encore libre.
Soient alors $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbf{K}$ tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot e_i = 0_E$.
Alors $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p \cdot e_p + 0 \cdot e_{p+1} + \dots + 0 \cdot e_n = 0_E$.
Par définition d'une famille libre, on a donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$.
Et donc $(e_1, \dots, e_p)$ est libre. □

Corollaire 20.26 – *Une famille qui contient le vecteur nul est liée.*

Démonstration. La famille formée du seul vecteur nul est liée, car $1 \cdot 0_E = 0_E$, avec $1 \neq 0$.
Donc toute famille contenant le vecteur nul est liée car contient la famille liée $\{0_E\}$. □

En pratique, il suffit de savoir étudier la liberté des familles finies, pour étudier la liberté des familles infinies, comme le montre la proposition suivante.

Remarque
Le point important ici est l'unicité, l'existence découle de la définition même d'un Vect.

Proposition 20.27 : *Une famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre si et seulement si tout vecteur de $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ s'écrit de manière **unique** comme combinaison linéaire des e_i :*

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n,\ \forall (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbf{K}^n,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot e_i \Rightarrow (\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i = \mu_i).$$

Démonstration. Supposons $(e_1, \dots, e_n)$ libre, et soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ deux familles de scalaires telles que $\sum_{i=1} \lambda_i \cdot e_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot e_i$.
Alors

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot e_i = 0_E \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) \cdot e_i = 0_E.$$

Mais par définition d'une famille libre, alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i - \mu_i = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = \mu_i$.

Inversement, si tout vecteur de $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des e_i, en particulier, c'est le cas du vecteur nul : si $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ est telle que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i = 0_E = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot e_i$$

alors par unicité de l'écriture, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = 0$, donc la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre. □

Autrement dit, les familles libres sont celles dans lesquelles le principe d'identification des coefficients d'une combinaison linéaire est valable.
L'exemple qui suit est souvent utile :

Proposition 20.28 : *Toute famille finie de $\mathbf{K}[X]$ formée de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre.*

Démonstration. Soit $P_1, \dots, P_n$ une famille de polynômes de degrés deux à deux distincts. Quitte à les renuméroter, on peut supposer que $\deg P_1 < \deg P_2 < \dots < \deg P_n$.

Soient alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i = 0_{\mathbf{K}[X]} \quad (\star)$.

Alors, le terme de degré $\deg P_n$ est λ_n fois le coefficient dominant a_n de P_n, qui est non nul par définition.
Donc[12] $\lambda_n a_n = 0$, et donc $\lambda_n = 0$.
Mais alors le terme de degré $\deg P_{n-1}$ est λ_{n-1} fois le coefficient dominant de P_{n-1} qui est non nul. Donc $\lambda_{n-1} = 0$.
De proche en proche[13], on prouve que $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. □

[12] Par identification des coefficients dans $(\star)$.

[13] Mon astuce préférée pour masquer une récurrence...

⚠ La réciproque est fausse. Par exemple, considérons $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ des scalaires deux à deux distincts, et soient $L_0, \dots, L_n$ les polynômes d'interpolation de Lagrange associés aux λ_i.
Alors les L_i sont tous de degré n. Pourtant il s'agit d'une famille libre de $\mathbf{K}_n[X]$.

En effet, soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des scalaires tels que $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i L_i = 0_{\mathbf{K}[X]}$.

Alors en particulier, pour $j \in [\![0, n]\!]$, par évaluation en λ_j,

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i L_i(\lambda_j) = 0 \Leftrightarrow \alpha_j = 0.$$

Donc $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$: la famille $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est libre.

20.2.4 Généralisation aux familles infinies

Définition 20.29 – Soit X une partie non vide de E. On appelle sous-espace engendré par X et on note

$$\mathrm{Vect}(X) := \left\{ x \in E \mid \exists n \in \mathbf{N}, \exists x_1, \dots, x_n \in X, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}, x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i x_i \right\}.$$

Les éléments de $\mathrm{Vect}(X)$ sont appelés combinaisons linéaires de X.

Convention
Si besoin, on dira que $\mathrm{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$.

⚠ On ne sait pas donner de sens à une somme infinie dans un espace vectoriel, donc une combinaison linéaire de X est toujours une combinaison linéaire **d'un nombre fini** de vecteurs de X.

Exemple 20.30

Dans $\mathbf{R}[X]$, tout polynôme est dans $\mathrm{Vect}(\{X^k, k \in \mathbf{N}\})$.
En effet, si P est un polynôme de $\mathbf{R}[X]$, et que $n \geqslant P$, alors il existe des réels $a_0, \dots, a_n$ tels que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

On a alors encore les résultats suivants :

Proposition 20.31 : *Pour toute partie non vide X de E, $\mathrm{Vect}(X)$ est un sous-espace vectoriel de E.*
C'est même le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel qui contient X : si F est un sous-espace vectoriel de E avec $X \subset F$, alors $\mathrm{Vect}(X) \subset F$.

Démonstration. On a toujours $0_E = 0 \cdot 0_E \in \mathrm{Vect}(X)$. Soient $x, y \in \mathrm{Vect}(X)$.
Soient alors $n, p \in \mathbf{N}$, $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p \in E$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_p \in \mathbf{K}$ tels que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i$ et $y = \sum_{j=1}^{p} \mu_j \cdot y_j$. Alors pour tout $\alpha \in \mathbf{K}$,

$$\alpha \cdot x + y = \sum_{i=1}^{n} (\alpha\lambda_i) \cdot x_i + \sum_{j=1}^{p} \mu_j \cdot y_j$$

est encore combinaison linéaire de X.
Donc $\mathrm{Vect}(X)$ est stable par combinaison linéaire, et est un sous-espace vectoriel de E.
Il est trivial qu'il contient tous les éléments de X car pour $x \in X$, $x = 1 \cdot x \in \mathrm{Vect}(X)$.

Inversement, si F est un sous-espace vectoriel de E qui contient X, soit alors $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i \in \mathrm{Vect}(X)$.
Alors $x_1, \dots, x_n$ sont dans F, et par stabilité de F par combinaison linéaire, $x \in F$.
Donc $\mathrm{Vect}(X) \subset F$. □

Proposition 20.32 :

1. *Si $X \subset Y$ sont deux parties de E, alors $\mathrm{Vect}(X) \subset \mathrm{Vect}(Y)$.*
2. *Si $x \in \mathrm{Vect}(X \setminus \{x\})$, alors $\mathrm{Vect}(X \setminus \{x\}) = \mathrm{Vect}(X)$.*

Intuition
On peut toujours enlever un vecteur combinaison linéaire des autres sans changer l'espace engendré.

Démonstration.
1. Toute combinaison linéaire d'éléments de X est en particulier combinaison linéaire d'éléments de Y.
2. On a toujours $\mathrm{Vect}(X \setminus \{x\}) \subset \mathrm{Vect}(X)$.
D'autre part, $x \in \mathrm{Vect}(X \setminus \{x\})$ par hypothèse, et si $y \in X$ est différent de x, alors $y \in X \setminus \{x\}$, donc tout élément de X est dans $\mathrm{Vect}(X \setminus \{x\})$, de sorte que $\mathrm{Vect}(X) \subset \mathrm{Vect}(X \setminus \{x\})$.

□

Définition 20.33 – Une partie X est **génératrice de** E si $\mathrm{Vect}(X) = E$.

Exemple 20.34

La partie $\{X^k, k \in \mathbf{N}\}$ est génératrice de $\mathbf{K}[X]$ puisque tout polynôme est combinaison linéaire[14] des X^k.

[14] Donc combinaison linéaire d'un nombre **fini** d'entre eux.

On a parfois envie de parler de l'espace engendré par une famille $(e_i)_{i \in I}$ plutôt que par une partie.
Dans ce cas, on note $\mathrm{Vect}((e_i)_{i \in I}) := \mathrm{Vect}(\{e_i, i \in I\})$, et toutes les propriétés qui précèdent

sont inchangées.

Définition 20.35 – Soit X une partie de E. On dit que X est libre si pour tout $n \in \mathbf{N}$, quels que soient les vecteurs $x_1, \dots, x_n \in X$ deux à deux distincts, $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille libre[15].

[15] Au sens où on l'a défini précédemment.

Remarque. Si on demande aux vecteurs d'être deux à deux distincts, c'est car on se souvient qu'une famille qui contient deux fois le même vecteur n'est jamais libre. Et donc si on ne demande plus aux x_i d'être deux à distincts, alors X n'est jamais libre !

Définition 20.36 – Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On dit que $(e_i)_{i\in I}$ est libre si toutes ses sous-familles finies sont libres. Autrement si pour tout $n \in \mathbf{N}$, quels que soient $i_1, \dots, i_n \in I$ deux à deux distincts, la famille $(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$ est une famille libre.

On notera que dans le cas d'une famille finie de cardinal n, cela revient bien à demander la liberté de la famille toute entière. En effet, si elle est libre, toutes les familles de cardinal plus petit en sont des sous-familles, et donc sont libres.
Et il n'y a pas de sous-familles de cardinal supérieur strict à n.

Détails
En d'autres termes, si I est de cardinal n, pour $p > n$, il n'existe pas $i_1, \dots, i_p \in I$ deux à deux distincts.

Exemple 20.37

Dans $\mathbf{K}[X]$, $(X^k)_{k\in\mathbf{N}}$ est libre. En effet, toute sous-famille finie est formée de polynômes non nuls de degré deux à deux distincts, donc est libre.

Comme pour les familles finies, l'idée derrière la liberté d'une famille $(e_i)_{i\in I}$ (ou d'une partie X) est qu'un vecteur qui est combinaison linéaires de $(e_i)_{i\in I}$ (resp. des vecteurs de X) s'écrit d'une seule manière comme combinaison linéaire des $(e_i)_{i\in I}$ (resp. des vecteurs de X).
Cette unicité sera énoncée un peu plus tard.

20.2.5 Bases

Définition 20.38 – Une **base** de E est une famille[16] qui est à la fois libre et génératrice de E.

[16] Ou une partie.

Intéressons nous pour l'instant au cas des bases finies, qui sont les plus faciles à comprendre.

Proposition 20.39 : *Une famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de vecteurs de E est une base de E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit* ***de manière unique*** *comme combinaison linéaire de $(e_1, \dots, e_n)$.*

Démonstration. L'existence vient de l'aspect générateur : $E = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$), et l'unicité de la liberté. □

Exemple 20.40

Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ des scalaires deux à deux distincts, et soient $L_0, L_1, \dots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés.
Alors nous avons prouvé que tout polynôme $P \in \mathbf{K}_n[X]$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des L_i, donc $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbf{K}_n[X]$.

Nous serons surtout amenés à manipuler les bases finies[17]. Dans ce cas, on dispose de la notion suivante, qui nous permet de nous ramener à $\mathbf{K}^n$:

[17] L'existence d'une telle base n'est pas toujours vraie et fera l'objet d'un chapitre à part.

Définition 20.41 – Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i$.
On dit alors que $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ est le vecteur des coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$.

Remarque. Autant l'ordre dans lequel on prend les vecteurs d'une famille n'influe pas sur le fait qu'elle soit libre ou génératrice, autant il est important lorsqu'on manipule une base, puisque les coordonnées dépendent de l'ordre dans laquelle on a ordonné les vecteurs de la base.

Exemples 20.42 **Bases canoniques**

► La famille $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$ est une base de $\mathbf{K}^n$, appelée **base canonique de $\mathbf{K}^n$.**
En effet, nous avons déjà vu qu'elle est à la fois libre et génératrice.
► La famille $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbf{K}_n[X]$, appelée **base canonique de $\mathbf{K}_n[X]$.**
En effet, tout polynôme $P \in \mathbf{K}_n[X]$ s'écrit de manière unique $P = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^i$.
► Plus généralement, la famille $(X^k)_{k \in \mathbf{N}}$ est une base de $\mathbf{K}[X]$, appelée base canonique de $\mathbf{K}[X]$.
► La famille des matrices élémentaires $(E_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ est une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, appelée base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

⚠ «Canonique» veut dire standard, et désigne donc une base qui est sans doute un peu plus naturelle que les autres. Elles sont ainsi appelées par convention, et ce n'est pas vous qui décidez si une base est canonique ou non : les bases ci-dessus sont appelée bases canoniques, et ce sont les seules.
Pour un espace vectoriel quelconque, il n'y a pas de raison qu'une base soit privilégiée par rapport à une autre et mérite le qualificatif de «canonique».
En particulier, je ne veux surtout pas voir de raisonnement du type : «soit E un espace vectoriel et soit $\mathscr{B}$ **une** base canonique».
Soit on est dans l'un des cas ci-dessus, et il y a **la** base canonique, et c'est celle-ci et aucune autre que l'on peut nommer ainsi, soit on est dans un espace quelconque et il y a[18] des bases, mais aucune n'est plus canonique que les autres.

[18] Ce qui sera prouvé plus tard.

20.3 SOMMES DE SOUS-ESPACES VECTORIELS

20.3.1 Sommes de deux sous-espaces

Définition 20.43 – Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On appelle alors **somme de F et G**, et on note $F + G$ la partie de E définie par :

$$F + G := \{x + y,\ (x, y) \in F \times G\}.$$

Donc par définition, tout vecteur de $F + G$ est somme d'un élément de F et d'un élément de G.
En revanche, rien n'indique qu'une telle écriture soit unique.

Exemple 20.44

Dans $\mathbf{R}^3$, considérons les deux sous-espaces vectoriels $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ x - y = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ x + 2z + y = 0\}$.

Alors $(4,-2,0) \in F+G$ puisque

$$(4,-2,0) = \underbrace{(2,2,-1)}_{\in F} + \underbrace{(2,-4,1)}_{\in G} = \underbrace{(1,1,0)}_{\in F} + \underbrace{(3,-3,0)}_{\in G}.$$

Donc il s'écrit de deux[19] manières différentes comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.

[19] Au moins. On montrerait en fait qu'il y en a une infinité.

Proposition 20.45 : *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors*

1. *$F+G$ est un sous-espace vectoriel de E, qui contient à la fois F et G.*
2. *Si H est un sous-espace vectoriel de E tel que $F \cup G \subset H$, alors $F+G \subset H$.*

Autrement dit, $F+G$ est le plus petit[20] sous-espace vectoriel de E qui contient à la fois F et G.

[20] Au sens de l'inclusion.

Démonstration. 1. Puisque $0_E = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$, $0_E \in F+G$.

Soient $x, y \in F+G$, et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors il existe $(x_F, x_G) \in F \times G$ et $(y_F, y_G) \in F \times G$ tels que $x = x_F + x_G$ et $y = y_F + y_G$.
Alors

$$\lambda \cdot x + y = \lambda \cdot (x_F + x_G) + (y_F + y_G) = \underbrace{\lambda \cdot x_F + y_F}_{\in F} + \underbrace{\lambda \cdot x_G + y_G}_{\in G} \in F+G.$$

Donc $F+G$ est stable par combinaisons linéaires, et donc est un sous-espace vectoriel de E.

Si $x \in F$, alors $x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} \in F+G$.
Donc $F \subset F+G$, et de même $G \subset F+G$.

2. Soit H un sous-espace vectoriel de E qui contient à la fois F et G.
Alors, $\forall (x,y) \in F \times G$, $\underbrace{x}_{\in H} + \underbrace{y}_{\in H} \in H$, et donc $F+G \subset H$.

□

Proposition 20.46 : *Soient X et Y deux parties de E. Alors* $\mathrm{Vect}(X \cup Y) = \mathrm{Vect}(X) + \mathrm{Vect}(Y)$.
Ainsi, si X est une famille génératrice de F et Y est une famille génératrice de G, alors $X \cup Y$ est une famille génératrice de la somme $F+G$.

Démonstration. Il est évident que $\mathrm{Vect}(X) \subset \mathrm{Vect}(X \cup Y)$ et $\mathrm{Vect}(Y) \subset \mathrm{Vect}(X \cup Y)$, donc $\mathrm{Vect}(X) + \mathrm{Vect}(Y) \subset \mathrm{Vect}(X \cup Y)$.
Inversement, si $x \in \mathrm{Vect}(X \cup Y)$, alors il existe $x_1, \dots, x_n \in X$, $y_1, \dots, y_p \in Y$ et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_p$ tels que

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i}_{\in \mathrm{Vect}(X)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{p} \mu_k \cdot y_k}_{\in \mathrm{Vect}(Y)} \in \mathrm{Vect}(X) + \mathrm{Vect}(Y).$$

□

20.3.2 Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Définition 20.47 – Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont en **somme directe** si

$$\forall x \in F, \forall y \in G, x + y = 0_E \Rightarrow x = y = 0_E.$$

Dans ce cas, on note $F \oplus G$ au lieu de $F + G$.

Notation

$F \oplus G$ n'est pas un nouvel objet : c'est le sous-espace vectoriel $F + G$. Mais la notation $F \oplus G$ nous donne une information supplémentaire : F et G sont en somme directe.

Exemple 20.48

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, soit $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid \operatorname{tr}(M) = 0\}$, et soit $G = \operatorname{Vect}(I_n) = \{\lambda I_n, \lambda \in \mathbf{R}\}$.
Alors F et G sont en somme directe. En effet, soit $M \in F$ et soit $N \in G$, de sorte qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $N = \lambda I_n$. Alors

$$M + \lambda I_n = 0_n \Rightarrow \operatorname{tr}(M + \lambda I_n) = 0 \Rightarrow \operatorname{tr}(M) + \lambda \operatorname{tr}(I_n) = 0 \Rightarrow \lambda n = 0.$$

Et donc $\lambda = 0$, donc $N = 0_n$, et il vient donc $M + 0 \cdot I_n = 0_n \Leftrightarrow M = 0_n$.

Proposition 20.49 : *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors il y a équivalence entre :*

1. *F et G sont en somme directe*
2. *$F \cap G = \{0_E\}$*
3. *tout vecteur de $F + G$ s'écrit de manière **unique** comme somme d'un élément de F et d'un élément de G. Autrement dit :*

$$\forall x \in F + G, \exists!(u, v) \in F \times G, x = u + v.$$

Remarque

Notons que l'apport essentiel ici est l'unicité, l'existence découle de la définition même de $F + G$.

Démonstration. 1) $\Rightarrow$ 2). Supposons que F et G soient en somme directe, et soit $x \in F \cap G$. Alors $x \in F$ et $-x \in G$. Or $x + (-x) = 0_E$, donc $x = -x = 0_E$. Et donc $F \cap G \subset \{0_E\}$, l'inclusion réciproque étant toujours vérifiée, on a bien $F \cap G = \{0_E\}$.

2) $\Rightarrow$ 3). Soit $x \in F + G$, et supposons que $x = f_1 + g_1 = f_2 + g_2$, avec $f_1, f_2 \in F$ et $g_1, g_2 \in G$.
Alors $f_1 + g_1 = f_2 + g_2 \Leftrightarrow f_1 - f_2 = g_2 - g_1$.
Mais $f_1 - f_2 \in F$ et $g_2 - g_1 \in G$, donc $f_1 - f_2 \in F \cap G = \{0_E\}$ et donc $f_1 - f_2 = 0_E \Leftrightarrow f_1 = f_2$.
Et de même, $g_1 = g_2$.
Donc l'écriture de x comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.

3) $\Rightarrow$ 1). Supposons unique l'écriture des vecteurs de $F + G$, et soient $x \in F$ et $y \in G$ tels que $x + y = 0_E$.
Comme on a d'autre part $0_E = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$, alors, par unicité de la décomposition de 0_E, $x = 0_E$ et $y = 0_E$.
Donc F et G sont en somme directe. □

20.3.3 Sous-espaces supplémentaires

Définition 20.50 – Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont **supplémentaires dans** E si $E = F \oplus G$, c'est-à-dire s'ils sont en somme directe, et que leur somme est égale à E tout entier.

Proposition 20.51 : *Les sous-espaces F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme un élément de F plus un élément de G.*

Démonstration. L'existence d'une telle écriture est équivalente au fait que $E = F+G$, l'unicité est équivalente au fait que F et G soient en somme directe. □

Exemple 20.52

Pour l'instant, la proposition précédente est le meilleur outil dont nous disposions pour prouver que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires, et nécessite souvent des raisonnements par analyse-synthèse.
▸ Par exemple, nous savons déjà prouvé que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
Cela signifie donc que les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ formés des matrices symétriques et des matrices antisymétriques sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
▸ De même, nous avons prouvé que les sous-espaces des fonctions paires et impaires sont supplémentaires dans $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.
▸ Si $P \in \mathbf{K}[X]$ est non nul, alors $F = \{Q \in \mathbf{K}[X] \mid \deg Q < \deg P\}$ et $G = \{PQ, Q \in \mathbf{K}[X]\}$ sont supplémentaires dans $\mathbf{K}[X]$. En effet, c'est tout simplement la division euclidienne.

⚠ Si $E = F \oplus G$, on dit bien que G est **un** supplémentaire de F, mais jamais **le** supplémentaire de F, tout simplement car il n'y a pas unicité : il y a généralement[21] une infinité de supplémentaires de F.
Par exemple, dans $\mathbf{R}^3$, soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x = y\}$.
Soit alors $G = \mathrm{Vect}(1, -1, 0)$.
Alors $\mathbf{R}^3 = F \oplus G$.
En effet, si $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, supposons que $(x, y, z) = u + v$, avec $u \in F$ et $v \in G$.
Alors il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $v = \lambda(1, -1, 0)$, et u est de la forme $u = (a, a, b)$.
Alors $(x, y, z) = (a, a, b) + \lambda(1, -1, 0)$, de sorte que $b = z$, $x = a + \lambda$, $y = a - \lambda$.
Donc $a = \dfrac{x+y}{2}$, et donc $\lambda = \dfrac{x-y}{2}$.
Donc si une telle écriture $(x, y, z) = u + v$ existe, c'est

$$(x, y, z) = \underbrace{\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, z\right)}_{\in F} + \underbrace{\frac{x-y}{2}(1, -1, 0)}_{\in G}.$$

Inversement, il est facile de vérifier que cette écriture convient, et qu'on a alors la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Mais on pourrait sur le même principe prouver que $G' = \mathrm{Vect}(1, -2, 0)$ et $G'' = \mathrm{Vect}(-2, 1, 0)$ sont des supplémentaires de F.

De manière générale, ne confondez surtout pas un supplémentaire avec le complémentaire : le complémentaire d'un sous-espace vectoriel ne contient pas 0_E. Ce n'est donc pas un sous-espace vectoriel de E.

[21] Sauf dans les cas $F = E$ et $F = \{0_E\}$.

Méthode
Notons que le raisonnement que nous venons de tenir n'est rien d'autre qu'une analyse-synthèse, qui est souvent un bon outil pour prouver que deux sous-espaces sont supplémentaires.

20.3.4 Somme et somme directe de n sous-espaces

Définition 20.53 – Soient $F_1, F_2, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E. On appelle alors **somme de** $F_1, \ldots, F_n$, et on note

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \sum_{i=1}^{n} F_i = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i,\ (x_1, \ldots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n \right\}.$$

On généralise alors sans difficultés les propriétés rencontrées dans le cas de deux sous-espaces vectoriels :

Proposition 20.54 :

1. $\sum_{i=1}^{n} F_i$ *est le plus petit sous-espace vectoriel de* E *qui contient tous les* F_i.
2. *si pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$, X_i *est une partie génératrice (finie ou non) de* F_i, *alors* $\bigcup_{i=1}^{n} X_i$ *est une partie génératrice de* $\sum_{i=1}^{n} F_i$.

Définition 20.55 – La somme $F_1 + \cdots + F_n$ de n sous-espaces vectoriels est dite **directe** si

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \cdots F_n,\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0_E \Rightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0_E.$$

On note alors $\bigoplus_{i=1}^{n} F_i$ au lieu de $\sum_{i=1}^{n} F_i$.

⚠ Attention !
Toujours comme pour le cas de deux sous-espaces vectoriels, on ne définit pas ici de nouvel objet.

⚠ Contrairement aux sommes directes de deux sous-espaces vectoriels, on n'a pas de caractérisation facile de la somme directe de $n \geqslant 3$ sous-espaces vectoriels à l'aide d'une intersection.
En particulier, il ne suffit pas que $\bigcap_{i=1}^{n} F_i = \{0_E\}$ ni que $\forall i \neq j,\ F_i \cap F_j = \{0_E\}$.

Exemple 20.56

Dans $\mathbf{R}^3$, considérons $F_1 = \mathrm{Vect}((1,1,1))$, $F_2 = \mathrm{Vect}((1,0,1))$ et $F_3 = \mathrm{Vect}((0,1,0))$.
Alors $F_1 \cap F_2 = \{0_{\mathbf{R}^3}\}$ puisque si $x \in F_1 \cap F_2$, alors il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ tels que $x = \lambda_1(1,1,1) = \lambda_2(1,0,1)$.
Donc $\lambda_1(1,1,1) - \lambda_2(1,0,1) = 0_{\mathbf{R}^3}$. Mais $(1,1,1)$ et $(1,0,1)$ ne sont pas colinéaires, si bien que la famille $(1,1,1), (1,0,1)$ est libre et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, si bien que $x = 0_E$.
Le même raisonnement, en remarquant que $(0,1,0)$ n'est colinéaire ni à $(1,1,1)$ ni à $(1,0,1)$ prouve que $F_1 \cap F_3 = F_2 \cap F_3 = \{0_E\}$.
Pourtant, la somme $F_1 + F_2 + F_3$ n'est pas directe puisque

$$\underbrace{(1,1,1)}_{\in F_1} + \underbrace{(-1,0,-1)}_{\in F_2} + \underbrace{(0,-1,0)}_{\in F_3} = 0_{\mathbf{R}^3}.$$

Proposition 20.57 : *Soient* $F_1, \ldots, F_n$ *des sous-espaces vectoriels de* E. *Alors la somme* $\sum_{i=1} F_i$ *est directe si et seulement si tout vecteur de* $\sum_{i=1}^{n} F_i$ *s'écrit de manière* ***unique*** *comme somme d'éléments des* F_i.

Démonstration. Supposons la somme directe, et soit $x \in F_1 + \cdots + F_n$, qui s'écrit de deux manières $x = x_1 + \cdots + x_n = y_1 + \cdots + y_n$, avec $x_i, y_i \in F_i$.
Alors $0_E = x - x = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)$.
Et donc, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i - y_i = 0_E \Leftrightarrow x_i = y_i$.

L'autre implication se prouver en remarquant que $0_E = 0_E + \cdots + 0_E$ est la seule décomposition possible du vecteur nul. □

Exemple 20.58

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de E. Alors pour tout $p \leqslant n$ les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Vect}(e_1), \mathrm{Vect}(e_2), \dots, \mathrm{Vect}(e_p)$ sont en somme directe.
En effet, si $0_E = x_1 + x_2 + \cdots + x_p$, avec $x_i \in \mathrm{Vect}(e_i)$, alors il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que $x_i = \lambda_i e_i$.
Et alors $0_E = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p$.
La famille $(e_1, \dots, e_p)$ étant libre[22] il vient $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$, et donc $x_1 = \cdots = x_p = 0_E$, donc la somme est directe.

Si de plus $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors $E = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Vect}(e_i)$.

[22] Car sous-famille d'une famille libre.

Remarque. Sans chercher à trop formaliser, il est facile de se convaincre que la notion de somme directe est stable par sous-famille : si $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est directe, alors la somme de toute sous-famille de $(F_1, \dots, F_n)$ est directe.
En particulier, deux quelconques des F_i sont en somme directe, et donc $F_i \cap F_j = \{0_E\}$ pour $i \neq j$.
En fait, on a même mieux : par exemple si $F_1+F_2+F_3$ est directe, alors on a $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 = F_1 \oplus (F_2 \oplus F_3)$, ce qui signifie que :

- la somme $F_2 + F_3$ est directe
- la somme $F_1 + (F_2 \oplus F_3)$ est directe.

20.4 Applications linéaires

20.4.1 Définition, premières propriétés

Les applications linéaires sont les morphismes d'espaces vectoriels, c'est-à-dire les applications entre deux espaces vectoriels qui sont compatibles à la fois avec la loi de composition interne + et la multiplication externe.

Définition 20.59 – Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Une application $f : E \to F$ est appelée **application linéaire** si

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbf{K},\ f(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot f(x) + f(y).$$

On note $\mathscr{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Remarque
Il est important que le corps $\mathbf{K}$ soit le même pour E et F : deux espaces vectoriels réels ou deux espaces vectoriels complexes.

Remarques. ► Notons qu'une application linéaire n'est rien d'autre qu'un morphisme de groupes[23] vérifiant en plus $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$.
► On dit parfois $\mathbf{K}$-linéaire au lieu de linéaire, mais cette distinction n'a lieu d'être que lorsqu'il y a ambiguïté sur le corps.
Par exemple, l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \overline{z} \end{array} \right.$ est $\mathbf{R}$-linéaire, c'est-à-dire est une application linéaire du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{C}$ dans lui-même.
Mais elle n'est pas $\mathbf{C}$-linéaire :

$$\forall z \in \mathbf{C}^*,\ f(iz) = \overline{iz} = -i\overline{z} \neq i\overline{z}.$$

[23] Prendre $\lambda = 1$ dans la définition pour s'en convaincre.

Exemples 20.60

► L'application constante $E \to F$ égale à 0_F est linéaire.
► L'identité $\mathrm{id}_E : E \to E$ est linéaire puisque

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbf{K},\ \mathrm{id}_E(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot x + y = \lambda \cdot \mathrm{id}_E(x) + \mathrm{id}_E(y).$$

Plus généralement, pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda \mathrm{id}_E$ est une application linéaire de E dans E.
Une application linéaire de la forme $\lambda \mathrm{id}_E$ est appelée homothétie de rapport λ.

▶ L'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}[X] \\ P & \longmapsto & 2P + P(0) - XP' \end{array} \right.$ est linéaire.

▶ Nous avons déjà vu que la trace et la transposition sont des applications linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ (à valeurs dans $\mathbf{K}$ pour la trace, dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ pour la transposition).

▶ Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, alors l'application $f_A : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$ est une application linéaire, appelée application linéaire canoniquement associée à A.

Proposition 20.61 : *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :*

1. $f(0_E) = 0_F$
2. *pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tous $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, alors*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Démonstration. 1. Ceci a déjà été prouvé pour les morphismes de groupes, donc reste en particulier vrai pour une application linéaire.

2. Par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$, prouvons

$$\mathcal{P}(n) \ : \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n, f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Pour $n = 1$, il suffit de prendre $y = 0_E$ dans la définition de la linéarité : pour $x \in E$ et $\lambda \in \mathbf{K}$,

$$f(\lambda x) = f(\lambda \cdot x + 0_E) = \lambda \cdot f(x) + f(0_E) = \lambda \cdot f(x).$$

Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et soient $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in E^{n+1}$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbf{K}^{n+1}$. Alors

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) && \text{C'est la définition de la linéarité.} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot f(x_i) + \lambda_{n+1} \cdot f(x_{n+1}) && \text{Hypothèse de récurrence.} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i). \end{aligned}$$

Donc par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

□

Proposition 20.62 : *Soit $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$, et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors $\lambda f + g$ est encore linéaire, c'est-à-dire dans $\mathcal{L}(E, F)$.*

Démonstration. Soient $x, y \in E$ et soit $\mu \in \mathbf{K}$. Alors

$$\begin{aligned} (\lambda f + g)(\mu x + y) &= \lambda f(\mu x + y) + g(\mu x + y) \\ &= \lambda\left(\mu f(x) + f(y)\right) + \mu g(x) + g(y) \\ &= \mu\left(\lambda f(x) + g(x)\right) + \left(\lambda f(y) + g(y)\right) \end{aligned}$$

□

Corollaire 20.63 – *Si E et F sont deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, alors $\mathscr{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(E,F)$. En particulier, c'est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.*

Proposition 20.64 (Composition d'applications linéaires) : *Soient E, F, G trois espaces vectoriels sur $\mathbf{K}$, et soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$ deux applications linéaires. Alors $g \circ f : E \to G$ est linéaire.*

Démonstration. Soient $(x,y) \in E^2$ et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors

$$(g\circ f)(\lambda x+y) = g(f(\lambda x+y)) = g(\lambda f(x)+f(y)) = \lambda g(f(x))+g(f(y)) = \lambda(g\circ f)(x)+(g\circ f)(y).$$

Donc $g \circ f$ est linéaire. □

Définition 20.65 – Une application linéaire de E dans E est appelée un **endomorphisme** de E.
On note $\mathscr{L}(E)$ au lieu de $\mathscr{L}(E,E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

Danger !
Généralement, cet anneau n'est pas commutatif.
Plus précisément, il est commutatif si et seulement si $E = \{0_E\}$ ou si E est une droite vectorielle (c'est-à-dire engendré par un seul vecteur non nul).

Proposition 20.66 : *$(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ est un anneau.*

Démonstration. Nous savons déjà que $(\mathscr{L}(E), +)$ est un groupe abélien[24], d'élément neutre l'application linéaire nulle $0_{\mathscr{L}(E)}$.
La proposition précédente prouve que $\mathscr{L}(E)$ est stable par composition, et la composition est associative[25], et possède pour élément neutre id_E. De plus, pour $(f,g,h) \in \mathscr{L}(E)^3$ et $x \in E$, on a

$$(f \circ (g+h))(x) = f(g(x)+h(x)) = f(g(x)) + f(h(x)) = (f\circ g)(x) + (f \circ h)(x).$$

Donc $f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h$.
On prouve de même la distributivité à droite. □

[24] Puisque $\mathscr{L}(E)$ est un espace vectoriel.

[25] Puisqu'elle l'est sur $\mathscr{F}(E,E)$.

Remarques. ▸ Les inversibles de cet anneau sont les endomorphisme bijectifs (du moins ceux dont la bijection réciproque est encore linéaire, mais ceci est automatique et sera prouvé dans un instant).
▸ Toutes les règles de calculs valables dans un anneau le sont donc dans $\mathscr{L}(E)$, et en particulier le binôme de Newton et la troisième identité remarquable généralisée, sous réserve qu'on soit en présence de deux endomorphismes **qui commutent**.

Proposition 20.67 : *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, et soit F un sous-espace vectoriel de E stable[26] par f.*
Alors l'application induite par f sur F, qu'on notera $f_{|F}$ (au lieu de $f_{|F}^{|F}$) est un endomorphisme de F.

[26] C'est-à-dire tel que $f(F) \subset F$.

Démonstration. Il s'agit simplement de prouver la linéarité, mais elle est évidente et découle de celle de F.
En effet, si $x, y \in F$ et $\lambda \in \mathbf{K}$, alors

$$f_{|F}(\lambda x + y) = f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y) = \lambda f_{|F}(x) + f_{|F}(y).$$

Donc $f_{|F}$ est linéaire. □

Exemple 20.68

Dans $\mathscr{C}^2(\mathbf{R},\mathbf{R})$, soit u l'application $f \mapsto f''$.
Alors pour tout $\omega \in \mathbf{R}^*$, $F_\omega = \mathrm{Vect}\,(x \mapsto \cos(\omega x),\ x \mapsto \sin(\omega x))$ est stable par u et $u_{|F_\omega} = -\omega^2 \mathrm{id}_{F_\omega}$.

20.4.2 Noyau et image

La définition qui suit n'est pas nouvelle : une application linéaire est en particulier un morphisme de groupes, et donc son noyau a déjà été défini.

Définition 20.69 – Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On appelle alors **noyau de** f et on note $\mathrm{Ker}\, f$ l'ensemble

$$\mathrm{Ker}\, f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\}).$$

De même, comme toute application, une application linéaire possède une image :

Définition 20.70 – Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ une application linéaire. On appelle **image de** f et on note $\mathrm{Im}\, f$ l'ensemble

$$\mathrm{Im}\, f = \{f(x),\ x \in E\} = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\}.$$

Proposition 20.71 : *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors*

1. $\mathrm{Ker}\, f$ *est un sous-espace vectoriel de* E
2. $\mathrm{Im}\, f$ *est un sous-espace vectoriel de* F.

Démonstration. 1. Commençons par noter que $\mathrm{Ker}\, f \subset E$ par définition.
Puisque $f(0_E) = 0_F$, $0_E \in \mathrm{Ker}\, f$.
Soient $x, y \in \mathrm{Ker}\, f$, et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors

$$f(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot f(x) + f(y) = \lambda \cdot 0_F + 0_F = 0_F$$

et donc $\lambda \cdot x + y \in \mathrm{Ker}\, f$.
Donc $\mathrm{Ker}\, f$ est bien un sous-espace vectoriel de E.

2. Puisque $f(0_E) = 0_F$, 0_F est bien[27] dans $\mathrm{Im}\, f$.
Soient $y_1, y_2 \in \mathrm{Im}\, f$ et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors il existe $x_1, x_2 \in E$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Et donc

$$\lambda \cdot y_1 + y_2 = \lambda \cdot f(x_1) + f(x_2) = f(\lambda \cdot x_1 + x_2) \in \mathrm{Im}\, f.$$

Ainsi, $\mathrm{Im}\, f$ est un sous-espace vectoriel de F.

□

[27] Les éléments de $\mathrm{Im}\, f$ sont ceux qui possèdent au moins un antécédent par f.

Remarque. Le premier point permet souvent de gagner du temps lorsqu'il s'agit de prouver qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel : si on arrive à l'écrire comme le noyau d'une application linéaire, c'est automatique.
Par exemple, $F = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \mid \mathrm{tr}(M) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, puisque c'est le noyau de l'application linéaire $\mathrm{tr} \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbf{R}), \mathbf{R})$.
De même, l'ensemble des matrices symétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ puisqu'il s'agit du noyau de l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ qui à M associe $M^\top - M$.

Remarque

A priori il faut tout de même prouver que cette application est bien linéaire, mais nous savons déjà que la transposition est linéaire, que l'identité est linéaire, et que toute combinaison linéaire d'applications linéaires l'est encore, donc en fait, il n'y a rien à dire.

Proposition 20.72 : *Soit $F : E \to F$ une application linéaire. Alors :*

1. f *est injective si et seulement si* $\mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$
2. f *est surjective si et seulement si* $\mathrm{Im}\, f = F$.

Démonstration. 1. Une application linéaire est un morphisme de groupes, et donc est injective si et seulement si son noyau est réduit à $\{0_E\}$.

Redonnons tout de même la preuve. Si f est injective, alors pour tout $x \in E$, on a

$$x \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(x) = 0_F = f(0_E) \Leftrightarrow x = 0_E$$

donc $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.
Et si $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$, alors pour $(x, y) \in E^2$,

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow f(x) - f(y) = 0_E \Leftrightarrow f(x-y) = 0_E \Leftrightarrow x-y \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow x-y = 0_E \Leftrightarrow x = y$$

donc f est injective.

2. C'est juste la définition de la surjectivité, la linéarité n'est ici d'aucune importance. □

La proposition suivante est plus évidente, mais mérite d'être mentionnée : multiplier une application linéaire par un scalaire non nul ne change ni son noyau, ni son image.

Proposition 20.73 : *Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et soit $\lambda \in \mathbf{K}^*$. Alors*

$$\operatorname{Ker}(\lambda f) = \operatorname{Ker} f \text{ et } \operatorname{Im}(\lambda f) = \operatorname{Im} f.$$

Démonstration. Soit $x \in E$. Alors

$$x \in \operatorname{Ker}(\lambda f) \Leftrightarrow \lambda f(x) = 0_F \Leftrightarrow f(x) = 0_F \Leftrightarrow x \in \operatorname{Ker} f.$$

Soit $y \in \operatorname{Im} f$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x) = f\left(\lambda \frac{x}{\lambda}\right) = \lambda f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \in \operatorname{Im}(\lambda f)$.
Donc $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im}(\lambda f)$.
Et alors $\operatorname{Im}(\lambda f) \subset \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\lambda}\lambda f\right) = \operatorname{Im} f$.
Par double inclusion, $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(\lambda f)$. □

20.4.3 Isomorphismes

Définition 20.74 – Une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est un **isomorphisme** si elle est bijective.
Dans le cas où de plus $E = F$, on dit que f est un **automorphisme de E.**

Autrement dit
Un automorphisme est une application linéaire qui est à la fois un endomorphisme et un isomorphisme.

Proposition 20.75 : *Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ une application linéaire bijective. Alors $f^{-1} : F \to E$ est linéaire, donc est dans $\mathscr{L}(F, E)$.*

Démonstration. Soient $(x, y) \in F^2$, et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors

$$f(\lambda f^{-1}(x) + f^{-1}(y)) = \lambda f(f^{-1}(x)) + f(f^{-1}(y)) = \lambda x + y.$$

En appliquant f^{-1}, il vient $\lambda f^{-1}(x) + f^{-1}(y) = f^{-1}\left(f\left(\lambda f^{-1}(x) + f^{-1}(y)\right)\right) = f^{-1}(\lambda x + y)$.
Donc f^{-1} est linéaire. □

Définition 20.76 – On appelle **groupe linéaire sur** E, et on note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.
C'est un groupe pour la composition.

Démonstration. Il s'agit juste de noter que pour $f \in \mathscr{L}(E)$,

$$f \in GL(E) \Leftrightarrow \exists g \in \mathscr{L}(E), g \circ f = f \circ g = \mathrm{id}_E.$$

Et donc $GL(E)$ est l'ensemble des inversibles de l'anneau $\mathscr{L}(E)$, qui est donc un groupe. □

Proposition 20.77 : *Une famille $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs de E est une base de E si et seulement si* $f_{\mathscr{B}} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \longrightarrow & E \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \end{array} \right.$ *est un isomorphisme de $\mathbf{K}^n$ sur E.*

Démonstration. Il s'agit de commencer par prouver la linéarité de $f_{\mathscr{B}}$, ce qui est sans difficulté.
On a alors

$$\begin{aligned} f_{\mathscr{B}} \text{ bijective } &\Leftrightarrow \forall x \in E,\ \exists!(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n,\ x = f_{\mathscr{B}}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in E,\ \exists!(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n,\ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \\ &\Leftrightarrow \mathscr{B} \text{ est une base de } E. \end{aligned}$$

□

Détails
Il s'agit de l'une des caractérisation des bases : $(e_1, \dots, e_n)$ est une base si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des e_i.

Ce que nous dit la proposition précédente, c'est que si on a une base de E de cardinal n, alors E a les mêmes propriétés, en tant que $\mathbf{K}$-espace vectoriel, que $\mathbf{K}^n$.

20.4.4 Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base

Le principe général que nous allons développer tout de suite, et que nous exploiterons plus tard pour faire le lien entre matrices et applications linéaires, est qu'une application linéaire est entièrement caractérisée par l'image d'une base (quand E possède une base...).
Pour pouvoir appréhender correctement les bases infinies, nous allons avoir besoin de quelques notations.

Définition 20.78 – Une famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbf{K}$ est dite presque nulle si $\{i \in I \mid \lambda_i \neq 0\}$ est fini. En particulier, c'est le cas de toute famille finie[28].
On note $\mathbf{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles presque nulles.

[28] C'est-à-dire lorsque I est fini.

Proposition 20.79 : *Une famille $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E si et seulement si pour tout $x \in E$, il existe une unique famille presque nulle $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbf{K}^{(I)}$ telle que $x = \displaystyle\sum_{i \in I} \lambda_i e_i$.*

Remarque
Dans cette notation, il faut bien comprendre que la somme est en fait finie, et ne concerne que les i tels que $\lambda_i \neq 0$.

Démonstration. On notera que ce résultat a déjà été prouvé dans le cas où I est fini.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $(e_i)_{i \in I}$ base de E, et soit $x \in E$. Alors par définition, il existe $i_1, \dots, i_n \in I$ deux à deux distincts, et $\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_n} \in \mathbf{K}$ tels que $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mu_{i_j} e_{i_j}$.
Si on définit une famille de scalaires $(\lambda_i)_{i \in I}$ en posant :

$$\forall i \in I,\ \lambda_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \notin \{i_1, \dots, i_n\} \\ \mu_{i_k} & \text{si } i = i_k \end{cases}$$

alors il est clair qu'il s'agit d'une famille presque nulle et que $x = \displaystyle\sum_{i \in I} \lambda_i e_i$.

Pour l'unicité, supposons que $x = \displaystyle\sum_{i \in I} \lambda_i e_i = \sum_{i \in I} \mu_i e_i$ avec $(\lambda_i), (\mu_i)$ deux familles presque nulles.
Notons alors $J = \{i \in I \mid \lambda_i \neq 0 \text{ ou } \mu_i \neq 0\}$, qui est donc une partie finie de I.
Notons $J = \{j_1, \dots, j_p\}$. Alors $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_{j_k} e_{j_k} = \sum_{k=1}^{p} \mu_{j_k} e_{j_k}$.
Mais la famille $(e_{j_1}, \dots, e_{j_p})$ est libre[29], et donc pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $\lambda_{j_k} = \mu_{j_k}$.

[29] Par définition, une famille est libre si et seulement si toutes ses sous-familles finies le sont.

Puisque pour $i \notin J$, $\lambda_i = \mu_i = 0$, on a bien prouvé que $(\lambda_i)_{i\in I} = (\mu_i)_{i\in I}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Inversement, supposons que pour tout $x \in E$, il existe un unique $(\lambda_i)_{i\in I}$ presque nulle telle que $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$.
Alors en particulier, tout vecteur de E est combinaison linéaire de $(e_i)_{i\in I}$, donc la famille est génératrice.
Prouvons qu'elle est libre, et soient $(i_1, \dots, i_n)$ deux à deux distincts, $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n}$ des scalaires tels que $0_E = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{i_k} e_{i_k}$.
Alors puisque la seule écriture possible de 0_E est $0_E = \sum_{i\in I} 0 \cdot e_i$, on en déduit que $\lambda_{i_1} = \dots = \lambda_{i_k} = 0$.
Ainsi, $(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n})$ est libre, et donc $(e_i)_{i\in I}$ est libre, si bien qu'il s'agit d'une base de E ; □

Passons à présent à l'énoncé essentiel :

Proposition 20.80 : *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel possédant une base $(e_i)_{i\in I}$ et soit F un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Alors pour toute famille $(f_i)_{i\in I}$ de vecteurs de F, il existe un unique $u \in \mathscr{L}(E, F)$ tel que $\forall i \in I$, $u(e_i) = f_i$.*

Démonstration. L'unicité est la plus facile : supposons que $u, v \in \mathscr{L}(E, F)$ vérifient $\forall i \in I$, $u(e_i) = f_i = v(e_i)$.
Posons alors $w = u - v \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors $\operatorname{Ker} w$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient tous les e_i, et donc qui contient $\operatorname{Vect}((e_i)_{i\in I}) = E$.
Ainsi, $\operatorname{Ker} w = E$, si bien que pour tout $x \in E$, $u(x) - v(x) = 0_F$, et donc $u(x) = v(x)$.

Passons à présent à l'existence. Soit $x \in E$, alors il existe une unique famille presque nulle de scalaire $(\lambda_i)_{i\in I}$ telle que $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$.
Posons alors $u(x) = \sum_{i\in I} \lambda_i f_i$.
Puisque pour tout $i \in I$, $e_i = 1e_i + \sum_{\substack{j\in I \\ j\neq i}} 0 \cdot e_i$, on a bien $u(e_i) = f_i$.
Reste donc à vérifier la linéarité de u. Soient donc $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbf{K}$.
Notons $(\lambda_i)_i$, $(\mu_i)_i$ les familles presque nulles telles que $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$ et $y = \sum_{i\in I} \mu_i e_i$.
Alors $\alpha x + y = \sum_{i\in I} (\alpha\lambda_i + \mu_i) e_i$, si bien que

$$u(\alpha x + y) = \sum_{i\in I} (\alpha\lambda_i + \mu_i) f_i = \alpha \sum_{i\in I} \lambda_i f_i + \sum_{i\in I} \mu_i f_i = \alpha u(x) + u(y).$$

Et donc u est linéaire. □

L'idée principale est donc que pour choisir une application linéaire il suffit de choisir les images des vecteurs d'une base de E.

Proposition 20.81 : *Soient E, F deux espaces vectoriels, soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de f. Alors*

1. *$(f(e_i))_{i\in I}$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$. Et par conséquent, f est surjective si et seulement si $(f(e_i))_{i\in I}$ est génératrice de F.*
2. *f est injective si et seulement si $(f(e_i))_{i\in I}$ est libre.*
3. *f est bijective si et seulement si $(f(e_i))_{i\in I}$ est une base de F ;*

Démonstration. 1. Soit $y \in \operatorname{Im} f$, et soit $x \in E$ un antécédent de f. Notons $(\lambda_i)_i$ l'unique famille presque nulle de scalaires telle que $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$.

Alors $y = f\left(\sum_{i\in I} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i\in I} \lambda_i f(e_i) \in \mathrm{Vect}\,(f(e_i)_{i\in I})$.
Donc $f(e_i)_{i\in I}$ est génératrice de $\mathrm{Im}\, f$.

2. Supposons f injective. Soient alors $i_1, \dots, i_n \in I$ deux à deux distincts, et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ tels que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_{i_k} f(e_{i_k}) = 0_F$.
Alors $f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_{i_k} e_{i_k}\right) = 0_F$, si bien que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_{i_k} e_{i_k} \in \mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$.
Par liberté de $(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$, on a donc $\lambda_{i_1} = \dots = \lambda_{i_n} = 0$, et donc $(f(e_{i_1}), \dots, f(e_{i_n}))$ est libre, et donc $(f(e_i)_{i\in I})$ est libre.
Inversement, si $(f(e_i))_{i\in I}$ est libre. Soit $x \in \mathrm{Ker}\, f$, et notons $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$. Alors
$$0_F = f(x) = f\left(\sum_{i\in I} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i\in I} \lambda_i f(e_i).$$
Mais par liberté de $(f(e_i))_{i\in I}$, on a donc pour tout $i \in I$, $\lambda_i = 0$, et donc $x = 0_E$. Ainsi, $\mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$, donc f est injective.

3. Il suffit de mettre bout à bout les deux points précédents.

□

Remarques. On notera que pour le premier point, on n'a pas eu besoin de la liberté de (e_i). On pourra donc retenir que l'image d'une famille génératrice est génératrice de l'image. Et ces résultats seront particulièrement intéressants lorsqu'on disposera de bases finies, où il sont alors beaucoup plus faciles à énoncer : si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\, f$.
Et c'est une base de F si et seulement si f est un isomorphisme.

20.4.5 Endomorphismes remarquables

Définition 20.82 – Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. On appelle **homothétie de rapport** λ l'application linéaire $\lambda \mathrm{id}_E$.

Les homothéties sont en quelques sorte les endomorphismes les plus simples que l'on puisse imaginer. En particulier, l'application nulle et l'identité sont deux homothéties (de rapports respectifs 0 et 1).

Définition 20.83 – Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.
Alors tout élément $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = x_F + x_G, x_F \in F, x_G \in G$.
On appelle **projection sur** F **parallèlement à** G l'application
$$p : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x = x_F + x_G & \longmapsto & x_F \end{array} \right. .$$

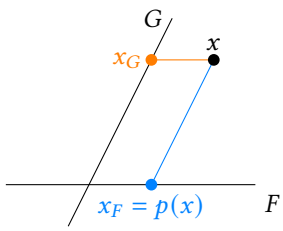

FIGURE 20.1– La projection sur F parallèlement à G.

Notons tout de suite que si p est la projection sur F parallèlement à G et si q est la projection sur G parallèlement à F, alors $p + q = \mathrm{id}_E$.
En effet, pour $x = x_F + x_G \in E$, on a $p(x) = x_F$ et $q(x) = x_G$, donc $p(x) + q(x) = x = \mathrm{id}_E$.

Proposition 20.84 : *La projection p sur F parallèlement à G est un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$.*
De plus, $\mathrm{Ker}(p) = G$ *et* $\mathrm{Im}(p) = F$.

Démonstration. Prouvons que p est linéaire. Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbf{K}$.
Alors, de manière unique, $x = x_F + x_G$, avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$ et de même, $y = y_F + y_G$,

avec $y_F \in F$ et $y_G \in G$.
Alors
$$\lambda \cdot x + y = \lambda \cdot (x_F + x_G) + (y_F + y_G) = \underbrace{\lambda \cdot x_F + y_F}_{\in F} + \underbrace{\lambda \cdot x_G + y_G}_{\in G}.$$
Nous avons donc là l'unique décomposition de $\lambda \cdot x + y$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.
Et donc $p(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot x_F + y_F = \lambda \cdot p(x) + p(y)$.
Donc p est linéaire.

De plus, pour $x = x_F + x_G \in E$, on a $p(x) = x_F = \underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$ et donc $p(p(x)) = x_F = p(x)$.
Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, $p \circ p = p$.
Si $x \in G$, alors $x = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{x}_{\in G}$, si bien que $p(x) = 0_E$, et donc $x \in \operatorname{Ker} p$.
Et inversement, si $x = x_F + x_G \in \operatorname{Ker} p$, alors $x_F = 0_E$, et donc $x = x_G \in G$. Par double inclusion, $\operatorname{Ker} p = g$.

De même, si $x \in F$, alors $x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$, et donc $x = p(x) \in \operatorname{Im} p$. Et il est clair qu'inversement $\operatorname{Im} p \subset F$, d'où l'égalité.

□

Définition 20.85 – On appelle **projecteur de** E tout $p \in \mathscr{L}(E)$ tel que $p \circ p = p$.

Exemple 20.86

L'application $f : \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, $M \mapsto \dfrac{M + M^\top}{2}$ est un projecteur de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
En effet, elle est clairement[30] linéaire, et
$$f^2(M) = \frac{f(M) + f(M)^\top}{2} = \frac{1}{4}\left(M + M^\top + (M + M^\top)^\top\right) = \frac{M + M^\top}{2} = f(M).$$
Ceci étant vrai pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, $f^2 = f$.

[30] C'est une combinaison linéaire des deux applications linéaires $M \mapsto M^\top$ et $M \mapsto M$.

A priori, projecteurs et projections sont deux notions différentes. Le théorème suivant prouve qu'il s'agit en fait de la même chose :

Théorème 20.87 : *Soit E un espace vectoriel et $p \in \mathscr{L}(E)$. Alors p est un projecteur si et seulement si p est une projection.*
Dans ce cas, p est la projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.

Remarque
En particulier, si p est un projecteur, $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont supplémentaires dans E.

Démonstration. Supposons que $p \circ p = p$. Montrons que $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont supplémentaires dans E.
Procédons par analyse-synthèse et prouvons que pour tout $x \in E$, $\exists!(x_K, x_I) \in \operatorname{Ker} p \times \operatorname{Im} p, x = x_K + x_I$.
Soit donc $x \in E$ fixé.
Analyse : supposons que $x = x_K + x_I$, $x_K \in \operatorname{Ker} p, x_I \in \operatorname{Im} p$.
Alors $p(x) = p(x_K) + p(x_I) = p(x_I)$.
Mais puisque $x_I \in \operatorname{Im} p$, soit $x_I' \in E$ tel que $x_I = p(x_I')$.
Alors $p(x_I) = p(p(x_I')) = p(x_I') = x_I$.
Donc $x_I = p(x)$, si bien que $x_K = x - x_I = x - p(x)$.

Synthèse : posons $x_K = x - p(x)$ et $x_I = p(x)$.
Alors $x = x_K + x_I$, et il est clair que $x_I \in \operatorname{Im}(p)$.

De plus $p(x_K) = p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = p(x) - p(x) = 0_E$, donc $x_K \in \operatorname{Ker} p$.

Conclusion : tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de $\operatorname{Ker} p$ et d'un vecteur de $\operatorname{Im} p$: ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans E.

Enfin, si $x \in E$, $x = \underbrace{p(x)}_{\in \operatorname{Im} p} + \underbrace{x - p(x)}_{\in \operatorname{Ker} p}$ et $p(x) = p(x)$.
Donc p est l'application qui à x associe sa composante $p(x)$ suivant $\operatorname{Im} p$: c'est donc la projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.

Inversement, si p est la projection sur F parallèlement à G, avec $E = F \oplus G$, nous avons déjà prouvé que p est un projecteur, avec $\operatorname{Ker}(p) = F$ et $\operatorname{Im}(p) = G$. □

Exemple 20.88

Si f est le projecteur $M \mapsto \dfrac{M + M^\top}{2}$, alors

$$M \in \operatorname{Ker}(f) \Leftrightarrow \frac{M + M^\top}{2} = 0 \Leftrightarrow M = -M^\top$$

et donc $\operatorname{Ker}(f)$ l'ensemble $\mathscr{A}_n(\mathbf{R})$ des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
D'autre part, il est clair que pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, $f(M)$ est une matrice symétrique, puisque $f(M)^\top = \left(\dfrac{M + M^\top}{2}\right)^\top = \dfrac{M + M^\top}{2} = f(M)$.
Donc déjà $\operatorname{Im}(f) \subset \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. De plus, pour tout $M \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$, on a $f(M) = M$, et donc $M \in \operatorname{Im}(f)$.
Ainsi, $\operatorname{Im}(f) = \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$.
Puisque nous savons déjà que f est un projecteur, il vient donc $\mathscr{M}_n(\mathbf{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbf{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbf{R})$, et f est la projection sur $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ parallèlement à $\mathscr{A}_n(\mathbf{R})$.

Proposition 20.89 : *Si $p \in \mathscr{L}(E)$ est un projecteur, alors*

$$\operatorname{Im} p = \{x \in E \mid p(x) = x\} = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E).$$

Autrement dit
$\operatorname{Im} p$ est l'ensemble des points fixes de p.

Démonstration. Nous avons déjà prouvé que si $x \in \operatorname{Im} p$, alors $p(x) = x$.
Et inversement, si x est un point fixe de p, $x = p(x)$, alors $x \in \operatorname{Im} p$.
Le fait que l'ensemble des points fixes de p soit le noyau de $p - \mathrm{id}_E$ est en fait vrai pour tout endomorphisme :

$$\{x \in E \mid p(x) = x\} = \{x \in E \mid p(x) - \mathrm{id}_E(x) = 0_E\} = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E).$$

□

Définition 20.90 – Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Alors tout vecteur de E s'écrit de manière unique $x = x_F + x_G$, $x_F \in F$, $x_G \in G$.
On appelle alors **symétrie par rapport à F parallèlement à G** l'application

$$s : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x = x_F + x_G & \longmapsto & x_F - x_G \end{array} \right. .$$

Proposition 20.91 : *La symétrie s par rapport à F parallèlement à G est un endomorphisme de E, qui vérifie $s^2 = \mathrm{id}_E$.*

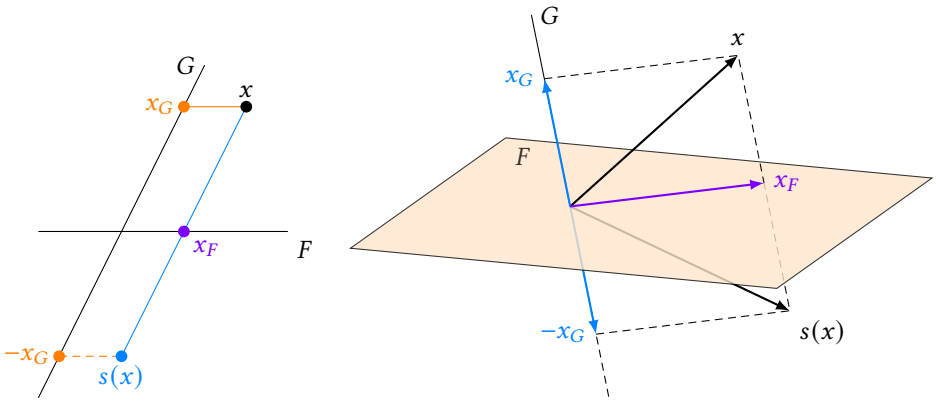

Figure 20.2 – Deux symétries par rapport à F parallèlement à G, dans le plan et dans l'espace.
Notons que x_F est la projection de x sur F parallèlement à G.

Démonstration. Notons simplement que si p désigne la projection sur F parallèlement à G, alors $s = 2p - \mathrm{id}_E$.
En effet, pour $x \in E$, qui s'écrit $x = x_F + x_G$, $x_F \in F$, $x_G \in G$, on a

$$2p(x) - \mathrm{id}_E(x) = 2x_F - (x_F + x_G) = x_F - x_G = s(x).$$

Donc s est linéaire car combinaison linéaire d'applications linéaires, et

$$s \circ s = (2p - \mathrm{id}_E) \circ (2p - \mathrm{id}_E) = 4p^2 - 4p + \mathrm{id}_E = 4p - 4p + \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E.$$

Remarque
On a ici utilisé le fait que p et id_E commutent.

□

Remarque. Les applications dont le carré est égal à l'identité, ou de manière équivalente, qui sont égales à leur propre bijection réciproque sont nommées involutions.
Ce que dit la proposition qui suit, c'est que les involutions **linéaires** sont exactement les symétries.

Proposition 20.92 : *Si s est un endomorphisme de E tel que $s^2 = \mathrm{id}_E$, alors*
1. $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ *et* $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$ *sont supplémentaires dans* E
2. s *est la symétrie par rapport à* $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ *parallèlement à* $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

Démonstration. Notons $p = \dfrac{s + \mathrm{id}_E}{2}$.
Alors $p^2 = \dfrac{s^2 + 2s + \mathrm{id}_E}{4} = \dfrac{s + \mathrm{id}_E}{2} = p$.
Donc p est un projecteur dont l'image et le noyau sont supplémentaires dans E.
Mais $\mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.
D'autre part, on a

$$\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}\left(\frac{s - \mathrm{id}_E}{2}\right) = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E).$$

Donc $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$, ce qui prouve 1).
De plus, pour $x \in E$, alors de manière unique, $x = x_I + x_K$ avec $x_I \in \mathrm{Im}\, p$ et $x_K \in \mathrm{Ker}\, p$.
Et donc $s(x) = 2p(x) - \mathrm{id}_E(x) = 2x_I - (x_I + x_K) = x_I - x_K$.
On reconnaît bien là l'expression de la symétrie par rapport à $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$. □

20.4.6 Détermination d'une application par restriction à des supplémentaires

Proposition 20.93 : *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E, et soit H un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.*
Alors pour tout couple $(u,v) \in \mathscr{L}(F,H) \times \mathscr{L}(G,H)$, il existe un unique $f \in \mathscr{L}(E,H)$ tel que $f_{|F} = u$ et $f_{|G} = v$.

Démonstration. Supposons qu'un tel f existe, et soit $x \in E$. Alors, de manière unique $x = x_F + x_G$.
Et donc $f(x) = f(x_F) + f(x_G) = u(x_F) + v(x_G)$.

Inversement, soit $f : x_F + x_G \mapsto u(x_F) + v(x_G)$.
Prouvons que f est linéaire : soient $x = x_F + x_G$ et $y = y_F + y_G$, et soit $\lambda \in \mathbf{K}$.
Alors $\lambda x + y = \underbrace{\lambda x_F + y_F}_{\in F} + \underbrace{\lambda y_F + y_G}_{\in G}$. Donc

$$\begin{aligned} f(\lambda x + y) &= u(\lambda x_F + y_F) + v(\lambda x_G + y_G) \\ &= \lambda u(x_F) + u(y_F) + \lambda v(x_G) + v(y_G) \\ &= \lambda(u(x_F) + v(x_G)) + u(y_F) + v(y_G) = \lambda f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Donc f est bien un élément de $\mathscr{L}(E)$.
Si $x \in F$, alors $x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$ de sorte que $f(x) = u(x) + v(0_E) = u(x)$, et donc $f_{|F} = u$.
De même, $f_{|G} = v$. □

En particulier, la projection sur F parallèlement à G aurait pu être définie comme l'unique endomorphisme de E dont la restriction à F est id_F et la restriction à G est l'application nulle.
Et de même, la symétrie par rapport à F parallèlement à G est l'unique endomorphisme de E dont la restriction à F est id_F et la restriction à G est $-\mathrm{id}_G$.

Cette proposition se généralise sans difficulté au cas d'une somme directe de n sous-espaces vectoriels.
Vous passerez une bonne partie de l'année prochaine à déterminer quand, étant donné un endomorphisme f de E, E se «casse» en une somme directe de sous-espaces vectoriels sur lesquels la restriction de f est une homothétie.
Un tel endomorphisme sera appelé *diagonalisable*.