Rappels et compléments sur les fonctions numériques

2

Dans ce chapitre, contenant beaucoup de rappels du lycée, parfois agrémentés de preuves non données au lycée, on ne considère que des fonction numériques, c'est-à-dire qui à un réel associent un autre réel.

2.1 Un peu de vocabulaire

2.1.1 Domaine de définition

Si $\mathcal{D}$ est une partie non vide de $\mathbf{R}$, une fonction f définie sur $\mathcal{D}$ permet d'associer à chaque réel x de $\mathcal{D}$ un unique réel, noté $f(x)$.

Nom des variables

La variable x est une variable dite **muette**, et on peut changer son nom à loisir : les notations $x \mapsto x^2$, $t \mapsto t^2$ et $\alpha \mapsto \alpha^2$ désignent la même fonction.

L'ensemble des valeurs de la variable x pour lesquelles l'expression $f(x)$ a bien un sens est appelé **domaine de définition de** f.

Exemple 2.1

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{(x-1)(x+2)}$.
Alors $f(x)$ n'a de sens que si $(x-1)(x+2) \geqslant 0$. Un tableau de signe[1] nous informe que c'est le cas si et seulement si $x \in]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$.
Donc le domaine de définition de f est $\mathcal{D}_f =]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$.

[1] Ou un résultat bien connu sur le signe des polynômes de degré 2.

Si f est définie sur $\mathcal{D}$, on note alors

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

⚠ On notera bien la différence subtile entre les deux flèches : la première, sans barre verticale, signifie que f est définie sur $\mathcal{D}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$. Autrement dit, qu'à tout élément de $\mathcal{D}$, elle associe un élément de $\mathbf{R}$.
La seconde flèche, avec une barre verticale, signifie que f associe le réel $f(x)$ au réel x.

Exemple 2.2

Des quatre notations suivantes, une seule[2] a un sens, laquelle ?

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbf{R}_+^* & \longmapsto & \mathbf{R} \\ & x & \longrightarrow & \frac{1}{\sqrt{x}} \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} f : & \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{x}} \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} f : & \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \longrightarrow & \frac{1}{\sqrt{x}} \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} f : & \mathbf{R}_+^* & \longmapsto & \mathbf{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{x}} \end{array}$$

[2] C'est la seconde.

On veillera également à ne pas confondre la **fonction** f et le **nombre** $f(x)$. Par exemple si f est la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f : x \mapsto x^2$, alors on peut dire «f est dérivable» mais pas «$f(x)$ est dérivable», la notion de dérivabilité n'ayant de sens que pour les fonctions, pas pour les nombres.

Définition 2.3 – Si f est une fonction définie sur $\mathcal{D}$, et si $A \subset \mathcal{D}$ est une partie[3] de $\mathcal{D}$, on appelle **restriction de f à** A et on note $f_{|A}$ la fonction dont l'ensemble de définition est A et définie par $f_{|A} : \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$.
Autrement dit, $f_{|A}$ prend les mêmes valeurs que f, mais n'est définie que sur A.

[3] Pour le dire avec les mains : «un ensemble plus petit que $\mathcal{D}$». La définition rigoureuse sera donnée au prochain chapitre.

Exemple 2.4

La fonction cos n'est ni croissante ni décroissante sur $\mathbf{R}$.
En revanche, la fonction $\cos_{|[0,\pi]}$ est décroissante, car sa dérivée, qui est $-\sin_{|[0,\pi]} : \underbrace{x}_{\in[0,\pi]} \mapsto -\sin(x)$ est négative sur $[0,\pi]$.

Comme dans l'exemple ci-dessus, le vocabulaire de restriction permet de reformuler des propriétés qu'il est aussi possible de décrire sans parler de restriction.
Et donc au lieu de dire f est *#jenesaisquoi* <u>sur A</u>, on peut dire que $f_{|A}$ est *#jenesaisquoi*, où *#jenesaisquoi* peut être «continue», «décroissante», «dérivable», etc.

2.1.2 Opérations sur les fonctions

On dit que deux fonctions f et g sont égales, et on note $f = g$ si :

1. elles ont le même domaine de définition
2. elles prennent la même valeur en tout point de leur domaine de définition

Par exemple, $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & (\sqrt{x})^2 \end{array} \right.$ coïncident bien sur $\mathbf{R}_+$, mais n'ont pas le même ensemble de définition, donc ne sont pas égales.
On a tout de même $f_{|\mathbf{R}_+} = g$.
En revanche, si $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2} \end{array} \right.$, alors $f = h$.

Si f est définie sur $\mathcal{D}$, alors pour $\lambda \in \mathbf{R}$, on note λf la fonction définie sur le même ensemble $\mathcal{D}$ par $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.
Si f ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, alors $\frac{1}{f}$ désigne la fonction définie sur $\mathcal{D}$ par $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$.
Enfin, pour $n \in \mathbf{N}$, on note f^n la fonction définie sur $\mathcal{D}$ par $(f^n)(x) = f(x)^n$.

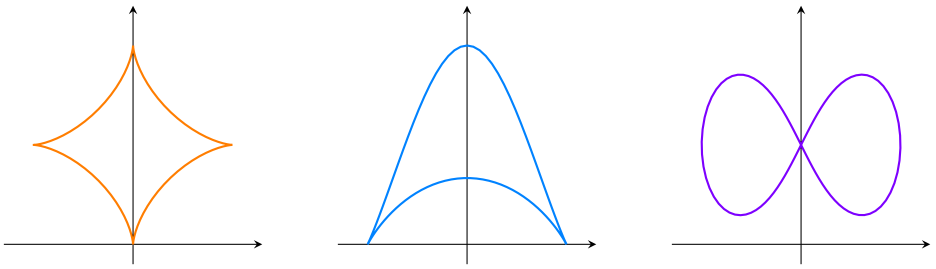
Si f et g sont deux fonctions définies sur le **même** ensemble $\mathcal{D}$, alors on note :

- $f + g$ la fonction définie sur $\mathcal{D}$ par $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
- fg la fonction définie sur $\mathcal{D}$ par $(fg)(x) = f(x)g(x)$.
- si g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, $\frac{f}{g}$ est la fonction définie sur $\mathcal{D}$ par $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

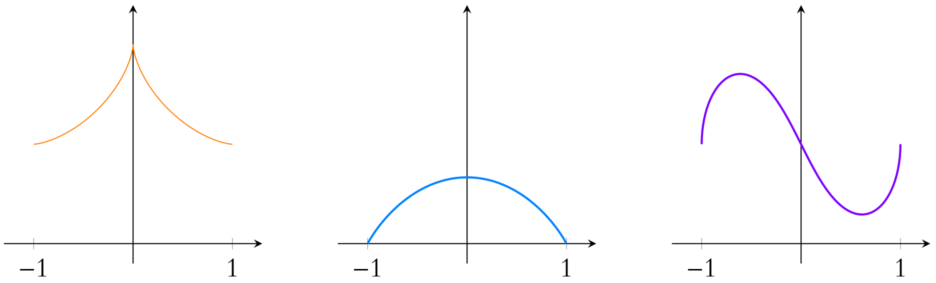
2.1.3 Graphe d'une fonction, image, antécédent

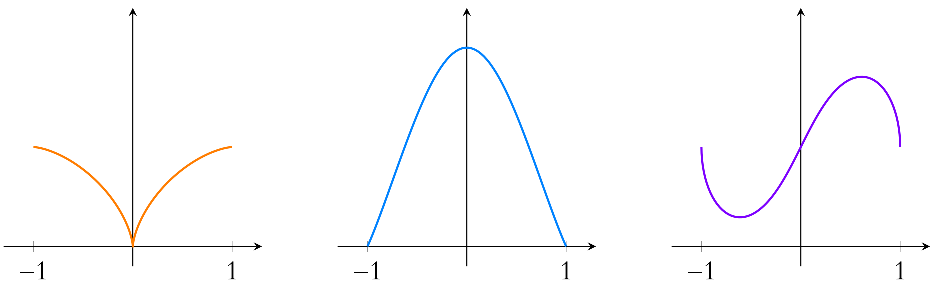
Définition 2.5 – Si f est une fonction définie sur $\mathcal{D}$, le **graphe de** f ou **courbe représentative de** f est l'ensemble $\mathcal{C}_f$ des points du plan de coordonnées (x, y) où $x \in \mathcal{D}$ et $y = f(x)$.

À $x \in \mathcal{D}$ fixé, il y a un et un seul point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x : c'est le point de coordonnées $(x, f(x))$.
Ceci impose notamment que toute courbe ne peut pas être la courbe représentative d'une fonction : seules les courbes qui rencontrent une et une seule fois chaque droite verticale (d'abscisse dans $\mathcal{D}$) peuvent représenter une fonction définie sur $\mathcal{D}$.
Par exemple, les courbes suivantes ne sont pas des courbes représentatives de fonctions :



En revanche, les courbes suivantes représentent bien des fonctions fonctions définies sur $[-1, 1]$:





Définition 2.6 – Soit $f : \mathscr{D} \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbf{R}$.
Si $x \in \mathbf{R}$, on dit que $f(x)$ est **l'image de x par f**.
Si $x \in \mathscr{D}$ et $y \in \mathbf{R}$ sont tels que $y = f(x)$, on dit que x **est un antécédent de y par f.**

> **⚠ Attention !**
> Un élément de $\mathscr{D}$ possède toujours une et une seule image par f, mais en revanche un réel peut avoir plusieurs antécédents par f. Ou aucun.
> Par exemple si $f : x \mapsto x^2$, alors 2 possède une seule image par f, qui vaut $2^2 = 4$. Mais 4 possède deux antécédents par f, qui sont -2 et 2.
> Et -3 ne possède aucun antécédent par f : il n'existe pas de réel x tel que $x^2 = -3$.

Notons que y est l'image de x par f si et seulement si x est **un** antécédent de y par f.

Exemple 2.7

Si f désigne la fonction cosinus, alors $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, de sorte que $\frac{1}{2}$ est l'image de $\frac{\pi}{3}$ par f.
Et donc $\frac{\pi}{3}$ est un antécédent de $\frac{1}{2}$ par la fonction f.
Mais puisque $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, $-\frac{\pi}{3}$ est également un antécédent de $\frac{1}{2}$ par f.

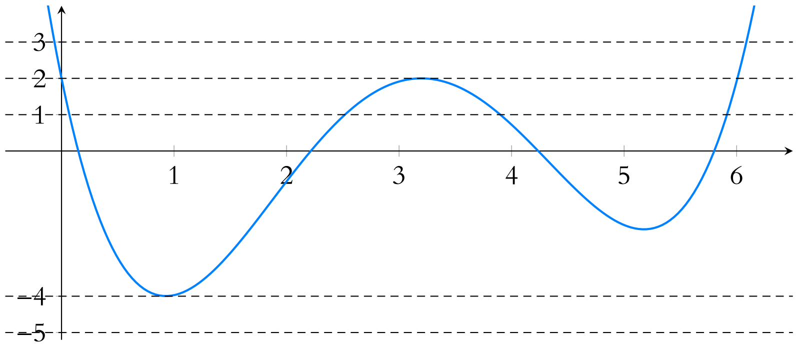
La lecture graphique d'image et d'antécédent doit déjà vous être familière, mais rappelons tout de même rapidement comment procéder :

- l'image de a par f est l'ordonnée de l'unique point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de la droite[4] d'équation $x = a$
- les antécédents de b par f, s'il en existe, sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de la droite[5] d'équation $y = b$.

Sur la figure ci-dessous, 3 possède deux antécédents par f, 2 possède trois antécédents (dont 0 et 6), 1 possède quatre antécédents, -4 possède un unique antécédent qui est -1 et -5 ne possède aucun antécédent.
De plus, 2 est l'image de 0 et de 6, -4 est l'image de -1.

[4] Verticale.

[5] Horizontale.



Définition 2.8 – Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbf{R}$. On appelle **image de** f l'ensemble

$$\operatorname{Im} f = \{f(x), x \in \mathcal{D}\}.$$

Autrement dit, $\operatorname{Im} f$ est l'ensemble des valeurs prises par la fonction f, ou encore l'ensemble des réels qui possèdent un antécédent par f.

2.1.4 Composée de deux fonctions

Définition 2.9 – Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$. On dit que f est **à valeurs dans un ensemble** A si pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \in A$.

On peut alors noter $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$ au lieu de $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$

Autrement dit
De manière équivalente, f est à valeurs dans A si et seulement si $\operatorname{Im} f \subset A$.

Exemple 2.10

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$.
Son dénominateur est de discriminant négatif, donc ne s'annule jamais, de sorte que f est définie sur $\mathbf{R}$, et dérivable car quotient de deux fonctions dérivables.
Sa dérivée est alors donnée pour tout $x \in \mathbf{R}$ par

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x^2+x+1) - (2x+1)(x^2-x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2(x^2-1)}{(x^2+x+1)^2}.$$

Il est alors facile de dresser le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	1

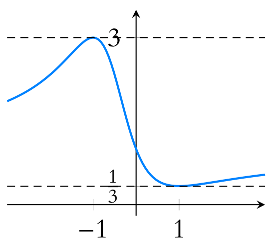


FIGURE 2.1– Le graphe de f.

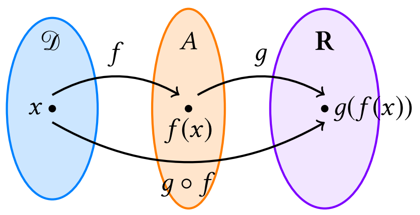
Ainsi, f est à valeurs dans $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$ car pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\frac{1}{3} \leqslant f(x) \leqslant 3$.
Notons qu'il est également vrai que f est à valeurs dans $[0, 4]$ ou dans n'importe quel autre ensemble contenant $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$.

Définition 2.11 – Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}$, à valeurs dans A, et soit g une fonction définie sur A.
On appelle alors **composée de g et f** la fonction notée $g \circ f$, définie sur $\mathscr{D}$ par

$$g \circ f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & g\left(f(x)\right) \end{array} \right.$$

On a donc pour $x \in \mathscr{D}$, $(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right)$.

Notons qu'il est indispensable que f prenne ses valeurs dans l'ensemble de définition de g, afin que $g(f(x))$ soit bien défini.



Exemples 2.12

- Soient $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2+1 \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$. Alors $g \circ f$ est bien définie et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2+1}$.
- Soient $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ et soit $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & e^x \end{array} \right.$.
Alors les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ sont toutes les deux définies sur $\mathbf{R}$, et on a, pour $x \in \mathbf{R}$,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = e^{x^2} \text{ et } (f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right) = (e^x)^2 = e^{2x}.$$

- Il est également possible de composer plus de deux fonctions. Par exemple si

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array} \right. \text{ et } g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$$

alors pour $x \in \mathbf{R}$, on a $(f \circ g \circ f)(x) = (f \circ g)(x+1) = f\left((x+1)^2\right) = (x+1)^2 + 1$ et $(g \circ f \circ f)(x) = g(f(x+1)) = g(x+2) = (x+2)^2$.

Danger ! Nous avons ici un exemple où $f \circ g \neq g \circ f$, on veillera donc bien à l'ordre dans lequel sont écrites les fonctions dans une composée (on dit que la composition n'est pas commutative).
La fonction la plus à droite est celle que l'on applique en premier à la variable.

Proposition 2.13 (Associativité de la composition) : *Si $f : \mathscr{D} \to A$, $g : A \to B$, $h : B \to \mathbf{R}$ sont trois fonctions, alors $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.*

Notation Les parenthèses étant inutiles, on note alors $h \circ g \circ f$ la composée des trois fonctions.

Démonstration. Les deux fonctions $(h \circ g) \circ f$ et $h \circ (g \circ f)$ ont le même ensemble de départ $\mathscr{D}$. Et pour $x \in \mathscr{D}$,

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = h\left((g \circ f)(x)\right) = (h \circ (g \circ f))(x).$$

Donc $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. □

2.1.5 Fonctions monotones

Définition 2.14 (Fonction monotone) – Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}$. On dit que f est :
- **croissante** sur $\mathscr{D}$ si pour tous x, y dans $\mathscr{D}$, si $x \leqslant y$, alors $f(x) \leqslant f(y)$.

▶ **strictement croissante** sur $\mathscr{D}$ si pour tous x, y dans $\mathscr{D}$, si $x < y$, alors $f(x) < f(y)$.
▶ **décroissante** sur $\mathscr{D}$ sur $\mathscr{D}$ si pour tous x, y dans $\mathscr{D}$, si $x \leqslant y$, alors $f(x) \geqslant f(y)$.
▶ **strictement décroissante** sur $\mathscr{D}$ si pour tous x, y dans $\mathscr{D}$, si $x < y$, alors $f(x) > f(y)$.
▶ **monotone** sur $\mathscr{D}$ si elle est soit croissante, soit décroissante.
▶ **strictement monotone** sur $\mathscr{D}$ si elle est soit strictement croissante, soit strictement décroissante.

Autrement dit
Une fonction décroissante est une fonction qui inverse le sens des inégalités.

Remarques. ▶ Une fonction peut n'être ni croissante ni décroissante. Par exemple, la fonction cosinus n'est ni croissante ni décroissante sur $\mathbf{R}$. Mais elle est décroissante sur $[0, \pi]$ et croissante sur $[\pi, 2\pi]$.
▶ Une fonction peut être à la fois croissante et décroissante sur un intervalle I, mais c'est le cas si et seulement si elle est constante.
En revanche, une fonction ne peut pas[6] être à la fois strictement décroissante et strictement croissante.
▶ La fonction f définie sur $\mathbf{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]-\infty, 0[$, elle est décroissante sur $]0, +\infty[$, mais n'est pas décroissante sur $\mathbf{R}^*$, car $-1 < 1$ et pourtant $f(-1) < f(1)$.
Notons que c'est ceci qui justifie qu'on change le sens des inégalités lorsqu'on passe à l'inverse dans une inégalité dont les deux membres sont de même signe, mais pas pour des membres de signes opposés.

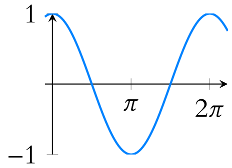


FIGURE 2.2– La fonction cos.

[6] Sauf si son ensemble de définition ne contient qu'un seul nombre.

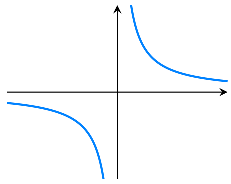


FIGURE 2.3– La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Il est assez facile de se convaincre que la somme de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) est croissante (resp. décroissante), et que si l'une d'entre elles est strictement croissante, alors la somme est strictement croissante.
Le produit de deux fonctions monotones nécessite un peu plus de précautions, car on ne peut multiplier terme à terme que des inégalités dont tous les termes sont positifs. Par conséquent, nous n'énoncerons pas de règle pour la monotonie d'un produit, et il faudra réfléchir au cas par cas.

Proposition 2.15 : *Soient $f : \mathscr{D} \longrightarrow A$ et $g : A \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions monotones sur leurs ensembles de définition. Alors $g \circ f$ est aussi monotone, et elle est :*
- ▶ *croissante si f et g ont même sens de variation*
- ▶ *décroissante si f et g ont des sens de variation opposés.*

Si de plus f et g sont strictement monotones, alors $g \circ f$ est également strictement monotone.

Déjà vu
Si vous n'avez pas encore remarqué l'analogie avec la règle des signes, je vous laisse méditer sur le tableau ci-dessous.

$f \backslash g$	↗	↘
↗	↗	↘
↘	↘	↗

Démonstration. ▶ Si f et g sont croissantes, alors pour $x \leqslant y$ deux éléments de $\mathscr{D}$, on a, par croissance de f, $f(x) \leqslant f(y)$, et donc par croissance de g,

$$g(f(x)) \leqslant g(f(y)) \Leftrightarrow (g \circ g)(x) \leqslant (g \circ f)(y).$$

Donc $g \circ f$ est croissante.
▶ Si f est croissante et g décroissante, alors pour $x \leqslant y$ deux éléments de $\mathscr{D}$, on a $f(x) \leqslant f(y)$ et donc $g(f(x)) \geqslant g(f(y)) \Leftrightarrow (g \circ f)(x) \geqslant (g \circ f)(y)$. Et donc $g \circ f$ est décroissante.
▶ Les deux autres cas se traitent de la même manière.
▶ Enfin, si f et g sont strictement monotones, alors toutes les inégalités larges ci-dessus peuvent être remplacées par des inégalités strictes. □

Exemple 2.16

Le résultat ci-dessus peut souvent épargner un calcul de dérivée si son seul but est de déterminer un sens de variation.

Par exemple, soit $f : \left| \begin{array}{ccc}]-1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{x^3+1}} \end{array} \right.$

Notons alors $f_1 : \left| \begin{array}{ccc}]-1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R}_+^* \\ x & \longmapsto & x^3+1 \end{array} \right.$, $f_2 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R}_+^* \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$ et

$$f_3 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R}_+^* \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \right., \text{ de sorte que } f = f_3 \circ f_2 \circ f_1.$$

Puisque f_1 et f_2 sont croissantes et que f_3 est décroissante, f est décroissante[7] sur $]-1, +\infty[$.

[7] Et même strictement décroissante puisque f_1, f_2, f_3 sont strictement monotones.

⚠ L'inverse d'une fonction croissante f n'est pas toujours décroissante !

C'est le cas seulement si f est de signe constant, car alors $\frac{1}{f}$ est la composée de la fonction inverse (décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$ et sur $\mathbf{R}_-^*$) et de f.

Revenons sur une propriété énoncée au chapitre 1, mais qui n'avait pas été démontrée :

Proposition 2.17 : *Soit $f : \mathscr{D} \to \mathbf{R}$ une fonction strictement croissante (resp. décroissante). Alors quels que soient les éléments a et b dans $\mathscr{D}$, on a $a \leqslant b \Leftrightarrow f(a) \leqslant f(b)$ (resp. $a \leqslant b \Leftrightarrow f(a) \geqslant f(b)$).*

Démonstration. Nous donnons la preuve pour une fonction strictement croissante.
Le sens $a \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b)$ découle directement de la définition de la croissance.
Pour l'implication réciproque, remarquons que si $a > b$, alors $f(a) > f(b)$ par stricte croissance de f.
Et donc si $f(a) \leqslant f(b)$, nécessairement, $a \leqslant b$, d'où l'équivalence annoncée. □

2.1.6 Fonctions paires, impaires, périodiques

Définition 2.18 – Un ensemble $\mathscr{D} \subset \mathbf{R}$ est **symétrique** si pour tout $x \in \mathscr{D}$, son opposé $-x$ appartient encore à $\mathscr{D}$.

Exemples 2.19

- $\mathbf{R} =]-\infty, +\infty[$, $[-2, 2]$ et $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ sont symétriques.
- En revanche, $\mathbf{R}_+$ ne l'est pas car $1 \in \mathbf{R}_+$ mais $-1 \notin \mathbf{R}_+$.

Définition 2.20 – Soit f une fonction définie sur un ensemble symétrique $\mathscr{D}$. On dit que f est

- **paire** si pour tout $x \in \mathscr{D}$, $f(-x) = f(x)$
- **impaire** si pour tout $x \in \mathscr{D}$, $f(-x) = -f(x)$.

Remarque. Si f est impaire, et si $0 \in \mathscr{D}$, alors on a

$$f(0) = f(-0) = -f(0) \Leftrightarrow 2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0.$$

Cela signifie notamment que $\mathscr{C}_f$ contient toujours le point $(0,0)$.

Astuce
Une trivialité qu'il est parfois utile d'avoir à l'esprit : le seul nombre égal à son propre opposé est 0.

Exemples 2.21

- La fonction $x \mapsto x^2$ est paire sur $\mathbf{R}$ car $(-x)^2 = x^2$.
- La fonction $t \mapsto t^3$ est impaire sur $\mathbf{R}$ car $(-t)^3 = -t^3$.
- Plus généralement, pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$, $(-x)^n = (-1)^n x^n$, de sorte que $x \mapsto x^n$ est paire si n est un entier pair et impaire si n est un entier impair.
- La fonction cosinus est paire, la fonction sinus est impaire.
- La fonction $h : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + \dfrac{1}{x^4+1}}}$ est paire.

La raison en est que $f : x \mapsto x^2$ est paire, et que $h = g \circ f$, où $h : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t + \frac{1}{t^2+1}}}$.

Alors il vient $h(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = h(x)$.

Plus généralement

Si f est une fonction paire, alors $g \circ f$ est toujours paire, quelle que soit g.
Ceci ne vaut plus pour les fonctions impaires (je vous laisse vous en convaincre).

⚠ Contrairement aux entiers naturels, une fonction n'est pas soit paire, soit impaire, elle peut tout à fait n'être ni l'une ni l'autre. C'est par exemple le cas de la fonction $f : x \mapsto x^2 - x$, pour laquelle $f(1) = 0 \neq \pm f(-1)$.
Pour prouver qu'une fonction n'est ni paire ni impaire, mieux vaut exhiber un x pour lequel on a $f(-x) \neq \pm f(x)$.
Le fait de ne pas voir que deux quantités sont égales, parce qu'elles sont écrites sous deux formes différentes, ne donne pas le droit d'affirmer qu'elles ne sont pas égales !

Exemple

Les deux nombres

$$\frac{2}{1+\sqrt{5}} \text{ et } \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

sont égaux, mais ça ne saute pas aux yeux !

Par exemple, considérons la fonction $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} \end{array} \right.$.

On a alors $f(-x) = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$, qui ne peut pas être égal à $-f(x)$ pour des raisons de signe, et n'a pas l'air d'être égal à $f(x)$. Donc f ne doit être ni paire, ni impaire.
Mais ce «n'a pas l'air d'être égal» est bien flou, et en réalité

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^{2x}}{e^{2x}} \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^x}{(e^x(1+e^{-x}))^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = f(x)$$

de sorte que, contrairement aux apparences, f est une fonction paire.

Définition 2.22 – Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$ et soit $T \in \mathbf{R}_+^*$.
On dit que f est **périodique de période** T, ou T**-périodique**, si

1. pour tout $x \in \mathscr{D}$, $x + T$ et $x - T$ sont encore dans $\mathscr{D}$
2. pour tout $x \in \mathscr{D}$, $f(x+T) = f(x)$.

On dit alors que T est **une** période de f.

⚠ Il n'y a pas du tout unicité d'une période de f, et c'est bien pour cela que l'on dit **une** période de f et non **la** période de f.
Si T est une période de f, alors $2T, 3T$, et plus généralement tous les kT, $k \in \mathbf{N}$ sont encore des périodes de f, puisque pour tout $x \in \mathscr{D}$,

$$f(x+2T) = f((x+T)+T) = f(x+T) = f(x),\ f(x+3T) = f((x+2T)+T) = f(x+2T) = f(x),\ \text{etc}$$

Exemples 2.23

- Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques.
- Une fonction constante est T-périodique, pour tout $T > 0$.
- La fonction $f : x \mapsto \sin(2x-3)$ est π-périodique puisque

$$f(x+\pi) = \sin(2(x+\pi)-3) = \sin(2x-3+2\pi) = \sin(2x-3) = f(x).$$

- La fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique. En effet, pour $x \in \mathbf{R}$, on a $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$ et donc

$$f(x+1) = x+1-\lfloor x+1 \rfloor = x+1-(\lfloor x \rfloor + 1) = x - \lfloor x \rfloor = f(x).$$

Terminologie

Le réel $x - \lfloor x \rfloor$ est appelé partie fractionnaire de x.
C'est la partie «après la virgule» de x.

Proposition 2.24 : *Si $f : \mathscr{D} \to \mathbf{R}$ est T-périodique, alors pour tout $x \in \mathscr{D}$ et tout $n \in \mathbf{Z}$, $f(x+nT) = f(x)$.*

Démonstration. Par récurrence sur n pour les $n \in \mathbf{N}$.
Et si $n < 0$, il suffit de remarquer que puisque $-n \in \mathbf{N}$, on a

$$f(x+nT) = f(x+nT+(-n)T) = f(x).$$

□

Définition 2.25 – Une fonction $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbf{R}$ est dite **périodique** s'il existe un[8] réel T tel que f soit T-périodique.

[8] Comme mentionné précédemment, s'il existe un tel réel $T > 0$, il en existe une infinité : $2T, 3T, \ldots$

Exemple 2.26

Il n'est pas vrai qu'une fonction périodique possède une période plus petite que toutes les autres.
Considérons par exemple la fonction $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbf{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$
Prouvons que $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}$ est r-périodique, quel que soit le rationnel strictement positif r.
Soit donc $r \in \mathbf{Q}_+^*$, et soit $x \in \mathbf{R}$.
Si $x \in \mathbf{Q}$, alors $x + r \in \mathbf{Q}$, de sorte que $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}(x + r) = 1 = \mathbb{1}_{\mathbf{Q}}(x)$.
Et si $x \notin \mathbf{Q}$, prouvons que $x + r$ est lui aussi irrationnel.
Supposons par l'absurde que $x + r \in \mathbf{Q}$. Alors $x = \underbrace{(x+r)}_{\in \mathbf{Q}} - \underbrace{r}_{\in \mathbf{Q}} \in \mathbf{Q}$, ce qui est absurde.
Donc $x + r \notin \mathbf{Q}$ et par conséquent, $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}(x + r) = 0 = \mathbb{1}_{\mathbf{Q}}(x)$.
Ceci prouve donc bien que $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}$ est r-périodique, pour tout $r \in \mathbf{Q}_+^*$.

Détails
La somme de deux rationnels est encore un rationnel (vous savez mettre deux fractions au même dénominateur !)

⚠ Attention !
La somme de deux rationnels est rationnelle, la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est irrationnelle, mais il n'existe pas de règle générale pour la somme de deux irrationnels : elle est parfois rationnelle, parfois irrationnelle.

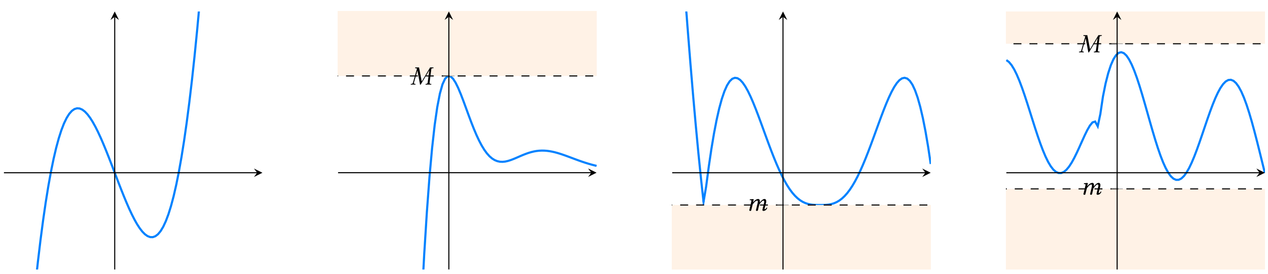
2.1.7 Majorant, minorant, extremum

Définition 2.27 – Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}$. On dit que f est :

- **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout $x \in \mathscr{D}$, $f(x) \leqslant M$. Un tel M est alors appelé un **majorant de** f.
- **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout $x \in \mathscr{D}$, $f(x) \geqslant m$. Un tel m est alors appelé un **minorant de** f.
- **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Graphiquement, une fonction est majorée (respectivement minorée) si et seulement si son graphe est entièrement situé en dessous (resp. au dessus) d'une droite horizontale.
Elle est bornée si et seulement si son graphe est intégralement compris dans une «bande» délimitée par deux droites horizontales.

f non majorée non minorée — f majorée non minorée — f minorée non majorée — f bornée



Notons que si une fonction est majorée, alors elle possède une infinité de majorants. En effet, si pour tout $x \in \mathscr{D}$, $f(x) \leqslant M$, alors pour tout $x \in \mathscr{D}$ et pour tout $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$, $f(x) \leqslant M + \varepsilon$, de sorte que $M + \varepsilon$ est encore un majorant de f. Idem pour les minorants.

Autrement dit
Si M est un majorant de f, alors tout réel supérieur ou égal à M est également un majorant de M.

Exemples 2.28

► La fonction $x \mapsto x^2$ est minorée (par 0) mais n'est pas majorée car elle tend vers $+\infty$ en $+\infty$ (et donc prend des valeurs aussi grandes que l'on veut).
► Plus généralement, pour $k \in \mathbf{N}$, $x \mapsto x^k$ n'est jamais majorée, et elle est minorée

(par 0) si et seulement si k est pair.
► La fonction $x \mapsto 2\cos(3x) + 1$ est bornée car pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$-1 \leqslant 2\cos(3x) + 1 \leqslant 3.$$

Proposition 2.29 : *Soit $f : \mathscr{D} \to \mathbf{R}$. Alors f est majorée (respectivement minorée, bornée) si et seulement si* $\operatorname{Im} f$ *est une partie majorée (resp. minorée, bornée) de* $\mathbf{R}$.

Démonstration. Prouvons-le pour une fonction majorée, la preuve est la même pour une fonction minorée.
Supposons donc f majorée, et soit M un majorant de f.
Alors pour tout $x \in \mathscr{D}$, $f(x) \leqslant M$.
Soit alors $y \in \operatorname{Im} f$. Par définition, il existe $x \in \mathscr{D}$ tel que $y = f(x)$, et donc $y \leqslant M$.
Ainsi, pour tout $y \in \operatorname{Im} f$, $y \leqslant M$, donc $\operatorname{Im} f$ est majorée, et M en est un majorant.

Inversement, si $\operatorname{Im} f$ est majorée par M, alors pour tout $x \in \mathscr{D}$, $f(x) \in \operatorname{Im} f$ et donc $f(x) \leqslant M$.
Donc f est majorée par M. □

Corollaire 2.30 – *Une fonction $f : \mathscr{D} \to \mathbf{R}$ est bornée si et seulement si il existe $K \in \mathbf{R}_+$ tel que pour tout $x \in \mathscr{D}$, $|f(x)| \leqslant K$.*

Autrement dit
f est bornée, si et seulement si la fonction $|f|$ est majorée.

Démonstration. Si un tel K existe, alors pour tout $x \in \mathscr{D}$, $-K \leqslant f(x) \leqslant K$, donc f est minorée (par $-K$) et majorée (par K), donc bornée.

Inversement, supposons que f soit bornée, soit m un minorant de f et M un majorant de f.
Soit $K = \max(|m|, |M|)$. On a alors, pour tout $x \in \mathscr{D}$,

$$-K \leqslant -|m| \leqslant m \leqslant f(x) \leqslant M \leqslant |M| \leqslant K.$$

Rappel
Pour tout réel x,

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x|.$$

Et donc en particulier, $|f(x)| \leqslant K$, de sorte que f est bien bornée. □

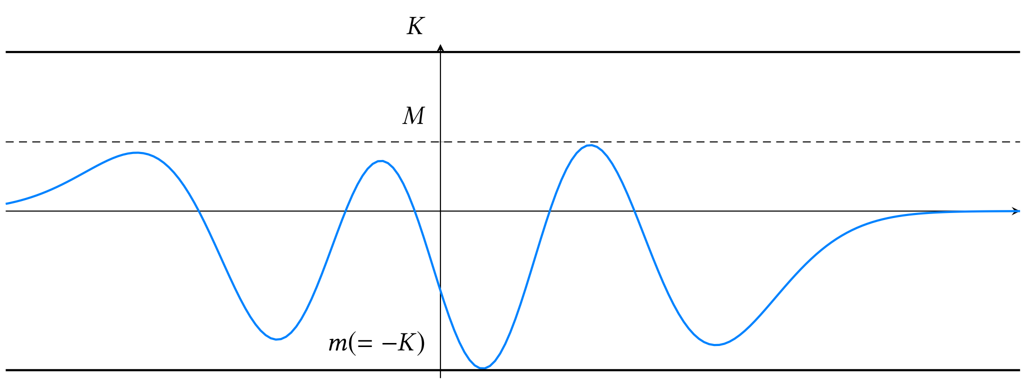


FIGURE 2.4 – Si f est comprise entre m et M, alors elle est comprise entre $-K$ et K. Ici $K = |m|$.

Définition 2.31 – Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}$ et soit $a \in \mathscr{D}$. On dit que f possède :

- un **maximum en** a si pour tout $x \in \mathscr{D}$, $f(x) \leqslant f(a)$.
  Le réel $f(a)$ est alors appelé le maximum de f et on note alors $f(a) = \max\limits_{x \in \mathscr{D}} f(x)$ ou $f(a) = \max\limits_{\mathscr{D}} f$.
- un **minimum en** a si pour tout $x \in \mathscr{D}$, $f(x) \geqslant f(a)$.
  Le réel $f(a)$ est alors appelé le minimum de f et on note alors $f(a) = \min\limits_{x \in \mathscr{D}} f(x)$ ou $f(a) = \min\limits_{\mathscr{D}} f$.
- un extremum en a si f possède soit un maximum, soit un minimum en a.

Remarques. ▸ Attention à la terminologie : on ne confondra pas le maximum (= la plus grande valeur prise par f) avec le point où ce maximum est atteint.
Par exemple, la fonction sin possède un maximum qui vaut 1, atteint en $\dfrac{\pi}{2}$. Mais ce maximum est aussi atteint en $\dfrac{5\pi}{2}$ et en $\dfrac{9\pi}{2}$.
De manière générale, un maximum ou un minimum, s'il existe, est unique[9], mais peut être atteint en plusieurs points.
▸ Si f possède un maximum, alors elle est majorée, et $f(a)$ est un majorant de f.
▸ Une fonction majorée/minorée n'admet pas forcément de maximum/minimum.
Par exemple $f : x \mapsto e^x$ est minorée par 0 (car pour tout x, $e^x \geqslant 0$), mais elle n'admet pas de minimum.
En effet, elle est strictement croissante, et donc si elle admettait un minimum en a, alors on aurait, pour tout $x < a$, $f(x) < f(a)$ contredisant la définition d'un minimum.

[9] Il y a une seule valeur plus grande que les autres.

2.2 Tracé du graphe d'une fonction

Dans cette partie, on considère une fonction $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbf{R}$ et on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
Autrement dit, un point de coordonnées (x, y) est dans $\mathscr{C}_f$ si et seulement si $x \in \mathscr{D}$ et $y = f(x)$.
Pour ne pas trop alourdir la rédaction, nous identifions dans la suite un point avec le couple de ses coordonnées.

Rappel
Un repère orthogonal est un repère tel que $\vec{i}$ et $\vec{j}$ soient de directions perpendiculaires, mais pas nécessairement de même norme (si c'est le cas, on parle de repère orthonormé).

2.2.1 Transformations d'une fonction et effet sur le graphe

On s'intéresse alors à l'effet de certaines transformations appliquées à f sur la courbe $\mathscr{C}_f$.

Proposition 2.32 : *Soit $a \in \mathbf{R}$. Alors*

1. *la courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(x) + a$ s'obtient à partir de $\mathscr{C}_f$ par une translation de vecteur $a\vec{j}$.*
2. *la courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(x + a)$ s'obtient à partir de $\mathscr{C}_f$ par une translation de vecteur $-a\vec{i}$.*

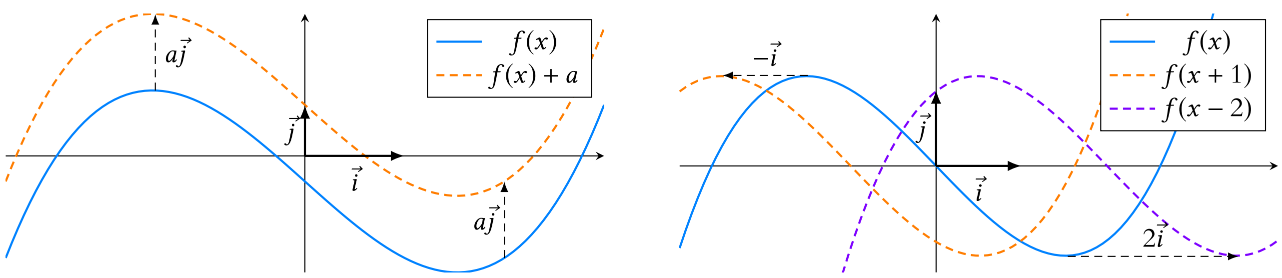


FIGURE 2.5 – Les graphes de $x \mapsto f(x) + a$ et $x \mapsto f(x + a)$ s'obtiennent en translatant $\mathscr{C}_f$.

Démonstration. 1. Notons $g : x \mapsto f(x) + a$. Alors le point de coordonnées (x, y) est dans $\mathscr{C}_f$ si et seulement si

$$y = f(x) \Leftrightarrow y + a = f(x) + a = g(x) \Leftrightarrow (x, y + a) \in \mathscr{C}_g.$$

Mais $(x, y + a)$ est le translaté par $a\vec{j}$ de (x, y).

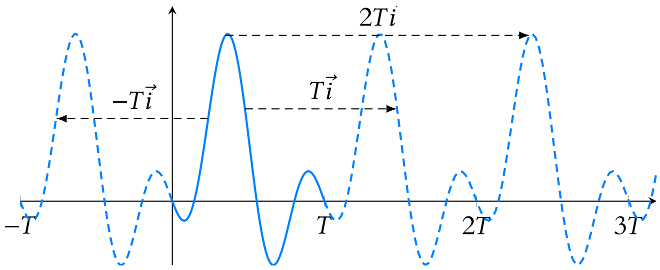
2. Notons $g : x \mapsto f(x + a)$. Alors

$$(x, y) \in \mathscr{C}_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow y = f(x - a + a) = g(x - a) \Leftrightarrow (x - a, y) \in \mathscr{C}_g.$$

Mais $(x - a, y)$ est le translaté par $-a\vec{i}$ de (x, y)

□

Corollaire 2.33 – *Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est T-périodique, alors il suffit de connaître son graphe sur un ensemble de longueur T (par exemple $[0, T]$ ou $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$), puis de réaliser des translations de vecteurs $kT\vec{i}$, $k \in \mathbf{Z}$.*



Proposition 2.34 : *Soit $a \in \mathbf{R}^*$. Alors*

1. *le graphe de $x \mapsto af(x)$ s'obtient à partir de $\mathscr{C}_f$ par une dilatation suivant le vecteur $\vec{j}$ et de rapport a.*
2. *le graphe de $x \mapsto f(ax)$ s'obtient à partir de $\mathscr{C}_f$ par une dilatation de vecteur $\vec{i}$ et de rapport $\frac{1}{a}$.*

Dilater $\mathscr{C}_f$ suivant le vecteur $\vec{j}$ d'un rapport a signifie que pour chaque point de $\mathscr{C}_f$, on laisse sa première coordonnée inchangée, et on multiplie la seconde par a.

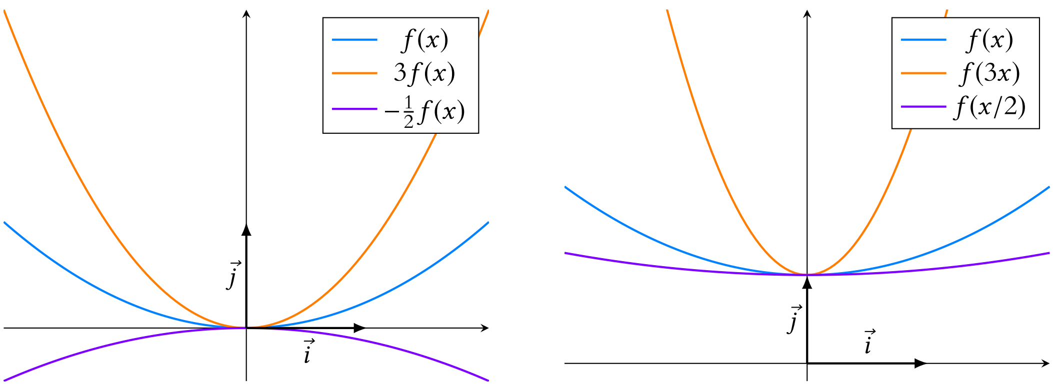


Figure 2.6 – Le graphe de $x \mapsto af(x)$ s'obtient à partir de $\mathscr{C}_f$ par dilatation verticale.

Démonstration. Le premier point est évident.

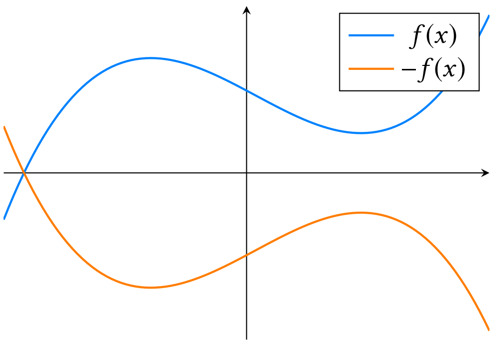
Pour le second point, notons $g : x \mapsto f(ax)$. Alors on a

$$(x, y) \in \mathscr{C}_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow y = f\left(a\frac{x}{a}\right) = g\left(\frac{x}{a}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a}, y\right) \in \mathscr{C}_g.$$

Or $\left(\frac{x}{a}, y\right)$ est le dilaté de (x, y) suivant le vecteur $\vec{\imath}$ et de rapport $\frac{1}{a}$. □

En particulier, le graphe de $x \mapsto -f(x)$ s'obtient à partir de $\mathscr{C}_f$ par une symétrie par rapport à l'axe des abscisses[10], et le graphe de $x \mapsto f(-x)$ s'obtient à partir de $\mathscr{C}_f$ par une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

[10] Cette symétrie étant la dilatation de vecteur $\vec{\imath}$ et de rapport -1.



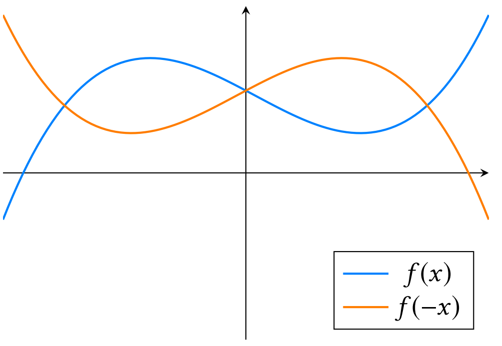


FIGURE 2.7 – Les graphes de $x \mapsto -f(x)$ et $x \mapsto f(-x)$ s'obtiennent à partir de $\mathscr{C}_f$ par des symétries axiales.

Enfin, le graphe de $x \mapsto -f(-x)$ s'obtient à partir de $\mathscr{C}_f$ par une symétrie centrale de centre O (l'origine du repère). En effet, si on note $g : x \mapsto -f(-x)$, alors

$$(x, y) \in \mathscr{C}_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow -y = -f(-(-x)) = g(-x) \Leftrightarrow (-x, -y) \in \mathscr{C}_g.$$

Mais $(-x, -y)$ est le symétrique de (x, y) par rapport à O.

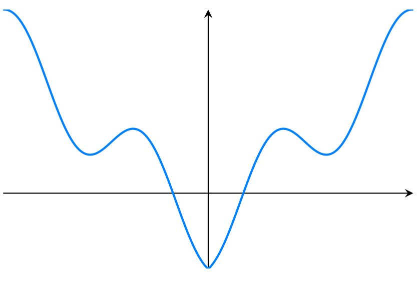
Remarque Cette symétrie centrale est d'ailleurs la composée de la symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses et de la symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées.

Corollaire 2.35 – *Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction définie sur un ensemble symétrique. Alors*

1. *si f est paire, $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe $(O, \vec{\jmath})$*
2. *si f est impaire, $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine.*

Démonstration. Si f est paire, alors f et $x \mapsto f(-x)$ sont égales, donc ont le même graphe. Or le graphe de $x \mapsto f(-x)$ est le symétrique de $\mathscr{C}_f$ par rapport à l'axe des abscisses.
On raisonne de même dans le cas où f est impaire en notant que f et $x \mapsto -f(-x)$ sont égales. □

Par conséquent, pour une fonction paire ou impaire, il suffit de tracer son graphe sur $\mathscr{D} \cap [0, +\infty[$, le reste de la courbe s'en déduit par symétrie.



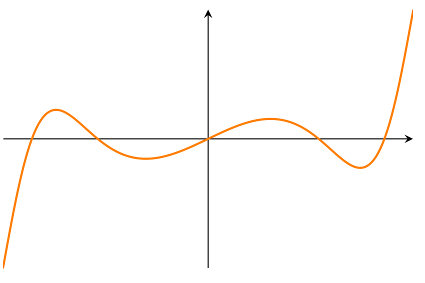


FIGURE 2.8 – Une fonction paire et une fonction impaire.

2.2.2 Réduction du domaine d'étude

Lorsqu'on souhaite étudier une fonction $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbf{R}$, en particulier lorsqu'on cherche à tracer son graphe, on commence par réduire autant que faire se peut le domaine sur lequel on l'étudie.
Autrement dit, plutôt que de l'étudier sur $\mathscr{D}$, on essaie[11] de se ramener à un intervalle plus petit en utilisant les éventuelles symétries que peut présenter $\mathscr{C}_f$.

[11] Rien ne dit que ce soit toujours possible !

1. Si f est périodique de période T, alors on se contente de l'étudier sur un intervalle de longueur T. Cela peut être $[0, T]$, mais on préfère généralement $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, qui a l'avantage d'être symétrique.
Nous savons alors qu'une fois le graphe de f tracé sur cet intervalle, il nous suffira de le translater pour obtenir $\mathscr{C}_f$.
2. Si f est paire ou impaire, on restreint l'étude à $\mathscr{D} \cap [0, +\infty[$, il nous suffira alors d'effectuer une symétrie (axiale ou centrale).

Méthode
Pour déterminer si une fonction f est paire ou impaire, il faut calculer $f(-x)$, et voir si c'est égal (ou non) à $\pm f(x)$.

Exemple 2.36

Considérons la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4\sin(x)}{2-\cos(2x)}$.
Alors il est clair que f est 2π-périodique, donc il suffit de tracer son graphe sur un intervalle de longueur 2π, puis de translater le graphe ainsi obtenu. Par exemple, on peut se contenter d'étudier f sur $[-\pi, \pi]$.
Mais f est impaire[12], et donc il suffit de tracer le graphe sur $[0, \pi]$, et d'effectuer une symétrie par rapport à O.
La fonction f est dérivable sur $[0, \pi]$, et on a pour tout $x \in [0, \pi]$,

$$f'(x) = 4\frac{\cos(x)(2-\cos(2x)) - \sin(x)2\sin(2x)}{(2-\cos(2x)^2)}.$$

Profitons-en pour rappeler quelques formules de trigonométrie :

$$\sin(2x) = \sin(x+x) = 2\sin(x)\cos(x) \text{ et } \cos(2x) = \cos(x+x) = 1 - 2\sin^2(x).$$

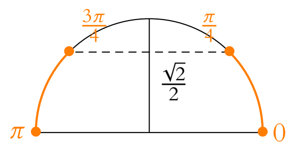
Et donc il vient

$$\begin{aligned}\cos(x)(2-\cos(2x)) - \sin(x)2\sin(2x) &= \cos(x)(2-\cos(2x)) - 4\sin(x)^2\cos(x)\\ &= \cos(x)\left(2 - (1-2\sin^2(x)) - 4\sin^2(x)\right)\\ &= \cos(x)\left(1-2\sin^2(x)\right).\end{aligned}$$

Et donc, pour $x \in [0, \pi]$, on a

$$1 - 2\sin^2(x) > 0 \Leftrightarrow \sin^2(x) < \frac{1}{2}.$$

Mais sur $[0, \pi]$, $\sin(x) \geqslant 0$ et donc $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \sin(x) < \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x \in [0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi]$.

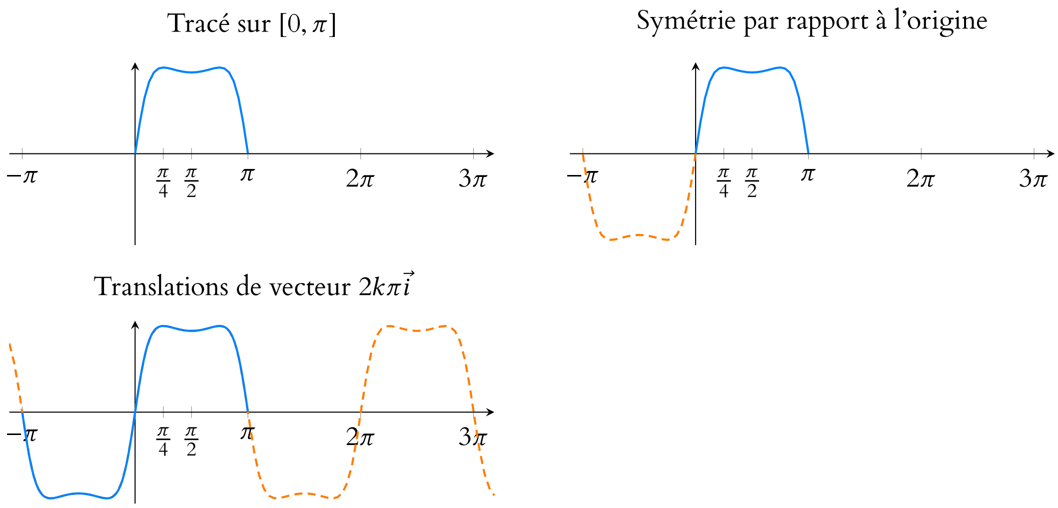


Donc le tableau de variations de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est donné par :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$\cos(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$1-2\sin^2(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	0

Voici donc le résumé des étapes de la construction du graphe de f :

[12] Car le numérateur est impair et le dénominateur est pair.

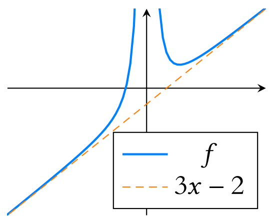


2.2.3 Asymptotes

Une asymptote à $\mathscr{C}_f$ est une droite qui «ressemble au voisinage de l'infini» à $\mathscr{C}_f$.

Définition 2.37 – Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]A, +\infty[$ (resp $-] - \infty, A]$).
La droite D d'équation $y = ax + b$ est appelée une **asymptote** à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ (resp . $-\infty$) si $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax - b) = 0$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - ax - b) = 0$.
Si $a = 0$, on dit que D est une **asymptote horizontale** à $\mathscr{C}_f$, sinon on parlera **d'asymptote oblique.**

Exemple 2.38



Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 3x - 2 + \dfrac{2}{x^2} \end{array} \right.$.
Alors la droite d'équation $y = 3x - 2$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ car

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - 3x + 2) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Cette même droite est également asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$, par le même calcul.

Et f possède la droite horizontale d'équation $y = b$ comme asymptote si et seulement si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$.
En revanche, si f admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} ax + b = \pm\infty$, et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (ax + b)) + (ax + b) = \pm\infty$.

Autrement dit
Il n'y a d'asymptote horizontale que si f possède une limite finie.

Proposition 2.39 : *La droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ si et seulement si* $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = b \end{cases}$.

Démonstration. Si la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$, alors

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x) - ax - b}{x} + \frac{ax + b}{x} \right) = \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - ax - b}{x}}_{=0} + \lim_{x\to+\infty} a + \frac{b}{x} = a.$$

Et bien entendu, $\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax = b$.

Et inversement, si $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = b$, alors $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax - b) = 0$. □

Remarque. Par unicité de la limite, les formules ci-dessus prouvent qu'une asymptote, si elle existe, est unique.

La proposition précédente nous fournit une méthode pour déterminer les asymptotes : on commence par déterminer l'éventuel coefficient directeur a en calculant la limite de $\frac{f(x)}{x}$, puis, le cas échéant, l'éventuelle ordonnée à l'origine est donnée par la limite[13] de $f(x) - ax$.

[13] Si elle existe et est finie.

Exemples 2.40

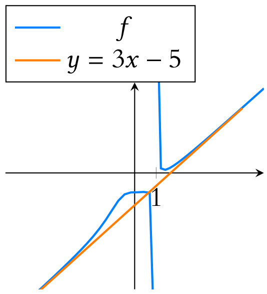
► Soit $f : \left| \begin{array}{ccc}]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{3x^4 - 5x^3 + 3}{x^3 - 1} \end{array} \right.$. Alors pour $x \neq 1$,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{3x^4 - 5x^3 + 3}{x^4 - x} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 3.$$

Donc une éventuelle asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$ est de coefficient directeur 3. Et alors

$$f(x) - 3x = \frac{3x^4 - 5x^3 + 3 - 3x^4 + 3x}{x^3 - 1} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} -5.$$

Et donc $\mathscr{C}_f$ admet pour asymptote, aussi bien au voisinage de $-\infty$ qu'au voisinage de $+\infty$, la droite d'équation $y = 3x - 5$.



► Soit $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 2x + \ln(x) \end{array} \right.$.

Alors $\frac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.

Mais $f(x) - 2x = \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $\mathscr{C}_f$ ne possède pas d'asymptote au voisinage de $+\infty$.

Autrement dit
$\mathscr{C}_f$ s'éloigne «à l'infini» de toute droite de coefficient directeur 2.

2.3 FONCTIONS CONTINUES, FONCTIONS DÉRIVABLES

Dans cette partie, on considère une fonction f définie sur un intervalle I.
Tous les résultats qui suivent sont admis pour l'instant (et pour la plupart ont déjà été rencontrés au lycée), mais seront démontrés proprement plus tard dans l'année.

2.3.1 Continuité

La redéfinition précise des limites et de la continuité fera l'objet d'un chapitre ultérieur, nous nous contentons donc de l'intuition de limite, et des propriétés déjà connues.

Définition 2.41 – Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et soit $a \in I$. On dit que f est **continue en** a si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
Si f est continue en tout point $a \in I$, on dit que f **est continue sur** I.

L'intuition d'une fonction continue est que son graphe se trace «sans lever la main», l'exemple type de fonction non continue étant la partie entière.

Le point suivant, relativement intuitif, sera prouvé[14] dans un chapitre ultérieur, mais nous l'utiliserons dès à présent :

[14] Ainsi que sa réciproque.

Proposition 2.42 : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue en $a \in I$. Alors pour toute suite $(u_n)_n$ d'éléments de I telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$, on a $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$.*

Comme en terminale, nous admettons qu'une fonction dérivable sur I est continue sur I, si bien que toutes les fonctions habituelles[15] sont continues sur leur ensemble de définition.

[15] Les polynômes, le logarithme, l'exponentielle, les fonctions sin et cos.

Définition 2.43 – Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a, b]$ ou $]a, b[$ ou $]a, +\infty[$.
On dit que f est **prolongeable par continuité en** a si f admet une limite **finie** en a.
On appelle alors prolongement par continuité de f en a la fonction $\widetilde{f}$ définie sur $[a, b]$ (ou $[a, b[$, ou $[a, +\infty[$) par

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \lim\limits_{t \to a^+} f(t) & \text{si } x = a \\ f(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction ainsi prolongée est alors nécessairement continue en a.

En pratique

On note souvent encore f (au lieu de $\widetilde{f}$) la fonction prolongée.

⚠ On ne parlera de prolongement par continuité qu'en un réel, pas en $\pm\infty$. En effet, $-\infty$ et $+\infty$ ne sont pas des réels, il n'est donc pas question d'écrire $f(+\infty)$ ou $f(-\infty)$.

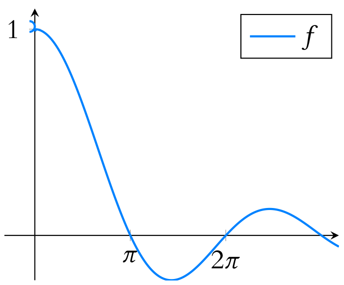
Exemple 2.44

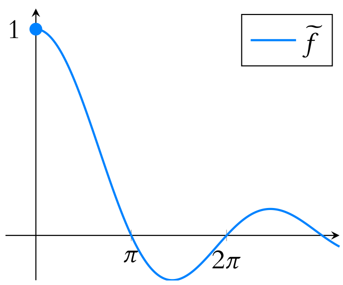
Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\sin x}{x} \end{array} \right.$.

On a alors $f(x) = \dfrac{\sin x - \sin(0)}{x - 0} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} \sin'(0) = \cos(0) = 1$.

Donc la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en une fonction $\widetilde{f}$, définie sur $\mathbf{R}_+$ par

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sin x}{x} & \text{sinon} \end{cases}$$





2.3.2 Rappels sur la dérivée

Définition 2.45 – Soit $a \in I$. On appelle **taux d'accroissement de** f **en** a la fonction

$$\tau_a : \left| \begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array} \right. .$$

Si $\lim\limits_{x \to a} \tau_a(x)$ existe et est finie[16], on dit que f est **dérivable** en a, et on note

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \tau_a(x).$$

Si f est dérivable en a, quel que soit $a \in I$, on dit que f est dérivable sur I, et on appelle fonction dérivée de f la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$.

[16] C'est-à-dire ne vaut pas $\pm\infty$.

Exemple 2.46

La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

En effet, pour $h \neq 0$, on a $\dfrac{|h|-|0|}{h-0} = \dfrac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{si } h > 0 \\ -1 & \text{si } h < 0 \end{cases}$

Et donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{|h|-|0|}{h-0}$ n'existe pas car $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{|h|-|0|}{h} = -1$ et $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{|h|-|0|}{h} = 1$.

Intuition
Le graphe de la valeur absolue présente en 0 un point anguleux, et donc n'y admet pas de tangente.

Remarques. ▸ La limite définissant la dérivée peut aussi s'écrire, avec le changement de variable $x = a + h$

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

▸ Notons que $\tau_a(x)$ est le coefficient directeur de la droite qui relie les deux points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses a et x.
Et donc sa limite, si elle existe, doit être le coefficient directeur de ce que l'on a envie d'appeler la tangente, c'est-à-dire la droite qui «ressemble le plus à $\mathscr{C}_f$ autour de a».

Terminologie
Une droite reliant deux points de $\mathscr{C}_f$ est appelée une corde.

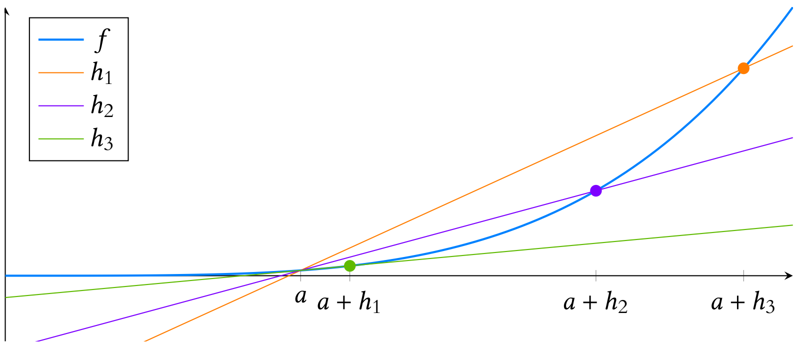


FIGURE 2.9 – Trois cordes, avec $h_1 > h_2 > h_3$. Assurément, c'est la dernière qui ressemble le plus à ce qu'on a envie d'appeler la tangente à $\mathscr{C}_f$ en a.

Définition 2.47 – Si f est dérivable en a, on appelle **tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse** a la droite de coefficient directeur $f'(a)$ et qui passe par $(a, f(a))$.

Si f est une fonction dérivable en a, alors la tangente en $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est la droite d'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Exercice
Savez-vous retrouver cette formule à partir de la définition de la tangente ?

2.3.3 Dérivée et monotonie

Proposition 2.48 : *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.*

1. *f est croissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$.*
2. *f est décroissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$.*

⚠ Il est **indispensable** que I soit un intervalle.
Par exemple, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbf{R}^*$, et pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, on a $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$.
Pourtant, nous avons déjà mentionné précédemment que f n'est pas décroissante sur $\mathbf{R}^*$.
Le problème vient évidemment du fait que $\mathbf{R}^*$ n'est pas un intervalle[17].
En revanche, $\mathbf{R}_+^*$ et $\mathbf{R}_-^*$ sont des intervalles, sur lesquels f est décroissante puisque sa dérivée y est négative.

[17] Il a un «trou» en 0.

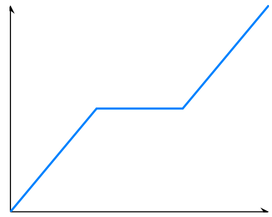
Le résultat ci-dessus peut même être précisé :

Proposition 2.49 : *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si f' est positive (respectivement négative) sur I et ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur I, alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.*

Remarque
Ceci inclus évidemment le cas où f' est strictement positive ou strictement négative.

Démonstration. Lui aussi admis pour l'instant. □

⚠ Si on enlève l'hypothèse de finitude du nombre de points d'annulation de la dérivée, alors ce résultat est faux. Je vous laisse vous en convaincre sur le dessin ci-contre.



Corollaire 2.50 – *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors f est constante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.*

Démonstration. Il est évident que si f est constante, alors sa dérivée est nulle.
Réciproquement, si f' est nulle, alors en particulier, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$, donc f est croissante sur I.
De même, f est décroissante sur I.
Ceci signifie donc que pour tout $x, y \in I$, si $x \leqslant y$, alors on a à la fois $f(x) \leqslant f(y)$ et $f(x) \geqslant f(y)$. C'est donc que $f(x) = f(y)$, et donc f est constante. □

Corollaire 2.51 – *Si F_1 et F_2 sont deux primitives d'une même fonction f sur un intervalle I, alors elles diffèrent d'une constante. Autrement dit, il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $F_2(x) = F_1(x) + \lambda$.*

Autrement dit
Deux fonctions de même dérivée ne sont pas nécessairement égales, mais elles diffèrent d'une constante.

Démonstration. Soit $g : x \mapsto F_2(x) - F_1(x)$. Alors g est dérivable et pour tout $x \in I$,

$$g'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Et donc g est constante : il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in I$,

$$g(x) = \lambda \Leftrightarrow F_2(x) = F_1(x) + \lambda.$$

□

Exemples 2.52

▸ Soit $f : x \mapsto x^3$. Alors f est dérivable et $f' : x \mapsto 3x^2$.
Donc f' est positive, et ne s'annule qu'en 0.
Donc f est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.
▸ Soit $g : x \mapsto x + \cos(x)$.
Alors g est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g'(x) = 1 - \sin(x) \geqslant 0$.
Donc déjà g est croissante sur $\mathbf{R}$. De plus, on a

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Donc g' s'annule une infinité de fois sur $\mathbf{R}$: le résultat précédent ne s'applique pas. Mais attention : nous n'avons pas dit que sa réciproque était vraie, il n'est pas question d'en déduire que g n'est pas strictement croissante !
De fait, si $a < b$ sont deux réels, alors, sur le segment $[a, b]$, g' ne s'annule qu'un nombre fini[18] de fois.
Et donc g est strictement croissante sur $[a, b]$.
On en déduit donc que $g(a) < g(b)$. Ceci étant vrai quels que soient les réels a et b vérifiant $a < b$, nous venons de prouver que g est strictement croissante sur $\mathbf{R}$ tout entier, quand bien même sa dérivée s'annule une infinité de fois.

[18] Éventuellement nul.

2.3.4 Dérivées et opérations

Toutes les formules qui suivent ont déjà été rencontrées au lycée, et seront bientôt démontrées.

Théorème 2.53 : *Soient u et v sont deux fonctions dérivables sur I, alors*

1. *pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda u + v$ est dérivable et pour tout $x \in I$,*
$$(\lambda u + v)'(x) = \lambda u'(x) + v'(x).$$
2. *$u \times v$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,*
$$(u \times v)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$
3. *si u ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{u}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,*
$$\left(\frac{1}{u}\right)'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2}.$$
4. *si v ne s'annule pas sur I, $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,*
$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}.$$

Exemples 2.54

► Soit $f : x \mapsto x\ln(x) - x$.
Alors f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ car les fonctions $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto \ln(x)$ le sont, et que $f = uv - u$.
On a alors, pour $x \in \mathbf{R}_+^*$,
$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - u'(x) = \ln(x) + x\frac{1}{x} - 1 = \ln(x).$$

À connaître
Nous venons donc de trouver une primitive de la fonction ln, que nous reverrons prochainement !

► $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 1}$.
Si on pose $u : x \mapsto x^2 - 4x + 3$ et $v : x \mapsto x^2 + 1$, alors u et v sont dérivables sur $\mathbf{R}$ et v ne s'y annule pas.
Donc f est dérivable sur $\mathbf{R}$ car quotient de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a
$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{(2x-4)(x^2+1) - (x^2-4x+3)2x}{(x^2+1)^2} = 4\frac{x^2 - x - 1}{(x^2+1)^2}.$$
Ainsi, $f'(x)$ est du signe de $x^2 - x - 1$. Or il s'agit d'un polynôme de degré 2, de discriminant égal à $\Delta = (-1)^2 - 4(-1) = 5$, qui possède donc deux racines qui sont
$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$
Enfin, on a
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1.$$

Méthode
Pour étudier la limite d'un quotient de polynômes en $\pm\infty$, on factorise le numérateur et le dénominateur par leurs termes de plus haut degré.

On prouve de même que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.
Et donc le tableau de variation de f est donné par

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	1

La formule qui suit a elle aussi été rencontrée au lycée et sera prouvée plus tard.

Théorème 2.55 (Dérivée d'une composée) : *Soient I et J deux parties de $\mathbf{R}$, et soient $f : I \longrightarrow J$ et $g : J \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions dérivables.*
Alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$,

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times (g' \circ f)(x) = f'(x) \times g'(f(x)).$$

Exemple 2.56

Soit $f : x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$. Alors f est définie sur $[-1, 1]$, puisqu'il s'agit de la composée de $u : x \mapsto x^2 - 1$ et de $v : x \mapsto \sqrt{x}$.
En revanche, v, bien que définie sur $\mathbf{R}_+$, n'est dérivable que sur $\mathbf{R}_+^*$.
Et donc nous ne pouvons affirmer que f n'est dérivable que là où u ne s'annule pas, c'est-à-dire sur $]-1, 1[$.
Et alors $f'(x) = u'(x)v'(u(x)) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

⚠ Attention ! Ceci ne prouve pas que f n'est pas dérivable en -1 ou en 1, le théorème précédent ne dit rien au sujet de cette dérivabilité.

Notons en particulier que si f est une fonction dérivable, alors pour tous réels a et b, la fonction $g : x \mapsto f(ax+b)$ est dérivable sur son ensemble de définition, avec $g' : x \mapsto af'(ax+b)$.
En effet, on a $g = f \circ h$, où h est la fonction affine[19] $x \mapsto ax + b$.

[19] Donc dérivable.

Corollaire 2.57 – *Soit u une fonction dérivable sur I. Alors*

1. *pour $n \in \mathbf{N}$, la fonction u^n est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $(u^n)'(x) = nu'(x)u(x)^{n-1}$*
2. *plus généralement, pour $n \in \mathbf{Z}$, si u^n est définie[20] sur I, alors elle y est dérivable et $(u^n)'(x) = nu'(x)u^{n-1}(x)$.*
3. *la fonction e^u est dérivable sur I et $(e^u)'(x) = u'(x)e^{u(x)}$*
4. *si u ne s'annule pas sur I, $\ln(|u|)$ est dérivable, et pour tout $x \in I$, $(\ln|u|)'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.*

[20] Le seul cas éventuellement problématique est celui où $n < 0$, auquel cas il faut que u ne s'annule pas sur I.

Démonstration. Il s'agit d'appliquer la formule $(v \circ u)'(x) = u'(x)v'(u(x))$ où v est successivement la fonction $t \mapsto t^n$, $t \mapsto e^t$ et $t \mapsto \ln t$.
Détaillons tout de même le dernier point.
Puisque u est dérivable sur I, elle y est continue. Et elle est donc de signe constant. En effet, si elle changeait de signe sur I, par le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annulerait en au moins un point, ce qui n'est pas le cas par hypothèse.
Donc soit f est strictement positive sur I, et alors $\ln(|u|) = \ln(u)$, ce qui permet d'appliquer la formule pour la dérivée d'une composée.
Soit elle est strictement négative sur I, et alors $\ln(|u|) = \ln(-u)$.
Mais alors $\ln(-u)$ est dérivable par composition de fonctions dérivables, avec pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$(\ln|u|)'(x) = (\ln(-u))'(x) = \frac{-u'(x)}{-u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

□

Exemple 2.58

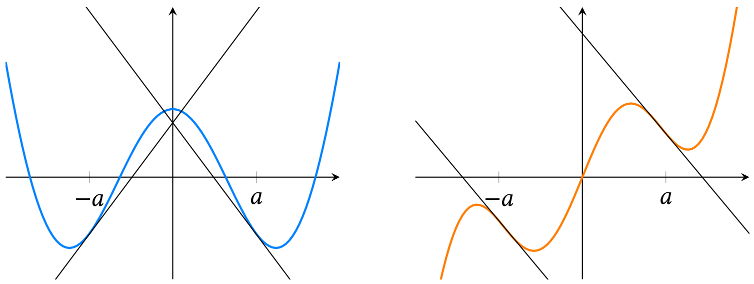
La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{(\ln(x^2+1))^4}$ est dérivable sur $\mathbf{R}$.
En effet, si on pose $u : x \mapsto x^2+1$, alors u est dérivable sur $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$ et $f = (\ln(u))^{-4}$.
Notons alors $g = \ln(u)$ qui est dérivable sur $\mathbf{R}$, avec $g'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{2x}{x^2+1}$.
Et donc $f = g^{-4}$ est dérivable avec

$$f'(x) = -4g'(x)g(x)^{-5} = \frac{-8x}{x^2+1}(\ln(x^2+1))^{-5} = \frac{-8x}{(x^2+1)(\ln(x^2+1))^5}.$$

Rédaction Même quand vous dérivez une fonction compliquée, inutile de faire figurer tous les calculs intermédiaires sur votre copie, seul le résultat compte (et il a donc intérêt à être bon).
Donc ici il ne serait pas utile de nommer u ou g.

Corollaire 2.59 – *Si f est une fonction paire (respectivement impaire) dérivable, alors sa dérivée est impaire (resp. paire).*

Démonstration. Supposons f paire. Alors pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = f(-x)$. En dérivant cette relation, il vient $f'(x) = -f'(-x)$.
Et donc en particulier, $f'(-x) = -f'(x)$, de sorte que f' est impaire.
On raisonne de même si f est impaire.
Je vous laisse réfléchir à la manière dont se voit le résultat sur les figures ci-dessous, où sont représentées des tangentes de fonctions paires/impaires.



□

Proposition 2.60 : *Si $f : \mathcal{D} \to \mathbf{R}$ est dérivable et T-périodique, alors f' est également T-périodique.*

Démonstration. Pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x+T) = f(x)$, donc par dérivation, $f'(x+T) = f'(x)$, si bien que f' est T-périodique. □

2.3.5 Dérivées d'ordre supérieur

Il arrive fréquemment qu'une fonction f dérivable possède une dérivée qui est elle-même dérivable.
La dérivée de f' est alors appelée la **dérivée seconde** de f, et on la note f''.
Mais cette dérivée seconde peut elle aussi être dérivable, et ainsi de suite.

Définition 2.61 – Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On note alors $f^{(0)} = f$.
Ensuite, pour tout $k \in \mathbf{N}$, si $f^{(k)}$ est bien définie, et qu'elle est dérivable, alors on note $f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'$.
Si $f^{(n)}$ existe, on dit que f est n **fois dérivable**, et la fonction $f^{(n)}$ est appelée **dérivée** $n^{\text{ème}}$ de f, ou dérivée d'ordre n de f.

Remarques. ▸ f est dérivable si et seulement si elle est une fois dérivable.
▸ Si f est n fois dérivable, alors elle est $n-1$ fois dérivable, et donc $n-2$ fois dérivable, etc, deux fois dérivable, dérivable.
Au contraire, si $f^{(n)}$ n'existe pas, alors aucune des dérivées d'ordre supérieur à n n'existe.
▸ On note toujours f' au lieu de $f^{(1)}$, et on note généralement f'' au lieu de $f^{(2)}$.

Exemples 2.62

▸ La fonction valeur absolue n'est pas dérivable sur $\mathbf{R}$, donc ne possède de dérivée $n^{\text{ème}}$ pour aucun $n \geqslant 1$.
▸ Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, alors $f'(x) = 2ax + b$, qui est encore dérivable.
Donc f est deux fois dérivable, et $f''(x) = 2a$. Étant constante, f'' est encore dérivable, et donc $f^{(3)}(x) = 0$.
Une récurrence rapide prouve alors que pour tout $n \geqslant 3$, f est n fois dérivable et $f^{(n)}$ est la fonction nulle.
▸ Si f désigne la fonction exponentielle, alors il est bien connu que $f' = f$. Et donc f' est dérivable, et $f'' = f' = f$.
Donc f'' est dérivable et $f^{(3)} = f' = f$, etc : pour tout $n \in \mathbf{N}$, f est n fois dérivable et $f^{(n)} = f$.

2.4 Introduction à la notion de bijection

2.4.1 Définition, premières propriétés

Définition 2.63 – Soient I et J deux parties de $\mathbf{R}$, et soit $f : I \longrightarrow J$. On dit que f réalise une **bijection de I sur J** si tout élément de J admet un unique antécédent par f.
Autrement dit si pour tout $y \in J$, il existe un unique $x \in I$ tel que $y = f(x)$.
On note alors f^{-1} la fonction définie sur J et à valeurs dans I qui à $y \in J$ associe son unique antécédent par f.
Autrement dit, pour $x \in I$ et $y \in J$, $x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$.
La fonction f^{-1} est alors appelée **bijection réciproque** de f.

⚠ Attention !
L'ensemble de départ de f^{-1} est l'ensemble d'arrivée de f et vice-versa !

Graphiquement : f est une bijection de I sur J si et seulement si toute droite horizontale d'ordonnée dans J rencontre une et une seule fois $\mathscr{C}_f$.

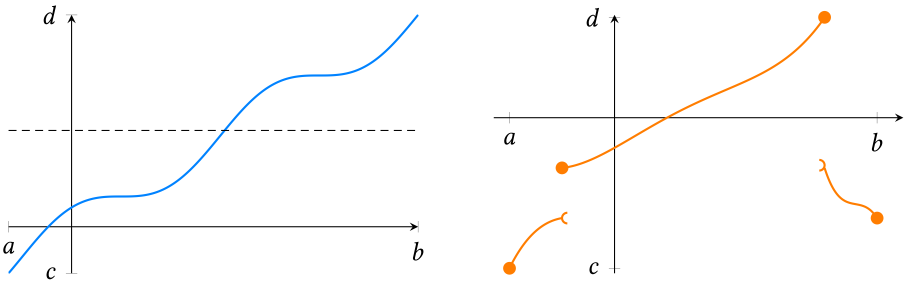


Figure 2.10 – Deux bijections de $[a, b]$ sur $[c, d]$: toute droite horizontale d'ordonnée dans $J = [c, d]$ rencontre une et une seule fois $\mathscr{C}_f$.

Exemples 2.64

▸ Soit $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$. Alors pour tout $y \in \mathbf{R}_+$, il existe un unique $x \in \mathbf{R}_+$ tel que $y = f(x) = x^2$: c'est $y = \sqrt{x}$.
Autrement dit, f réalise une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur $\mathbf{R}_+$, et sa bijection réciproque f^{-1}

est la fonction $f^{-1} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$.

▸ Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & ax+b \end{array} \right.$ une fonction affine avec $a \neq 0$.

Alors pour $y \in \mathbf{R}$, on a $y = f(x) \Leftrightarrow y = ax+b \Leftrightarrow x = \dfrac{y-b}{a}$.
Puisque l'équation $y = f(x)$, d'inconnue $x \in \mathbf{R}$ possède une unique solution, c'est que f réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$, et la bijection réciproque de f est la fonction $f^{-1} : y \mapsto \dfrac{y-b}{a}$. Notons que f^{-1} est elle-même affine.

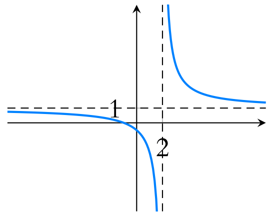
▸ Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} \setminus \{2\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+1}{x-2} \end{array} \right.$.

Il est assez facile de constater que f ne prend pas la valeur 1 car l'équation $\dfrac{x+1}{x-2} = 1 \Leftrightarrow x+1 = x-2$ n'a pas de solution. Alors pour $x \neq 2$ et $y \neq 1$, on a

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x-2} \Leftrightarrow x+1 = yx - 2y \Leftrightarrow 1+2y = x(y-1) \Leftrightarrow x = \frac{1+2y}{y-1}.$$

Et donc à $y \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$ fixé, l'équation $y = f(x)$ possède une unique solution dans $\mathbf{R} \setminus \{2\}$.
Donc f réalise une bijection de $\mathbf{R} \setminus \{2\}$ sur $\mathbf{R} \setminus \{1\}$ et sa bijection réciproque est $f^{-1} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \setminus \{2\} \\ y & \longmapsto & \dfrac{1+2y}{y-1} \end{array} \right.$.

Méthode
Pour déterminer la bijection réciproque de f, si elle existe, on détermine, à y fixé, l'unique solution de l'équation $y = f(x)$, d'inconnue x.
Autrement dit, on cherche l'unique antécédent de y par f.



Définition 2.65 – Soit I une partie de $\mathbf{R}$. On appelle **fonction identité sur** I et on note id_I la fonction définie sur I par

$$\mathrm{id}_I : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & I \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right. .$$

Autrement dit, pour tout $x \in I$, $\mathrm{id}_I(x) = x$.

Proposition 2.66 : *Soit $f : I \longrightarrow J$ une bijection. Alors :*

1. *pour tout $y \in J$, $(f \circ f^{-1})(y) = y = \mathrm{id}_J(y)$. Autrement dit, $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_J$.*
2. *pour tout $x \in I$, $(f^{-1} \circ f)(x) = x = \mathrm{id}_I(x)$. Autrement dit, $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_I$.*
3. *f^{-1} est une bijection de J sur I et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.*

Démonstration.

1. Soit $y \in J$. Par définition, $f^{-1}(y)$ est un antécédent de y par f, donc $f(f^{-1}(y)) = y$.
2. Soit $x \in I$. Alors $f^{-1}(f(x))$ est l'unique[21] antécédent par f de $f(x)$. Soit encore l'unique $a \in I$ tel que $f(a) = f(x)$.
Puisque $a = x$ convient, c'est que $f^{-1}(f(x)) = x$.
3. Prouvons que si $x \in I$ est fixé, alors l'équation $x = f^{-1}(y)$, d'inconnue $y \in J$ admet une unique solution, qui est $y = f(x)$.
Si y est une solution, alors $x = f^{-1}(y)$, et donc en appliquant f aux deux membres, alors $y = f(x)$.
Ceci ne prouve pas que $f(x)$ est solution[22], mais plutôt qu'une telle solution est unique : si une solution existe, c'est $f(x)$ et rien d'autre.
Reste alors à vérifier que $f(x)$ est solution, ce qui est assez évident puisque $f^{-1}(f(x)) = x$ par le point 2).

Donc pour tout $x \in I$, $x = f^{-1}(y)$ possède une unique solution. Donc f^{-1} réalise une bijection de J sur I.

[21] Cette unicité est garantie par le fait que f est une bijection.

[22] Autrement dit, on ne prouve pas l'existence d'une solution de l'équation.

Et puisque de plus cette unique solution est $f(x)$, la bijection réciproque de f^{-1} est

$$(f^{-1})^{-1}:\left|\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & J \\ x & \longmapsto & f(x)\end{array}\right. = f.$$

□

Proposition 2.67 : *Soit $f : I \to J$ une bijection. Si f est monotone, alors f^{-1} est également monotone, de même monotonie que f.*

Démonstration. Supposons f croissante.
Soient $y_1, y_2 \in J$, avec $y_1 < y_2$. Notons alors $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$.
On ne peut alors pas avoir $x_1 > x_2$, car par croissance de f, on aurait alors $f(x_1) \geqslant f(x_2) \Leftrightarrow y_1 \geqslant y_2$.
Donc $f^{-1}(x_1) \leqslant f^{-1}(x_2)$, donc f^{-1} est croissante.
La preuve est la même en renversant le sens des inégalités si f est décroissante. □

Proposition 2.68 : *Soit $f : I \to J$ une bijection. Alors f ne prend pas deux fois la même valeur. Autrement dit, si x et x' sont deux éléments de I, avec $f(x) = f(x')$, alors $x = x'$.*

Terminologie
Nous dirons bientôt que f est injective.

Démonstration. Soient x et x' deux éléments de I avec $f(x) = f(x')$. Alors en appliquant f^{-1} aux deux membres de l'égalité, $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(x')) \Leftrightarrow x = x'$. □

Remarque. Nous venons donc de prouver que si $f(a) = f(b)$, alors $a = b$.
Comme par ailleurs la réciproque est toujours vraie, bijection ou non, on a donc prouvé que pour $a, b \in I$, $a = b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$. .

Remarque
Nous savions déjà cette équivalence vraie dans le cas des fonctions strictement monotones, nous sommes en train de dire qu'elle est aussi pour les bijections.
Ce qui ne garantit en rien que les bijection soient toutes strictement monotones (ce qui est faux, voir la figure ??)

Corollaire 2.69 – *Une bijection monotone est strictement monotone.*

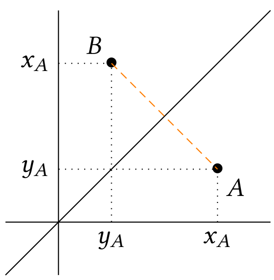
Démonstration. Une fonction monotone qui ne prend pas deux fois la même valeur est strictement monotone. □

2.4.2 Graphe de la bijection réciproque

Proposition 2.70 : *Si f est une bijection de I sur J, alors le graphe de f^{-1} est obtenu à partir du graphe de f via la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$ (cette droite est généralement appelée la **première bissectrice**).*

Démonstration. Pour $x \in I$ et $y \in J$, on a

$$(x, y) \in \mathscr{C}_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow (y, x) \in \mathscr{C}_{f^{-1}}.$$



Or, si $A = (x_A, y_A)$ est un point du plan, son symétrique $B = (x_B, y_B)$ par rapport à la première bissectrice $(\mathscr{D})$ est l'unique point tel que $(\mathscr{D})$ soit la médiatrice de $[AB]$.
C'est le cas si et seulement si $(\mathscr{D})$ passe par le milieu de $[AB]$ et que $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal à $\vec{u} = (1, 1)$, qui est un vecteur directeur de $(\mathscr{D})$.
Soit si et seulement si

$$\begin{cases} \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{y_A+y_B}{2} \\ \vec{u}\cdot\overrightarrow{AB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_B = y_A + y_B \\ (x_A - x_B) + (y_A - y_B) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = y_A + y_B - x_A \\ x_A = y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = y_A \\ y_B = x_A \end{cases}$$

Et donc, le symétrique de (x, y) par rapport à $(\mathscr{D})$ est (y, x), ce qui achève la preuve. □

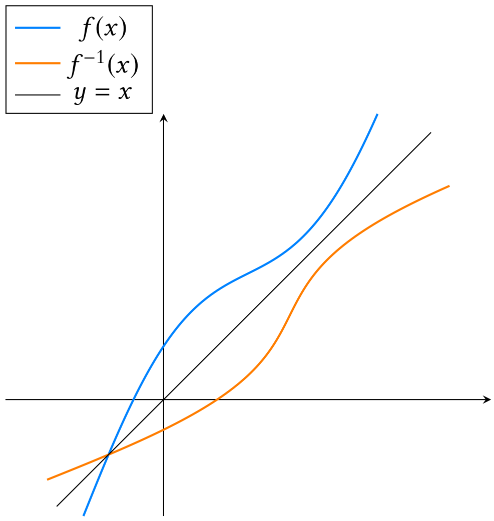


FIGURE 2.11 – Les graphes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

2.4.3 Le théorème de la bijection, alias le TVI strictement monotone

Nous rappelons[23] ici un théorème rencontré en terminale, qui sera prouvé rigoureusement plus tard dans l'année, mais nous sera bien utile d'ici là.

[23] Moyennant une légère reformulation.

Théorème 2.71 : *Soient $a < b$ deux réels.*

1. *Si $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ est continue sur $[a, b]$ et strictement croissante, alors f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$.*
2. *Si $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ est continue sur $[a, b]$ et strictement décroissante, alors f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(b), f(a)]$.*
3. *Si $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ est continue sur $]a, b[$ et strictement croissante, alors f réalise une bijection de $]a, b[$ sur $\left]\lim\limits_{x\to a} f(x), \lim\limits_{x\to b} f(x)\right[$.*

Dans les trois cas, la fonction f^{-1} est continue sur son ensemble de définition.

Remarque
Notons que ces limites peuvent être égales à $+\pm\infty$.

Remarques. ► Le dernier point reste encore valable si $a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$, et également dans le cas où f est strictement décroissante, il suffira alors dans ce cas d'intervertir $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x)$.
► Le théorème des valeurs intermédiaires, qui nécessite la continuité, justifie que f prend au moins une fois chaque valeur dans l'intervalle $[(a), f(b)]$. C'est la stricte monotonie qui garantit que f prend au maximum une fois chaque valeur.

Corollaire 2.72 – *Soient $a < b$ deux réels.*

1. *Si $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ est continue sur $[a, b]$ et strictement croissante, alors pour tout $c \in [f(a), f(b)]$, l'équation $f(x) = c$ possède une unique solution.*
2. *Si $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ est continue sur $[a, b]$ et strictement décroissante, alors pour tout $c \in [f(b), f(a)]$, l'équation $f(x) = c$ possède une unique solution.*
3. *Si $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ est continue sur $]a, b[$ et strictement croissante, alors pour tout $c \in \left]\lim\limits_{x\to a} f(x), \lim\limits_{x\to b} f(x)\right[$, l'équation $f(x) = c$ possède une unique solution.*

Démonstration. C'est une simple reformulation de la définition de bijection : $f(x) = c$ possède une unique solution si et seulement si c possède un unique antécédent par f. □

Le théorème de la bijection et/ou son corollaire permettent souvent de justifier l'existence et l'unicité de la solution à une équation, mais n'aident pas à déterminer la valeur de cette solution !

Exemple 2.73

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2e^{-x^2} \end{array} \right.$. Alors f est dérivable, et donc continue, car produit de deux fonctions dérivables, et $f'(x) = -2x^3e^{-x^2} + 2xe^{-x^2} = 2xe^{-x^2}\left(1-x^2\right)$.
Donc $f'(x)$ est strictement positive sur $[0,1[$ et strictement négative sur $]1,+\infty[$.
Par conséquent, f est strictement croissante sur $[0,1]$, avec $f(0) = 0$ et $f(1) = e^{-1}$.
Par le théorème de la bijection, pour tout $\alpha \in]0, e^{-1}[$, l'équation $f(x) = \alpha$ possède une unique solution dans $[0,1]$.
De même, f est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$, avec $f(1) = e^{-1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Donc par le théorème de la bijection, pour $\alpha \in]0, e^{-1}[$, l'équation $f(x) = \alpha$ possède une unique solution dans $]1,+\infty[$.
Autrement dit, nous venons de montrer que tout réel dans $]0, e^{-1}[$ possède exactement deux antécédents dans f.
Tout ceci n'a rien de surprenant quand on regarde le tableau de variations, mais il faut vraiment faire appel au théorème de la bijection pour le justifier.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

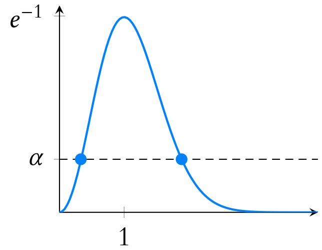


Figure 2.12– Le graphe de f.

Profitons-en pour donner une application classique du théorème de la bijection : la recherche de point fixe.

Définition 2.74 – Soit $f : \mathscr{D} \to \mathbf{R}$. Un élément $x \in \mathscr{D}$ est appelé **point fixe de** f si $f(x) = x$.

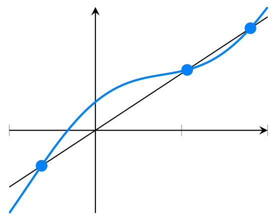


Figure 2.13– Une fonction avec trois points fixes.

Autrement dit, un point fixe est un point qui «ne bouge pas» sous l'action de f.
Notons que x est un point fixe de f si et seulement si $(x,x) \in \mathscr{C}_f$. Or (x,x) est un point de la droite d'équation $y = x$.
Donc les points fixes de f sont les abscisses des points d'intersection de la première bissectrice avec le graphe de f.

Le théorème de la bijection[24] ne peut s'appliquer tel quel pour prouver l'existence de points fixes, il ne sert qu'à prouver l'existence de solutions à des équations de la forme $f(x) = c$, avec c **fixé**. Et donc surtout pas à l'équation $f(x) = x$.
En revanche, il peut s'appliquer à la fonction $x \mapsto f(x) - x$.

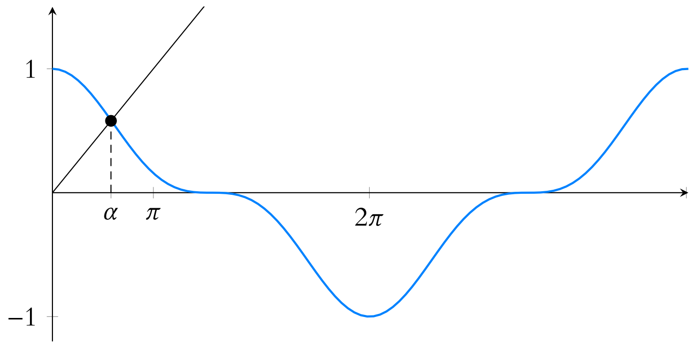
[24] Et surtout son corollaire.

Exemple 2.75

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x)^3 \end{array} \right.$. Alors $x \in \mathbf{R}_+$ est un point fixe de f si et seulement si $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$.
Posons alors $g : x \mapsto \cos(x)^3 - x$.
Puisque $\cos(x)^3 \leqslant 1$, pour $x > 1$, on a $g(x) < 1 - 1 < 0$, et donc g ne s'annule pas sur $]1,+\infty[$.
Donc f ne possède pas de point fixe dans cet intervalle.

Astuce
Trouver les points fixes de f, c'est trouver les points où g s'annule.

Sur $[0,1]$, g est dérivable, et $g'(x) = -3\sin(x)\cos^2(x) - 1$.
Mais $[0,1] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, intervalle sur lequel la fonction sin est positive, et donc pour tout $x \in [0,1]$, $g'(x) < 0$.
Donc g est strictement décroissante sur $[0,1]$, avec $g(0) = \cos(0)^3 = 1$ et $g(1) = \cos(1)^3 - 1 < 0$.
Par le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution $\alpha \in [0,1]$.
Et donc α est l'unique point fixe de f.



2.4.4 Dérivabilité de la bijection réciproque

Proposition 2.76 : *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, réalisant une bijection de I sur un intervalle J.*
Alors f^{-1}, la bijection réciproque de f, est dérivable en tout point $x \in J$ tel que $f'\left(f^{-1}(x)\right) \neq 0$, et pour un tel x, on a

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Signe
Pour les fonctions dérivables, on retrouve ainsi le fait que f^{-1} et f aient même sens de variation.

Remarque. Le résultat est admis à ce stade, mais il est facile à retrouver si l'on se souvient que $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_I$, et que donc, en dérivant une composée, pour tout $x \in J$,

$$\left(f^{-1}\right)'(x) f'\left(f^{-1}(x)\right) = 1 \Leftrightarrow \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$

⚠ Attention !
Dériver $f \circ f^{-1}$ nécessite de savoir que f et f^{-1} sont dérivables, donc ceci ne peut en rien prouver la dérivabilité de f^{-1}, mais sert seulement à retrouver la valeur de $(f^{-1})'(x)$ si on admet sa dérivabilité.

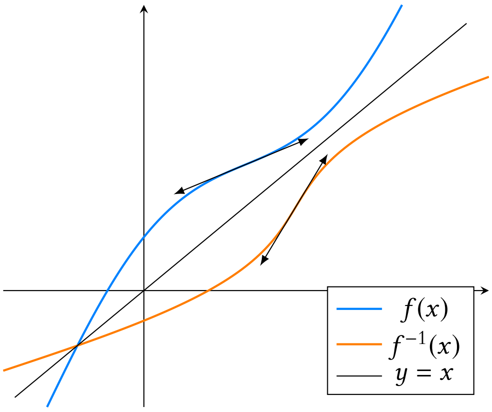
Ce résultat s'interprète très bien graphiquement : si D est une droite de coefficient directeur $a \neq 0$, alors le coefficient directeur du symétrique de D par rapport à la première bissectrice est $\frac{1}{a}$ (voir par exemple ce qui a été dit quant à la bijection réciproque d'une fonction affine).
Mais le symétrique de la tangente à f^{-1} au point d'abscisse x est la tangente à f en $f^{-1}(x)$. Cela «justifie[25]» que $\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.
En revanche, si $\mathscr{C}_f$ possède en $(x, f(x))$ une tangente horizontale, alors le symétrique de cette tangente est une droite verticale.

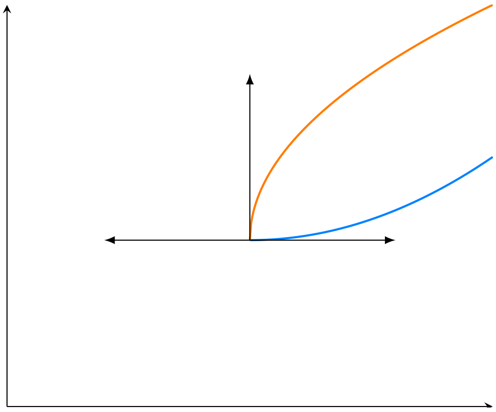
[25] Ce n'est en rien une preuve, mais une bonne intuition de ce que signifie cette formule !

2.5 FONCTIONS USUELLES

⚠ Le but de cette partie est de définir une fois pour toutes un certain nombre de fonctions usuelles, notamment le logarithme et l'exponentielle, et de prouver leurs propriétés. Pour aborder sereinement cette partie, faites comme si vous n'aviez jamais entendu parler de ces fonctions, et faites semblant de les découvrir. Sans cela vous aller avoir l'impression de tourner en rond, et qu'on ne fait que redire des choses bien connues.

Les définitions de ces fonctions données ici sont définitives et n'ont pas vocation à être revues plus tard dans l'année.





En revanche, nous allons utiliser à plusieurs reprises le théorème de la bijection ainsi qu'un théorème de limites nommé théorème de la limite monotone[26], dont nous repoussons la preuve à plus tard.

[26] Dont vous connaissez déjà l'analogue pour les limites de suites.

2.5.1 Fonction logarithme

On admet[27] que toute fonction continue sur un intervalle I y admet des primitives.

[27] Une fois de plus temporairement...

Proposition 2.77 : *La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ admet sur $\mathbf{R}_+^*$ une unique primitive qui s'annule en $x = 1$. On appelle **logarithme népérien** cette primitive, et on la note* $\ln$.

Démonstration. Commençons par prouver l'unicité d'une telle fonction : supposons que F_1 et F_2 soient deux primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, avec $F_1(1) = F_2(1) = 0$.
Alors nous savons qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $F_1(x) = F_2(x) + \lambda$. Et donc $F_1(1) = F_2(1) + \lambda \Leftrightarrow 0 = 0 + \lambda \Leftrightarrow \lambda = 0$.
Donc $F_1 = F_2$. Ceci prouve donc qu'il existe **au plus**[28] une fonction satisfaisant aux conditions requises.
Passons à présent à l'existence. Grâce au résultat admis ci-dessus, il existe une primitive F de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
Alors pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $x \mapsto F(x) + \lambda$ est encore une primitive de f.
En particulier, c'est le cas[29] de $G : x \mapsto F(x) - F(1)$, qui vérifie alors $G(1) = F(1) - F(1) = 0$.
Et donc il existe bien une primitive de f qui s'annule en $x = 1$. □

[28] Si on en a deux, ce sont les mêmes !

[29] Autrement dit, on a choisi de prendre $\lambda = F(1)$.

Remarque. Notons que ceci nous dit bien évidemment que $\ln' : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, et cette formule n'a sûrement pas besoin d'être prouvée : c'est la définition du logarithme.

Théorème 2.78 : *Soient x et y deux réels strictement positifs. Alors*

1. $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
2. $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
3. $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
4. *pour tout $n \in \mathbf{Z}$,* $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

Démonstration.

1. Fixons y, et soit $f_y : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \ln(xy) \end{array}\right.$.
Alors f_y est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, et sa dérivée vérifie $f_y'(x) = y\dfrac{1}{xy} = \dfrac{1}{x}$.
C'est donc une primitive sur $\mathbf{R}_+^*$ de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, de sorte qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f_y(x) = \ln(x) + \lambda$.
En particulier, pour $x = 1$, on trouve $f_y(1) = \ln(y) = \lambda$.
Et donc $\ln(xy) = f_y(x) = \ln(x) + \ln(y)$.

2. D'après le point 1), on a $0 = \ln(1) = \ln\left(x\frac{1}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

   Et donc $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.

3. On a $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x\frac{1}{y}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.

4. Pour $n \in \mathbf{N}$, la preuve se fait par récurrence sur n : $\ln(x^0) = \ln(1) = 0$ et

$$\ln\left(x^{n+1}\right) = \ln(x^n x) = \ln(x^n) + \ln(x) = n\ln(x) + \ln(x) = (n+1)\ln(x).$$

   Et si $n < 0$, alors $-n \in \mathbf{N}$, de sorte que

$$\ln(x^n) = \ln\left(\frac{1}{x^{-n}}\right) = -\ln\left(x^{-n}\right) = -(-n)\ln(x) = n\ln(x).$$

□

Proposition 2.79 : *La fonction* $\ln$ *est strictement croissante sur* $\mathbf{R}_+^*$, *et elle vérifie* $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, *et* $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$.

Démonstration. La stricte croissance vient évidemment du fait que la dérivée de ln est strictement positive sur $\mathbf{R}_+^*$.
Puisque ln est croissante, elle possède en $+\infty$ une limite, finie, ou égale à $+\infty$.
Or, on a $\ln(2^n) = n\ln(2)$. Mais par stricte croissance de ln, $\ln(2) > \ln(1) \Leftrightarrow \ln(2) > 0$.
Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(2^n) = +\infty$. Donc la limite de ln en $+\infty$ ne peut être une limite finie : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\frac{1}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, donc

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\lim_{X\to+\infty} \ln(X) = -\infty.$$

□

Plus tard
Le résultat que nous utilisons ici, relativement intuitif, se nomme le théorème de la limite monotone et sera prouvé dans quelques temps.

Notons que puisque $\ln(1) = 0$ et que ln est strictement croissante, $\ln(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1$ et $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Corollaire 2.80 – *La fonction* $\ln$ *réalise une bijection de* $\mathbf{R}_+^*$ *sur* $\mathbf{R}$.

Démonstration. Puisque ln est dérivable, donc continue, et strictement croissante[30], le théorème de la bijection s'applique : ln réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur
$\left]\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x), \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)\right[=]-\infty, +\infty[$. □

[30] Sa dérivée est strictement positive.

Terminons enfin avec une inégalité classique qu'il faut connaître et savoir utiliser à bon escient :

Proposition 2.81 : *Pour tout* $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

Démonstration. Cette inégalité découle immédiatement de la concavité de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ (sa dérivée est $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ qui est décroissante).
Elle signifie donc que sa courbe représentative est située en dessous de ses tangentes. Or en particulier, la tangente au point d'abscisse 0 est la droite d'équation

$$y = \frac{1}{1+0}(x-0) + \ln(1+0) \Leftrightarrow y = x.$$

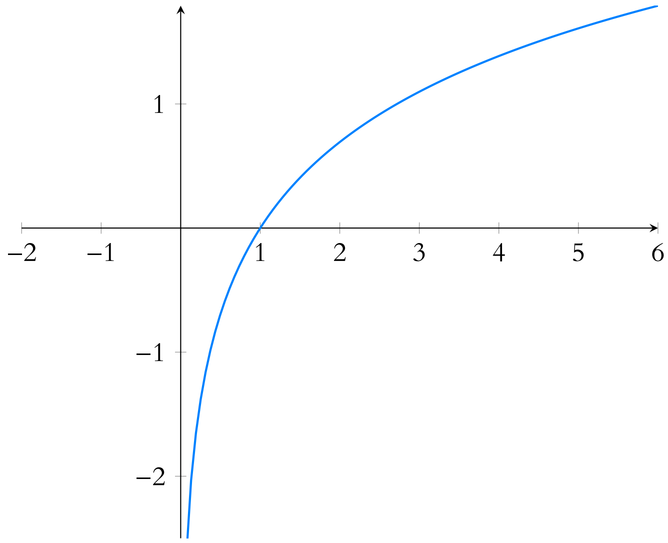
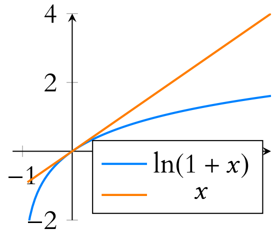


Figure 2.14 – Le graphe de la fonction ln.



Donc pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

Toutefois, ceci repose sur des résultats admis pour l'instant, donc donnons-en une seconde preuve.
Soit $g : x \mapsto \ln(1+x) - x$. Alors g est dérivable sur $]-1, +\infty[$, avec pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x}$.
Donc g est croissante sur $]-1, 0[$ et décroissante sur $[0, +\infty[$, si bien qu'elle atteint un maximum en $x = 0$, égal à $g(0) = 0$.
Et donc pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $g(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) \leqslant x$. □

2.5.2 Fonction exponentielle

Définition 2.82 – Nous avons déjà dit que la fonction ln réalise une bijection de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$. On appelle **exponentielle**, et on note exp sa bijection réciproque, qui réalise donc une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}_+^*$.
On note généralement e^x au lieu de $\exp(x)$.

Remarque. Notons qu'en particulier, on a, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\ln(e^x) = x$ et pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $e^{\ln(x)} = x$.

Valeur approchée
Un calcul numérique nous donne
$$e \simeq 2.718\ldots$$

Définition 2.83 – On note $e = \exp(1)$. C'est l'unique réel strictement positif dont le logarithme vaut 1.

Théorème 2.84 : *Pour $x, y \in \mathbf{R}$, on a*

1. $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
2. $e^{x+y} = e^x e^y$
3. $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$

Démonstration.

1. On a $\ln\left(\dfrac{1}{e^x}\right) = -\ln(e^x) = -x$. Donc en appliquant la fonction exponentielle aux deux membres de cette égalité, il vient donc
$$e^{-x} = \exp\left(\ln\left(\frac{1}{e^x}\right)\right) = \frac{1}{e^x}.$$
2. Puisque $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, on a $\ln(e^x e^y) = \ln(e^x) + \ln(e^y) = x + y$.
Et donc en composant par l'exponentielle, $e^x e^y = e^{x+y}$.

3. Il suffit de noter que $e^{x-y} = e^{x+(-y)} = e^x e^{-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$.

□

Proposition 2.85 : *La fonction exponentielle est dérivable sur* $\mathbf{R}$, *et est égale à sa propre dérivée.*
De plus, on a $e^0 = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Démonstration. Puisque ln est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et que sa dérivée ne s'y annule pas, sa bijection réciproque exp est dérivable sur $\mathbf{R}$.
On a alors, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$(\exp)'(x) = \frac{1}{\ln'(e^x)} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x.$$

Et puisque $\ln(1) = 0$, on a donc[31] $e^0 = 1$.
Puisque exp est strictement croissante, elle possède une limite en $+\infty$, finie ou égale à $+\infty$.

Si elle avait une limite finie $\ell \in \mathbf{R}$, alors par croissance, on aurait, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $e^x \leqslant \ell$. Mais ceci contredit le fait que exp réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}_+^*$, et que par exemple $\ell + 1$ possède un antécédent par exp.
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Et alors $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{e^{-x}} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{e^X} = 0$. □

[31] Par définition d'une bijection réciproque.

Remarque
C'est encore une fois le théorème de la limite monotone mentionné plus haut, et provisoirement admis.

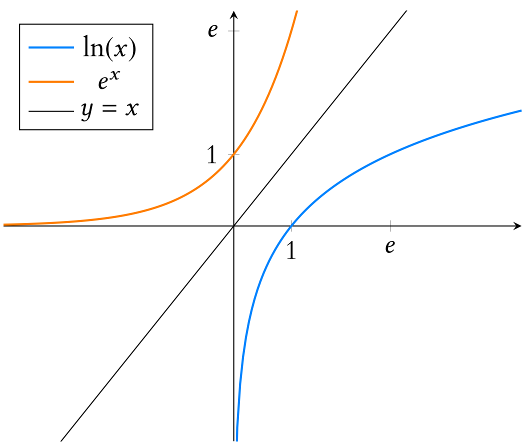
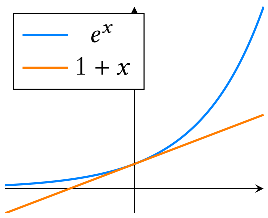


FIGURE 2.15 – Les graphes de ln et exp sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Terminons enfin par une inégalité classique :

Proposition 2.86 : *Pour tout* $x \in \mathbf{R}$, $e^x \geqslant x + 1$.



Démonstration. Nous pourrions là aussi évoquer la convexité de l'exponentielle, et noter que $y = x + 1$ est une équation de la tangente au graphe de exp en 0.
Mais plus simplement, pour $x \leqslant -1$, $x + 1 \leqslant 0 \leqslant e^x$.
Et pour $x > -1$, $\ln(1 + x) \leqslant x \Leftrightarrow 1 + x \leqslant e^x$. □

2.5.3 Fonctions exponentielle et logarithme de base a.

Définition 2.87 – Si $a > 0$ est différent de 1, alors on appelle **logarithme de base** a la fonction $\log_a$ définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

Remarque. Vous avez déjà rencontré la fonction $\log_{10}$, (plus souvent notée log) en chimie en terminale.
Notons que la fonction $\log_e$ n'est autre que la fonction ln.
Il est alors facile de prouver que la fonction $\log_a$ a les mêmes propriétés que la fonction ln :

Proposition 2.88 : *Soit $a > 0$, $a \neq 1$. Alors :*

- *$\log_a$ réalise une bijection de $\mathbf{R}_+^*$ sur $\mathbf{R}$, vérifiant $\log_a(1) = 0$ et $\log_a(a) = 1$. De plus :*
  - *si $0 < a < 1$, alors $\log_a$ est strictement décroissante, avec $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a(x) = -\infty$.*
  - *si $a > 1$, alors $\log_a$ est strictement croissante, avec $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a(x) = +\infty$.*
- *pour tous réels strictement positifs x et y, $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ et $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$.*
- *pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbf{Z}$, $\log_a(x^n) = n\log_a(x)$.*

Limites
Notons qu'une fois qu'on sait qu'il s'agit d'une bijection dont on connaît l'intervalle image, et qu'on possède le sens de variation, les limites sont immédiates.

Définition 2.89 – Pour $a > 0$, $a \neq 1$, on appelle **exponentielle de base** a la bijection réciproque de $\log_a$.

Notons provisoirement cette fonction $\exp_a$, le temps d'étudier ses propriétés.
Remarquons que si $x \in \mathbf{R}$, alors $\exp_a(x)$ est tel que

$$\log_a(\exp_a(x)) = x \Leftrightarrow \ln(\exp_a(x)) = x\ln(a) \Leftrightarrow \exp_a(x) = e^{x\ln(a)}.$$

Les propriétés suivantes sont alors faciles à prouver :

Proposition 2.90 : *Soit $a > 0$,*

- *la fonction $\exp_a$ réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}_+^*$, avec $\exp_a(0) = 1$ et $\exp_a(1) = a$. De plus :*
  - *si $0 < a < 1$, alors $\exp_a$ est strictement décroissante avec $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp_a(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp_a(x) = 0$*
  - *si $a > 1$, alors $\exp_a$ est strictement croissante avec $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp_a(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp_a(x) = +\infty$*
- *pour tous réels x et y, $\exp_a(x+y) = \exp_a(x)\exp_a(y)$ et $\exp_a(x-y) = \dfrac{\exp_a(x)}{\exp_a(y)}$*
- *pour $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{Z}$, $\exp_a(nx) = (\exp_a(x))^n$.*

On notera désormais a^x au lieu de $\exp_a(x)$. Ceci est cohérent avec le fait que pour $n \in \mathbf{Z}$, $\exp_a(n) = (\exp_a(1))^n = a^n$, et que $\ln(a^x) = \ln(\exp_a(x)) = \ln(\exp(x\ln(a)) = x\ln(a)$.
Et alors, grâce aux propriétés de l'exponentielle, toutes les formules déjà connues sur les puissances entières (comme $a^{m+n} = a^m a^n$ et $(a^m)^n$) restent valables pour les puissances non entières de a.
Par exemple, pour $x, y \in \mathbf{R}$, on a

$$(a^x)^y = \exp(y\ln(a^x)) = \exp(y\ln(\exp(x\ln(a)))) = \exp(yx\ln(a)) = a^{xy}.$$

Remarque
Nous avons prouvé au passage que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\ln(a^x) = x\ln(a)$.

Enfin, remarquons que la dérivée de $x \mapsto a^x$ est $x \mapsto \ln(a)e^{x\ln(a)} = \ln(a)a^x$.

2.5.4 Fonctions puissances et racines $n^{\text{èmes}}$

Bien entendu, nous avons déjà rencontré les fonctions de la forme $x \mapsto x^n$, définie sur $\mathbf{R}$ pour $n \in \mathbf{N}$, ou sur $\mathbf{R}^*$ lorsque n est un entier négatif.
Mais il n'est pas nécessaire de se restreindre à des puissances entières :

Définition 2.91 – Soit $a \in \mathbf{R}$. On appelle fonction **puissance** a la fonction, que l'on notera par la suite f_a, définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f_a(x) = x^a = e^{a\ln(x)}$.

Comme mentionné plus haut, pour $a \in \mathbf{N}$, on retrouve la fonction puissance a usuelle :
$f_a(x) = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{a \text{ fois}}$.
Et de même pour a un entier négatif.

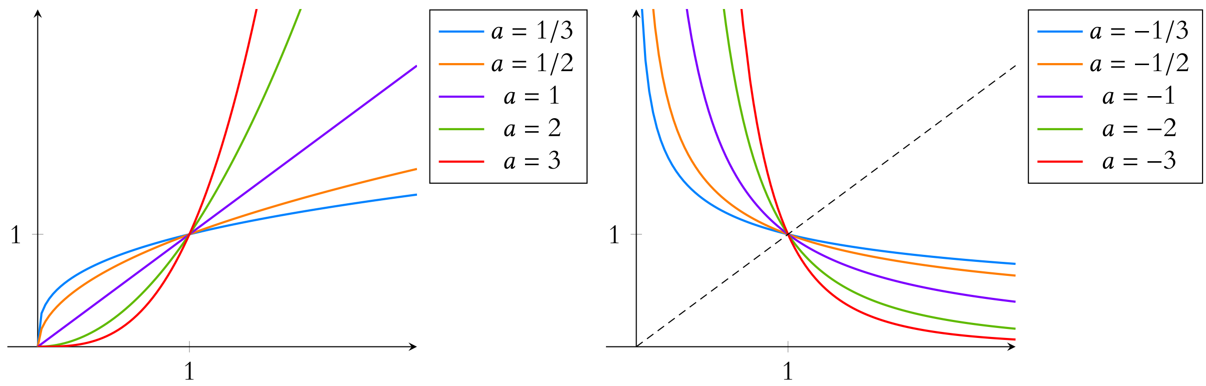


FIGURE 2.16 – Quelques fonctions puissances.

Proposition 2.92 : *Si a et b sont deux réels et si x et y sont deux réels strictement positifs, alors*

$$x^1 = x,\ x^0 = 1,\ x^{a+b} = x^a x^b,\ (xy)^a = x^a y^a.$$

Démonstration. Conséquences directes des propriétés du logarithme et de l'exponentielle. □

Proposition 2.93 : *Soit $a \in \mathbf{R}$. Alors :*

1. *f_a est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f_a'(x) = ax^{a-1}$.*
2. *si $a \neq 0$, alors f_a réalise une bijection de $\mathbf{R}_+^*$ sur lui-même, strictement croissante si $a > 0$ et strictement décroissante sinon.*
   De plus, $f_a^{-1} = f_{1/a}$.

Démonstration.
1. Pour la dérivabilité, il suffit noter que l'exponentielle et le logarithme sont dérivables (respectivement sur $\mathbf{R}$ et sur $\mathbf{R}_+^*$) et donc que par composition, la fonction f_a est également dérivable.

   Et donc en dérivant, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$: $f_a'(x) = a\dfrac{1}{x}e^{a\ln(x)} = ax^{-1}x^a = ax^{a-1}$.
2. La dérivée de f_a est du signe de a, donc f_a est strictement croissante si $a > 0$ et strictement décroissante si $a < 0$.
   De plus, pour $a > 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{a\ln(x)} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{a\ln(x)} = +\infty$.
   Donc par le théorème de la bijection, f_a réalise une bijection de $\mathbf{R}_+^*$ sur lui-même.
   De même, si $a < 0$, alors $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{a\ln(x)} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{a\ln(x)} = 0$.
   Donc par le théorème de la bijection, f_a réalise une bijection de $\mathbf{R}_+^*$ sur lui-même.
   Enfin, on a, pour $x > 0$,

$$f_a(f_{1/a}(x)) = \left(x^{1/a}\right)^a = \exp\left(a\ln\left(x^{1/a}\right)\right) = \exp\left(a\frac{1}{a}\ln(x)\right) = x.$$

   Donc $f_{1/a}(x)$ est l'unique antécédent de x par f_a : $(f_a)^{-1}(x) = f_{1/a}(x)$.

□

Variable !
On dérive ici par rapport à x (la base) et pas comme nous l'avons fait plus haut par rapport à la puissance !

La fonction f_a est a priori définie uniquement sur $\mathbf{R}_+^*$, mais si $a > 0$, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} f_a(x) = 0$, si bien que f_a se prolonge par continuité en 0 en posant $f_a(0) = 0$.
La question se pose alors de savoir si ce prolongement par continuité est dérivable en 0.
Mais pour $x > 0$, on a

$$\frac{f_a(x) - f_a(0)}{x} = \frac{x^a}{x} = x^{a-1} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } a - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow a \geqslant 1 \\ +\infty & \text{si } a - 1 < 0 \Leftrightarrow a < 1 \end{cases}$$

Donc f_a est dérivable en 0 si et seulement si $a \geqslant 1$, et dans ce cas, $f_a'(0) = 0$. Pour $a > 1$, on a donc $f_a'(0) = a0^{a-1}$, si bien que la formule obtenue ci-dessus pour la dérivée de f_a sur $\mathbf{R}_+^*$ reste valable en 0.

Notons en particulier que pour $n \in \mathbf{N}^*$, $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ est la bijection réciproque de la fonction $x \mapsto x^n$ restreinte à $\mathbf{R}_+$.
Et notamment, $x^{\frac{1}{2}}$ est la racine carrée de x.
Plus généralement, $x^{\frac{1}{n}}$ est appelé **racine** $n^{\text{ème}}$ de x, et on peut indifféremment le noter $x^{\frac{1}{n}}$ ou $\sqrt[n]{x}$.
La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est donc dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, et sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$.

Remarque — On a donc

$$\sqrt[n]{x} = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ e^{\frac{1}{n}\ln(x)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Dans le cas particulier où $n \in \mathbf{N}$ est un entier **impair**, la fonction $f_n : x \mapsto x^n$ réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur lui-même (ce qui n'est pas le cas si n est pair).
Dans ce cas, elle possède une bijection réciproque sur $\mathbf{R}$ tout entier.
Cette fonction est encore notée $\sqrt[n]{\cdot}$, et donc pour $x \in \mathbf{R}$, $\sqrt[n]{x}$ est l'unique réel dont la puissance $n^{\text{ème}}$ vaut x.
Par exemple, $\sqrt[3]{-8} = -2$ puisque $(-2)^3 = -2^3 = -8$.
Mais attention, si $x < 0$, on n'a pas $\sqrt[n]{x} = e^{\frac{1}{n}\ln(x)}$.
On a alors toujours $\sqrt[n]{-1} = -1$ et pour $x < 0$, $\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}$.
Et bien entendu, on retrouve, pour tous réels x et y, $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$.

Remarque — En revanche, par imparité de $\sqrt[n]{\cdot}$, on a alors

$$\sqrt[n]{x} = -e^{\frac{1}{n}\ln(-x)}.$$

2.5.5 Fonctions cosinus, sinus et tangente hyperbolique

Définition 2.94 – On appelle :

1. **cosinus hyperbolique** la fonction ch définie sur $\mathbf{R}$ par
$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$
2. **sinus hyperbolique** la fonction sh définie sur $\mathbf{R}$ par
$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$
3. **tangente hyperbolique** la fonction th définie sur $\mathbf{R}$ par
$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}.$$

Analogie — Les formules définissant ch et sh ressemblent fortement aux formules d'Euler pour cos et sin.

Proposition 2.95 : *Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a* $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.

Remarque — Cette formule est analogue à une formule bien connue de trigonométrie :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors

$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - \left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right)\right) = 1.$$

□

Proposition 2.96 :

1. *La fonction* ch *est paire, dérivable sur* $\mathbf{R}$ *et pour tout* $x \in \mathbf{R}$, $\operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x)$.
   De plus, on a $\operatorname{ch}(0) = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{ch}(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$.
2. *La fonction* sh *est impaire, dérivable sur* $\mathbf{R}$ *et pour tout* $x \in \mathbf{R}$, $\operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x)$.
   De plus, on a $\operatorname{sh}(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sh}(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{sh}(x) = -\infty$.
3. *La fonction* th *est impaire, dérivable sur* $\mathbf{R}$, *et pour tout* $x \in \mathbf{R}$,
$$\operatorname{th}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} = 1 - \operatorname{th}^2(x).$$
   De plus, on a $\operatorname{th}(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{th}(x) = -1$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{th}(x) = 1$.

Démonstration. 1. Pour $x \in \mathbf{R}$, on a $\operatorname{ch}(-x) = \dfrac{e^{-x}+e^x}{2} = \operatorname{ch}(x)$, donc ch est paire.
Elle est dérivable car somme de deux fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\operatorname{ch}'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh}(x)$.
Il est clair que $\operatorname{ch}(0) = \dfrac{e^0+e^0}{2} = 1$ et lorsque $x \to +\infty$, $e^x \to +\infty$, $e^{-x} \to 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$.
De même, lorsque $x \to -\infty$, $e^x \to 0$, $e^{-x} \to +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{ch} x = +\infty$.

2. On a $\operatorname{sh}(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^x}{2} = -\operatorname{sh}(x)$, donc sh est impaire. Par conséquent, $\operatorname{sh}(0) = 0$.
Puisque sh est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$, elle est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\operatorname{sh}'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch}(x)$.
Les limites ne posent pas de problèmes.
3. Puisque th est le quotient d'une fonction paire par une fonction impaire, elle est impaire, et donc $\operatorname{th}(0) = 0$.
Elle est dérivable car quotient de deux fonctions dérivables, et pour $x \in \mathbf{R}$, on a
$$\operatorname{th}'(x) = \frac{\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}.$$
Mais d'autre part, ceci s'écrit encore
$$\operatorname{th}'(x) = \frac{\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = 1 - \frac{\operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = 1 - \operatorname{th}^2(x).$$
Enfin, pour les limites[32]
$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{th}(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(1-e^{-2x}\right)}{e^x\left(1+e^{-2x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = 1.$$
Et par imparité,
$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{th}(x) = \lim_{x\to-\infty} -\operatorname{th}(-x) = -1.$$
□

[32] Qui a priori sont des formes indéterminées.

Il est facile de constater que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x) > 0$.
Donc sh est strictement croissante. Puisqu'elle s'annule en 0, elle est strictement négative sur $\mathbf{R}_-^*$ et strictement positive sur $\mathbf{R}_+^*$.
Et donc $\operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x)$ est du signe de x, si bien que ch est strictement décroissante sur $\mathbf{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$.
Enfin, $\operatorname{th}' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2}$ reste positive, donc th est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

Autrement dit
$\operatorname{sh}(x)$ est du signe de x.

Rappelons que nous pouvons rien dire d'une somme d'exponentielles, et qu'on n'a surtout pas $e^a + e^b = e^{a+b}$.

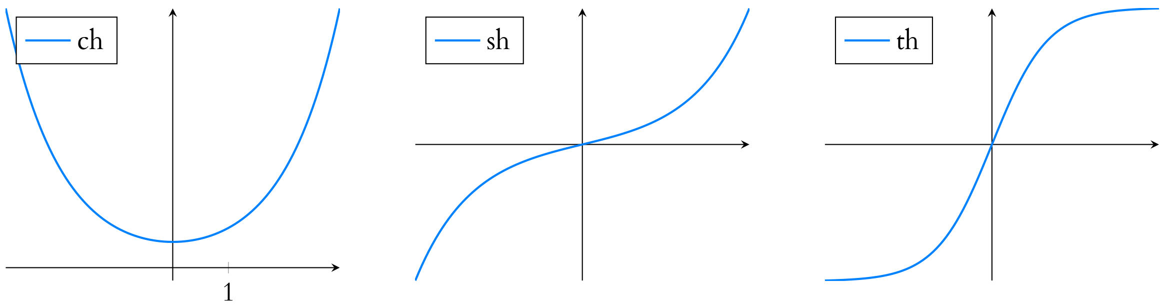


Figure 2.17 – Les fonction ch, sh et th.

Une astuce souvent utile pour manipuler des quantités de la forme $e^a \pm e^b$ est de factoriser par $e^{\frac{a+b}{2}}$, ce qui permet alors de faire apparaître des ch ou des sh.

Exemple 2.97

On a

$$\begin{aligned}\frac{e^a - e^b}{1 + e^b} &= \frac{e^{\frac{a+b}{2}}\left(e^{a-\frac{a+b}{2}} - e^{b-\frac{a+b}{2}}\right)}{e^{b/2}\left(e^{-b/2} + e^{b-b/2}\right)} = \frac{e^{\frac{a+b}{2}}\left(e^{\frac{a-b}{2}} - e^{-\frac{a-b}{2}}\right)}{e^{b/2}\left(e^{b/2} + e^{-b/2}\right)}\\ &= \frac{e^{\frac{a+b}{2}}}{e^{b/2}}\,\frac{2\,\mathrm{sh}\left(\frac{a-b}{2}\right)}{2\,\mathrm{ch}\left(\frac{b}{2}\right)} = e^{a/2}\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\mathrm{ch}\left(\frac{b}{2}\right)}.\end{aligned}$$

2.5.6 Fonctions valeur absolue et partie entière

Proposition 2.98 : *La fonction $f : x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbf{R}$, dérivable sur $\mathbf{R}^*$, et sa dérivée est donnée par*

$$\forall x \in \mathbf{R}^*,\ f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Démonstration. Pour la dérivabilité sur $\mathbf{R}^*$, il s'agit de remarquer que sur $\mathbf{R}_+^*$, on a $f(x) = x$ et sur $\mathbf{R}_-^*$, $f(x) = -x$.
En particulier, ceci prouve la continuité de f sur $\mathbf{R}^*$. Ne reste donc que la continuité en 0 à prouver.
Mais $\lim\limits_{x\to 0^+} |x| = \lim\limits_{x\to 0^-} x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} |x| = \lim\limits_{x\to 0^-} -x = 0$, de sorte que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$.
Et donc f est continue sur $\mathbf{R}^*$. □

Proposition 2.99 : *La fonction $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est dérivable sur tout intervalle de la forme $]n, n+1[$, $n \in \mathbf{Z}$, et sa dérivée y est nulle.*

Démonstration. Sur l'intervalle $]n, n+1[$, la fonction f est constante égale à n, et donc y est dérivable, de dérivée nulle. □

Remarque. La fonction f est donc dérivable sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, et sa dérivée y est nulle, mais on n'en déduit pas pour autant qu'elle y est constante, car $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ n'est pas un intervalle !

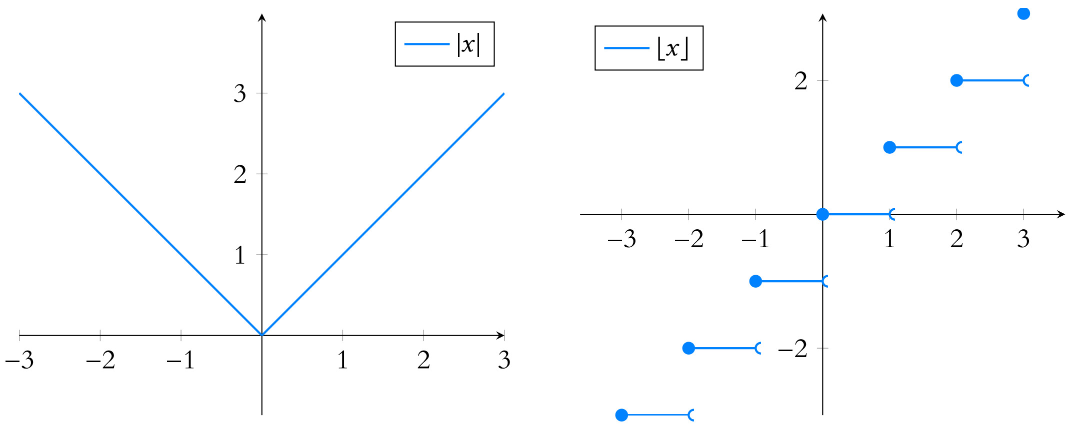


Figure 2.18 – Les fonctions valeur absolue et partie entière.