RAPPELS ET COMPLÉMENTS CALCULATOIRES

2

Ce chapitre contient essentiellement des rappels sur des notions rencontrées au lycée, même si elles n'ont pas nécessairement été formalisées de la sorte.
Il s'agit principalement de techniques de calcul afin de clarifier ce qu'on a le droit de faire et ce qu'on n'a pas le droit de faire, par exemple lors de la résolution d'une équation ou d'une inéquation.
La plupart des règles énoncées ici doivent vous paraître évidentes, et si elles ne le sont pas maintenant, il faudra qu'elles le deviennent rapidement.
Que vous soyez capables de me réciter ces règles par cœur **ne m'intéresse pas**, ce qu'il faut, c'est que vous soyez capables de les utiliser à bon escient quand vous en aurez besoin[1].

[1] Et accessoirement que les calculs que je ferai en cours vous semblent naturels et que vous ne passiez pas 5 minutes à vous demander comment j'ai fait à chaque ligne de calcul.

Plusieurs résultats restent admis pour le moment, mais seront démontrés plus tard dans l'année.

2.1 ENSEMBLES DE NOMBRES

2.1.1 Relation d'ordre sur R, manipulation d'inégalités

Ne définissant pas précisément les nombres réels, nous ne définirons pas vraiment ce qu'est la relation d'ordre sur $\mathbf{R}$, c'est-à-dire quand un réel est plus grand qu'un autre.
On suppose juste qu'on dispose d'une notion de «plus grand que», et qu'on note $a \leqslant b$ (ou $b \geqslant a$) pour signifier que le réel b est plus grand que le réel a.
Si $a \leqslant b$ et que $a \neq b$, on note $a < b$ (ou $b > a$).

Contentons nous d'admettre que cette notion de «plus grand que» satisfait les trois propriétés suivantes :

i) quels que soient les réels a et b, une et une seule des trois propositions suivantes est vraie : $a < b$, $a = b$, $a > b$.
ii) $\forall a, b, c \in \mathbf{R}$, $a < b \Rightarrow a + c < b + c$.
iii) $\forall a, b \in \mathbf{R}$, $(a > 0 \textbf{ et } b > 0) \Rightarrow ab > 0$.

Remarque
Bien entendu, si $a = b$, alors $a + c = b + c$, et donc
$$a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c.$$

Expliquons alors comment en déduire d'autres propriétés[2] des inégalités :

[2] Que vous connaissez bien.

Proposition 2.1 :

1. $\forall x, y \in \mathbf{R}$, $x \leqslant y \Leftrightarrow y - x \geqslant 0$
2. $\forall x \in \mathbf{R}$, $x > 0 \Leftrightarrow -x < 0$
3. $\forall a, b, c, d \in \mathbf{R}$, $a < b$ **et** $c < d \Rightarrow a + c < b + d$
De plus, si $a < b$ et $c \leqslant d$, alors $a + c < b + d$.
On peut ajouter terme à terme des inégalités, et si l'une d'entre elles est stricte, alors l'inégalité obtenue l'est aussi.
4. $\forall a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \leqslant b$ **et** $c > 0 \Rightarrow ac \leqslant bc$
Multiplier une inégalité par un nombre strictement positif préserve le sens de l'inégalité.
5. $\forall a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \leqslant b$ **et** $c < 0 \Rightarrow ac \geqslant bc$
Multiplier une inégalité par un nombre strictement négatif renverse le sens de l'inégalité.
6. $\forall a, b, c, d \in \mathbf{R}$, $0 < a \leqslant b$ **et** $0 < c \leqslant d \Rightarrow ac \leqslant bd$.
*On peut multiplier terme à terme des inégalités formées de réels **positifs**.*
7. $\forall x \in \mathbf{R}^*$, $x^2 > 0$

Règle des signes
En particulier, si $a \leqslant 0$ et $c > 0$, alors $ac \geqslant 0 \times c$, et donc $ac \geqslant 0$. Le point suivant nous permet aussi de prouver que le produit de deux réels négatifs est positif.

8. $\forall x, y \in \mathbf{R}$, $0 < x < y \Rightarrow 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.

Le passage à l'inverse renverse le sens des inégalités ***formées de nombres positifs***.

9. $\forall x, y \in \mathbf{R}$, $x < y < 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$.

Alternative
Ceci signifie simplement que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$.

Démonstration.

1. Soient $x, y \in \mathbf{R}$. Si $x \leqslant y$, alors en ajoutant $-x$ aux deux membres de l'inégalité[3], il vient $x - x \leqslant y - x$.
Et inversement, si $y - x \geqslant 0$, alors en ajoutant x aux deux membres, $y \geqslant x$.
2. Soit $x \in \mathbf{R}$. Si $x > 0$, alors $x - x > -x$, donc $0 > -x$.
Et inversement, si $-x < 0$, alors en ajoutant x, $0 < x$.
3. Soient $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. Si $a < b$ et $c < d$, alors $b - a > 0$ et $d - c > 0$, si bien que $b - a + d - c > d - c > 0$, et donc $(b + d) - (a + c) > 0$, soit encore $a + c < b + d$.
Dans le cas où la seconde inégalité est large, il suffit de traiter le cas $c = d$, auquel cas on a directement $a + c < b + c$ par le point ii).
4. Soient $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. Si $a < b$, alors $b - a > 0$, et donc $(b - a)c > 0$, soit encore $bc - ac > 0$, donc $ac < bc$.
Dans le cas où $a = b$, alors évidemment $ac = bc$, donc $ac \leqslant bc$.
5. Soient a, b, c trois réels avec $a \leqslant b$ et $c < 0$. Alors $-c > 0$, si bien que $a(-c) \leqslant b(-c)$, soit encore $-bc + ac \geqslant 0$, et donc $ac \geqslant bc$.
6. Soient a, b, c, d des réels vérifiant $0 < a < b$ et $0 < c < d$.
Puisque $a < b$ et $c > 0$, alors $ac < bc$. Et de même, $bc < bd$.
Et donc $ac < bc < bd$, si bien que $ac < bd$.
On traite de même les cas où l'une ou l'autre des inégalités est une égalité.
7. Soit $x \in \mathbf{R}^*$. Alors soit $x > 0$ et alors$-x < 0$, si bien que $-x^2 < 0$, et donc $x^2 > 0$.
Soit $x < 0$, et donc $-x > 0$, et alors le même raisonnement fonctionne.
8. Pour tout réel non nul x, on a $x\frac{1}{x} = 1 > 0$. Donc par la règle des signes, $\frac{1}{x}$ et x sont de même signe.
Soient donc x, y deux réels strictement positifs avec $x < y$. Alors $y - x > 0$ et $xy > 0$, si bien que $\frac{1}{xy} > 0$ et donc $\frac{y-x}{xy} > 0$.
Soit encore $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$.
9. Soient $x, y \in \mathbf{R}$ tels que $x < y < 0$. Alors $-x > -y > 0$.
Et donc par le point précédent, $\frac{1}{-x} < \frac{1}{-y}$, soit encore $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.

□

[3] Ce qui est possible par ii).

Rappel
$c \leqslant d$ signifie

$c < d$ **ou** $c = d$.

Cas particulier
Puisque $1^2 = 1$, ceci montre que $1 > 0$.

On note $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty[$ l'ensemble des réels positifs et $\mathbf{R}_- =]-\infty, 0]$ l'ensemble des réels négatifs. De même on note $\mathbf{R}_+^* =]0, +\infty[$ et $\mathbf{R}_-^* =]-\infty, 0[$.

Et C ?
On ne parle pas du signe d'un complexe, donc les notations $\mathbf{C}_+$, $\mathbf{C}_-$, etc n'ont aucun sens.

Les définitions de fonction croissante/décroissante sont sûrement déjà connues depuis longtemps, mais redonnons les clairement sous forme quantifiée :

Définition 2.2 – Soit D une partie[4] de $\mathbf{R}$, et soit $f : D \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur D. On dit que f est

- **croissante** si $\forall x, y \in D$, $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
- **strictement croissante** si $\forall x, y \in D$, $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
- **décroissante** si $\forall x, y \in D$, $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$.
- **strictement décroissante** si $\forall x, y \in D$, $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

[4] Cela signifie que D est un ensemble formé de nombres réels.

Remarques. ▶ Une fonction croissante (respectivement décroissante) est donc, par définition, une fonction qui préserve (resp. renverse.) le sens des inégalités.
▶ Une fonction strictement croissante est croissante.
▶ Une fonction n'est pas soit croissante, soit décroissante, elle peut n'être ni l'une ni l'autre.

C'est par exemple le cas de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbf{R}^*$.
On a $-1 \leqslant 1$ et $f(-1) < f(1)$, donc f n'est pas décroissante.
Et $1 \leqslant 2$ et $f(2) < f(1)$, donc f n'est pas croissante.

En revanche
f est croissante sur chacun des intervalles $\mathbf{R}_+^*$ et $\mathbf{R}_-^*$.

Proposition 2.3 : *Soit $f : D \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur une partie D de $\mathbf{R}$.*

- *Si f est strictement croissante, alors $\forall a, b \in \mathbf{R}, a \leqslant b \Leftrightarrow f(a) \leqslant f(b)$ et $\forall a, b \in \mathbf{R}, a < b \Leftrightarrow f(a) < f(b)$.*
  En particulier, la fonction carré étant strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$, si a et b sont positifs, alors $a \leqslant b \Leftrightarrow a^2 \leqslant b^2$.
- *Si f est strictement décroissante, alors $\forall a, b \in \mathbf{R}, a \leqslant b \Leftrightarrow f(a) \geqslant f(b)$ et $\forall a, b \in \mathbf{R}, a < b \Leftrightarrow f(a) > f(b)$.*

Remarque
L'ajout de cette proposition par rapport à la définition de fonction strictement croissante, c'est qu'on a une équivalence, et pas seulement une implcation.

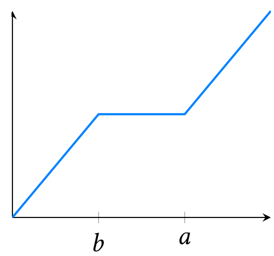
Démonstration. Traitons le cas où f est strictement croissante[5], et soient $a, b \in \mathbf{R}$.
Puisque f est croissante, l'implication $a \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b)$ est vraie.
Inversement, si $a > b$, alors par stricte croissance de f, $f(a) > f(b)$.
Donc $a > b \Rightarrow f(a) > f(b)$, ce qui est équivalent à sa contraposée : $f(a) \leqslant f(b) \Rightarrow a \leqslant b$, qui est bien l'implication[6] cherchée.
Par double implication, on a donc $\forall a, b \in \mathbf{R}$, $a \leqslant b \Leftrightarrow f(a) \leqslant f(b)$.

De même, $a \geqslant b \Rightarrow f(a) \geqslant f(b)$, et donc $f(a) < f(b) \Rightarrow a < b$, l'implication réciproque n'étant rien d'autre que la définition de la stricte croissance. □

[5] Il suffit de renverser les inégalités pour traiter le cas décroissant.

[6] Réciproque de celle déjà prouvée.

⚠ Si f est croissante et pas strictement croissante, alors on n'a qu'une implication, celle qui définit la croissance.
Autrement dit, on n'a pas $f(a) \leqslant f(b) \Rightarrow a \leqslant b$.
Par exemple, pour la fonction croissante dessinée ci-contre, on a $f(a) \leqslant f(b)$ bien que $a > b$.



Ajoutons enfin une dernière propriété, plutôt intuitive, et que nous utiliserons régulièrement :

Proposition 2.4 : *Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels **positifs**. Alors*

$$x_1 + \cdots + x_n = 0 \iff x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0.$$

Autrement dit, une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si tous ces nombres sont nuls.

Démonstration. Il est évident que si les x_i sont tous nuls, alors leur somme est nulle.
Inversement, supposons que l'un des x_i soit non nul. Quitte à les renuméroter, on peut supposer qu'il s'agit de x_1. Alors $x_1 > 0$ et $x_2 \geqslant 0, \dots, x_n \geqslant 0$.
Donc $x_1 + \cdots + x_n \geqslant x_1 + 0 + \cdots + 0 \geqslant x_1 > 0$.
Ainsi, si l'un des x_i est non nul, leur somme est non nulle, ce qui signifie donc que si la somme est nulle, alors tous les x_i sont nuls. □

Remarque. La proposition reste valable si les x_i sont tous négatifs[7], mais pas s'ils ne sont pas tous de même signe, comme le montre l'exemple $3 + (-1) + (-2) = 0$...

[7] Appliquer la proposition aux $-x_i$.

Exemple 2.5

Cherchons les couples de réels (x, y) solutions de $5x^2 + y^2 - 2xy - 4x + 1 = 0$.
On a $y^2 - 2xy + x^2 = (y - x)^2$ et $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$, donc l'équation de départ s'écrit encore $(y - x)^2 + (2x - 1)^2 = 0$.
Puisque le carré d'un réel est un nombre positif, il vient donc

$$(y-x)^2+(2x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (y-x)^2 = 0 \\ (2x-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x = 0 \\ 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

TODO
Méthode ?

Et ainsi l'équation possède une unique solution, qui est le couple $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

2.1.2 Intervalles. Parties de R majorées, minorées, bornées

Certaines parties de $\mathbf{R}$ (et donc pas toutes) sont appelées des intervalles. Donnons-en une définition précise :

Définition 2.6 – Un ensemble $I \subset \mathbf{R}$ est appelé un **intervalle de R** si

$$\forall x, y \in I, \forall z \in \mathbf{R}, x \leqslant z \leqslant y \Rightarrow z \in I.$$

Intuitivement

Cela signifie qu'il n'y a pas de «trous» dans I : dès que deux nombres sont dans I, tous les nombres compris entre ces deux nombres sont aussi dans I.

Exemples 2.7

► $\mathbf{R}_+$ est un intervalle car si $x \leqslant y$ sont deux nombres positifs, et si $x \leqslant z \leqslant y$, alors $z \geqslant x \geqslant 0$, donc $z \in \mathbf{R}_+$.
► $I = [-2, 1[$ est un intervalle. En effet, si $x \leqslant y$ sont dans I et si $x \leqslant z \leqslant y$, alors $-2 \leqslant x \leqslant z \leqslant y < -1$. Donc $-2 \leqslant z < -1$, si bien que $\Rightarrow z \in I$.
► $\mathbf{R}^*$ n'est pas un intervalle, car $-1 \in \mathbf{R}^*$, $1 \in \mathbf{R}^*$, $-1 \leqslant 0 \leqslant 1$, et pourtant $0 \notin \mathbf{R}^*$.

On sait parfaitement décrire tous les intervalles de $\mathbf{R}$. C'est ce que fait la proposition suivante, qui ne sera démontrée que plus tard dans l'année.

Proposition 2.8 : *Si I est un intervalle non vide*[8] *de $\mathbf{R}$, alors I est de l'une*[9] *des formes suivantes :*

- *intervalles ouverts :*
  - $]-\infty, +\infty[:= \mathbf{R}$
  - $]-\infty, a[:= \{x \in \mathbf{R} \mid x < a\}$, *avec* $a \in \mathbf{R}$
  - $]a, +\infty[:= \{x \in \mathbf{R} \mid x > a\}$, *avec* $a \in \mathbf{R}$
  - $]a, b[:= \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$, *où a et b sont deux réels tels que* $a \leqslant b$.
- *intervalles fermés :*
  - $[a, b] := \{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$, *avec* $a \leqslant b$.
    Un tel[10] *intervalle est appelé un* ***segment***.
  - $]-\infty, a] := \{x \in \mathbf{R} \mid x \leqslant a\}$, *où* $a \in \mathbf{R}$
  - $[a, +\infty[:= \{x \in \mathbf{R} \mid x \geqslant a\}$, *où* $a \in \mathbf{R}$
- *intervalles semi-ouverts :*
  - $]a, b] := \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leqslant b\}$ *(semi-ouvert à gauche)*
  - $[a, b[:= \{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x < b\}$ *(semi-ouvert à droite)*

[8] L'ensemble vide (c'est-à-dire qui ne contient aucun élément) est un intervalle, mais nous reviendrons sur ce point dans quelques temps.

[9] Et une seule !

[10] Fermé et sans borne infinie.

Remarques. On vous expliquera l'an prochain que $\mathbf{R}$ est aussi un intervalle fermé, mais cela n'a aucune importance pour l'instant.
Notons que les singletons, c'est-à-dire les ensembles ne contenant qu'un seul nombre sont aussi des intervalles. En effet, $\{a\} = [a, a]$.

Enfin, on utilisera souvent la notation avec des doubles crochets pour désigner des intervalles d'entiers : si a et b sont deux entiers relatifs avec $a \leqslant b$, alors on note

$$[\![a, b]\!] = \{n \in \mathbf{Z} \mid a \leqslant n \leqslant b\} = \{a, a+1, \cdots, b-1, b\}.$$

Par exemple, $[\![2, 6]\!] = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Remarque

On n'utilisera les doubles crochets que pour écrire des intervalles fermés.
Par exemple on évitera d'écrire $]\!]3, 8]\!]$. De toutes façons l'ensemble qu'on aurait envie d'écrire ainsi n'est autre que $[\![4, 8]\!]$.

Définition 2.9 – Soit A une partie[11] de $\mathbf{R}$.

1. on dit que A est **majorée** si $\exists M \in \mathbf{R},\ \forall x \in A,\ x \leqslant M$.
   Si A est majorée, un réel M tel que $\forall x \in A,\ x \leqslant M$ est appelé un **majorant** de A.
2. on dit que A est **minorée** si $\exists m \in \mathbf{R},\ \forall x \in A,\ m \leqslant x$.
   Un tel m, lorsqu'il existe, est alors appelé un **minorant** de A.
3. on dit que A est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée. C'est-à-dire si $\exists m, M \in \mathbf{R},\ \forall x \in A,\ m \leqslant x \leqslant M$.

[11] C'est-à-dire un ensemble formé de nombres réels.

Remarques. ▶ Dans la définition de partie majorée, M ne peut pas dépendre du x choisi dans A, il faut que ce soit le même pour tous les $x \in A$.
Par exemple, il est hors de question de dire que $\mathbf{R}$ est majorée au prétexte que pour tout $x \in \mathbf{R}$, si on pose $M = x + 1$, alors $x \leqslant M$, car alors M dépend de x.
▶ Une partie A de $\mathbf{R}$ est majorée si et seulement si il existe un majorant de A.
▶ Si A est une partie majorée de $\mathbf{R}$, alors elle possède une infinité de majorants[12].
En effet, si M est un majorant de A, alors pour tout réel $M' \geqslant M$, et pour tout $x \in A$, $x \leqslant M \leqslant M'$. Et donc tous les éléments de $[M, +\infty[$ sont encore des majorants de A.

[12] Et donc on prendra soin de parler d'**un** majorant de A et non **du** majorant de A.

Exemples 2.10

▶ $\mathbf{R}_+^*$ n'est pas majoré. En effet, supposons par l'absurde qu'il existe $M \in \mathbf{R}$ majorant $\mathbf{R}_+^*$. Puisque $1 \in \mathbf{R}_+^*$, on a donc $1 \leqslant M$, et donc $M > 0$.
Mais $M < \underbrace{M+1}_{\in \mathbf{R}_+^*}$, contredisant la définition de majorant.

▶ Les seuls intervalles bornés de $\mathbf{R}$ sont les intervalles de la forme $]a, b[$, $]a, b]$, $[a, b[$ ou $[a, b]$, avec $a < b$.
De même, les seuls intervalles majorés sont ceux dont la borne de droite est un réel, c'est-à-dire ceux qui sont bornés ou ceux de la forme $]-\infty, a]$ ou $]-\infty, a[$.

2.2 Rappels calculatoires

2.2.1 Puissances, racines carrées

Définition 2.11 – Si $x \geqslant 0$, alors on note $\sqrt{x}$, et on appelle **racine carrée de** x l'unique réel positif dont le carré vaut x.

⚠ Si on a toujours[13], pour a positif, $(\sqrt{a})^2 = a$, on n'a pas $x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$, mais

$$x^2 = a \Leftrightarrow (x = \sqrt{a} \textbf{ ou } x = -\sqrt{a}).$$

En revanche, pour $x \geqslant 0$, on a bien $x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$.

[13] C'est la définition de la racine carrée.

Proposition 2.12 : *Pour x, y positifs, on a $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$ et si $y \neq 0$, $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$.*

Danger !
En revanche, on n'a généralement pas

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

ni $\sqrt{x-y} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$.

Démonstration. Le réel $\sqrt{x}\sqrt{y}$ est positif, et son carré est

$$\left(\sqrt{x}\sqrt{y}\right)^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2 \left(\sqrt{y}\right)^2 = xy$$

donc nécessairement[14], $\sqrt{x}\sqrt{y} = \sqrt{xy}$.
On raisonne de même pour le quotient. □

[14] Car il existe un **unique** réel positif de carré égal à xy.

Vous connaissez déjà bien entendu $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2, \dots, \sqrt{81} = 9$ et $\sqrt{100} = 10$.
Si vous ne les connaissez pas déjà, il est conseillé d'apprendre $\sqrt{121} = 11 \Leftrightarrow 11^2 = 121$,

$\sqrt{144} = 12 \Leftrightarrow 12^2 = 144$ et $\sqrt{169} = 13 \Leftrightarrow 13^2 = 169$.

Un moyen souvent pratique de simplifier une expression contenant une somme ou une différence de racines est de faire apparaître la quantité conjuguée, où la quantité conjuguée de $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ et vice-versa.

Autrement dit
La quantité conjuguée est obtenue en changeant le signe entre les deux racines.

Exemple 2.13

On a

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} - 8\sqrt{5} &= \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} - 8\sqrt{5}\\ &= \frac{5 - 2\sqrt{5}+1}{(\sqrt{5})^2 - 1^2} - 8\sqrt{5}\\ &= \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} - 8\sqrt{5} = \frac{3}{2} - \frac{17\sqrt{5}}{2}.\end{aligned}$$

Enfin, quelques rappels sur les puissances :

Définition 2.14 – Pour $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$, on note

$$x^n := \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0\\ \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ fois}} & \text{si } n > 0\end{cases}$$

Si x est non nul, et si n est un entier strictement négatif, alors on note

$$x^n := \left(\frac{1}{x}\right)^{-n} = \frac{1}{\underbrace{x \cdot x \cdots x}_{-n \text{ fois}}}.$$

En particulier
0^n est toujours nul, sauf si $n = 0$: par définition, $0^0 = 1$.

Proposition 2.15 : *Pour $x, y \in \mathbf{R}$ et m, n dans $\mathbf{N}$, on a*

$$x^{m+n} = x^m \cdot x^n,\ x^{mn} = (x^m)^n = (x^n)^m \ \text{ et } (xy)^n = x^n y^n.$$

Si de plus x et y sont non nuls, alors ces formules restent valables pour m, n dans $\mathbf{Z}$.

☠ Danger !
La puissance $n^{\text{ème}}$ d'une somme n'est pas la somme des puissances $n^{\text{èmes}}$: en général

$$(x+y)^n \neq x^n + y^n.$$

Exemple 2.16

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\begin{aligned}\frac{3 \cdot 16^{n+1} + (-4)^{2n+1} + (-2)^{4n}}{8^n - (-2)^{3n+2}} &= \frac{3 \cdot 16 \cdot 16^n - 4 \cdot (4^2)^n + (2^4)^n}{8^n - 4 \cdot ((-1)^3)^n \cdot (2^3)^n}\\ &= \frac{16^n\,(3 \cdot 16 - 4 + 1)}{8^n\,(1 + (-1)^{n+1} \cdot 4)}\\ &= \frac{16^n}{8^n}\,\frac{3 \cdot 15}{1 + 4 \cdot (-1)^{n+1}}\\ &= \left(\frac{16}{8}\right)^n \frac{45}{1 + 4 \cdot (-1)^{n+1}} = \begin{cases} -15 \cdot 2^n & \text{si } n \text{ est pair}\\ 9 \cdot 2^n & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases}\end{aligned}$$

2.2.2 Équations et égalités

Résoudre une équation d'inconnue x, c'est déterminer l'ensemble (généralement noté $\mathcal{S}$) des valeurs de l'inconnue x satisfaisant l'équation. Autrement dit, on veut avoir l'équivalence : «x satisfait l'équation» $\Leftrightarrow x \in \mathcal{S}$.

Cela signifie que $\mathcal{S}$ doit contenir **toutes** les solutions de l'équation, **et rien d'autre**.

Exemples 2.17

Par exemple, si on s'intéresse à l'équation $x^2 = 4$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$, alors 2 est clairement solution. Mais on n'en conclut pas que $\mathcal{S} = \{2\}$, car on oublierait alors l'autre solution réelle qui est -2.
Autrement dit, on a $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$, mais pas $x = 2 \Leftrightarrow x^2 = 4$.
Ce qui est correct, c'est que

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow (x = 2 \textbf{ ou } x = -2) \Leftrightarrow x \in \{-2, 2\}.$$

Donc l'ensemble des solutions de $x^2 = 4$ est $\mathcal{S} = \{-2, 2\}$.

En français
Si $x = 2$, **alors** x est solution. En revanche, **si** x est solution, **alors** x n'est pas nécessairement égal à 2.

De même, si on s'intéresse à l'équation $x - 2 = \sqrt{x+10}$, alors on peut remarquer que si x est solution, puisque[15] $\sqrt{x+10} \geqslant 0$, alors $x - 2 \geqslant 0$, et donc $x \geqslant 2$.
Ceci ne prouve surtout pas que $\mathcal{S} = [2, +\infty[$. En effet, nous avons prouvé que les solutions éventuelles de l'équation sont dans $[2, +\infty[$. Mais pas que tous les réels de $[2, +\infty[$ sont des solutions de l'équation.
Autrement dit, $x - 2 = \sqrt{x+10} \Rightarrow x \geqslant 2$, l'implication réciproque étant fausse[16].
Donc $\mathcal{S} \subset [2, +\infty[$, mais cette inclusion n'est pas une égalité.
En revanche, le raisonnement suivant est correct :

$$x-2 = \sqrt{x+10} \Leftrightarrow \left[x - 2 \geqslant 0 \textbf{ et } (x-2)^2 = x + 10\right] \Leftrightarrow \left[x \geqslant 2 \textbf{ et } x^2 - 5x - 6 = 0\right].$$

Une résolution de l'équation $x^2 - 5x - 6 = 0$, de discriminant 49 nous donne alors deux solutions qui sont 6 et -1.
Et donc $x - 2 = \sqrt{x+10} \Leftrightarrow [x \geqslant 2 \textbf{ et } (x = 6 \textbf{ ou } x = -1) \Leftrightarrow x = 6]$.
Et par conséquent, l'ensemble des solutions de l'équation est $\mathcal{S} = \{6\}$.

Le recours aux équivalences, bien que pratique[17] n'est pas obligatoire.
On peut aussi raisonner par analyse-synthèse : si x est une solution de $x-2 = \sqrt{x+10}$ alors $(x-2)^2 = x + 10$.
Mais $(x-2)^2 = x + 10 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow [x = 6 \textbf{ ou } x = -1]$.
Et donc $x - 2 = \sqrt{x-10} \Rightarrow x = 6 \textbf{ ou } x = -1$.
Ainsi, les solutions de l'équation[18] ne peuvent valoir que -1 et 6.
Reste à vérifier si -1 et 6 sont des solutions.
Pour $x = 6$, on a $x - 2 = 4$ et $\sqrt{x+10} = \sqrt{16} = 4 = x - 2$, donc 6 est solution.
Pour $x = -1$, on a $x - 2 = -3$ et $\sqrt{x+10} = \sqrt{9} = 3 \neq -3$, donc -1 n'est pas solution.
Et donc l'ensemble des solutions de l'équation est $\mathcal{S} = \{6\}$.

[15] Une racine carrée est toujours positive par définition.

[16] Par exemple $x = 3$ n'est pas solution, bien qu'étant supérieur à 2.

[17] À condition d'être à l'aise avec les équivalences...

[18] S'il en existe !

Généralement, le contexte[19] nous dit dans quel ensemble se trouve l'inconnue x, notamment si on cherche des solutions réelles, complexes, ou entières.

[19] L'énoncé dans le cadre d'un exercice.

Exemple 2.18

Prenons l'exemple de l'équation $x^4 = 4$. On a

$$\begin{aligned} x^4 = 4 &\Leftrightarrow (x^2)^2 - 2^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2-2)(x^2+2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2 = 0 \textbf{ ou } x^2 + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 2 \textbf{ ou } x^2 = -2. \end{aligned}$$

Si on cherche les solutions réelles, alors $x^2 = -2$ n'a pas de solution, et les deux solutions de $x^2 = 2$ sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.
En revanche, si on cherche les solutions complexes, alors les solutions de $x^2 = 2$

sont toujours $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$, mais $x^2 = -2$ possède deux solutions qui sont $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$.
Donc l'ensemble des solutions complexes de $x^4 = 4$ est $\left\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}\right\}$.

On commencera toujours la résolution d'une équation (ou d'une inéquation) par la recherche du domaine de validité de l'équation, c'est-à-dire les valeurs de x pour lesquelles l'équation a un sens (à bien distinguer des valeurs pour lesquelles elle est vraie, qui sont les solutions).
Par exemple, une équation avec un logarithme n'a de sens que si la quantité située dans le logarithme est strictement positive. De même s'il y a des racines.

Exemple 2.19

Considérons l'équation $2\ln(x) + \ln(2x+5) = \ln(2-x)$.
Elle n'est valable que si on a à la fois $x > 0$, $2x+5 > 0$ et $2-x > 0$, soit si et seulement si $x \in]0,2[$.
Pour $x \in]0,2[$, on a alors :

$$\begin{aligned} 2\ln(x) + \ln(2x+5) = \ln(2-x) &\Leftrightarrow \ln\left(x^2(2x+5)\right) = \ln(2-x) \\ &\Leftrightarrow x^2(2x+5) = 2-x \\ &\Leftrightarrow 2x^3 + 5x^2 + x - 2 = 0. \end{aligned}$$

Notons que -1 étant solution de cette équation, le membre de gauche se factorise par $x+1$: $2x^3 + 5x^2 + x - 2 = (x+1)\left(2x^2 + 3x - 2\right)$.
Et alors, un calcul de discriminant nous donne $2x^2+3x-2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ **ou** $x = \dfrac{1}{2}$.
Donc bien que l'équation $(x+1)(2x^2+3x-2) = 0$ possède trois solutions, une seule d'entre elles est dans $]0,2[$, et donc notre équation de départ possède $\dfrac{1}{2}$ comme **unique** solution.

Détails
On a bien une équivalence car la fonction ln est strictement croissante, et donc ne prend pas deux fois la même valeur.

Rappelons rapidement ce qu'on «a le droit de faire» lorsqu'on manipule des égalités[20].

[20] Et donc a fortiori lorsqu'on manipule des équations.

Proposition 2.20 : *Soient a, b, c des réels. Alors*

- *Si $c \neq 0$, alors $a = b \Leftrightarrow ac = bc$.*
- *$a = b \Rightarrow a^2 = b^2$. Si de plus a et b sont de même signe, alors $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$.*
- *$ab = 0 \Leftrightarrow (a = 0$ **ou** $b = 0)$ a.k.a. «un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul».*
- *Si $b \geqslant 0$, alors $a = \sqrt{b} \Leftrightarrow (a^2 = b$ **et** $a \geqslant 0)$.*
- *Si f est une fonction, et que a et b sont dans le domaine de définition de f, alors $a = b \Rightarrow f(a) = f(b)$.
Si de plus f ne prend jamais deux fois la même valeur, et en particulier si f est strictement monotone (ce qui est notamment le cas des fonctions logarithme, exponentielle, cube et racine carrée, mais pas de la fonction carré), alors $a = b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$.*

Danger !
L'équivalence ne tient plus si a et b sont de signes opposés, par exemple $1^2 = (-1)^2$ mais $1 \neq -1$.

⚠ La réciproque du dernier point est généralement fausse : on ne peut pas en toute généralité affirmer que $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$. Pensez par exemple à la fonction carré, la fonction cos, ou pire, à une fonction constante.

2.2.3 Inégalités et inéquations

Les inéquations ne diffèrent pas vraiment des équations, si ce n'est que la manipulation des inégalités demande un peu plus de précaution que celle des égalités, et les principales règles de calcul ont été énoncées plus tôt.

⚠ Comme nous l'avons vu, s'il existe des règles pour ajouter ou multiplier des inégalités, nous n'en énoncerons pas concernant la soustraction ou le quotient d'inégalités, opérations qui demandent un peu de vigilance (en tous cas on ne peut surtout pas soustraire ou diviser membre à membre des inégalités).

Exemple 2.21

Supposons qu'on ait $2 \leqslant a \leqslant 5$ et $1 \leqslant b \leqslant 3$.
Pour encadrer $a - b$, on procède de la manière suivante :

1. on commence par encadrer $-b$: $-3 \leqslant -b \leqslant -1$
2. puis on ajoute les encadrements de a et de $-b$:

$$2 - 3 \leqslant a - b \leqslant 5 - 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant a - b \leqslant 4.$$

Détails
La multiplication par -1 change le sens de l'inégalité.

De même, pour encadrer le quotient $\frac{a}{b}$, on commence par encadrer $\frac{1}{b}$: $\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{1}$
puis on multiplie les inégalités : $\frac{2}{3} \leqslant \frac{a}{b} \leqslant 5$.

Rappelons également que les tableaux de signe sont un très bon moyen d'étudier le signe d'un produit ou d'un quotient, mais qu'ils ne sont utiles que dans ces cas là, et qu'**on n'utilisera jamais de tableau de signe pour étudier le signe d'une somme** (ou d'une différence).
Pour prouver une inégalité, il est parfois efficace de se ramener à l'étude du signe d'une fonction, qui peut alors s'obtenir en étudiant les variations de cette fonction

Exemple 2.22

Prouvons que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $e^x \geqslant 1 + x$.
On a $e^x \geqslant 1 + x \Leftrightarrow e^x - 1 - x \geqslant 0$.
Nous allons donc prouver cette seconde inégalité, et pour cela, définissons une fonction f sur $\mathbf{R}$ en posant $f(x) = e^x - 1 - x$.
Alors f est dérivable sur $\mathbf{R}$, et $f'(x) = e^x - 1$. On a donc

$$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 0.$$

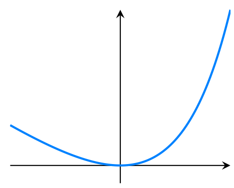


Figure 2.1– La fonction f.

Donc f est croissante sur $\mathbf{R}_+$ et décroissante sur $\mathbf{R}_-$.
Son tableau de variations est alors donné par :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\searrow$		0		$\nearrow$

Ainsi le minimum de f est égal à 0, de sorte que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x \geqslant 1 + x.$$

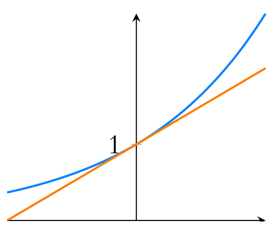


Figure 2.2– L'exponentielle et sa tangente en 0.

Remarquons au passage que cette inégalité possède une interprétation géométrique très simple : la tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de l'exponentielle en 0 est la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x + 1$.
Et donc $e^x \geqslant 1 + x$ signifie que $\mathscr{C}$ est au-dessus de $\mathscr{D}$, ce qui n'est finalement pas une surprise puisque la fonction exponentielle est convexe.

Établir des encadrements, des majorations ou des minorations est un art subtil, qui demande de faire des compromis entre d'une part la précision des inégalités («est-ce que je commets une grande erreur en majorant A par B ?» ou encore «est-ce que A peut être très proche de B ou non ?») et d'autre part la rapidité et la facilité des calculs.

Exemple 2.23

Essayons d'encadrer la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+1+\cos(x)}{x^2-x+2}$ sur le segment $[1,2]$.

▸ **Première méthode** : pour $x \in [1,2]$, on a $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ et donc $1 \leqslant x+1+\cos(x) \leqslant 4$.
De même, $1 \leqslant x^2 \leqslant 4$ et $-2 \leqslant -x \leqslant -1$, donc $1 \leqslant x^2-x+2 \leqslant 5$.
Par passage à l'inverse, on en déduit que $\dfrac{1}{5} \leqslant \dfrac{1}{x^2-x+2} \leqslant 1$.
Et donc pour $x \in [1,2]$, $\dfrac{1}{5} \leqslant f(x) \leqslant 4$.

▸ **Seconde méthode** : essayons d'encadrer plus subtilement le numérateur : soit $g : x \mapsto x+1+\cos(x)$. Alors sa dérivée est $g' : x \mapsto 1-\sin(x) \geqslant 0$.
Donc g est croissante sur $[1,2]$, et donc pour $x \in [1,2]$, $g(1) \leqslant g(x) \leqslant g(2)$. En notant que $\cos(1) \geqslant 0$ et $\cos(2) \leqslant 0$, on arrive par exemple à $2 \leqslant g(x) \leqslant 3$.
De même, la fonction $x \mapsto x^2-x+2$ est croissante sur $[1,2]$, et donc pour $x \in [1,2]$, on a $2 \leqslant 1^2-1+2 \leqslant x^2-x+2 \leqslant 2^2-2+2 \leqslant 4$.
Donc au final, pour $x \in [1,2]$, $\frac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{3}{2}$.

> **Remarque**
> Notons que cet encadrement est plus fin que le précédent, mais qu'il a demandé un peu plus de travail.

▸ **Troisième méthode** : le moyen d'obtenir un encadrement optimal, est de dresser le tableau de variations de f, afin d'en déterminer le maximum et le minimum.
Mais ici le calcul de f' nous fait rapidement comprendre qu'étudier son signe ne sera pas chose facile...
Pour l'avoir vérifié informatiquement, je sais qu'on trouverait alors que f est décroissante sur $[1,2]$, et donc que pour tout $x \in [1,2]$, $f(2) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$, avec $f(1) \simeq 1.27$ et $f(2) \simeq 0.65$.

2.2.4 Quelques compléments sur les polynômes

Définition 2.24 – Une **fonction polynomiale** est une fonction f de la forme $f : x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ où $n \in \mathbf{N}$, et $a_0, \dots, a_n$ sont des réels , qui sont appelés les **coefficients de** f de degré 0, de degré 1, ..., de degré n.
Si $a_n \neq 0$, on dit que f est de **degré** n.
On appelle alors **racine de** f tout réel x vérifiant $f(x) = 0$.

> **Terminologie**
> Par abus de langage, on dit souvent «polynôme» au lieu de **fonction polynomiale**. Il existe une différence (subtile) entre les deux, que nous expliquerons plus tard dans l'année, et il m'arrivera souvent de dire polynôme au lieu de fonction polynomiale.

Exemple 2.25

La fonction $f : x \mapsto 4x^3 - 5x^2 + 2$ est une fonction polynomiale de degré 3.

Vous savez très bien étudier les fonctions polynomiales de degré 1, qui sont les fonctions affines, mais également les fonctions polynomiales de degré 2 auxquelles vous avez consacré beaucoup[21] de temps en première. Vous savez notamment en dresser le tableau de variations, le tableau de signe, et en trouver les racines.
La recherche des racines des fonctions polynomiales de degré 3 ou 4 est bien plus fastidieuse (et nous ne verrons pas de formules générales), et celle des polynômes de degré 5 ou plus est très difficile.

[21] Trop ?

> **Pour la culture**
> On sait même qu'il n'existe pas de formule générale (comme on connaît $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ pour le degré 2) permettant de déterminer les racines d'un polynôme de degré 5 ou plus (théorème d'Abel).

En revanche, un principe général, que nous justifierons bientôt, mais qu'il faudrait maîtriser rapidement est le suivant : si f est une fonction polynomiale dont α est une racine, alors $f(x)$ se factorise par $(x-\alpha)$.
Plus précisément, si f est de degré n, alors f est le produit de $x-\alpha$ par un polynôme de degré $n-1$.

Exemple 2.26

Soit $f(x) = 2x^4 - 10x^3 + 20x^2 - 18x + 6$.
Alors on constate que $f(1) = 0$, et donc 1 est une racine de f. Par conséquent, $f(x)$ se factorise par $x - 1$, sous la forme $f(x) = (x-1)(ax^3 + bx^2 + cx + d)$.
Pour trouver a, b, c et d, il faut développer cette expression et procéder par identification. Par exemple, lorsqu'on développe, le terme en x^4 est ax^4, donc nécessairement $a = 2$.
Puis le terme en x^3 est $-ax^3 + bx^3 = (b-a)x^3$. Ce terme doit valoir $-10x^3$, et puisque $a = 2$, alors $b = -8$.
En continuant ainsi, il vient $f(x) = (x-1)(2x^3 - 8x^2 + 12x - 6)$.
Mais on constate alors que 1 est encore racine de $2x^3 - 8x^2 + 12x - 6$, qui se factorise encore par $x - 1$. Et alors $f(x) = (x-1)(x-1)(2x^2 - 6x + 6)$.
Un calcul de discriminant prouve alors que $2x^2 - 6x + 6 = 0$ n'a pas de solution réelle, et donc que la seule solution réelle de $f(x) = 0$ est $x = 1$.
La factorisation obtenue de f nous permet également de dresser facilement son tableau de signe[22].

Méthode
De manière générale, pour étudier un polynôme de degré 3 ou plus, commencer par chercher une racine «évidente», généralement parmi $-2, -1, 0, 1, 2$.
Si vous en trouvez une, vous pourrez alors factoriser pour faire apparaître un polynôme de degré moins élevé.

[22] C'est d'ailleurs un bon exercice.

Notons également que, quitte à faire un changement de variable, nombre d'équations se ramènent à une équation polynomiale.

Exemple 2.27

Résolvons l'équation $e^{3x} - 2e^{2x} + 1 = 0$.
Soit $x \in \mathbf{R}$. Posons $X = e^x$, de sorte que l'équation s'écrit encore $X^3 - 2X^2 + 1 = 0$.
Puisque 1 est clairement racine du polynôme $X^3 - 2X^2 + 1$, celui-ci se factorise par $X - 1$: $X^3 - 2X^2 + 1 = (X-1)(X^2 - X - 1)$.
Et donc $X^3 - 2X^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow X = 1$ **ou** $X^2 - X - 1 = 0$.
Les racines de $X^2 - X - 1$ sont $X_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $X_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Il ne faut alors pas oublier de revenir à la variable de départ[23] : on a donc

$$e^{3x} - 2e^{2x} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^x \in \left\{1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

Une exponentielle étant toujours positive, on ne peut avoir $e^x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Et on a $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ et $e^x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.
Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation de départ est $\left\{0, \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$.

[23] Ici x.

2.2.5 Prouver des identités

La maîtrise du calcul n'est pas seulement nécessaire pour résoudre des équations ou des inéquations, et on vous demandera souvent de prouver des égalités/inégalités valables dans un contexte plus ou moins général.

Cela demande souvent un peu d'intuition pour partir dans la bonne direction.
Il existe tout de même une méthode qui fonctionne assez souvent, et peut constituer un bon point de départ lorsqu'on n'a pas d'idée : utiliser des équivalences.
En effet, dans un raisonnement par équivalences, la proposition[24] de départ est vraie si et seulement si la proposition d'arrivée est vraie.
Et donc une option est de transformer l'identité de départ par équivalences jusqu'à arriver à une identité que l'on sait prouver, ou qui est trivialement vraie.

[24] Égalité ou inégalité.

Exemple 2.28

Prouvons que pour tous réels a, b, c, on a $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + ac + bc$.
On a

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + ac + bc &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow 2\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc\right) \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \left(a^2 + b^2 - 2ab\right) + \left(a^2 + c^2 - 2ac\right) + \left(b^2 + c^2 - 2bc\right) \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est trivialement vraie, puisqu'un carré est toujours positif, donc l'inégalité de départ est vraie.

Enfin, touchons deux mots du principe de substitution : si vous savez qu'une identité est vraie[25] pour tout x, alors vous pouvez donner à x la valeur de votre choix, même si cette valeur dépend d'autres variables.

[25] Je pense notamment aux identités remarquables que vous connaissez déjà.

Exemple 2.29

Si x et y sont deux réels, alors $(x-y)^2 \geqslant 0$.
Mais $(x-y)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow 2xy \leqslant x^2 + y^2$.
En particulier, si a et b sont deux réels strictement positifs, alors en substituant a à x et b^2 à y, on a

$$a^2 + b^4 = a^2 + \left(b^2\right)^2 \geqslant 2ab^2.$$

De même, on a $a^4 + b^2 = \left(a^2\right)^2 + b^2 \geqslant 2a^2b$.
En passant à l'inverse, on en déduit que $\dfrac{1}{a^2+b^4} \leqslant \dfrac{1}{2ab^2}$ et $\dfrac{1}{a^4+b^2} \leqslant \dfrac{1}{2a^2b}$. Et donc

$$\frac{a}{a^4+b^2} + \frac{b}{a^2+b^4} \leqslant \frac{a}{2a^2b} + \frac{b}{2ab^2} \leqslant \frac{1}{2ab} + \frac{1}{2ab} \leqslant \frac{1}{ab}.$$

Nous venons donc de prouver que pour tous réels strictement positifs a et b,

$$\frac{a}{a^4+b^2} + \frac{b}{a^2+b^4} \leqslant \frac{1}{ab}.$$

Astuce
Cette inégalité est très classique et à savoir redémontrer si besoin.

2.3 Valeur absolue, partie entière

2.3.1 Valeur absolue

Définition 2.30 – Soit $x \in \mathbf{R}$. On appelle **valeur absolue de** x et on note $|x|$ le réel positif défini par

$$|x| := \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Intuition
Passer à la valeur absolue, c'est «juste» enlever un éventuel signe moins.

Exemple 2.31

On a $\left|\dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$, $|3| = 3$ et pour $n \in \mathbf{N}$, $|(-1)^n| = 1$.

Remarques. ► Une valeur absolue est toujours un nombre positif.
► $|x|$ est le plus grand des deux nombres x et $-x$. Autrement dit, $|x| = \max(x, -x)$.

Proposition 2.32 : *Soient a et b deux réels. Alors*

i) $a \leqslant |a|$

ii) $|a|^2 = a^2$ *et donc* $|a| = \sqrt{a^2}$

iii) $|ab| = |a| \cdot |b|$

iv) *si* $b \neq 0$, *alors* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

v) $|a| = |b| \Leftrightarrow (a = b \textbf{ ou } a = -b)$

vi) *Si* $b \geqslant 0$, *alors* $|a| \leqslant b \Leftrightarrow -b \leqslant a \leqslant b$ *et* $|a| \geqslant b \Leftrightarrow (a \geqslant b \textbf{ ou } a \leqslant -b)$.
Ces inégalités restent valables si l'on remplace les inégalités larges ($\leqslant$) *par des inégalités strictes* ($<$).

Démonstration. *i)* Si $a \geqslant 0$, alors $|a| = a$, et donc $a \leqslant |a|$.
Et si $a \leqslant 0$, alors $a \leqslant 0 \leqslant |a|$.
ii) Si $a \geqslant 0$, alors $|a|^2 = a^2$ et si $a \leqslant 0$, alors $|a|^2 = (-a)^2 = a^2$.
Par conséquent, $|a|$ est l'unique nombre positif dont le carré vaut a^2 : c'est $\sqrt{a^2}$.

iii) Si $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, alors $ab \geqslant 0$, et donc $|ab| = ab = |a| \cdot |b|$.
Si $a \geqslant 0$ et $b \leqslant 0$, alors $ab \leqslant 0$, et donc $|ab| = -ab = a \times (-b) = |a| \cdot |b|$.
On traite de même les deux cas restants.

iv) Si $b > 0$, alors $\frac{1}{b} > 0$, et donc $\left|\frac{1}{b}\right| = \frac{1}{b}$.
Si $b < 0$, alors $\frac{1}{b} < 0$ et donc $\left|\frac{1}{b}\right| = -\frac{1}{b} = \frac{1}{-b} = \frac{1}{|b|}$.
Donc dans tous les cas $\left|\frac{1}{b}\right| = \frac{1}{|b|}$ et par conséquent[26]

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \left|a \times \frac{1}{b}\right| = |a| \cdot \left|\frac{1}{b}\right| = |a|\frac{1}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}.$$

[26] En utilisant le point iii) pour la valeur absolue du produit.

v) Puisque $|a|$ et $|b|$ sont positifs, on a

$$\begin{aligned} |a| = |b| &\Leftrightarrow |a|^2 = |b|^2 \\ &\Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (a-b)(a+b) = 0 \\ &\Leftrightarrow a - b = 0 \textbf{ ou } a + b = 0 \\ &\Leftrightarrow a = b \textbf{ ou } a = -b. \end{aligned}$$

vi) On a $|a| \leqslant b \Leftrightarrow |a|^2 \leqslant b^2 \Leftrightarrow a^2 \leqslant b^2$.
Et alors il est bien connu que ceci équivaut à $-b \leqslant a \leqslant b$. □

Arnaque ?
Si vous tenez absolument à redémontrer ceci : utilisez
$a^2 \leqslant b^2 \Leftrightarrow (a-b)(a+b) \leqslant 0$
et un tableau de signe vous aidera à conclure.

⚠ En particulier, on prendra garde au fait que la fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas croissante, c'est-à-dire qu'on n'a pas $a \leqslant b \Rightarrow |a| \leqslant |b|$.
Par exemple $-2 \leqslant 1$ mais on n'en déduira pas que $|-2| \leqslant |1|$.

Définition 2.33 – Si x et y sont deux réels, le nombre (positif) $|x-y|$ est appelé **distance entre x et y.**

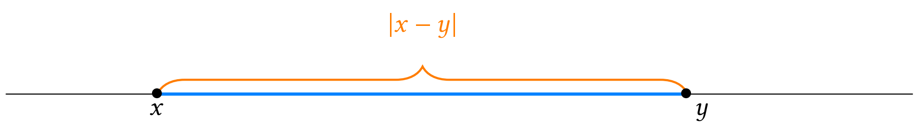
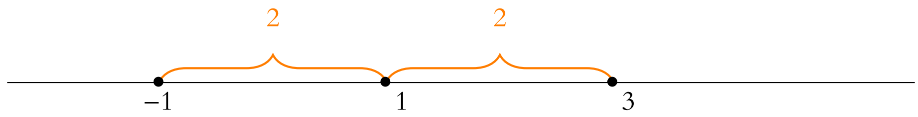


FIGURE 2.3 – $|x-y|$ est la longueur du segment joignant x à y.

Exemple 2.34

On a $|x-1| \leqslant 2 \Leftrightarrow -2 \leqslant x-1 \leqslant 2 \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 3$.
Autrement dit, si et seulement si la distance entre x et 1 est inférieure ou égale à 2.



TODO
Plus joli avec bend ?

Théorème 2.35 (Inégalité triangulaire) : *Soient a et b deux réels. Alors*

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|.$$

De plus on a $|a+b| = |a|+|b|$ si et seulement si a et b sont de même signe.

Démonstration.

$$\begin{aligned} |a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab &= |a|^2+|b|^2+2ab \\ &\leqslant |a|^2+2|ab|+|b|^2 \\ &\leqslant |a|^2+2|a|\cdot|b|+|b|^2 \\ &\leqslant (|a|+|b|)^2. \end{aligned}$$

$|ab| \leqslant ab.$

Par croissance de la fonction racine, on a donc

$$|a+b| \leqslant \big||a|+|b|\big| = |a|+|b|.$$

De plus, il y a égalité si et seulement si l'inégalité $ab \leqslant |ab|$ est une égalité, c'est-à-dire si et seulement si $ab \geqslant 0$, soit si et seulement si a et b sont de même signe. □

⚠ Cette inégalité reste bien entendu valable si on remplace b par $-b$, mais elle devient alors

$$|a-b| \leqslant |a|+|-b| = |a|+|b|.$$

Une grosse erreur serait d'écrire $|a-b| \leqslant |a|-|b|$.
Par exemple, pour $a=2$ et $b=3$, cela nous mènerait à

$$|2-3| \leqslant |2|-|3| \Leftrightarrow 1 \leqslant -1$$

ce qui est évidemment faux, une valeur absolue étant toujours positive.

Corollaire 2.36 (Inégalité triangulaire renversée) – *Soient a et b deux réels. Alors*

$$\big||a|-|b|\big| \leqslant |a+b|.$$

Astuce
Un moyen condensé de retenir les inégalités triangulaires en minimisant les risques d'erreur sur les signes est le suivant :
$\big||a|-|b|\big| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a|+|b|.$

Démonstration. On a $|a| = |(a+b)-b| \leqslant |a+b|+|b|$.
Et donc $|a|-|b| \leqslant |a+b|$.
Sur le même principe, on a $|b|-|a| \leqslant |a+b|$. Et donc

$$-|a+b| \leqslant |a|-|b| \leqslant |a+b| \Leftrightarrow \big||a|-|b|\big| \leqslant |a+b|.$$

□

Corollaire 2.37 (Inégalité triangulaire généralisée) – *Si $x_1, \dots, x_n$ sont n réels, avec $n \geqslant 2$, alors*

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

On a alors l'égalité $|x_1 + \cdots + x_n| = |x_1| + \cdots + |x_n|$ si et seulement si tous les x_i sont de même signe.

Démonstration. Prouvons le résultat par récurrence sur $n \geqslant 2$, en notant $\mathscr{P}(n)$ la propriété « pour tous réels $x_1, \dots, x_n$, $|x_1 + \cdots + x_n| \leqslant |x_1| + \cdots + |x_n|$ avec égalité si et seulement si les x_i sont de même signe».
La récurrence a été initialisée, l'inégalité triangulaire n'étant rien d'autre que $\mathscr{P}(2)$.
Supposons donc $\mathscr{P}(n)$ vraie, et soient $x_1, \dots, x_{n+1}$ des réels. Alors

$$\begin{aligned} |x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1}| &= |(x_1 + \cdots + x_n) + x_{n+1}| \\ &\leqslant |x_1 + \cdots + x_n| + |x_{n+1}| \\ &\leqslant |x_1| + \cdots + |x_n| + |x_{n+1}| \end{aligned}$$

Détails
C'est l'inégalité triangulaire appliquée aux **deux** réels $x_1 + \cdots + x_n$ et x_{n+1}.

C'est l'hypothèse de récurrence.

De plus, on a égalité si et seulement si[27] à chaque étape du raisonnement précédent on avait une égalité, c'est-à-dire si et seulement si

$$\begin{cases} |x_1 + \cdots + x_n| + |x_{n+1}| = |x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1}| \\ |x_1 + \cdots + x_n| = |x_1| + \cdots + |x_n| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 + \cdots + x_n) \text{ et } x_{n+1} \text{ de même signe} \\ x_1, \dots, x_n \text{ sont de même signe}^{28} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \text{ sont de même signe.}$$

[27] Si l'une de nos inégalités était stricte, l'inégalité finale serait une inégalité stricte.

[28] C'est dans l'hypothèse de récurrence.

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, et par le principe de récurrence, pour tout $n \geqslant 2$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie. □

Voici une autre caractérisation des parties bornées de $\mathbf{R}$, reposant sur la valeur absolue.

Proposition 2.38 : *Soit A une partie de $\mathbf{R}$. Alors*

$$A \text{ est bornée } \Leftrightarrow \exists K \in \mathbf{R}, \forall x \in A, |x| \leqslant K.$$

Démonstration. Supposons que A soit bornée, et soient donc m et M respectivement un minorant et un majorant de A, de sorte que pour tout $x \in A$, $m \leqslant x \leqslant M$.
Posons alors $K = \max(|m|, |M|)$.
Alors pour $x \in A$, on a $-K \leqslant -|m| \leqslant m \leqslant x \leqslant M \leqslant |M| \leqslant K$, si bien que $|x| \leqslant K$.

Et inversement, si K est tel que pour tout $x \in A$, $|x| \leqslant K$, alors pour tout $x \in A$, $-K \leqslant x \leqslant K$, donc A est majorée (par K) et minorée (par $-K$), donc bornée. □

2.3.2 Partie entière

Définition 2.39 – Soit $x \in \mathbf{R}$. Nous admettons[29] qu'il existe un unique entier $n \in \mathbf{Z}$ tel que

$$n \leqslant x < n+1.$$

Cet entier est alors noté $\lfloor x \rfloor$ et appelé **partie entière de x.**

[29] Ceci sera justifié plus tard.

Autrement dit
La partie entière de x est l'entier immédiatement inférieur à x.

Remarques. ▶ Si x est positif, alors $\lfloor x \rfloor$ est obtenu en enlevant les chiffres après la virgule du développement décimal de x.
Par exemple $\lfloor 1,5 \rfloor = 1$ et $\lfloor \pi \rfloor = 3$.
En revanche, ce n'est plus vrai si $x < 0$, puisque $\lfloor -2,5 \rfloor = -3$.
▶ Un réel x est égal à sa partie entière si et seulement si il appartient à $\mathbf{Z}$.
▶ La double inégalité $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ qui définit $\lfloor x \rfloor$ peut également s'écrire

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$

Exemple 2.40

Résolvons l'équation $\left\lfloor \sqrt{x^2+1} \right\rfloor = 2$, d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.
Par définition de la partie entière, on a

$$\begin{aligned}\left\lfloor \sqrt{x^2+1} \right\rfloor = 2 &\Leftrightarrow 2 \leqslant \sqrt{x^2+1} < 3\\ &\Leftrightarrow 4 \leqslant x^2+1 < 9\\ &\Leftrightarrow 3 \leqslant x^2 < 8\\ &\Leftrightarrow x \in \left]-2\sqrt{2}, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, 2\sqrt{2}\right[.\end{aligned}$$

Le passage au carré est bien une équivalence puisque nous sommes en présence de nombres positifs.

Proposition 2.41 : *Soit $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{Z}$. Alors $n \leqslant x \Leftrightarrow n \leqslant \lfloor x \rfloor$.*
Par conséquent, $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Démonstration. Si $n \leqslant \lfloor x \rfloor$, alors $n \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant x$.
Et si $n \leqslant x$, alors $n < \lfloor x \rfloor + 1$.
Mais puisqu'il s'agit d'entiers, on a donc $n+1 \leqslant \lfloor x \rfloor + 1$, et donc $n \leqslant \lfloor x \rfloor$. □

Notons qu'il y a toujours **un et un seul** entier n vérifiant $n \leqslant x < n+1$. Donc si on trouve un tel entier, celui-ci est nécessairement $\lfloor x \rfloor$.

Exemple 2.42

Soit $x \in \mathbf{R}$ tel que $x - \lfloor x \rfloor \geqslant \dfrac{2}{3}$.
Il vient donc $\lfloor x \rfloor + \dfrac{2}{3} \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.
Donc en multipliant par 3, on a $3\lfloor x \rfloor + 2 \leqslant 3x < 3\lfloor x \rfloor + 3$.
Mais $3\lfloor x \rfloor + 2$ est un entier[30] : c'est donc le seul entier n tel que $n \leqslant 3x < n+1$, et donc c'est la partie entière de $3x$: $\lfloor 3x \rfloor = 3\lfloor x \rfloor + 2$.

[30] Car $\lfloor x \rfloor$ est entier.

⚠ Aucune règle générale n'existe pour la partie entière d'une somme, d'un produit ou d'un quotient, on n'a pas systématiquement

$$\lfloor a+b \rfloor = \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor, \lfloor ab \rfloor = \lfloor a \rfloor \lfloor b \rfloor \text{ ou } \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = \frac{\lfloor a \rfloor}{\lfloor b \rfloor}.$$

En revanche, on a la proposition suivante :

Proposition 2.43 : *Pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $n \in \mathbf{Z}$, $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.*

Démonstration. On a $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ donc

$$\underbrace{\lfloor x \rfloor + n}_{\in \mathbf{Z}} \leqslant x + n < (\lfloor x \rfloor + n) + 1$$

donc $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$. □

2.3.3 Factorielles

Introduisons une dernière notation, qui nous servira souvent :

Définition 2.44 – Si $n \in \mathbf{N}$, on note $n!$, et on appelle **factorielle de** n l'entier défini par
$$n! := \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 1 \times 2 \times \cdots \times n & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Exemples 2.45

Les premières factorielles sont donc : $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2 \times 1 = 2$, $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$ et $6! = 720$.

Notons qu'on a toujours $(n+1)! = (n+1) \times n!$.
De plus, si $k \leqslant n$ sont deux entiers, alors $\dfrac{n!}{k!} = \dfrac{1 \times 2 \times \cdots \times n}{1 \times 2 \times \cdots \times k} = (k+1) \cdot (k+2) \cdots (n-1)n$.