17

Limites, continuité

Dans ce chapitre, on définit et étudie la notion de limite d'une fonction.
Celle-ci est plus riche que celle de limite d'une suite, puisque si la limite d'une suite n'a d'intérêt que lorsque $n \to +\infty$, pour une fonction il est possible de s'intéresser à des limites en n'importe quel réel, en $+\infty$ ou en $-\infty$.

Quelques compléments sur les voisinages

La notion de voisinage, qui a été définie dans le chapitre sur les suites numériques va nous permettre d'unifier les différentes notions de limites. Rappelons donc la définition d'un voisinage : on appelle voisinage de $a \in \overline{\mathbf{R}}$ tout ensemble V de la forme :

- **Si** $a \in \mathbf{R}$, $V =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, avec $\varepsilon > 0$.
- **Si** $a = +\infty$, $V =]A, +\infty[$, $A \in \mathbf{R}$.
- **Si** $a = -\infty$, $V =]-\infty, B[$, avec $B \in \mathbf{R}$.

Il est assez facile de constater que :

1. l'intersection de deux voisinages de a est encore un voisinage de a ;
2. l'intersection de tous les voisinages de a est $\{a\}$ si $a \in \mathbf{R}$, vide si $a = \pm\infty$;
3. si a, b sont deux éléments distincts de $\overline{\mathbf{R}}$, alors il existe V_a voisinage de a et V_b voisinage de b tels que $V_a \cap V_b = \emptyset$.

> **Autrement dit**
> Il existe des voisinages respectifs de a et b qui sont disjoints.

Seul le dernier point mérite peut-être quelques explications. Il faut distinguer en tout 4 cas.

- Si a et b sont réels. Alors pour $\varepsilon = \dfrac{|a-b|}{3}$, $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap]b-\varepsilon, b+\varepsilon[= \emptyset$.
- Si $a \in \mathbf{R}$ et $b = +\infty$, alors $]a-1, a+1[\cap]a+2, +\infty[= \emptyset$.
- Si $a \in \mathbf{R}$ et $b = -\infty$, alors $]a-1, a+1[\cap]-\infty, a-2[= \emptyset$.
- Si $a = -\infty$ et $b = +\infty$, alors $]-\infty, -1[\cap]1, +\infty[= \emptyset$.

Nous savons que lorsqu'on s'intéresse à la limite d'une fonction f en $a \in \overline{\mathbf{R}}$, a n'a pas besoin d'être dans l'ensemble de définition de f, c'est notamment le cas lorsqu'on s'intéresse à des limites en $\pm\infty$, ou encore à la limite en 0 d'une fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$.

La définition suivante vise à définir les points a de $\overline{\mathbf{R}}$ en lesquels il est pertinent de s'intéresser à la limite d'une fonction $f : I \to \mathbf{R}$. Par exemple, il n'est pas pertinent de s'intéresser à la limite en -1 ou en $-\infty$ d'une fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$.

Définition 17.1 – Soit D une partie de $\mathbf{R}$ et soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$. On dit que a **est adhérent à** D si tout voisinage V de a rencontre D : $D \cap V \neq \emptyset$.

> **Cas particulier**
> Notons que si $a \in D$, alors nécessairement, a est adhérent à D.

Exemples 17.2

► Si I est un intervalle, alors les points adhérents à I sont les points de I, plus ses éventuelles bornes, qu'elles soient ou non dans I.
Par exemple, $+\infty$ est adhérent à $[2, +\infty[$ et -1 et 3 sont adhérents à $]-1, 3[$ et à $[-1, 3[$.
-1 n'est pas adhérent à $[0, 1]$, puisque $\left]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right[$ est un voisinage de -1 disjoint de $[0, 1]$.
► Tout réel est adhérent à $\mathbf{Q}$ puisque tout intervalle ouvert non vide contient des rationnels. Ce qui nous autorisera, de manière surprenante, à parler de la limite en

$\sqrt{2}$ d'une fonction définie sur $\mathbf{Q}$.

Dans toute la suite, et sauf mention explicite du contraire I désigne une partie quelconque de $\mathbf{R}$, sur laquelle seront définies nos fonctions.
En première lecture, il est possible de supposer que I est un intervalle, ce qui facilite la compréhension, mais n'est pas indispensable pour définir la notion de limite.

Définition 17.3 – Soit f une fonction définie sur un ensemble I, et soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$. On dit que f vérifie une propriété $\mathscr{P}$ au voisinage de a s'il existe un voisinage V de a tel que $f_{|I\cap V}$ vérifie $\mathscr{P}$.

Remarque
Il faut y voir là l'analogue pour les fonctions à la notion de propriété vraie «à partir d'un certain rang» pour les suites.

Exemple 17.4

▸ La fonction ln est strictement positive au voisinage de $+\infty$. En effet, $]2, +\infty[$ est un voisinage de $+\infty$ sur lequel ln est positive.
▸ La fonction exponentielle est bornée au voisinage de $-\infty$, par exemple car $\forall x \in]-\infty, 0]$, $|e^x| \leqslant 1$.
▸ La fonction $f : x \mapsto \cos\dfrac{1}{x}$, définie sur $\mathbf{R}_+^*$ est monotone au voisinage de tout $x \notin \left\{\dfrac{1}{k\pi},\ k \in \mathbf{N}\right\}$.
En effet, pour $x > 0$, si $k \in \mathbf{N}$ est tel que $\dfrac{1}{(k+1)\pi} < x < \dfrac{1}{k\pi}$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset]k\pi, (k+1)\pi[$, et alors f est strictement monotone sur $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ car composée des fonctions strictement monotones cos et $x \mapsto \frac{1}{x}$.

17.1 LIMITE D'UNE FONCTION

17.1.1 Les 9 limites

Contrairement aux suites, dont la limite est toujours considérée lorsque $n \to +\infty$, on peut parler de limite d'une fonction en un réel fini, en $+\infty$ et en $-\infty$. Et cette limite, lorsqu'elle existe, peut être finie, ou égale à $\pm\infty$.
Ce qui nous conduit à distinguer neuf cas dans la définition de limite :

Définition 17.5 – Soit $f : I \to \mathbf{R}$, et soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$ adhérent à I.

1. <u>Si $a \in \mathbf{R}$</u> :
   (a) on dit que f tend vers $\ell \in \mathbf{R}$ lorsque x tend vers a et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ si
   $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$
   (b) on dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ si
   $$\forall A \in \mathbf{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| < \eta \Rightarrow f(x) > A.$$
   (c) on dit que f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ si
   $$\forall A \in \mathbf{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| < \eta \Rightarrow f(x) < A.$$
2. <u>Si $a = +\infty$</u> :
   (a) on dit que f tend vers $\ell \in \mathbf{R}$ lorsque x tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ si
   $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B \in \mathbf{R},\ \forall x \in I,\ x > B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

(b) on dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si

$$\forall A \in \mathbf{R},\ \exists B \in \mathbf{R},\ \forall x \in I,\ x > B \Rightarrow f(x) > A.$$

(c) on dit que f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ si

$$\forall A \in \mathbf{R},\ \exists B \in \mathbf{R},\ \forall x \in I,\ x > B \Rightarrow f(x) < A.$$

3. **Si $a = -\infty$** :

(a) on dit que f tend vers $\ell \in \mathbf{R}$ lorsque x tend vers $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B \in \mathbf{R},\ \forall x \in I,\ x < B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

(b) on dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ si

$$\forall A \in \mathbf{R},\ \exists B \in \mathbf{R},\ \forall x \in I,\ x < B \Rightarrow f(x) > A.$$

(c) on dit que f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ si

$$\forall A \in \mathbf{R},\ \exists B \in \mathbf{R},\ \forall x \in I,\ x < B \Rightarrow f(x) < A.$$

Remarques. ▸ Comme pour le cas des limites de suites, les inégalités strictes peuvent être remplacées par des inégalités larges. De même, dans le cas des limites finies, on peut remplacer $\forall \varepsilon > 0$ par «pour tout ε suffisamment proche de 0» (donc par exemple $\forall \varepsilon \in]0,1[$ ou encore $\forall \varepsilon \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$), dans le cas des limites égales à $+\infty$, on peut remplacer $\forall A \in \mathbf{R}$ par $\forall A > 0$ (ou même par «pour tout A suffisamment grand»), et dans le cas des limites égales à $-\infty$, remplacer $\forall A \in \mathbf{R}$ par $\forall A < 0$.
▸ Comme pour les suites, on ne manipulera pas de limite, et on n'écrira pas $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ avant d'avoir prouvé l'existence d'une telle limite.
▸ Dans le cas très particulier où $I = \mathbf{N}$ et $a = +\infty$, alors on retrouve la définition de limite d'une suite.

Si vous avez bien compris ces limites, il devrait être aisé de retrouver ces définitions sans avoir besoin de les connaître par cœur.
Surtout, il existe une définition bien plus simple qui unifie[1] ces 9 limites :

[1] Et qui est bien entendu équivalente aux définitions données plus tôt.

Définition 17.6 – Soit $f : I \to \mathbf{R}$, soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$ adhérent à I et soit $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$. On dit que f tend vers ℓ lorsque x tend vers a si pour tout voisinage V_ℓ de ℓ, il existe un voisinage W_a de a tel que

$$\forall x \in I,\ x \in W_a \Rightarrow f(x) \in V_\ell.$$

Danger !
Parce qu'il s'agit là d'un moyen pratique de traiter d'un seul coup les limites finies et les limites infinies, je vais donner la plupart des preuves qui suivent en utilisant la notion de voisinage. Cela ne vous dispense pas de connaître par cœur/de retrouver très vite les 9 définitions, qui seront bien plus faciles à manipuler lors de la résolution d'exercices.

Proposition 17.7 (Unicité de la limite) : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$ adhérent à I. S'il existe deux éléments ℓ_1, ℓ_2 de $\overline{\mathbf{R}}$ tels que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_1$ et $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_2$, alors $\ell_1 = \ell_2$.*

Démonstration. Redonnons une preuve avec des ε dans le cas où ℓ_1, ℓ_2 sont réels.
Supposons que $\ell_1 \neq \ell_2$, et soit $\varepsilon = \dfrac{|\ell_2 - \ell_1|}{3}$.
Alors il existe $\eta_1 > 0$ tel que pour tout $x \in I, x \in]a - \eta_1, a + \eta_1[\Rightarrow |f(x) - \ell_1| < \varepsilon$.
De même, $\exists \eta_2 > 0$ tel que pour tout $x \in I, x \in]a - \eta_2, a + \eta_2[\Rightarrow |f(x) - \ell_2| < \varepsilon$.

Posons alors $\eta = \min(\eta_1, \eta_2) > 0$. Alors pour $x \in I \cap]a-\eta, a+\eta[$, on a

$$|\ell_1 - \ell_2| = |f(x) - \ell_1 + \ell_2 - f(x)| \leqslant |f(x) - \ell_1| + |f(x) - \ell_2| < 2\varepsilon \leqslant \frac{2}{3}|\ell_1 - \ell_2|$$

ce qui est absurde.

On pourrait de même adapter les preuves en distinguant les cas suivant que ℓ_1, ℓ_2 soient réels, ou égaux à $\pm\infty$, ce qui nous conduirait à distinguer au moins 4 cas.
Plus simplement : si $\ell_1 \neq \ell_2$, alors il existe V_1 voisinage de ℓ_1 et V_2 voisinage de ℓ_2 tels que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.
Soit alors W_1 un voisinage de a tel que $\forall x \in I \cap W_1$, $f(x) \in V_1$ et soit W_2 un voisinage de a tel que $\forall x \in I \cap W_2$, $f(x) \in V_2$.
Alors pour $x \in W_1 \cap W_2$, $f(x) \in V_1 \cap V_2$, ce qui est absurde.
Donc $\ell_1 = \ell_2$. □

Détails
Deux voisinages d'un même point ne sont jamais disjoints.

La connaissance de la limite[2] de f en a donne des informations sur f **au voisinage de** a, et pas nécessairement des informations sur le comportement global de f, c'est-à-dire sur I tout entier.
C'est là une différence de taille avec les suites, car $\mathbf{N}$ privé d'un voisinage de $+\infty$ est un ensemble fini, et on en déduisait par exemple qu'une suite convergente est bornée. Alors que pour une fonction, nous ne disposons que du résultat suivant :

[2] Si elle existe.

Proposition 17.8 : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbf{R}$, alors f est bornée **au voisinage de** a.*
Autrement dit, il existe un voisinage V de a et $M \in \mathbf{R}$ tel que $\forall x \in V, |f(x)| \leqslant M$.

Autrement dit
L'hypothèse faite est que f possède une limite **finie** en a.

Démonstration. Il suffit de prendre $V =]\ell - 1, \ell + 1[$, de sorte qu'il existe U voisinage de a tel que

$$\forall x \in I, x \in U \Rightarrow \ell - 1 < f(x) < \ell + 1.$$

Et donc $\forall x \in I \cap U$, $|f(x)| \leqslant |\ell| + 1$. Donc f est bien bornée au voisinage de a. □

⚠ En revanche, rien n'indique que f soit bornée sur $\mathbf{R}$ tout entier, l'exemple le plus simple étant $\mathrm{id}_{\mathbf{R}} : x \mapsto x$, qui admet une limite finie en 0, et n'est pourtant pas bornée (car ni majorée ni minorée) sur $\mathbf{R}$.

De même, si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$, alors f est minorée au voisinage de a, et si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$, alors f est majorée au voisinage de a.

Le résultat qui suit est plutôt intuitif : si une fonction admet une limite en un point a **où elle est définie**, alors cette limite est nécessairement $f(a)$.

☠ Danger !
On suppose ici que f est définie en a, et pas seulement qu'il s'agit d'un point adhérent à I.
Par exemple, ce résultat ne s'appliquera pas si $I =]a, b]$.

Proposition 17.9 : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$, et soit $a \in I$.*
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \overline{\mathbf{R}}$, alors $\ell = f(a)$ (et en particulier, $\ell \in \mathbf{R}$).

Démonstration. Il s'agit essentiellement de noter que l'intersection de tous les voisinages de ℓ est $\{\ell\}$ si $\ell \in \mathbf{R}$ et est vide sinon.
Or, si V est un voisinage de ℓ, alors il existe W voisinage de a tel que $f(W \cap I) \subset V$.
Mais $a \in W \cap I$, donc $f(a)$ appartient à tous les voisinages de ℓ. En particulier, l'intersection de tous les voisinages de ℓ est non vide, donc $\ell \neq \pm\infty$, et $f(a)$ est dans tout voisinage de ℓ, donc $a = \ell$. □

⚠ Nous avons bien fait l'hypothèse que la limite existe, cette proposition ne garantit pas l'existence de $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ dès que f est définie en a.
Par exemple, $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}$ n'a de limite en aucun réel[3], bien qu'elle soit définie sur $\mathbf{R}$ tout entier.

[3] Voir TD.

Définition 17.10 – Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et soit $a \in I$. On dit que f **est continue en** a si f admet une limite en a.
Par ce qui précède, cette limite est nécessairement égale à $f(a)$, donc f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Enfin, mentionnons un point important : la notion de limite est une notion locale, ce qui signifie que lorsqu'on parle de la limite de f en a, il suffit de connaître f au voisinage de a (c'est-à-dire pour x «proche de a»). Ainsi, pour étudier la limite d'une fonction en 1, il n'est pas utile de savoir quoi que ce soit au sujet de f restreinte à $\mathbf{R}_-$, ni même de f restreinte à $[0, 0.999]$.
De même, pour étudier la limite de f en $+\infty$, le comportement de f sur $]-\infty, 1]$, sur $[0, 1]$ ou sur $[0, 100\,000]$ n'ont aucune importance.

Proposition 17.11 : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$, et soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$ adhérent à I.*
Soit également V_a un voisinage de a. Alors f admet une limite en a si et seulement si $f_{|I\cap V_a}$ admet une limite en a, et dans ce cas, on a

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} f_{|I\cap V_a}.$$

Démonstration. Supposons que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$. Alors pour tout voisinage V_ℓ de ℓ, il existe W_a voisinage de a tel que $x \in I \cap W_a \Rightarrow f(x) \in V_\ell$.
Et donc en particulier, pour $x \in I \cap W_a \cap V_a$, $f_{|I\cap V_a}(x) \in V_\ell$. Donc $f_{|I\cap V_a}(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

Inversement, si $f_{|I\cap V_a}(x) = \ell$, soit V_ℓ un voisinage de ℓ. Alors il existe W_a voisinage de a tel que pour $x \in I \cap (V_a \cap W_a)$, $f_{|I\cap V_a \cap W_a}(x) = f(x) \in V_\ell$.
Mais $V_a \cap W_a$ est un voisinage de a, donc on retrouve bien la définition de $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$. $\square$

La conséquence importante de cette proposition est que toutes les hypothèses des théorèmes qui vont suivre n'ont pas besoin d'être vérifiées sur I tout entier, mais seulement au voisinage de a.

17.1.2 Limite à gauche, limite à droite

Nous donnons ici un sens à des notations utilisées depuis la première, à savoir $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.

Définition 17.12 – Soit $f : I \to \mathbf{R}$, et soit $a \in \mathbf{R}$ adhérent à I.
On dit que f est **définie à gauche au voisinage de** a si a est adhérent à $I\cap]-\infty, a[$.
C'est-à-dire si pour tout voisinage V de a, $V \cap I\cap]-\infty, a[\neq \emptyset$.
De même, f est **définie à droite au voisinage de** a si a est adhérent à $I\cap]a, +\infty[$.

Dans le cas où I est un intervalle ouvert, une fonction f définie sur I est définie à droite au voisinage de tout point de I, et à droite de la borne de gauche de l'intervalle, mais pas à droite de sa borne de droite.
Par exemple, une fonction définie sur $]0, 1]$ est définie à droite au voisinage de 0, mais pas à gauche.

Définition 17.13 – Soit $f : I \to \mathbf{R}$, soit $a \in \mathbf{R}$ adhérent à I au voisinage duquel f est définie à gauche et soit $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$.
On dit que f tend vers ℓ lorsque x tend vers a par la gauche et on note $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$ si $f_{|I \cap]-\infty, a[}(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.
Autrement dit :

- si $\ell \in \mathbf{R}$: $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, a - \eta < x < a \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$.
- si $\ell = +\infty$: $\forall A \in \mathbf{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in I, a - \eta < x < a \Rightarrow f(x) > A$.
- si $\ell = -\infty$: $\forall B \in \mathbf{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in I, a - \eta < x < a \Rightarrow f(x) < B$.

De même, on dit que $f(x)$ tend à droite vers ℓ en a et on note $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$ si $f_{|I \cap]a + \infty[}(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

La notion de limite à droite/gauche n'a aucun intérêt pour $a = \pm\infty$, puisqu'on ne peut tendre vers $+\infty$ que par la gauche, et vers $-\infty$ que par la droite.

Proposition 17.14 : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et soit $a \in \mathbf{R}$ adhérent à I au voisinage duquel f est définie à gauche et à droite. Alors :*

1. *si $a \in I$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbf{R}$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$ et $f(a) = \ell$.*
2. *si $a \notin I$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in \overline{\mathbf{R}}$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$.*

Démonstration.

1. Si $a \in I$. Alors si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$, nous avons déjà prouvé que $f(a) = \ell$, et les deux limites à gauche et à droite sont évidentes.
Supposons à présent que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.
Soit alors V un voisinage de $f(a)$. Il existe alors un voisinage W_a^- de a tel que $\forall x \in I \cap]-\infty, a[\cap W_a^-, f(x) \in V$.
De même, il existe alors un voisinage W_a^+ de a tel que $\forall x \in I \cap]a, +\infty[\cap W_a^+, f(x) \in V$.
Soit alors $W_a = W_a^+ \cap W_a^-$. Alors pour $x \in I \cap W_a$, on a :
   - soit $x = a$, et alors $f(x) = f(a) \in V$.
   - soit $x > a$, et alors $x \in I \cap]a, +\infty[\cap W_a^+$, et donc $f(x) \in V$.
   - soit $x < a$, et alors $x \in I \cap]-\infty, a[\cap W_a^-$, et donc $f(x) \in V$.

   Donc on a bien prouvé l'existence d'un voisinage W_a de a tel que $\forall x \in I \cap W_a$, $f(x) \in V$, et donc $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.
2. Le principe est le même si $a \notin I$, mais alors on n'a pas à se soucier de la valeur de $f(a)$.

□

Exemples 17.15

► Soit f définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{\pi}{2x}\right) & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

Alors $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \sin\left(\dfrac{\pi}{2x}\right) = 1$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x^2} = 1$ et $f(1) = 1$.
Donc $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$ (et donc f est continue en 1).

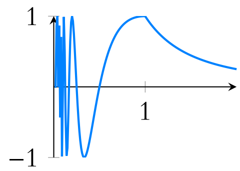


Figure 17.1– La fonction f.

► Soit g définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 0 \\ x^3 - 1 & \text{si } x > 0 \\ 3 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Alors $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = -1$, mais $-1 \neq g(0)$, donc g n'admet pas de limite en 0, et donc n'y est pas continue.

► La fonction $h : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ e^{1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ tend vers $+\infty$ en 0.
En effet, $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} e^{1/x} = +\infty$.
Et h n'étant pas définie en 0, on ne se préoccupe pas de sa valeur en 0.

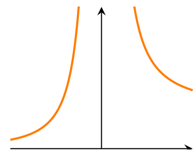


FIGURE 17.2– La fonction h.

17.1.3 Caractérisation séquentielle des limites

Le résultat qui suit reformule la limites d'une fonction à l'aide de limites de suites.

Proposition 17.16 : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction, et soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$ adhérent à I. Alors il y a équivalence entre*

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in \overline{\mathbf{R}}$
2. *pour toute suite (x_n) à valeurs dans I, qui tend vers a, la suite $(f(x_n))_n$ tend vers ℓ.*

Démonstration. 1) $\Rightarrow$ 2). Supposons que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$, et soit (x_n) une suite d'éléments de I qui tend vers a.
Soit alors V_ℓ un voisinage de ℓ. Alors il existe W_a voisinage de a tel que pour tout $x \in I \cap W_a$, $f(x) \in V_\ell$.
En particulier, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $x_n \in W_a$ et donc $f(x_n) \in V_\ell$.
Et donc $f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.

2) $\Rightarrow$ 1). Supposons que pour toute suite (x_n) de limite a, $f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.
Supposons par l'absurde que f ne tend pas vers ℓ en a.
Alors il existe un voisinage V_ℓ de ℓ tel que pour tout voisinage W_a de a, il existe $x \in I \cap W_a$ tel que $f(x) \notin V_\ell$.
Soit alors (W_n) une suite décroissante[4] de voisinages de a définie de la manière suivante :
► Dans le cas où $a \in \mathbf{R}$, on peut prendre $W_n = \left]a - \frac{1}{n+1}, a + \frac{1}{n+1}\right[$.
► Dans le cas où $a = +\infty$, on peut prendre $W_n =]n, +\infty[$.
► Dans le cas où $a = -\infty$, on peut prendre $W_n =]-\infty, -n[$.
Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe $x_n \in I \cap W_n$ tel que $f(x_n) \notin V_\ell$.
Dans les trois cas, $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$. Donc par hypothèse, $f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$, et donc il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $f(x_n) \in V_\ell$.
Or, $x_{n_0} \in W_{n_0}$, donc $f(x_{n_0}) \in V_\ell$ alors que par définition $f(x_{n_0}) \notin V_\ell$, ce qui est absurde.
On en déduit que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$. □

[4] Au sens de l'inclusion, c'est-à-dire telle que $W_{n+1} \subset W_n$.

Ceci fournit notamment un moyen facile de prouver qu'une fonction n'admet pas de limite en a.

Exemple 17.17

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f(x) = \sin \frac{1}{x}$.
Soit alors $x_n = \frac{1}{n\pi}$, de sorte que $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et $f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
Mais considérons également la suite (y_n) définie par $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$.
Alors $y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et $f(y_n) = 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.
Puisque les deux suites $(f(x_n))_n$ et $(f(y_n))_n$ ont des limites différentes, f n'admet pas de limite en 0.

17.2 Calculs avec des limites

17.2.1 Opérations sur les limites

Tous les résultats énoncés sur les limites d'une somme, d'un produit, d'un quotient pour les limites de suites. Et les preuves en sont inchangées ou presque, c'est d'ailleurs un bon exercice que d'essayer d'en écrire quelques unes pour les fonctions en s'inspirant de ce qui a été dit pour les suites.

Un autre moyen de prouver tous ces résultats est d'utiliser la caractérisation séquentielle des limites : supposons que f et g soient deux fonctions définies sur I telles que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell_1$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell_2$.
Soit alors (x_n) une suite à valeurs dans I, qui tend vers a. Alors $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1 \in \mathbf{R}$ et $g(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2 \in \mathbf{R}$.
Et donc, par somme de limites **de suites**, $f(x_n)+g(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1+\ell_2$. Ceci étant vrai pour toute suite (x_n) de limite a, $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = \ell_1+\ell_2$.
Et le même raisonnement se tient pour les produits et les quotients, ou les produits et quotients de limites infinies tant qu'ils ne font pas apparaître de formes indéterminées.
On retrouve également le fait que si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$, et que f est strictement positive (respectivement négative) sur un voisinage de a, alors $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$ (resp. $-\infty$).
Au-delà des résultats bien connus sur la somme, le produit et le quotient de limites, ajoutons :

Proposition 17.18 : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$ adhérent à I. Alors pour $\ell \in \mathbf{R}$, on a*

1. $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \Leftrightarrow f(x)-\ell \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$
2. $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow |f(x)| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.
3. $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \Leftrightarrow |f(x)-\ell| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.

Enfin, rappelons également que le produit d'une fonction bornée[5] par une fonction qui tend vers 0 en a tend vers 0.

[5] Ou plus simplement bornée au voisinage de a.

Seul le résultat suivant est nouveau :

Proposition 17.19 (Composition de limites) : *Soit $f : I \to J$, $g : J \to \mathbf{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$, de sorte que $g\circ f$ soit bien définie.*
Soient a adhérent à I, b adhérent à J et soit $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to b} g(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to a}(g\circ f)(x) = \ell$.

Démonstration. Sans la notion de voisinage, il nous faudrait distinguer 27 cas suivant que a, b et ℓ soient finis ou égaux à $\pm\infty$.
Soit V_ℓ un voisinage de ℓ. Puisque $g(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} \ell$, alors il existe V_1 voisinage de b tel que $\forall x \in V_1 \cap J$, $g(x) \in V$.
Et puisque $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow}$, alors il existe V_2 voisinage de b tel que pour tout $x \in I\cap V_2$, $f(x) \in V_1$.
Et alors, pour $x \in I \cap V_2$, on a $f(x) \in J \cap V_1$ et donc $g(f(x)) \in V$.
Ceci étant vrai pour tout voisinage V de ℓ, $g\circ f$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a. □

Notons que ce résultat légitime la notion de changement de variable dans une limite que vous utilisez depuis la terminale.

Exemple 17.20

Pour calculer $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$, on peut procéder au changement de variable $X=\frac{1}{x}$, et s'intéresser à $\lim_{X\to0^+}\frac{\ln(1+X)}{X}$.
Cela revient à considérer $g: X\mapsto\frac{\ln(1+X)}{X}$ et $f: x\mapsto\frac{1}{x}$.
Alors notre fonction de départ est $g\circ f$, et puisque nous savons que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$, alors $\lim_{x\to+\infty}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to0} g(x)$.
Et cette limite est $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-\ln(1)}{x}=g'(1)=1$.

⚠ Nous n'avons pas défini de limite qui seraient égales à 0^+, ou à 1^-, etc. Seulement des limites à droite/à gauche **en** un réel a.
Vous ne noterez donc par exemple pas $\lim_{x\to+\infty} f(x)=a^+$.
Ce que vous avez en tête en utilisant une telle notation, c'est surtout que f tend vers a en restant supérieure à a.
Et donc si $\lim_{x\to a^+} g(x)=\ell$, alors on a envie d'avoir $\lim_{x\to+\infty} g(f(x))=\ell$.
Tout ceci est vrai, mais il faut être précis. Si f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbf{R}$ si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=a$, qu'au voisinage de $+\infty$, $f(x)>a$, que $\lim_{x\to a^+} g(x)=\ell$, alors $\lim_{x\to+\infty} g(f(x))=\ell$.
En effet, soit V_ℓ un voisinage de ℓ. Alors il existe $\eta>0$ tel que pour tout $x\in]a,a+\eta[$, $g(x)\in V_\ell$.
Mais alors il existe $A\in\mathbf{R}$ tel que pour tout $x\in]A,+\infty[$, $|f(x)-a|<\eta$.
Mais puisque f est à valeurs supérieures strictement à a, alors $\forall x\in]A,+\infty[$, $a<f(x)<a+\eta$.
Et donc pour tout $x\in]A,+\infty[$, $g(f(x))\in V_\ell$. Et donc $g(f(x))\xrightarrow[x\to+\infty]{}\ell$.

> **Remarque**
> Si on prend f et g définies sur $\mathbf{R}$ tout entier, c'est pour ne pas trop alourdir les hypothèses et les notations. Mais on peut tout à fait imaginer généraliser ce résultat à un cadre plus général.

17.2.2 Limites et inégalités

Lemme 17.21. Soit $f: I\to\mathbf{R}$ et soit a adhérent à I. Soient $m<\ell<M$ trois réels.
Si $f(x)\xrightarrow[x\to a]{}\ell$, alors au voisinage de a, $m<f(x)<M$.

Démonstration. Soit $\varepsilon>0$ suffisamment petit pour que $m<\ell-\varepsilon<\ell<\ell+\varepsilon<M$.
Alors il existe W_a voisinage de a tel que $\forall x\in I\cap W_a$, $|f(x)-\ell|<\varepsilon\Leftrightarrow\ell-\varepsilon<f(x)<\ell+\varepsilon$.
D'où le résultat annoncé. □

> **En pratique**
> On peut prendre
> $$\varepsilon=\frac{1}{2}\min(\ell-m,M-\ell).$$

Remarque. Comme pour les limites de suites, après passage à la limite, les inégalités strictes deviennent des inégalités larges.

Corollaire 17.22 (Passage à la limite dans les inégalités) – *Soit $f: I\to\mathbf{R}$, et soit $a\in\overline{\mathbf{R}}$ adhérent à I, tel que $\lim_{x\to a} f(x)=\ell$.*

1. *si pour tout $x\in I$ $f(x)\leqslant M$, alors $\ell\leqslant M$.*
2. *si pour tout $x\in I$, $m\leqslant f(x)$, alors $m\leqslant\ell$.*

> **Mieux**
> Le caractère local de la notion de limite permet en fait de faire l'hypothèse plus faible que $f\leqslant M$ uniquement au voisinage de a.

Démonstration. Prouvons le premier cas. Supposons que $\ell>M$. Alors il existe un voisinage V_a de a tel que pour tout $x\in I\cap V_a$, $f(x)>M$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur M. □

⚠ Notons qu'il n'y a pas de résultat analogue avec des inégalités strictes : le passage à la limite dans une inégalité stricte donne une inégalité **large.**

Corollaire 17.23 – *Soient f et g deux fonctions définies sur I, soit $a\in\overline{\mathbf{R}}$ adhérent à I. Supposons que $\lim_{x\to a} f(x)$ et $\lim_{x\to a} g(x)$ existent et sont réelles, et qu'au voisinage de a, $f(x)\leqslant g(x)$.*
Alors $\lim_{x\to a} f(x)\leqslant\lim_{x\to a} g(x)$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le lemme précédent à $g - f \geqslant 0$. □

17.3 Théorèmes d'existence de limites

Les théorèmes énoncés précédemment ne s'appliquaient que pour des fonctions dont on savait déjà qu'elles possèdent une limite en a.
Passons à présent aux théorèmes permettant de justifier l'existence de telles limites.

17.3.1 Utilisation d'inégalités

Proposition 17.24 (Théorème des gendarmes) : *Soient f, g et h trois fonctions définies sur un même ensemble I, soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$ adhérent à I, et supposons qu'au voisinage de a $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.*
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell \in \mathbf{R}$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existe et vaut ℓ.

Démonstration. En raison du caractère local de la limite, il suffit de prouver le résultat lorsque l'encadrement $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ est valable sur I tout entier.
Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe deux voisinages V_f et V_h de a tels que

$$\forall x \in I \cap V_f,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$$\forall x \in I \cap V_h,\ |h(x) - \ell| < \varepsilon$$

Et en particulier, pour $x \in I \cap (V_f \cap V_h)$,

$$\ell - \varepsilon < f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) < \ell + \varepsilon.$$

Puisque $V_f \cap V_h$ est un voisinage de a, on a donc bien la définition de $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$. □

Remarque. Une fois encore, la caractérisation séquentielle de la limite permettait de conclure à l'aide du théorème des gendarmes pour les suites.
En effet, si $(x_n) \in I^{\mathbf{N}}$ tend vers a, alors[6] $f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$, et de même, $h(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.
Et donc, puisque $f(x_n) \leqslant g(x_n) \leqslant h(x_n)$, par le théorème des gendarmes (version suites), $g(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.
Et donc pour toute suite $(x_n) \in I^{\mathbf{N}}$ de limite a, $g(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$, donc $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$.

[6] C'est la caractérisation séquentielle de la limite appliquée à f.

Exemple 17.25

Une étude de la fonction $f : x \mapsto \ln(x) - 2\sqrt{x}$ prouve que celle-ci est dérivable, de dérivée négative sur $[1, +\infty[$.
Elle est décroissante sur $[1, +\infty[$, et puisque $f(1) = -2 < 0$, on en déduit que f est négative sur $[1, +\infty[$.

Donc pour $x \geqslant 1$, $0 \leqslant \ln(x) \leqslant 2\sqrt{x}$ et donc $0 \leqslant \dfrac{\ln(x)}{x} \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

Par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

Au voisinage

Notez que l'encadrement n'était pas valable pour tout x dans le domaine de définition de nos fonctions. Mais il l'était sur un voisinage de $+\infty$ (qui est $[1, +\infty[$), ce qui suffit à passer à la limite.

Proposition 17.26 : *Soient f, g définies sur I, soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$ adhérent à I, et supposons que $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x)$.*
Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$, alors $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$.
De même, si $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$, alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$.

Démonstration. Nous ne prouvons que le premier cas. Soit $A \in \mathbf{R}$. Alors il existe un voisinage V_a de a tel que pour $x \in I \cap V_a$, $f(x) > A$. Et alors, toujours pour $x \in I \cap V_a$, $g(x) > A$.
On a donc bien la définition de $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$. □

17.3.2 Le théorème de la limite monotone

Le théorème de la limite monotone, bien qu'analogue au théorème de même nom pour les suites, est un peu plus délicat pour les fonctions.
Nous énonçons ici des résultats pour une fonction définie sur un intervalle, mais on pourrait imaginer des énoncés plus généraux.

Théorème 17.27 (Théorème de la limite monotone) : *Soient $(a,b) \in \overline{\mathbf{R}}^2$, avec $a < b$, et soit $f :]a,b[\to \mathbf{R}$ une fonction **croissante**. Alors :*

1. *$\lim\limits_{x\to b} f(x)$ existe, et vaut $\sup\limits_{x\in]a,b[} f(x)$ si f est majorée et $+\infty$ sinon.*
2. *$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe, et vaut $\inf\limits_{x\in]a,b[} f(x)$ si f est minorée, et $-\infty$ sinon.*

Démonstration. Supposons f majorée, et soit alors $M = \sup\{f(x), x \in]a,b[\}$.
Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists A \in]a,b[$ tel que $M - \varepsilon < f(A) \leqslant M$.
En particulier, pour $x \geqslant A$, on a $M - \varepsilon < f(A) \leqslant f(x) \leqslant M$.

Détails
C'est la caractérisation «epsilonesque» de la borne supérieure.

▸ Si $b \in \mathbf{R}$, alors posons $\eta = b - A > 0$. Alors pour tout $x \in]a,b[\cap]b-\eta, b+\eta[=]A,b[$, on a $M - \varepsilon < f(x) \leqslant M$, et donc $|f(x) - M| < \varepsilon$.
On a donc bien $\lim\limits_{x\to b} f(x) = M$.
▸ Et si $b = +\infty$, alors pour tout $x \in]A, +\infty[$, $|f(x) - M| < \varepsilon$, donc $\lim\limits_{x\to b} f(x) = M$.

En revanche, si f n'est pas majorée, alors pour tout $A \in \mathbf{R}$, $\exists B \in]a,b[$ tel que $f(B) > A$.
Et par croissance de f, pour $x \geqslant B$, $f(x) > A$.
▸ Si $b \in \mathbf{R}$, soit alors $\eta = b - B > 0$.
Alors pour $x \in]a,b[\cap]b-\eta, b+\eta[$, $f(x) \geqslant f(B) > A$.
Et donc $\lim\limits_{x\to b} f(x) = +\infty$.
▸ Si $b = +\infty$: alors pour $x \geqslant B$, $f(x) \geqslant f(B) > A$, et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Le principe est le même pour les limites en a. □

Astuce
On peut aussi s'en tirer avec ce qui précède (les limites en la borne de droite) en utilisant la fonction
$$g : \left| \begin{array}{ccc}]-b,-a[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(-x) \end{array}\right.$$
qui est croissante.

Théorème 17.28 : *Soient $(a,b) \in \overline{\mathbf{R}}^2$, avec $a < b$, et soit $f :]a,b[\to \mathbf{R}$ une fonction **décroissante**. Alors :*

1. *$\lim\limits_{x\to b} f(x)$ existe, et vaut $\inf\limits_{x\in]a,b[} f(x)$ si f est minorée et $-\infty$ sinon.*
2. *$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe, et vaut $\sup\limits_{x\in]a,b[} f(x)$ si f est majorée, et $+\infty$ sinon.*

Corollaire 17.29 – *Soit $f :]a,b[\to \mathbf{R}$ croissante, et soit $c \in]a,b[$.*
Alors $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ existent et

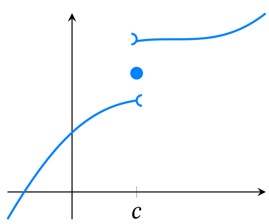
$$\lim_{x\to c^-} f(x) \leqslant f(c) \leqslant \lim_{x\to c^+} f(x).$$

On a un résultat analogue pour les fonctions décroissantes en renversant le sens des inégalités.

Notation
Ces deux limites à gauche et à droite sont parfois notées $f(c^-)$ et $f(c^+)$.

Démonstration. $f_{|]a,c[}$ est croissante, et est majorée par $f(c)$. Donc elle possède une limite finie en c, de sorte que $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ existe.
Et par passage à la limite dans les inégalités, $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) \leqslant f(c)$.
On procède de même pour les limites à droite. □

⚠ Il se peut que les deux inégalités ci-dessus soient strictes. Par exemple avec la fonction ci-contre.



17.4 Continuité : l'aspect local

17.4.1 Définitions, premières propriétés

Définition 17.30 – Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et soit $a \in I$. On a déjà dit que f est **continue** en a si elle admet une limite en a.
On dit que f est **continue sur** I si elle est continue en a pour tout $a \in I$.
On note $\mathscr{C}(I, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I.

Rappel
Nous avons déjà prouvé que cette limite ne peut qu'être finie, égale à $f(a)$.

Les opérations sur les limites prouvent alors que la somme/le produit/le quotient de deux fonctions continues en a est encore continu en a.
Et que si $f : I \to J$ est continue en a, et que $g : J \to \mathbf{R}$ est continue en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Et par conséquent, la somme/le produit/le quotient de deux fonctions continues sur un même ensemble I est encore continu sur I.
Et si $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbf{R}$ sont continues, alors $g \circ f$ est continue.

Remarque
Couplé au fait que id_I est toujours continue, cela prouve déjà que les fonctions polynômiales, et les quotients de telles fonctions (les fonctions rationnelles) sont continues sur leur ensemble de définition.

Proposition 17.31 : *Soit I une partie de $\mathbf{R}$. Alors $\mathscr{C}(I, \mathbf{R})$ est un sous-anneau de $\mathbf{R}^I$.*

Démonstration. La fonction constante égale à 1 est continue sur I, comme toute fonction constante.
Si f, g sont continues sur I, alors $f - g$ est continue sur I.
Si f et g sont continues sur I, alors fg est continue sur I. □

17.4.2 Caractérisation séquentielle de la continuité

Proposition 17.32 : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$, et soit $a \in I$. Alors il y a équivalence entre :*

1. *f est continue en a*
2. *pour toute suite (x_n) à valeurs dans I et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.*

Démonstration. C'est une conséquence directe de la définition de continuité et de la caractérisation séquentielle des limites. □

Ce résultat est en fait fréquemment utilisé dans le sens 1) $\Rightarrow$ 2), par exemple pour dire que $u_n \to a \Rightarrow e^{u_n} \to e^a$.
En réalité, il se cache là-derrière un argument de continuité de l'exponentielle, qu'il faudrait préciser.

Exemple 17.33

▶ Soit $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. Alors $u_n = e^{n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$.

Nous avons déjà prouvé que $\lim\limits_{x\to+\infty} x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 1$.

Donc en particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 1$.

Et donc, par continuité de la fonction exponentielle en 1 (continuité toujours admise à ce stade de l'année...), $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^1 = e$.

▶ Pour bien comprendre que la continuité est indispensable, on peut considérer la fonction partie entière, qui n'est pas continue en 1.
Il n'est donc pas question d'affirmer que $u_n \to 1 \Rightarrow \lfloor u_n \rfloor \to \lfloor 1 \rfloor$.
Par exemple, la suite de terme général $1 - \dfrac{1}{n}$ est un contre-exemple.

Remarque
Notons qu'à ce stade, il n'y a aucun besoin d'une caractérisation séquentielle de la notion de limite : si x est assez grand, $x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ est assez grand, et donc ceci vaut aussi pour n entier suffisamment grand.

17.4.3 Continuité à droite/à gauche

Définition 17.34 – Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et soit $a \in I$ un point au voisinage duquel f est définie à droite et à gauche.

1. On dit que f **est continue à gauche** en a si $f_{|I\cap]-\infty,a]}$ est continue en a, c'est-à-dire si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.
2. On dit que f **est continue à droite en** a si $f_{|I\cap [a,+\infty[}$ est continue en a, c'est-à-dire si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.

Proposition 17.35 : *Sous les hypothèses ci-dessus, f est continue en a si et seulement si f est continue à droite et à gauche de a.*

Exemples 17.36

► La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue sur $]n, n+1[$, $n \in \mathbf{Z}$ puisqu'elle y est constante égale à n.
En revanche, elle n'est que continue à droite en $n \in \mathbf{Z}$.
Si $x \in [n, n+1[$, alors $\lfloor x \rfloor = n \underset{x\to n^+}{\longrightarrow} n = \lfloor n \rfloor$.
Mais si $x \in]n-1, n[$, alors $\lfloor x \rfloor = n-1 \underset{x\to n^-}{\longrightarrow} n-1 \neq \lfloor n \rfloor$, donc $\lfloor \cdot \rfloor$ n'est pas continue à gauche en n.
► La fonction $x \mapsto |x|$ est continue en tout point $a \neq 0$, puisqu'elle est alors égale à une fonction affine[7] sur un voisinage de a.
Et en 0, il est aisé de constater qu'elle est continue à droite et continue à gauche, donc continue.
Une conséquence importante en est la suivante : si f est continue, alors $|f|$ l'est aussi.
⚠ Réciproque fausse, par exemple $f(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$.

[7] Donc polynomiale.

17.4.4 Prolongement par continuité

Définition 17.37 – Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et soit $a \in \mathbf{R} \setminus I$, adhérent à I.
Si f admet une limite **finie** ℓ lorsque $x \to a$, on appelle prolongement par continuité de f en a la fonction :

$$\tilde{f} : \left| \begin{array}{ccl} I \cup \{a\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases} \end{array} \right.$$

Alors la fonction $\tilde{f}$ est continue en a.

⚠ Attention ! Il faut que a soit un point où f n'est pas déjà définie.

Démonstration. Il faut tout de même prouver que $\tilde{f}$ est continue en a, c'est-à-dire que $\lim\limits_{x\to a} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(a)$.
Soit alors $\varepsilon > 0$. Par définition d'une limite, il existe $\eta > 0$ tel que pour $x \in I$, $|x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$.
Mais pour $x \neq a$, $\tilde{f}(x)$ et $f(x)$ sont égaux, donc pour $x \in I$, $|x-a| < \eta \Rightarrow |\tilde{f}(x) - \ell| < \varepsilon$.
Et si $x = a$, alors $\tilde{f}(a) - \ell = \ell - \ell = 0$.
Ainsi, pour tout $x \in I \cup \{a\}$, $|x-a| < \eta \Rightarrow |\tilde{f}(x) - \ell| < \varepsilon$.
Et donc $\lim\limits_{x\to a} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(a)$, donc $\tilde{f}$ est continue en a. □

⚠ On ne prolongera une fonction qu'en un réel, il n'est pas question de donner une

valeur à $f(+\infty)$.
Et de même, la valeur donnée ne peut qu'être réelle, on ne posera pas $\tilde{f}(a) = \pm\infty$.

Exemples 17.38

- Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.
Alors f n'est pas définie en 0, mais $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \sin(0)}{x} = \sin'(0) = 1$.
Donc on peut prolonger f par continuité en 0 en posant

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

- Pour $\alpha > 0$, la fonction $x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ peut être prolongée par continuité en 0 puisque $\lim\limits_{x\to 0} \alpha \ln(x) = -\infty$ et donc, par composition avec la limite de exp en $-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha = 0$.
On prolonge donc notre fonction par continuité en posant $0^\alpha = 0$.

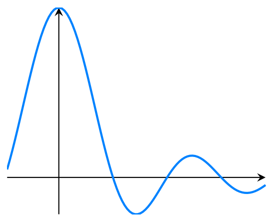


FIGURE 17.3– La fonction $\tilde{f}$ (appellée aussi *sinus cardinal*).

⚠ Attention !
Ceci ne vaut pas pour $\alpha = 0$, on veut toujours avoir $0^0 = 1$.

17.5 CONTINUITÉ : THÉORÈMES GLOBAUX

17.5.1 Le théorème des valeurs intermédiaires et ses corollaires

Théorème 17.39 (Théorème des valeurs intermédiaires) : *Soit $f \in \mathscr{C}([a,b], \mathbf{R})$, et soit y un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = y$.*

Remarque
On serait tenté de dire $y \in [f(a), f(b)]$, mais dans le cas où $f(b) < f(a)$, il faut en fait lire $y \in [f(b), f(a)]$.

Démonstration. Il faut distinguer deux cas suivant que $f(a) \leqslant f(b)$ ou $f(b) < f(a)$. Les preuves étant similaires, nous ne traitons que le premier. Le cas où $y = f(a)$ ou $y = f(b)$ est trivial[8], donc nous supposons que $y \in]f(a), f(b)[$.
Soit alors $M = \sup\{x \in [a,b],\ f(x) \leqslant y\}$. Notons que ce sup existe puisque nous sommes en présence d'une partie non vide (elle contient a) et bornée de $\mathbf{R}$, car incluse dans $[a,b]$.
Alors, la caractérisation séquentielle des bornes supérieures nous dit qu'il existe une suite (x_n) à valeurs dans $[a,b]$, qui tend vers M et telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(x_n) \leqslant y$.
Mais f est continue en M, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(M)$, et donc $f(M) \leqslant y$.
On ne peut avoir $M = b$, car on aurait alors $f(b) \leqslant y$, ce qui contredit notre hypothèse.
Donc pour n suffisamment grand, $M + \dfrac{1}{n} \in [a,b]$.
Or, $M + \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(M + \dfrac{1}{n}\right) = f(M)$.
Mais par définition de M, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $f\left(M + \dfrac{1}{n}\right) > y$, donc $f(M) = \lim\limits_{n\to+\infty} f\left(M + \dfrac{1}{n}\right) \geqslant y$.
Et donc nécessairement, par double inégalité, $f(M) = y$. □

[8] Il suffit de prendre $c = a$ ou $c = b$.

Remarque
C'est ici qu'on utilise le fait que f est définie sur un **intervalle**.

⚠ Les deux hypothèses fondamentales que f est continue et que son ensemble de définition est un intervalle ne sont pas négociables.

Corollaire 17.40 – *Une fonction continue sur un intervalle I qui n'est pas de signe constant s'annule en un point de I.*

Démonstration. Soient $a, b \in I$ tels que $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$. Si on note J le segment de bornes a et b alors par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in J$ tel que $f(c) = 0$. □

Détails
Donc $J = [a,b]$ si $a < b$, $J = [b,a]$ sinon.

Par contraposée, une fonction continue sur un intervalle qui ne s'annule pas sur cet intervalle est de signe constant.

Corollaire 17.41 : *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

Démonstration. Soit I un intervalle, soit f une fonction continue sur I.
Soient alors $u < v \in f(I)$. Il existe alors deux réels a et b dans I tels que $u = f(a)$ et $v = f(b)$.
Soit alors $z \in [u, v]$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a, b]$ (ou $[b, a]$ si jamais $b < a$) tel que $z = f(c) \in f(I)$.
Et donc $[u, v] \subset f(I)$: $f(I)$ est un intervalle. □

Le théorème des valeurs intermédiaires se généralise bien avec des limites, finies ou infinies, tant qu'on travaille avec des fonctions continues sur des intervalles. Il y aurait bien trop de cas à distinguer pour donner un énoncé et une preuve complète, mais vous avez l'intuition de ces résultats.
Traitons deux cas à titre d'exemple :

Exemple 17.42

▶ Soit $f :]a, b] \to \mathbf{R}$ continue, avec $a \in \overline{\mathbf{R}}$ telle que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbf{R}$. Alors pour tout $y \in \mathbf{R}$ **strictement** compris entre ℓ et $f(b)$, il existe $c \in]a, b]$ tel que $f(c) = y$.
Supposons par exemple que $\ell > f(b)$, de sorte que $f(b) \leqslant y < \ell$.
Soit alors $\varepsilon > 0$ tel que $f(b) \leqslant y < \ell - \varepsilon < \ell$.
Alors, par définition de limite, il existe $t \in]a, b]$ tel que $\ell - \varepsilon < f(t) \leqslant \ell$.
Et alors, le théorème des valeurs intermédiaires, appliqué entre t et b prouve qu'il existe $c \in [t, b]$ tel que $f(c) = y$.
▶ Soit $f : [a, b[\to \mathbf{R}$ telle que $\lim_{x\to b} f(x) = -\infty$. Alors pour tout $y \leqslant f(a)$, il existe $c \in [a, b[$ tel que $f(c) = y$.
En effet, par définition de limite, il existe un voisinage V_b de b tel que pour tout $x \in I \cap V_b$, $f(x) < y - 1$. Et donc en particulier, pour $x_0 \in I \cap V_b$, $f(x_0) < y - 1$.
Donc le théorème des valeurs intermédiaires s'applique entre a et x_0 : il existe $c \in [a, x_0]$ tel que $f(c) = y$, et $[a, b[$ étant un intervalle, on a bien $x_0 \in [a, b[$.

⚠ **Attention !**
Une précaution à prendre dans ces cas là est qu'une limite n'est pas forcément une valeur atteinte. C'est possible, mais dans ce cas, le théorème des valeurs intermédiaires ne suffira pas.

Détails
Il existe bien de tels x_0.

Corollaire 17.43 : *Soit I un **intervalle** de $\mathbf{R}$, et soit $f : I \to \mathbf{R}$. Notons alors $J = f(I)$. Si f est continue et strictement monotone alors J est un intervalle de $\mathbf{R}$ et f réalise une bijection de I sur J.*

Démonstration. Le fait que J soit un intervalle découle du théorème des valeurs intermédiaires.
L'injectivité découle de la stricte monotonie. Et la surjectivité de la définition même de J : c'est l'ensemble des éléments qui admettent au moins un antécédent par f. □

La question qui reste ouverte est : comment déterminer J ?
Il y aurait trop de cas à distinguer pour qu'il soit intéressant de donner un énoncé complet, mais vous connaissez déjà intuitivement ces résultats, et la pratique du théorème de la bijection ne change pas : on lit l'intervalle image sur le tableau de variations de f.
Notons que par le théorème de la limite monotone, f admet nécessairement des limites[9] aux bornes de I.
Donnons tout de même quelques exemples de cas particuliers :

- si $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ est strictement décroissante et continue, alors f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(b), f(a)]$
- si $f :]a, b] \to \mathbf{R}$ est strictement croissante et continue, alors f réalise une bijection de $]a, b]$ sur $]\lim_a f, f(b)]$
- si $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ est strictement décroissante et continue, alors f réalise une bijection de $]a, b[$ sur $\left]\lim_b f, \lim_a f\right[$

[9] Finies ou infinies.

- etc, etc

Prouvons par exemple le second point, en gardant à l'esprit que la seule chose qui n'a pas encore été prouvée est que $J = f(]a,b]) = \left]\lim_a f, f(b)\right]$.

Il est évident que $f(b)$ est le plus grand élément de J par croissance de f, et par le théorème de la limite monotone, $\inf J = \inf_{x\in]a,b]} f(x) = \lim_{x\to a} f(x)$

Donc[10] $J =]\lim_a f, f(b)]$ ou $J = [\lim_a f, f(b)]$.

Si on était dans le second cas, cela signifierait qu'il existe $t \in]a,b]$ tel que $f(t) = \lim_a f$, et donc, par stricte croissance de f, pour $x \in]a,t[$, $f(x) < \lim_a f$.

Ceci contredit le fait que $\lim_a f = \inf J$.

Remarque Avec cet inf éventuellement égal à $-\infty$, ce qui n'est pas tout à fait autorisé dans $\mathbf{R}$, mais a un sens dans $\overline{\mathbf{R}}$ (qui rappelons-le, est aussi muni d'une relation d'ordre).

[10] Cf. la classification des intervalles de $\mathbf{R}$.

17.5.2 Le théorème des bornes atteintes

Théorème 17.44 : *Soit $I = [a,b]$ un **segment** de $\mathbf{R}$, et soit $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbf{R})$. Alors f est bornée et atteint ses bornes.*
Autrement dit, f possède un maximum et un minimum sur $[a,b]$.

Max/min Dire que f atteint ses bornes est plus fort que juste dire qu'elle est bornée. Le second garantit l'existence de $\sup f/\inf f$, alors que le premier garantit leur existence et le fait qu'ils soient dans l'image de f, et donc que ce sont bien des valeurs atteintes.

Démonstration. Par le théorème des valeurs intermédiaires, $f([a,b])$ est un intervalle J.

- Si J possède une borne supérieure M, alors par la caractérisation séquentielle de borne supérieure il existe une suite (y_n) d'éléments de J qui converge vers M. Notons alors x_n un antécédent de y_n, de sorte que $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$.
- Si J n'est pas majoré, alors il existe une suite (y_n) d'éléments de J qui tend vers $M = +\infty$. Notons alors x_n un antécédent de y_n, de sorte que $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Dans les deux cas, puisque (x_n) est bornée[11], par le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ qui converge vers un réel c.
Et puisque $\forall n \in \mathbf{N}$, $a \leqslant x_{\varphi(n)} \leqslant b$, par passage à la limite, $a \leqslant c \leqslant b$, soit encore $c \in [a,b]$.
Mais alors, par continuité de f, $f(x_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(c)$.
Or $f\left(x_{\varphi(n)}\right) = y_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$.
Ceci élimine donc déjà le cas où J n'est pas majoré, et donc $M = f(c)$ est le maximum de J, puisqu'il s'agit d'une valeur atteinte par f.

[11] Elle est à valeurs dans $[a,b]$.

En appliquant le même raisonnement à $-f$, on prouve que f possède un minimum. □

⚠ Ceci ne vaut plus si on n'est pas sur un segment, comme le prouvent par exemple les cas de $\tan_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$, $\ln_{|]0,1]}$ ou Arctan.

Exemple 17.45

Une fonction continue et périodique sur $\mathbf{R}$ possède un maximum et un minimum.
En effet, soit T une période de f. Alors sur le segment $[0,T]$, f est continue et possède donc un minimum m atteint en x_0 et un maximum M atteint en x_1. Donc pour tout $x \in [0,T]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$.
Soit alors $x \in \mathbf{R}$, et soit $k = \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor$, de sorte que $k \leqslant \frac{x}{T} < k+1 \Leftrightarrow kT \leqslant x < (k+1)T$.
Alors $f(x) = f(x-kT)$, avec $x - kT \in [0,T[\subset [0,T]$.
Donc $m \leqslant f(x-kT) \leqslant M$ et donc $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

17.6 Continuité d'une bijection réciproque

Proposition 17.46 : *Soit I un **intervalle** et soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue.*
Alors il y a équivalence entre :

1. *f est strictement monotone*
2. *f est injective (et donc bijective de I sur $f(I)$)*

Démonstration. Le sens 1) $\Rightarrow$ 2) a déjà été vu, et ne nécessite aucunement la continuité de f.
Supposons à présent que f soit injective, et supposons par l'absurde qu'elle n'est pas monotone[12].
Alors f n'est pas croissante, donc il existe $x_1, y_1 \in I$ tels que $x_1 < y_1$ et $f(x_1) > f(y_1)$.
Et même, f n'est pas décroissante, donc il existe $x_2, y_2 \in I$ tels que $x_2 < y_2$ et $f(x_2) < f(y_2)$.
Pour $t \in [0,1]$, considérons alors $\alpha(t) = (1-t)x_1 + tx_2$.
Il est facile[13] de prouver que $\alpha(t)$ est compris entre x_1 et x_2, et donc dans I car I est un intervalle.
De même, $\beta(t) = (1-t)y_1 + ty_2$ est dans I.
Soit alors $g : t \mapsto f(\alpha(t)) - f(\beta(t))$. Alors g est continue sur I car somme et composée de fonctions continues.
On a $g(1) = f(\alpha(1)) - f(\beta(1)) = f(x_2) - f(y_2) < 0$.
De même, $g(0) = f(x_1) - f(y_1) > 0$.
Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_0 \in]0,1[$ tel que $g(t_0) = 0$, soit encore $f(\alpha(t_0)) = f(\beta(t_0))$.
Mais f est injective, donc $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$. Soit encore

$$(1-t_0)x_1 + t_0x_2 = (1-t_0)y_1 + t_0y_2 \Leftrightarrow \underbrace{(1-t_0)(x_1-y_1)}_{\leqslant 0} = \underbrace{t_0(y_2-x_2)}_{\geqslant 0}.$$

Puisque $t_0 \neq 0$, $x_1 - y_1 = 0$, ce qui est absurde.
Donc f est monotone, et donc strictement monotone. $\square$

[12] Étant injective, si elle est monotone, elle est strictement monotone.

[13] Éventuellement en distinguant les cas $x_1 < x_2$ et $x_1 \geqslant x_2$.

Proposition 17.47 : *Soient I un intervalle, et soit $f : I \to f(I)$ continue et bijective. Alors $f^{-1} : f(I) \to I$ est continue, de même sens de variation que f.*

De manière imagée
Si vous savez tracer le graphe de f sans lever le crayon, vous saurez aussi tracer son symétrique par rapport à la première bissectrice sans lever le crayon.

Démonstration. Nous avons déjà prouvé que f et f^{-1} ont même sens de variation.
Notons $J = f(I)$ et supposons par exemple que f est croissante (et donc f^{-1} aussi).
Il suffit de prouver que pour tout point $a \in J$ qui n'est pas la borne de droite[14] de J, $\lim\limits_{x \to a^+} f^{-1}(x) = f^{-1}(a)$ et pour tout point $a \in J$ qui n'est pas la borne de gauche de J, $\lim\limits_{x \to a^-} f^{-1}(x) = f^{-1}(a)$. Soit donc $a \in J$ qui n'est pas égal à sa borne de gauche.
Par le théorème de la limite monotone, $\ell = \lim\limits_{x \to a^-} f^{-1}(x)$ existe dans $\mathbf{R}$, et même est inférieure à $f^{-1}(a)$.
On a alors $\ell \in I$, puisque pour n suffisamment grand[15], on a $\underbrace{f^{-1}\left(a - \frac{1}{n}\right)}_{\in I} \leqslant \ell \leqslant \underbrace{f^{-1}(a)}_{\in I}$, et I est un intervalle.
Alors, par continuité de f en ℓ, $\lim\limits_{x \to \ell} f(x) = f(\ell)$.
Mais par composition de limites, on a $\lim\limits_{x \to a^-} f\left(f^{-1}(x)\right) = f(\ell)$, et trivialement, $\lim\limits_{x \to a^-} f\left(f^{-1}(x)\right) = a$.
Donc par unicité de la limite, $f(\ell) = a \Leftrightarrow \ell = f^{-1}(a)$.
On traite sur le même principe les limites à droite.
Et donc f^{-1} est continue en a, et ceci étant vrai pour tout $a \in J$, f^{-1} est continue sur J. $\square$

[14] Sous réserve que cette borne soit dans J, c'est-à-dire que J soit un intervalle fermé à droite.

[15] Suffisamment grand pour que $a - \frac{1}{n} \in I$, ce qui est possible puisque a n'est pas la borne de gauche de I.

Le même principe nous donne les limites de f^{-1} aux bornes de $f(I)$, encore une fois, sans qu'on ait vraiment envie de donner des énoncés généraux.
Contentons-nous d'un exemple :

Exemple 17.48

On sait que tan est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et que $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$.
Donc Arctan est continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}$.
Par le théorème de la limite monotone, elle admet une limite ℓ en $-\infty$, nécessairement finie puisque Arctan est bornée.

Mais d'autre part, par composition de limites,

$$\ell = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \operatorname{Arctan}(\tan x) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} x = -\frac{\pi}{2}.$$

Donc $\ell = -\dfrac{\pi}{2}$.

17.7 Extension aux fonctions à valeurs complexes

Comme pour les suites, la notion de limite **finie** se prolonge au cas des fonctions à valeurs complexes.
Entendons-nous bien : nous parlons toujours de fonctions définies sur une partie I de $\mathbf{R}$, mais qui cette fois prennent des valeurs dans $\mathbf{C}$.

Définition 17.49 – Soit $f : I \to \mathbf{C}$, où $I \subset \mathbf{R}$, et soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$ adhérent à I. On dit que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbf{C}$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists V_a \text{ voisinage de } a,\ \forall x \in I,\ x \in V_a \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Comme pour les fonctions à valeurs réelles, si une fonction possède une limite ℓ en un point a où elle est définie, alors nécessairement $\ell = f(a)$.
On dit alors que f est continue en a.
Et on dit que $f : I \to \mathbf{C}$ est continue sur I si pour tout $a \in I$, f est continue en a. On note $\mathscr{C}(I, \mathbf{C})$ l'ensemble des fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbf{C}$.
On retrouve alors une caractérisation par les parties réelles/imaginaires :

Proposition 17.50 : *Avec les hypothèses précédentes,*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to a} \operatorname{Re}(f(x)) = \operatorname{Re}(\ell) \\ \lim\limits_{x\to a} \operatorname{Im}(f(x)) = \operatorname{Im}(\ell) \end{cases}$$

Démonstration. Voir la preuve donnée pour le cas des suites. □

De même, on retrouve que si f possède une limite (nécessairement finie) en a, alors f est bornée au voisinage de a.
Tous les résultats ne faisant pas appel à la relation d'ordre sur $\mathbf{R}$ restent valables sur $\mathbf{C}$, et en particulier la caractérisation séquentielle, et tout ce qui concerne les opérations sur les limites.
Attention à la composition des limites, on ne pourra composer pas composer deux fonctions à valeurs complexes[16], mais seulement $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbf{R}$, où J est une partie de $\mathbf{R}$. Autrement dit, f (la fonction de droite) doit être définie sur une partie de $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{R}$.

Bornée
La définition de bornée n'a pas changée : f est bornée si la fonction réelle $|f|$ l'est.

[16] Ou plutôt, on ne dira rien des limites de telles composées, puisque nous n'avons défini la limite que pour les fonctions définies sur $\mathbf{R}$.

On dispose notamment de la proposition suivante :

Proposition 17.51 : *Soit $f \in \mathscr{C}(I, \mathbf{C})$. Alors $|f| \in \mathscr{C}(I, \mathbf{C})$.*

Démonstration. $|f| = \sqrt{\operatorname{Re}(f)^2 + \operatorname{Im}(f)^2}$ est composée de la fonction $\operatorname{Re}(f)^2 + \operatorname{Im}(f)^2$, continue sur I et à valeurs dans $\mathbf{R}_+$, avec la fonction racine carrée, continue sur $\mathbf{R}_+$. □

Les mêmes résultats se traduisent évidemment en termes de continuité. Toutefois, puisqu'on perd la relation d'ordre dans $\mathbf{C}$, le théorème des valeurs intermédiaires n'y a plus de sens, de même que le théorème de la bijection.

Le théorème des bornes atteintes doit lui aussi être reformulé, mais il permet tout de même de prouver qu'une fonction à valeurs complexes continues sur un segment est bornée.
Notons qu'il nous faut adapter un peu la définition de fonction bornée, puisqu'il n'est plus question de parler de minorant/majorant sur $\mathbf{C}$.

Définition 17.52 – Soit $f : I \to \mathbf{C}$ une fonction à valeurs complexes. On dit que f est bornée si la fonction réelle $|f|$ est bornée.
C'est-à-dire s'il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $|f(x)| \leqslant M$.

Proposition 17.53 : *Soit $f : [a, b] \to \mathbf{C}$ une fonction à valeurs complexes continue sur un segment. Alors f est bornée.*

Démonstration. En effet, si f est une telle fonction, $|f|$ est une fonction continue sur le même segment, et à valeurs réelles. Elle est donc bornée[17] □

[17] Et atteint ses bornes, mais c'est inutile ici.