13 Calcul matriciel

Dans tout le chapitre $\mathbf{K}$ désigne indifféremment $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
Les éléments de $\mathbf{K}$ seront appelés des **scalaires**.

13.1 Définitions, opérations sur les matrices

Définition 13.1 – Soient $(n,p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$. On appelle **matrice à n lignes et à p colonnes à coefficients dans $\mathbf{K}$** toute application $A : \left| \begin{array}{ccc} [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ (i,j) & \longmapsto & a_{i,j} \end{array} \right.$.
Une telle matrice A est représentée[1] sous forme d'un tableau à n lignes et p colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, le scalaire $a_{i,j}$ est appelé **coefficient d'indice (i,j) de** A, et on le note généralement $a_{i,j}$ où $[A]i,j$.
On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes.
Lorsque $n = p$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ au lieu de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{K})$.

[1] Et nous garderons cette représentation en tête et n'aurons **jamais** besoin de la voir comme une application.

Exemple 13.2

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbf{R}) \text{ et } \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C}).$$

Remarques. ► Notons que se donner une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ revient à se donner une famille de $n \times p$ scalaires $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ indicée par $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$.
Il ne sera pas rare qu'on écrive «Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$», ce qui signifie qu'on considère la matrice A dont les coefficients sont les $a_{i,j}$.
► On parlera de «matrice de taille (n,p)» pour un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
► Par définition, deux matrices **de même tailles**[2] sont égales si et seulement si tous leurs coefficients le sont.

[2] Et deux matrices de tailles différentes ne peuvent pas être égales. Tout simplement car en tant qu'applications, elles n'ont pas même ensemble de définition.

Les éléments de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{K})$ sont appelés matrices lignes (de taille n), et ceux de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ sont appelés matrices colonnes (de taille n).
On identifie généralement $\mathbf{K}^n$ à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, en identifiant le n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ à la matrice (à n lignes et une seule colonne) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Définition 13.3 – ▸ Soient $(n,p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$. On appelle **matrice nulle** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et on note $0_{n,p}$ (ou tout simplement 0 lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté) la matrice de taille (n,p) dont tous les coefficients sont nuls. Si $n = p$, on notera aussi 0_n.
▸ Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on appelle **matrice identité d'ordre** n, et on note I_n, la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dont les coefficients sont les $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

Autrement dit, $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Terminologie
La quantité $\delta_{i,j}$ est appelée **symbole de Kronecker.**

On appelle matrice carrée toute matrice qui a autant de ligne que de colonnes.
Certaines matrices, de forme remarquable portent alors un nom :

Définition 13.4 (Matrices carrées remarquables) – Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On dit que A est

1. **triangulaire supérieure** si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.
   Autrement dit si tous les coefficients situés sous la diagonale sont nuls.
2. **triangulaire inférieure** si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.
   Autrement dit si tous les coefficients situés au dessus de la diagonale sont nuls.
3. **diagonale** si elle est à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure, c'est-à-dire si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.
   C'est donc une matrice dont les seuls coefficients non nuls sont sur la diagonale.
   Pour $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$, on note $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la matrice dont les coefficients diagonaux sont (dans cet ordre) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.
   Autrement dit, $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$
4. **scalaire** si elle est diagonale, et que tous ses coefficients sont égaux. Autrement dit, s'il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $A = \mathrm{Diag}(\lambda, \lambda, \dots, \lambda)$.

Formule ?
Si un dessin de matrice avec des pointillés ne vous convient pas (mais à terme, il faudra que cela vous convienne) : le coefficient (i,j) de $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est
$$\begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \lambda_i & \text{si } i = j \end{cases}$$

13.1.1 L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$

Sans chercher à expliciter pour l'instant ce qu'est un espace vectoriel, nous allons définir sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ deux opérations : la somme de deux matrices, et la multiplication d'une matrice par un scalaire.
De plus, ces deux opérations sont compatibles en un certain sens, et donc $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ forme ce que nous nommerons plus tard un espace vectoriel.

Définition 13.5 (Multiplication d'une matrice par un scalaire) –
Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, et soit $\lambda \in \mathbf{K}$.
Alors on note $\lambda \cdot A$ (ou plus simplement λA) la matrice $(\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

Notons qu'en particulier, pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $0 \cdot A = 0_{n,p}$, et que pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda \cdot 0_{n,p} = 0_{n,p}$.

Proposition 13.6 : *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et soient $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$. Alors : $(\lambda\mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A)$*

Démonstration. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$. Alors
$$[(\lambda\mu) \cdot A]_{i,j} = (\lambda\mu) a_{i,j} = \lambda\mu a_{i,j} = \lambda(\mu a_{i,j}) = \lambda[\mu \cdot A]_{i,j} = [\lambda \cdot (\mu \cdot A)]_{i,j}.$$

□

Définition 13.7 – Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
Alors on note $A+B = (a_{i,j}+b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

Remarque
Notons que la somme de deux matrices n'est définie que pour des matrices de même taille.

Toutes les propriétés qui suivent doivent vous paraître relativement évidentes, puisqu'elles disent que les calculs avec des matrices se font avec les mêmes règles que les calculs dans les complexes ou les réels.
Malgré tout, leur preuve est un passage obligé.

Proposition 13.8 : *Soient $(A,B,C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})^3$, et $(\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$. Alors :*

1. *$A+B = B+A$ (commutativité de la somme)*
2. *$A+(B+C) = (A+B)+C$ (associativité de la somme)*
3. *$0_{n,p}+A = A+0_{n,p} = A$ ($0_{n,p}$ est un élément neutre pour la somme)*
4. *il existe une unique matrice $D \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ telle que $A+D = D+A = 0_{n,p}$, et cette matrice est $(-1)\cdot A$, que l'on notera $-A$.*
5. *$(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$*
6. *$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$.*

Démonstration.

1. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$. Alors
$$[A+B]_{i,j} = [A]_{i,j}+[B]_{i,j} = [B]_{i,j}+[A]_{i,j} = [B+A]_{i,j}.$$
2. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$. Alors
$$[A+(B+C)]_{i,j} = [A]_{i,j}+[B+C]_{i,j} = [A]_{i,j}+([B]_{i,j}+[C]_{i,j}) = ([A]_{i,j}+[B]_{i,j})+[C]_{i,j} = [A+B]_{i,j}+[C]_{i,j} = [(A+B)+C]_{i,j}.$$
Donc $A+(B+C) = (A+B)+C$.
3. Notons que la somme étant commutative, il suffit de prouver que $A+0_{n,p} = A$.
Soit alors $(i,j) \in [\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$. Alors
$$[0_{n,p}+A]_{i,j} = [0_{n,p}]_{i,j}+[A]_{i,j} = 0+[A]_{i,j} = [A]_{i,j}.$$
Donc $0_{n,p}+A = A$.
4. Procédons par analyse-synthèse. Supposons qu'une telle matrice D existe. Alors pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$,
$$[A+D]_{i,j} = 0 \Leftrightarrow [A]_{i,j}+[D]_{i,j} = 0 \Leftrightarrow [D]_{,j} = -[A]_{i,j} = [(-1)\cdot A]_{i,j}.$$
Donc $D = (-1)\cdot A$ est la seule matrice possible.
Inversement, on a facilement $[A+D]_{i,j} = 0$ pour tout (i,j), donc $A+D = 0_{n,p}$.
5. Les points 5) et 6) sont laissés en exercices.

□

Définition 13.9 – Soient $(n,p) \in \mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*$. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, à l'exception de celui situé sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne, qui vaut 1.
Les $E_{i,j}$, $1\leqslant i\leqslant n$, $1\leqslant j\leqslant p$ sont appelée **matrices élémentaires** (de taille (n,p)).

Formule ?
Le coefficient (k,ℓ) de $E_{i,j}$ est donné par
$$[E_{i,j}]_{k,\ell} = \delta_{i,k}\delta_{j,\ell}.$$

Remarque. La notation $E_{i,j}$, qui ne fait pas apparaître n ou p laisse entendre qu'il n'y a pas de confusions possibles sur la taille des matrices.
On prendra garde au fait que $E_{1,2}$ ne désigne pas la même matrice suivant qu'on se place dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ ou dans $\mathcal{M}_{2,5}(\mathbf{R})$.

Exemple 13.10

Dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{R})$, il y a six matrices élémentaires, qui sont

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 13.11 : *Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant j \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$. Alors $A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}E_{i,j}$.*

On dit que A est combinaison linéaire[3] des matrices $E_{i,j}$.
Mieux : cette écriture est unique, c'est-à-dire que si on a des scalaires $(\lambda_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ tels que $A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} \lambda_{i,j}E_{i,j}$, alors pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $\lambda_{i,j} = a_{i,j}$.

[3] C'est-à-dire une somme de multiples des matrices élémentaires. La définition rigoureuse de combinaison linéaire viendra en temps voulu dans le chapitre sur les espaces vectoriels.

Démonstration. Il suffit de faire le calcul : le coefficient (k,ℓ) de $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} \lambda_{i,j}E_{i,j}$ est $\lambda_{k,\ell}$.

Et donc $A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} \lambda_{i,j}E_{i,j}$ si et seulement si pour tout $(k,\ell) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $\lambda_{k,\ell} = a_{k,\ell}$. □

13.1.2 Produit matriciel

Définition 13.12 (Produit de matrices) – Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$.
Alors on définit le produit AB comme étant la matrice $(c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant q}}$ de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbf{K})$ où

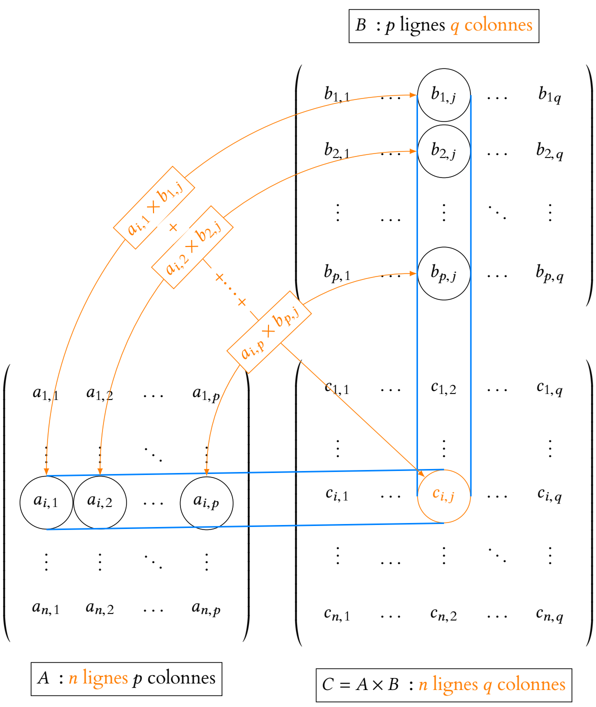
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!],\ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}.$$

Remarque
Le produit de deux matrices n'est défini que si la première possède autant de colonnes que la seconde possède de lignes.
En particulier, on ne peut multiplier deux matrices carrées que si elles sont de même taille.

La définition peut sembler compliquée au premier abord, mais est en fait assez facile à utiliser : le coefficient (i,j) du produit s'obtient, comme sur le dessin ci-contre en multipliant les coefficients de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par ceux de la $j^{\text{ème}}$ colonne de B.

Il est conseillé, au moins dans un premier temps, de positionner vos matrices comme sur la figure ci-contre, avec A à gauche, B au dessus, le produit AB venant s'insérer entre les deux.

Un produit de matrices, ça se fait avec les deux mains et ça s'écrit avec la troisième !



Remarques. ▶ Notons que le produit de deux matrices carrées de même taille est toujours défini.
▶ Il se peut que le produit AB soit défini, sans que BA le soit. Par exemple si $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbf{K})$.
▶ Le produit de toute matrice par la matrice nulle est la matrice nulle.

Exemples 13.13

▶ Le produit de matrices, contrairement au produit de scalaires, n'est pas commutatif : on n'a pas toujours $AB = BA$, même lorsque ces deux produits sont bien définis.

Ainsi, on a par exemple,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lorsque $AB = BA$, on dit que A **et** B **commutent.**
▶ Plus surprenant, il se peut qu'un produit de matrices soit nul sans qu'aucun des facteurs ne soit nul.
Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$.

Exercice
À quelle condition sur les tailles de A et B les deux produits AB et BA ont-ils bien un sens ?

Proposition 13.14 :

1. *pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, pour tout $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ et tout $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbf{K})$, $(AB)C = A(BC)$ (associativité du produit matriciel)*
2. *pour $A, A' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $B, B' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$, on a*
$$(\lambda A + \mu A')B = \lambda AB + \mu A'B \text{ et } A(\lambda B + \mu B') = \lambda AB + \mu AB' \quad \textit{(bilinéarité du produit)}.$$
3. *pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $I_n A = A I_p = A$.*
4. *pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$, $(\lambda \cdot A)(\mu \cdot B) = (\lambda\mu) \cdot (AB)$.*

En particulier
La matrice I_n commute avec toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Démonstration.

1. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, r]\!]$. Alors
$$[(AB)C]_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} [AB]_{i,k} [C]_{k,j} = \sum_{k=1}^{q} \sum_{\ell=1}^{p} [A]_{i,\ell}[B]_{\ell,k}[C]_{k,j}.$$
Et de même,
$$[A(BC)]_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{p} [A]_{i,\ell} [BC]_{\ell,j} = \sum_{\ell=1}^{p} [A]_{i,\ell} \sum_{k=1}^{q} [B]_{\ell,k}[C]_{k,j}.$$
2.
3. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$,
$$[I_n A]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} [I_n]_{i,k}[A]_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k}[A]_{k,j} = [A]_{i,j}.$$
Et de même pour $[AI_p]_{i,j}$.
4. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, q]\!]$,
$$[(\lambda \cdot A)(\mu \cdot B)]_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} [\lambda A]_{i,k}[\mu B]_{k,j} = \lambda\mu \sum_{k=1}^{p} [A]_{i,k}[B]_{k,j} = \lambda\mu[AB]_{i,j} = [(\lambda\mu)(AB)]_{i,j}.$$

□

Détails
Tous les $\delta_{i,k}$ sont nuls, sauf pour $k = i$. Donc de la somme ne reste qu'un seul terme : celui pour lequel $k = i$.

Proposition 13.15 (Multiplication par une ligne/une colonne) : *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.*

1. *Si E_j est la matrice de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ dont tous les coefficients sont nuls à l'exception de celui de la $j^{\text{ème}}$ ligne qui vaut 1, alors AE_j est égal à C_j : la $j^{\text{ème}}$ colonne de A.*

   Plus généralement, pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$, on a $AX = x_1C_1 + x_2C_2 + \cdots + x_pC_p$.
2. *De même, si E_i est la matrice de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{K})$ dont seul le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ colonne est non nul et vaut 1, alors $E_iA = L_i$, la $i^{\text{ème}}$ ligne de A.*

Autrement dit

E_j est une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$.

Démonstration. Il n'y a que la première à faire, la suite découle de la bilinéarité du produit. Soit donc $j \in [\![1, n]\!]$. Alors AE_j est une matrice colonne (à n lignes), dont le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne est

$$[AE_j]_{i,1} = \sum_{k=1}^{p} [A]_{i,k}\,[E_j]_{k,1} = [A]_{i,j}.$$

Nous reconnaissons là le $i^{\text{ème}}$ coefficient de C_j, donc $AE_j = C_j$.
La formule générale pour AX découle alors de la bilinéarité du produit. □

Définition 13.16 (Puissances d'une matrice carrée) – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors, on note $A^0 = I_n$, et pour $k \in \mathbf{N}^*$,

$$A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}.$$

On a alors, pour tous $(k, \ell) \in \mathbf{N}^2$, $A^{k+\ell} = A^kA^\ell = A^\ell A^k$.
Notons en revanche qu'on n'a pas nécessairement $(AB)^k = A^kB^k$.
Toutefois, ceci reste vrai si A et B commutent, car alors

$$(AB)^2 = ABAB = AABB = A^2B^2 \text{ puis } (AB)^3 = (AB)^2AB = A^2B^2AB = A^2AB^2B = A^3B^3, \cdots$$

Plus généralement, si A et B commutent, alors toute puissance de A commute avec toute puissance de B.

Définition 13.17 – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. S'il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $A^p = 0_n$, on dit que A est **nilpotente**.
On appelle alors indice de nilpotence de A le plus petit entier naturel k tel que $A^k = 0_n$. C'est donc l'unique entier k tel que $A^{k-1} \neq 0_n$ et $A^k = 0_n$.

Exemple 13.18

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = 0_3$.
Donc A est une matrice nilpotente, et son indice de nilpotence vaut 3.

Proposition 13.19 (Binôme de Newton matriciel) : *Soient $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$ deux matrices **qui commutent**, c'est-à-dire telles que $AB = BA$.*
Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

Démonstration. La preuve se fait de la même manière que dans $\mathbf{C}$: par récurrence sur n.

Pour $n = 0$, il n'y a pas grand chose à dire : $(A+B)^0 = I_n = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} A^k B^{0-k}$.

Supposons que $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$. Alors :

$$\begin{aligned}
(A+B)^{n+1} &= (A+B)(A+B)^n = (A+B)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n-k}\\
&= A\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n-k} + B\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n-k}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{k+1}B^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}BA^kB^{n-k}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{k+1}B^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n+1-k}\\
&= \sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}A^iB^{n-(i-1)} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n+1-k}\\
&= \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1}A^{n+1}B^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}A^kB^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n+1-k} + \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1}A^0B^{n+1}\\
&= A^0B^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)A^kB^{n+1-k} + A^{n+1}B^0\\
&= \binom{n+1}{0}A^0B^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}A^kB^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1}A^{n+1}B^{n+1-(n+1)}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}A^kB^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

Commutation

C'est ici qu'on utilise le fait que A et B commutent : si $AB = BA$, alors pour tout k,

$$BA^k = A^kB.$$

Chgt d'indice

Dans la première somme, on a posé $i = k+1$, de sorte que $k = i - 1$.

Formule de Pascal.

□

Exemple 13.20

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Alors $A = 3I_2 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=T}$.

Puisque I_2 commute à toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, elle commute à T, et donc $3I_2$ commute également avec T.

Or, on a $T^2 = I_2$, puis $T^3 = T^2T = I_2T = T$, $T^4 = I_2$, $T^5 = T$, etc.

Et donc pour tout $k \in \mathbf{N}$, $T^k = \begin{cases} I_2 & \text{si } k \text{ est pair} \\ T & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$

Par la formule du binôme, on a donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}
A^n &= (T+3I_2)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}T^k(3I_2)^{n-k}\\
&= \left(\sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}\right)I_2 + \left(\sum_{\substack{k=0\\k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}\right)T
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} & \displaystyle -\sum_{\substack{k=0\\k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} \\ \displaystyle -\sum_{\substack{k=0\\k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} & \displaystyle\sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} \end{pmatrix}.$$

Notons alors $S_1 = \displaystyle\sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k}$ et $S_2 = \displaystyle\sum_{\substack{k=0\\k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k}$.

Alors $S_1 + S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} = (1+3)^n = 4^n$ et

$$S_1 - S_2 = \sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} - \sum_{\substack{k=0\\k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 3^{n-k} = (-1+3)^n = 2^n.$$

On en déduit que $S_1 = \dfrac{4^n + 2^n}{2}$ et $S_2 = \dfrac{4^n - 2^n}{2}$.

Et donc

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4^n + 2^n & 2^n - 4^n \\ 4^n - 2^n & 4^n + 2^n \end{pmatrix}.$$

Proposition 13.21 : *Le produit de deux matrices A et B triangulaires supérieures (resp. triangulaires inférieurs, resp. diagonales) est une matrice triangulaire supérieure (resp. triangulaire inférieure, resp. diagonale).*
De plus, dans les trois cas, le coefficient diagonal (i,i) de AB vaut $a_{i,i}b_{i,i}$ (le produit des coefficients diagonaux (i,i) de A et de B).

Démonstration. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ deux matrices triangulaires supérieures.
Alors pour $i \geqslant j$, on a

$$[AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j} = \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{A_{i,k}}_{=0} B_{k,j} + A_{i,i}B_{i,j} + \sum_{k=i+1}^{n} A_{i,k} \underbrace{B_{k,j}}_{=0} = A_{i,i}B_{i,i}.$$

Donc en particulier, pour $i = j$, $(AB)_{i,i} = A_{i,i}B_{i,i}$, et pour $i > j$, $(AB)_{i,j} = 0$, ce qui est bien la définition de matrice triangulaire supérieure.
On raisonne de même pour les triangulaires inférieures, et enfin, une matrice diagonale n'est rien d'autre qu'une matrice qui est à la fois triangulaire supérieure et inférieure. □

Le résultat suivant, plus simple qu'il n'y paraît n'est pas au programme **en sup**, mais je vous invite à essayer de le comprendre, même si sa preuve n'est pas exigible.

Proposition 13.22 (Produit par blocs) : *Soient $A, A', B, B', C, C', D, D'$ des matrices à coefficients dans $\mathbf{K}$ dont les tailles sont comme ci-dessous. Alors*

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \overset{q}{\longleftrightarrow} & \overset{q'}{\longleftrightarrow} \end{array} \\ \begin{array}{c} p\updownarrow \\ p'\updownarrow \end{array} & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \overset{r}{\longleftrightarrow} & \overset{r'}{\longleftrightarrow} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \updownarrow q \\ \updownarrow q' \end{array} \end{array} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \overset{r}{\longleftrightarrow} & \overset{r'}{\longleftrightarrow} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \updownarrow p \\ \updownarrow p' \end{array} \end{array}.$$

Il faut bien comprendre dans cette définition, que la matrice $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ ne désigne pas une matrice dont les coefficients seraient eux-mêmes des matrices, mais bien une matrice à coefficients dans $\mathbf{K}$, de taille $(p+p', q+q')$, dont les coefficients sont :

- ceux de A si le numéro de ligne est entre 1 et p et le numéro de colonne entre 1 et q
- ceux de B si le numéro de ligne est entre 1 et p et le numéro de colonne entre $q+1$ et $q+q'$

- etc

La formule affirme alors que le produit se fait comme si on faisait un produit de matrices 2×2.

Démonstration. Notons $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+p',q+q'}(\mathbf{K})$ et $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{q+q',r+r'}(\mathbf{K})$.

La preuve est plus fastidieuse à écrire qu'à comprendre.
Pour bien la comprendre, faites le produit avec vos mains : le coefficient situé, par exemple, à la première ligne et première colonne de MM' : vous allez faire les produits des coefficients de la première ligne de M par ceux de la première colonne de M'.
Et les q premiers coefficients de la première ligne de M sont ceux de la première ligne de A, pendant que les q premiers coefficient de la première colonne de M' sont ceux de la première colonne de A'.
Donc on commence en fait par calculer le coefficient $(1,1)$ de AA'.
Puis, les q' coefficients suivants de la première ligne de M sont ceux de la première ligne de B, et les q' coefficients suivants de la première colonne de M' sont ceux de la première colonne de C'. Donc nous sommes en train de calculer le coefficient $(1,1)$ de BC'.
Et donc au final, $[MM']_{1,1} = [AA']_{1,1} + [BC']_{1,1}$.

Plus généralement, notons que les coefficients de M et M' sont donnés par :

$$[M]_{i,j} = \begin{cases} [A]_{i,j} & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant p \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant q \\ [B]_{i,j-q} & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant p \text{ et } q+1 \leqslant j \leqslant q+q' \\ [C]_{i-p,j} & \text{si } p+1 \leqslant i \leqslant p+p' \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant q \\ [D]_{i-p,j-q} & \text{si } p+1 \leqslant i \leqslant p+p' \text{ et } q+1 \leqslant j \leqslant q+q' \end{cases} \qquad [M']_{i,j} = \begin{cases} [A']_{i,j} & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant q \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant r \\ [B']_{i,j-r} & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant q \text{ et } r+1 \leqslant j \leqslant r+r' \\ [C']_{i-q,j} & \text{si } q+1 \leqslant i \leqslant q+q' \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant r \\ [D']_{i-q,j-r} & \text{si } q+1 \leqslant i \leqslant q+q' \text{ et } r+1 \leqslant j \leqslant r+r' \end{cases}$$

Il y a alors 4 cas à distinguer lors du calcul du coefficient (i,j) de MM', suivant qu'on se trouve dans le bloc en haut à gauche, en haut à droite, etc de MM'.
Je ne traite qu'un cas[4], celui où $1 \leqslant i \leqslant p$ et $1 \leqslant j \leqslant r$, les autres sont identiques.
Soit donc $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,r]\!]$. Alors

[4] Celui du bloc supérieur gauche.

$$\begin{aligned} [MM']_{i,j} &= \sum_{k=1}^{q+q'} [M]_{i,k}[M']_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{q} [A]_{i,k}[A']_{k,j} + \sum_{k=q+1}^{q+q'} [B]_{i,k-q}[C']_{k-q,j} \\ &= [AA']_{i,j} + \sum_{\ell=1}^{q'} [B]_{i,\ell}[C']_{\ell,j} \\ &= [AA']_{i,j} + [BC']_{i,j} = [AA'+BC']_{i,j}. \end{aligned}$$

Ce qui est bien le résultat annoncé.

□

13.1.3 Transposée d'une matrice

Définition 13.23 – Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
On appelle **transposée de** A et on note A^T la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ dont le coefficient à la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne est $a_{j,i}$.
Dit autrement, la transposition échange les lignes et les colonnes de A, en ce sens que la première ligne de A est la première colonne de A^T, etc.

⚠ La notation en vigueur dans les anciens programmes était ${}^tA$ (avec le ^{t} à gauche et non à droite) et non A^T. Ne soyez donc pas surpris si vous croisez cette notation.

Exemple 13.24

Dans le cas d'une matrice carrée, transposer A revient à effectuer une symétrie par rapport à la diagonale de A. Par exemple :

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ alors } A^T = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons que les coefficients diagonaux restent alors inchangés.

Proposition 13.25 (Linéarité de la transposition) : *Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$. Alors*

$$(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T.$$

Démonstration. Pour $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!]$, on a

$$\left[(\lambda A + \mu B)^T\right]_{i,j} = [\lambda A + \mu B]_{j,i} = \lambda [A]_{j,i} + \mu [B]_{j,i} = \lambda \left[A^T\right]_{i,j} + \mu \left[B^T\right]_{i,j}.$$

□

Remarque. Notons que cette formulation cache en fait plusieurs choses.
Notamment, en prenant $\lambda = \mu = 1$, que $(A+B)^T = A^T + B^T$.
Ensuite pour $\mu = 0$, que pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

Proposition 13.26 : *Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $\left(A^T\right)^T = A$.*

Démonstration. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$. Alors

$$\left[\left(A^T\right)^T\right]_{i,j} = \left[A^T\right]_{j,i} = [A]_{i,j}.$$

□

Proposition 13.27 (Transposée d'un produit) : *Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$. Alors $(AB)^T = B^T A^T$.*

Démonstration. On a, pour $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!]$,

$$\left[(AB)^T\right]_{i,j} = [AB]_{j,i} = \sum_{k=1}^{p} [A]_{j,k}[B]_{k,i}.$$

Mais d'autre part, le coefficient (i,j) du produit $B^T A^T$, où $B^T \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbf{K})$ et $A^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ vaut

$$\sum_{k=1}^{p} \left[B^T\right]_{i,k} \left[A^T\right]_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} [B]_{k,i}[A]_{j,k} = \sum_{k=1}^{p} [A]_{j,k}[B]_{k,i}.$$

□

Définition 13.28 – Une matrice carrée A est dite :

1. **symétrique** si $A^T = A$
2. **antisymétrique** si $A^T = -A$.

On note $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Notons que si A est antisymétrique, puisque A et A^T ont mêmes coefficients diagonaux, ces coefficients diagonaux doivent être égaux à leur opposé, et donc sont nuls.

Exemples 13.29

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique et $\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

13.1.4 Trace d'une matrice carrée

Définition 13.30 – Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors on appelle **trace de** A, et on note le scalaire $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} \in \mathbf{K}$. C'est la somme des coefficients diagonaux de A.

Exemples 13.31

On a

- $\operatorname{tr}(0_n) = 0$ et $\operatorname{tr}(I_n) = n$.
- Plus généralement, $\operatorname{tr}(\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.
- Si A est antisymétrique, alors[5] $\operatorname{tr}(A) = 0$.

[5] En effet, tous les coefficients diagonaux de A sont alors nuls.

Proposition 13.32 (Linéarité de la trace) : *Soient* $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, *et soient* $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$. *Alors*

$$\operatorname{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \operatorname{tr}(A) + \mu \operatorname{tr}(B).$$

Démonstration. Soient donc $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$. Alors

$$\operatorname{tr}(\lambda A + \mu B) = \sum_{i=1}^n [\lambda A + \mu B]_{i,i} = \sum_{i=1}^n (\lambda a_{i,i} + \mu b_{i,i}) = \lambda \sum_{i=1}^n a_{i,i} + \mu \sum_{i=1}^n b_{i,i} = \lambda \operatorname{tr}(A) + \mu \operatorname{tr}(B).$$

□

Proposition 13.33 : *Si* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, *alors* $\operatorname{tr}\left(A^T\right) = \operatorname{tr}(A)$.

Démonstration. C'est évident car les coefficients diagonaux de A^T sont les mêmes que ceux de A. □

Danger !

Pour autant, on n'a pas $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(A) \times \operatorname{tr}(B)$. Par exemple,

$$\operatorname{tr}(I_n^2) = n \neq \operatorname{tr}(I_n)^2 = n^2.$$

Proposition 13.34 : *Soient* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$. *Alors* $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Démonstration. Par définition,

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n [AB]_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p [A]_{i,k}[B]_{k,i} = \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^n [B]_{k,i}[A]_{i,k} = \sum_{k=1}^p [BA]_{k,k}.$$

□

Remarque. La condition sur les tailles des matrices signifie en fait que les deux produits AB et BA sont bien définis.

13.2 Inverse d'une matrice carrée

13.2.1 Matrices et systèmes linéaires

Considérons un système linéaire $(\mathscr{S}) = \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p & = b_2 \\ & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p & = b_n \end{cases}$ de n équations à p inconnues.

Posons alors $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

Alors, pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K})$, on a $AX = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p \end{pmatrix}$, de sorte que résoudre le système $(\mathscr{S})$ revient à résoudre l'équation $AX = B$, d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K})$.

Lorsque a et b sont deux scalaires, avec $a \neq 0$, il est facile de résoudre l'équation $ax = b$: il suffit de diviser les deux membres par a, et alors l'unique solution est $x = \frac{b}{a}$.
Question : existe-t-il une notion aussi simple pour les systèmes ?
La réponse est non, puisque nous savons que des systèmes n'ont pas toujours une unique solution, mais creusons un peu dans cette direction pour les systèmes carrés, c'est-à-dire lorsqu'on a autant d'équations que d'inconnues.

13.2.2 Matrices inversibles

Définition 13.35 – Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. S'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $AB = BA = I_n$, on dit que A est **inversible**.
Un tel B est alors unique, et on l'appelle **l'inverse de** A et on le note A^{-1}.
On note $GL_n(\mathbf{K})$, et on appelle **groupe linéaire d'ordre** n l'ensemble de toutes les matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

Démonstration. Il faut tout de même prouver l'unicité d'une telle matrice B, lorsqu'elle existe.
Supposons qu'il existe deux matrices B_1, B_2 de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telles que $AB_1 = AB_2 = I_n = B_1A = B_2A$.
Alors, en multipliant à gauche par B_2 la relation $AB_1 = I_n$, il vient

$$B_2AB_1 = B_2I_n \Leftrightarrow (B_2A)B_1 = B_2 \Leftrightarrow I_nB_1 = B_2 \Leftrightarrow B_1 = B_2.$$

□

Exemples 13.36

► La matrice identité est inversible, et est égale à son propre inverse, puisque $I_n^2 = I_n$.
► Plus généralement, toute matrice diagonale D dont les coefficients valent ± 1 est inversible, et égale à son propre inverse puisqu'alors

$$D^2 = \operatorname{Diag}(\pm 1, \pm 1, \cdots, \pm 1)^2 = \operatorname{Diag}((\pm 1)^2, (\pm 1)^2, \dots, (\pm 1)^2) = \operatorname{Diag}(1, 1, \dots, 1) = I_n.$$

► Une matrice A qui possède une ligne nulle ne peut pas être inversible, puisque pour tout $B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, la $i^{\text{ème}}$ ligne de AB (où la $i^{\text{ème}}$ ligne de A est nulle) est encore nulle. Et donc AB ne peut en aucun cas valoir l'identité.
De même, une matrice dont une colonne est nulle ne peut pas être inversible.

Danger !
La réciproque est fausse : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible mais n'a ni ligne ni colonne nulle.

Proposition 13.37 : *Soient $A, B \in GL_n(\mathbf{K})$ deux matrices inversibles. Alors*

1. *A^{-1} est inversible, et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$*
2. *$\forall \lambda \in \mathbf{K}^*$, λA est inversible, d'inverse $\frac{1}{\lambda}A^{-1}$*
3. *AB est inversible, et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*
4. *pour tout $k \in \mathbf{N}$, A^k est inversible, et $\left(A^k\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^k$*
5. *A^T est inversible, et $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.*

⚠ Attention !
L'inverse d'un produit est bien le produit des inverses, mais on n'oubliera pas de changer l'ordre !

Démonstration.
1. On a $A^{-1}A = AA^{-1}$, donc il existe bien une matrice B (égale à A) telle que $A^{-1}B = BA^{-1} = I_n$.
   Et donc A^{-1} est inversible, d'inverse A.
2. On a $\lambda A \frac{1}{\lambda} A = \lambda \frac{1}{\lambda} AA^{-1} = I_n$ et de même $\frac{1}{\lambda}A^{-1}\lambda A = I_n$.
3. On a $B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$ et de même $ABB^{-1}A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$.
   Donc AB est inversible, d'inverse $B^{-1}A^{-1}$.
4. Par récurrence sur k. Si $k = 0$ c'est évident puisque I_n est inversible et $I_n = \left(A^{-1}\right)^0$.
   Supposons donc A^k inversible, d'inverse $\left(A^{-1}\right)^k$. Alors
   $$A^{k+1}\left(A^{-1}\right)^{k+1} = A^kAA^{-1}\left(A^{-1}\right)^k = A^kI_n\left(A^{-1}\right)^k = A^k\left(A^{-1}\right)^k = I_n.$$
   Et on prouve de même que $\left(A^{-1}\right)^{k+1}A^{k+1} = I_n$, donc que A^{k+1} est inversible, d'inverse $\left(A^{-1}\right)^{k+1}$.
5. On a $A^T\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}A\right)^T = I_n$ et de même $\left(A^{-1}\right)^TA^T = I_n$.

□

Remarques. Si A est inversible, on note alors, si $k \in \mathbf{N}$, $A^{-k} = \left(A^{-1}\right)^k$ et alors les propriétés usuelles des puissances restent valables pour des puissances négatives[6].

[6] Voir le chapitre suivant.

⚠ Nous ne dirons rien de la somme de deux matrices inversibles A et B, tout simplement car il n'y a pas de règle générale.
Quand bien même elle serait inversible, il n'est pas vrai[7] que $(A+B)^{-1}$ soit égal à $A^{-1} + B^{-1}$.

[7] Sauf cas pathologiques.

13.2.3 Inversibilité des matrices 2×2

Les résultats de cette partie seront généralisés en fin d'année au cas des matrices de taille $n \times n$, mais d'ici là, nous ne nous priverons pas d'utiliser les résultats qui suivent sur les matrices 2×2.

Définition 13.38 – Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$. On appelle **déterminant de** A, et on note $\det(A)$ le scalaire défini par $\det(A) = ad - bc$.

Proposition 13.39 : *Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$. Alors A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$, et dans ce cas, on a $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.*

Démonstration. Commençons par remarquer que

$$A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I_2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+cd & cb+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $\det(A) \neq 0$, alors on a

$$-\frac{1}{\det A}\left(A^2 - \operatorname{tr}(A)A\right) = I_2 \Leftrightarrow A\left(-\frac{1}{\det A}(A - (a+d)I_2)\right) = \left(-\frac{1}{\det A}(A-(a+d)I_2)\right)A = I_2.$$

Et donc A est inversible, d'inverse $\left(-\dfrac{1}{\det A}(A-(a+d)I_2)\right) = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
Si $\det(A) = 0$, supposons par l'absurde que A soit inversible.
Puisque $A^2 - \operatorname{tr}(A)A = 0$, en multipliant[8] par A^{-1}, il vient $A = \operatorname{tr}(A)I_2$, qui est inversible si et seulement si $\operatorname{tr}(A) \neq 0$.
Mais alors $\det A = \det \begin{pmatrix} \operatorname{tr}(A) & 0 \\ 0 & \operatorname{tr}(A) \end{pmatrix} = \operatorname{tr}(A)^2 \neq 0$, ce qui est absurde. □

[8] À droite ou à gauche.

Proposition 13.40 : *Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$. Alors* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Démonstration. C'est un simple[9] calcul. □

[9] Mais néanmoins désagréable (bien que sans difficulté).

Corollaire 13.41 – *Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$. Alors AB est inversible si et seulement si A et B sont toutes deux inversibles.*

Démonstration. Le produit AB est inversible si et seulement si $\det(AB) \neq 0$.
Soit encore si et seulement si $\det(A)\det(B) \neq 0$. Mais un produit de scalaires[10] est nul si et seulement si chacun de ses facteurs est nul, donc
$\det A \det B \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \det A \neq 0 \\ \det B \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \text{ inversible} \\ B \text{ inversible} \end{cases}$ □

[10] Car le déterminant est bien un scalaire et plus une matrice.

Interprétation du déterminant : soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$.
Si l'une des colonnes de A est nulle (par exemple si $a = c = 0$), alors $\det(A) = 0$.
Si les deux colonnes de A sont non nulles et proportionnelles, alors il existe $\lambda \in \mathbf{K}^*$ tel que $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$, et alors

$$\det(A) = ad - bc = \lambda bd - b\lambda d = 0.$$

En revanche, si les deux colonnes de A ne sont pas proportionnelles, avec par exemple[11] $a \neq 0$. Puisque $b = a\dfrac{b}{a}$, on n'a pas $c\dfrac{b}{a} = d$, faute de quoi la deuxième colonne de A serait égale à $\dfrac{b}{a}$ fois la première.
Et donc $db \neq ad \Leftrightarrow \det A \neq 0$.
Ainsi, une matrice 2×2 est inversible si et seulement si ses colonnes ne sont pas proportionnelles.
Puisque A est inversible si et seulement si A^T est inversible, A est inversible si et seulement si les colonnes de A^T ne sont pas proportionnelles. Mais ces colonnes sont les lignes de A.

[11] Si $a = 0$, c'est c qui sera non nul car une matrice inversible ne peut pas avoir de colonne nulle.

13.2.4 Matrices inversibles et systèmes de Cramer

Rappelons qu'un système de Cramer est un système qui possède une unique solution.

Proposition 13.42 : *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors A est inversible si et seulement si pour tout $B \in \mathbf{K}^n$, le système $AX = B$, d'inconnue $X \in \mathbf{K}^n$ (où on a identifié $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et $\mathbf{K}^n$) possède une unique solution (et donc est un système de Cramer).*

Démonstration. Supposons A inversible. Alors pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ posons $X = A^{-1}B$.
Alors $AX = AA^{-1}B = I_nB = B$.
Donc le système $AX = B$ possède bien une solution et inversement, si X est une solution de $AX = B$, en multipliant à gauche par A^{-1}, il vient $A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$.
Donc $AX = B$ possède une unique solution.

Plus généralement

Si A est inversible, alors la multiplication (à gauche ou à droite) par A d'une égalité entre matrices est réversible : l'opération inverse étant la multiplication par A^{-1}.
En particulier, multiplier une équation matricielle par A donne une équation équivalente à la première.
Ici, $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$.

Inversement, supposons que pour tout B, le système $AX = B$ possède une unique solution.

Notons alors $E_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\ \vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, E_n = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix}$ les matrices élémentaires[12] de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

Alors pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $AX = E_i$ possède une unique solution X_i.
Soit alors B la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dont la $i^{\text{ème}}$ colonne est X_i.
Alors, pour tout i, la $i^{\text{ème}}$ colonne de AB est obtenue[13] en multipliant A par X_i, et donc vaut E_i.
Autrement dit $AB = I_n$. Reste à vérifier qu'on a également $BA = I_n$.
Mais $A(BA - I_n) = ABA - A = I_nA - A = A - A = 0_n$.
Donc le raisonnement inverse à celui que nous venons de tenir, en décomposant ce produit de matrice colonne par colonne, prouve que la $i^{\text{ème}}$ colonne de $BA - I_n$ est solution de l'équation $AX = 0_{n,1}$.
Mais cette équation possède $0_{n,1}$ comme unique[14] solution.
Donc la $i^{\text{ème}}$ colonne de $BA - I_n$ est nulle, et donc $BA - I_n = 0_n \Leftrightarrow BA = I_n$.
Ceci achève donc de prouver que A est inversible. □

[12] Qui se trouvent aussi être les colonnes de I_n.

[13] C'est un cas particulier de produit par blocs.

[14] L'unicité venant de l'hypothèse faite sur les systèmes $AX = B$.

Ceci nous fournit déjà un moyen de tester si une matrice est inversible, et de calculer son inverse : il s'agit de vérifier si le système $AX = Y$ possède une unique solution, et ce pour tout $Y \in \mathbf{K}^n$.
Lorsque c'est le cas, il faut de plus déterminer l'expression de l'unique solution de $AX = Y$ en fonction de Y. En effet, cette solution est $A^{-1}Y$.

Exemples 13.43

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ -2 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

Soit $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$, et résolvons le système $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & 2z & = & a\\ -2x & - & y & & & = & b\\ x & - & y & + & z & = & c\end{array}\right. \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & c\\ -2x & - & y & & & = & b\\ 3x & - & y & + & 2z & = & a\end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1\\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & c\\ & - & 3y & + & 2z & = & b + 2c\\ & & 2y & - & z & = & a - 3c\end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow 3L_3 + 2L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & c\\ & - & 3y & + & 2z & = & b + 2c\\ & & & & z & = & 3a + 2b - 5c\end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3\\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcl} x & - & y & & = -3a - 2b + 6c\\ & - & 3y & & = -6a - 3b + 12c\\ & & & z & = 3a + 2b - 5c\end{array}\right.$$

$$\underset{L_2 \leftarrow -L_2/3}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcl} x & - & y & & = -3a - 2b + 6c\\ & & y & & = 2a + b - 4c\\ & & & z & = 3a + 2b - 5c\end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rrrl} x & & & = -a - b + 2c\\ & y & & = 2a + b - 4c\\ & & z & = 3a + 2b - 5c\end{array}\right.$$

Puisque ce système possède bien toujours une unique solution, A est inversible.

Et donc $A^{-1}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-a-b+2c\\ 2a+b-4c\\ 3a+2b-5c\end{pmatrix}$, de sorte que[15] $A^{-1} = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -4\\ 3 & 2 & -5\end{pmatrix}$.

[15] Prendre par exemple $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ pour retrouver la première colonne de A.

▶ Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -8 \end{pmatrix}$.
Soient alors (a,b,c) et $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$. On a alors

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2z & = & a \\ -2x & + & y & + & 3z & = & b \\ 3x & - & y & - & 8z & = & c \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2+2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2z & = & a \\ & - & y & + & 7z & = & b+2a \\ & & 2y & - & 14z & = & c-3a \end{array}\right. \underset{L_3 \leftarrow L_3+2L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2z & = & a \\ & - & y & + & 7z & = & b+2a \\ & & & & 0 & = & a+2b+c \end{array}\right.$$

Ce système ne possède pas de solution si $a+2b+c \neq 0$, et donc B n'est pas inversible.

13.2.5 Inversibilité des matrices triangulaires

Proposition 13.44 : *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure). Alors A est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls. Dans ce cas, son inverse est encore une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure), dont les coefficients diagonaux sont les inverses de ceux de A.*

Démonstration. Prouvons le résultat pour les matrices triangulaires supérieures, il suffira de transposer[16] pour traiter le cas des triangulaires inférieures.
Procédons par récurrence sur n, la taille de la matrice.
Plus précisément, notons $\mathscr{P}(n)$ la proposition : «pour toute matrice triangulaire supérieure $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, A est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls, et lorsque c'est le cas, A^{-1} est triangulaire supérieure, et ses coefficients diagonaux sont les inverses de ceux de A».

Pour $n = 1$, il n'y a rien à dire, et pour $n = 2$, il suffit d'utiliser le déterminant et la formule donnant l'inverse d'une matrice 2×2.
Supposons donc $\mathscr{P}(n)$ vraie, et soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{K})$ triangulaire supérieure.
Écrivons alors A sous forme d'une matrice par blocs, $A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0_{1,n} & d \end{pmatrix}$, avec $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et $d \in \mathbf{K}$.
Alors B est triangulaire supérieure, et ses coefficients diagonaux sont ceux de A (à l'exception de d, le dernier coefficient diagonal de A).
▶ Supposons A inversible.
Notons alors $A^{-1} = \begin{pmatrix} B' & C' \\ L' & d' \end{pmatrix}$, avec $B' \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $C' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, $L' \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{K})$ et $d' \in \mathbf{K}$.
Alors, on a $\begin{pmatrix} B & C \\ 0_{1,n} & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B' & C' \\ L' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BB'+CL' & BC'+Cd' \\ dL' & dd' \end{pmatrix} = I_{n+1} = \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix}$.
En particulier, $dd' = 1$, donc $d \neq 0$ et $d' = d^{-1}$.
Puis $dL' = 0$, donc $L' = 0$.
Et enfin, $BB' + CL' = I_n$, donc $BB' = I_n$.
De la même manière, en écrivant $A^{-1}A = I_{n+1}$, on obtient $B'B = I_n$, de sorte que $B' = B^{-1}$.
Par hypothèse de récurrence, les coefficients diagonaux de B sont non nuls, donc tous les coefficients diagonaux de A sont non nuls, et les coefficients diagonaux de $B' = B^{-1}$ sont les inverses de ceux de B, donc les coefficients diagonaux de A^{-1} sont les inverses de ceux de A.
▶ Supposons à présent que tous les coefficients diagonaux de A soient non nuls. Alors par hypothèse de récurrence B est inversible, B^{-1} est triangulaire supérieure et les coefficients diagonaux de B^{-1} sont les inverses de ceux de B.
On a alors

$$\begin{pmatrix} B & C \\ 0_{n,1} & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^{-1} & -d^{-1}B^{-1}C \\ 0_{1,n} & d^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BB^{-1} & -d^{-1}BB^{-1}C + Cd^{-1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix} = I_{n+1}$$

et de même $\begin{pmatrix} B^{-1} & -d^{-1}B^{-1}C \\ 0_{1,n} & d^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & C \\ 0_{n,1} & d \end{pmatrix} = I_{n+1}$.
Donc A est inversible, et son inverse est $\begin{pmatrix} B^{-1} & -d^{-1}B^{-1}C \\ 0_{1,n} & d^{-1} \end{pmatrix}$, qui est triangulaire supérieure,

[16] Une matrice est triangulaire supérieure si et seulement si sa transposée est triangulaire inférieure.

et dont les coefficients diagonaux sont les inverses de ceux de A. □

Corollaire 13.45 – *Une matrice diagonale est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls. On a alors*

$$\mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)^{-1} = \mathrm{Diag}\left(\frac{1}{\lambda_1},\cdots,\frac{1}{\lambda_n}\right).$$

13.2.6 Inversibilité et opérations élémentaires

Nous avons prouvé en TD que pour $(i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^4$, $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$, et nous avons étudié l'effet de la multiplication à gauche par $E_{i,j}$: $(E_{i,j}A)$ n'a que des lignes nulles, sauf la $i^{\text{ème}}$, égale à la $j^{\text{ème}}$ ligne de A.

Revenons à présent sur les opérations élémentaires que nous avions effectuées sur les lignes d'un système lors de la méthode du pivot.

Ces mêmes opérations peuvent se réaliser sur les lignes d'une matrice, et possèdent alors une interprétation matricielle.
▸ **Multiplier la $i^{\text{ème}}$ ligne par $\lambda \neq 0$** : revient à multiplier A **à gauche** par

$$E_{1,1}+\cdots+E_{i-1,i-1}+\lambda E_{i,i}+E_{i+1,i+1}+\cdots+E_{n,n} = \mathrm{Diag}(1,\dots,1,\underset{\substack{\uparrow\\ i}}{\lambda},1,\dots,1).$$

Cette matrice est inversible, d'inverse $\mathrm{Diag}\left(1,\dots,1,\frac{1}{\lambda},1,\dots,1\right)$.
▸ **Ajouter λL_j à L_i** : revient à multiplier A **à gauche** par $I_n + \lambda E_{i,j}$.
Puisque $E_{i,j}^2 = 0$ lorsque $i \neq j$, la matrice $I_n + \lambda E_{i,j}$ est inversible, d'inverse[17] $I_n - \lambda E_{i,j}$.
▸ **Échanger les lignes L_i et L_j** : revient à effectuer successivement les opérations $L_i \leftarrow L_i + L_j, L_j \leftarrow -L_j, L_j \leftarrow L_j + L_i$ et $L_i \leftarrow L_i - L_j$.
Autrement dit, cela revient à multiplier A à gauche par le produit de quatre matrices inversibles, donc par une matrice inversible.
Plus précisément, cette matrice est $I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$.
Elle est égale à son propre inverse, puisque si on échange deux fois les lignes i et j, on retrouve la matrice de départ.

[17] Faire le produit pour le vérifier. Mais on peut aussi réfléchir en termes d'opérations élémentaires : si dans un système on a ajouté λL_j à L_i, quelle opération faire pour revenir au système initial ? Retirer λL_i à L_j !

Ainsi, si on réalise une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de A, la matrice obtenue est de la forme PA, avec $P \in GL_n(\mathbf{K})$.
Puisque réaliser des opérations sur les colonnes de A, revient à réaliser les mêmes opérations sur les lignes de A^T, la matrice obtenue en réalisant des opérations élémentaires sur les colonnes de A est de la forme $(PA^T)^T = AP^T$ avec $P \in GL_n(\mathbf{K})$.
Et donc réaliser des opérations sur les colonnes de A, c'est multiplier A **à droite** par une matrice inversible.

Proposition 13.46 : *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, et soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice inversible.*
Alors A est inversible si et seulement si PA est inversible.

Démonstration. Si A est inversible, alors PA est le produit de deux matrices inversibles, donc est inversible.
Et si PA est inversible, alors $A = P^{-1}PA$ est le produit de deux matrices inversibles. □

Corollaire 13.47 – *Réaliser des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice ne change pas son inversibilité.*

Exemple 13.48

Donc pour étudier l'inversibilité d'une matrice on peut se contenter de transformer cette matrice à l'aide d'opérations sur les lignes de manière à la transformer en une matrice dont on sait étudier l'inversibilité. Par exemple une matrice triangulaire.
Attention toutefois : ceci ne permettra que de dire si la matrice de départ est ou non inversible. Pas de calculer son inverse.
Par exemple, on a

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow 3L_3 + 2L2}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est triangulaire à coefficients diagonaux non nuls : elle est inversible. Et donc A l'est aussi.

Méthode

Si vous avez juste besoin de déterminer si une matrice est inversible, cette méthode est préférable à celle à base de système expliquée plus haut. Pourtant, vous aurez sûrement remarqué que les opérations sont les mêmes (au moins au début), mais que n'ayant à écrire ni les inconnues, ni les seconds membres, le calcul est bien plus agréable, et les risques d'erreur de calcul sont moindres.

13.2.7 Calcul de l'inverse par opérations élémentaires

Pour déterminer si une matrice est inversible, et pour calculer son inverse si celle-ci existe, on peut procéder par opérations élémentaires sur les lignes.
En effet, si par opérations sur les lignes, on arrive à transformer A en une matrice non inversible[18], alors A n'est pas inversible.

En revanche, supposons qu'on arrive, par des opérations élémentaires à transformer A en la matrice identité I_n.
Alors il existe des matrices inversibles[19] telles que $P_r P_{r-1} \cdots P_1 A = I_n$.
Donc A est inversible puisque I_n l'est.
Et alors, en multipliant à droite la relation $P_r \cdots P_1 A = I_n$ par A^{-1}, il vient $P_r \cdots P_1 = A^{-1}$.

On en déduit une méthode de calcul de l'inverse de A : à l'aide d'opérations élémentaires, on transforme A, si c'est possible en l'identité (en suivant la méthode du pivot).
Dans le même temps, on réalise les mêmes opérations en partant de la matrice identité I_n.
Lorsque $P_r \cdots P_1 A = I_n$, alors $P_r \cdots P_1 I_n = A^{-1}$.

[18] Notamment une matrice dont une ligne est nulle.

[19] Correspondant à des opérations élémentaires.

Exemple 13.49

Sur la figure ci-dessous, la partie centrale en termes de systèmes n'est pas nécessaire, et a pour unique but de vous montrer que la méthode que nous venons de décrire pour le calcul de l'inverse se base sur les mêmes calculs que la méthode basée sur la résolution de systèmes rencontrée précédemment.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. Pour $(a,b,c),(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$, on a

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & z & = & a \\ 2x & - & y & & & = & b \\ -3x & + & 2y & & & = & c \end{array}\right. \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=I_n}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1}}{\longleftrightarrow} \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & z & = & a \\ & & y & + & 2z & = & -2a + b \\ & - & y & - & 3z & = & 3a + c \end{array}\right. \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\longleftrightarrow} \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & z & = & a \\ & & y & + & 2z & = & -2a + b \\ & & & - & z & = & a + b + c \end{array}\right. \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow -L_3}{\longleftrightarrow} \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & z & = & a \\ & & y & + & 2z & = & -2a + b \\ & & & & z & = & -a - b - c \end{array}\right. \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\underset{L_2\leftarrow L_2-2L_3}{\longleftrightarrow}\quad\left\{\begin{array}{rcl}x-y-z&=&a\\y&=&+3b+2c\\z&=&-a-b-c\end{array}\right.\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&2\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{=I_n}\underset{L_1\leftarrow L_1+L_2+L_3}{\longleftrightarrow}\quad\left\{\begin{array}{rcl}x&=&+2b+c\\y&=&+3b+2c\\z&=&-a-b-c\end{array}\right.\quad\underbrace{\begin{pmatrix}0&2&1\\0&3&2\\-1&-1&-1\end{pmatrix}}_{=A^{-1}}$$

Un moyen agréable de présenter les calculs peut être le suivant : commencer par écrire côte à côte A et I_n, puis effectuer les mêmes opérations sur les lignes des deux côtés jusqu'à aboutir à la matrice identité à gauche :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-1&1&0&0\\2&-1&0&0&1&0\\-3&2&0&0&0&1\end{array}\right)\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1\\L_3\leftarrow L_3+3L_1}}{\longleftrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-1&0&0&1\\0&1&2&-2&1&0\\0&-1&3&3&0&1\end{array}\right)$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{\longleftrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-1&0&0&1\\0&1&2&-2&1&0\\0&0&-1&1&1&1\end{array}\right)$$

$$\vdots$$

$$\longleftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&2&1\\0&1&0&0&3&2\\0&0&1&-1&-1&-1\end{array}\right)$$

13.2.8 Une caractérisation de l'inversibilité

Comme mentionné précédemment, une matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est inversible si et seulement si pour tout $Y\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, $AX=Y$ possède une unique solution.
Mais lors de la résolution de ce système, le fait qu'il ne possède qu'une unique solution ne dépendra que du fait qu'on arrive ou non à se ramener, par opérations élémentaires, à un système triangulaire à coefficients non nuls.
Or lors de la méthode du pivot, les opérations réalisées ne dépendent pas du second membre, mais seulement des coefficients de la matrice A.
Et donc $AX=Y$ possède une unique solution pour tout Y si et seulement si il possède une unique solution pour **un** certain $Y\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.
En particulier, si et seulement si $AX=0_{n,1}$ possède une unique solution.
Toutefois, cette preuve est peu convaincante, faute de bonne formalisation des opérations de résolution d'un système. Essayons d'être plus rigoureux :

> **Proposition 13.50 :** *Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors A est inversible si et seulement si $\forall X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, $AX=0_{n,1}\Rightarrow X=0_{n,1}$.*

Démonstration. Notons qu'un sens est évident : si $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est inversible, alors $AX=0_{n,1}$ possède une unique solution. Puisque $X=0_{n,1}$ est évidemment solution, c'est donc la seule solution, si bien que $AX=0_{n,1}\Rightarrow X=0_{n,1}$.

Procédons par récurrence sur la taille de la matrice, et pour $n\in\mathbf{N}^*$, notons $\mathscr{P}(n)$ la proposition : «$\forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, A est inversible si et seulement si $\forall X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, $AX=0_{n,1}\Rightarrow X=0_{n,1}$».
Il est clair que $\mathscr{P}(1)$ est vraie : pour $A=(a)\in\mathcal{M}_1(\mathbf{K})$, A est inversible si et seulement si $a\neq 0$. Et alors pour $X=(x)\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, $AX=0_{1,1}\Leftrightarrow ax=0\Leftrightarrow x=0\Leftrightarrow X=0$.
Supposons donc $\mathscr{P}(n)$ vraie, et soit $A\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.
Puisque nous avons déjà mentionné que si A est inversible, alors $AX=0_{n,1}\Rightarrow X=0_{n,1}$, il nous suffit de prouver l'implication réciproque.
Supposons donc que $\forall X\in\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbf{K})$, $AX=0_{n+1,1}\Rightarrow X=0_{n+1,1}$.
Alors la première colonne de A ne peut être nulle, faute de quoi on aurait $AE_1=0_{n+1,1}$, ce qui n'est pas possible étant donné que $E_1\neq 0_{n+1,1}$.

Soit donc $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $a_{i_0,1} \neq 0$.
Alors la suite d'opérations $L_1 \leftarrow a_{i_0,1}L_1 - a_{1,1}L_{i_0}, \dots L_n \leftarrow a_{i_0,1}L_n - a_{n,1}L_{i_0}, L_{i_0} \leftrightarrow L_1$ transforme la première colonne de A en $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Il existe donc une matrice inversible[20] telle que $PA = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0_{n,1} & B \end{pmatrix}$, avec $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

[20] Correspondant à la suite d'opérations élémentaires que nous venons d'effectuer.

Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ tel que $BY = 0_{n,1}$. Alors LY est une matrice 1×1, c'est-à-dire un élément de $\mathbf{K}$. Et alors

$$PA \begin{pmatrix} -LY \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0_{n,1} & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -LY \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -LY + LY \\ 0_{n,1} + BY \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0_{n,1} \end{pmatrix} = 0_{n+1,1}.$$

Donc en multipliant à gauche par P^{-1}, $A \begin{pmatrix} -LY \\ Y \end{pmatrix} = P^{-1}0_{n+1,1} = 0_{n+1,1}$.

Étant donnée l'hypothèse faite sur A, on a donc $\begin{pmatrix} -LY \\ Y \end{pmatrix} = 0_{n+1,1}$, et en particulier, $Y = 0_{n,1}$.

Et donc nous venons de prouver que $BY = 0_{n,1} \Rightarrow Y = 0_{n,1}$.
D'après l'hypothèse de récurrence, B est donc inversible.
Mais $\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0_{n,1} & B \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} 1 & -LB^{-1} \\ 0_{n,1} & B^{-1} \end{pmatrix}$ puisque

$$\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0_{n,1} & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -LB^{-1} \\ 0_{n,1} & B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -LB^{-1} + LB^{-1} \\ 0_{n,1} & BB^{-1} \end{pmatrix} = I_{n+1} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & -LB^{-1} \\ 0_{n,1} & B^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0_{n,1} & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & B^{-1}B \end{pmatrix} = I_{n+1}.$$

Donc $A = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0_{n,1} & B \end{pmatrix}$ est inversible.
Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, et donc pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. □

Corollaire 13.51 – *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Si $AB = I_n$, alors A et B sont inversibles et $A = B^{-1}$.*

Remarque
A priori la définition d'inversible nous demandait de vérifier que $AB = I_n$ **et que** $BA = I_n$.
Ce que nous dit ce résultat, c'est qu'une seule de ces deux conditions suffit.

Démonstration. Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ est tel que $BX = 0_{n,1}$, alors $ABX = 0$, et donc $X = 0_{n,1}$.
Donc B est inversible par la proposition précédente.
Et alors en multipliant l'égalité $AB = I_n$ à droite par B^{-1}, il vient $A = ABB^{-1} = I_nB^{-1} = B^{-1}$.
Et donc en particulier, A est inversible[21]. □

[21] Car inverse d'une matrice inversible.

Corollaire 13.52 – *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors AB est inversible si et seulement si A et B sont inversibles.*

Démonstration. L'implication $\Leftarrow$ a déjà été prouvée.
Supposons que AB soit inversible.
Si B est inversible, alors $A = (AB)B^{-1}$ est un produit de matrices inversibles, donc est inversible.
Si B n'est pas inversible, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, différent de $0_{n,1}$, tel que $BX = 0_{n,1}$.
Et alors $(AB)X = 0_{n,1}$, si bien que AB n'est pas inversible.
Donc si B n'est pas inversible, AB ne l'est pas non plus, si bien que par contraposée, si AB est inversible, alors B est inversible, et donc A aussi. □