SUITES NUMÉRIQUES

13

13.1 GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES RÉELLES

Définition 13.1 – Une **suite réelle** est une application u de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$. On note généralement u_n au lieu de $u(n)$.
Et de même, on note (u_n) ou $(u_n)_n$ ou encore $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ au lieu de u.

Il faut bien comprendre que la distinction entre u_n et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est la même qu'entre une fonction f et $f(x)$, l'image d'un nombre x par f.
Ainsi, u_n désigne un réel[1], quand $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ désigne la suite, c'est-à-dire un élément de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.
On dit que u_n est **le terme général** de la suite (u_n).

[1] Donc un **nombre**.

Il est aussi possible considérer des suites définies à partir d'un certain rang n_0, c'est-à-dire dont l'ensemble de départ est $\mathbf{N} \setminus [\![0, n_0 - 1]\!]$.
Par exemple, si on pose $u_n = n^2 \ln(n)$ et $v_n = \dfrac{1}{n(n-1)}$, alors u_n n'est défini que pour $n \geqslant 1$ et v_n n'est défini que pour $n \geqslant 2$.
Dans ce cas on note la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ pour bien marquer le fait qu'elle n'est pas définie sur $\mathbf{N}$ tout entier.

Définition 13.2 – Une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est **constante** si pour tout $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} = u_n$.
Une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est **stationnaire** si il existe $n_1 \geqslant n_0$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $u_{n+1} = u_n$.

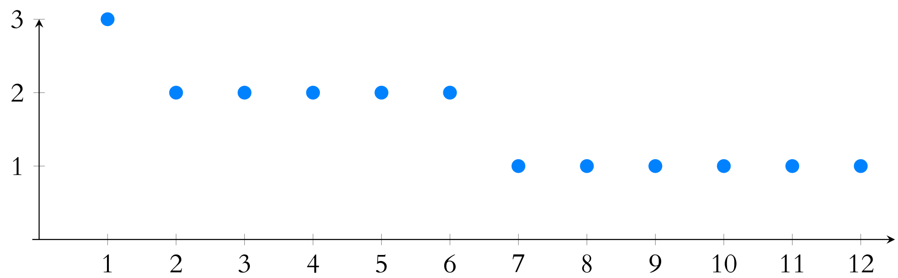
Alternative
Une récurrence facile prouve qu'une suite est constante si et seulement si il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = a$.
Et de même pour les suites stationnaires : à partir d'un certain rang, tous les termes sont égaux.

Exemples 13.3

► Toute suite décroissante (u_n) d'entiers naturels est stationnaire.
En effet, soit $A = \{u_n,\ n \in \mathbf{N}\}$. Alors A est une partie non vide de $\mathbf{N}$.
Elle contient donc un plus petit élément : $\exists k \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, u_k \leqslant u_n$.
Et alors pour $n \geqslant k$, on a à la fois $u_n \leqslant u_k$ par décroissance de la suite, et $u_k \leqslant u_n$ par ce qui précède. Donc $u_n = u_k$: la suite est stationnaire.

Corollaire
Il n'existe pas de suite d'entiers **naturels** strictement décroissante.

► Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $u_n = \left\lfloor \dfrac{1}{\ln(\sqrt{n}+1)} + 1 \right\rfloor$.
Pour $\ln(\sqrt{n}+1) > 1$, on a $1 \leqslant \dfrac{1}{\ln(\sqrt{n}+1)} < 2$ et donc $u_n = 1$.
Mais, $\ln(\sqrt{n}+1) > 1 \Leftrightarrow \sqrt{n}+1 > e \Leftrightarrow n+1 > e^2 \Leftrightarrow n > e^2 - 1$.
Puisque $e^2 - 1 \simeq 7.39$, pour $n \geqslant 8$, $u_n = 1$. Et donc $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est stationnaire[2].



[2] Et dans la définition de suite stationnaire, on peut prendre ici $n_1 = 8$. Ou $n_1 = 9$. Ou $n_1 = 100$...

Définition 13.4 – Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite, et pour tout $n \geqslant n_0$, soit $\mathscr{P}(n)$ une proposition faisant intervenir la suite (u_n).
On dit que (u_n) vérifie $\mathscr{P}(n)$ **à partir d'un certain rang**, s'il existe $N \geqslant n_0$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $\mathscr{P}(n)$ soit vraie.

Par exemple, une suite stationnaire est une suite constante à partir d'un certain rang.
On peut également considérer des suites croissantes à partir d'un certain rang (c'est $\mathscr{P}(n)\ :\ u_{n+1} \geqslant u_n$), ou encore positives à partir d'un certain rang (c'est $\mathscr{P}(n)\ :\ u_n \geqslant 0$).
Notons que cette appellation n'a d'intérêt que si la valeur du N à partir duquel la proposition est vraie est sans importance, mais qu'il suffit de savoir qu'il existe.
Cela permet souvent d'écarter à peu de frais un nombre fini de valeurs problématiques. De toutes façons, la plupart des notions qui suivent, et en particulier tout ce qui touche à la notion de limite ne dépend pas des premiers termes de la suite.

Par exemple, si on pose $u_n = \dfrac{\ln n}{n}$, alors $(u_n)_{n\geqslant 1}$ n'est pas monotone, puisque $u_2 > u_1$, mais $u_4 < u_3$.
En revanche, on a $u_{n+1} < u_n$ dès que $n \geqslant 3$, et donc $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante à partir d'un certain rang.
On peut donc par exemple lui appliquer le théorème de la limite monotone et prouver qu'elle converge.

13.1.1 Suites majorées, minorées, bornées

Définition 13.5 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_n$ est :

1. **majorée** s'il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant M$.
   Un réel M tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant M$ est appelé un majorant de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
2. **minorée** s'il existe $m \in \mathbf{R}$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \geqslant m$. Un tel réel m est appelé un minorant de la suite (u_n).
3. **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée. Autrement dit s'il existe deux réels m et M tels que $\forall n \in \mathbf{N}$, $m \leqslant u_n \leqslant M$.

⚠ Un majorant/minorant est une **constante**, qui ne dépend donc pas de n.

Par exemple, si $u_n = n^2 \sin\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$, on a, pour tout entier n, $u_n \leqslant n$, mais ceci ne prouve sûrement pas que la suite (u_n) est majorée.
En revanche, si on se souvient[3] que pour tout $x \geqslant 0$, $\sin(x) \leqslant x$, alors il vient, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$u_n \leqslant n^2\frac{1}{n^3} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1$$

ce qui prouve que la suite (u_n) est bien majorée et que 1 en est un majorant.

Proposition 13.6 : *Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée si et seulement si $(|u_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ est majorée.*
Soit encore si et seulement si il existe $M \in \mathbf{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $|u_n| \leqslant M$.

Démonstration. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ soit bornée, et soient M et m deux réels tels que $\forall n \in \mathbf{N}$, $m \leqslant u_n \leqslant M$.
Soit alors $M_1 = \max(|M|, |m|) \geqslant 0$.
Alors on a $M \leqslant |M| \leqslant M_1$ et $m \geqslant -|m| \geqslant -M_1$, de sorte que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ -M_1 \leqslant u_n \leqslant M_1 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbf{N},\ |u_n| \leqslant M_1.$$

Inversement, s'il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|u_n| \leqslant M$, alors $-M \leqslant u_n \leqslant M$, de sorte que (u_n) est à la fois majorée[4] et minorée[5] et donc bornée. □

Alternative
Il revient au même de dire que la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie sauf pour un nombre fini de valeurs.

Autrement dit
Une suite est majorée si l'application $u : n \mapsto u_n$ est majorée.
Ou encore si son ensemble image (qui est $\{u_n, n \in \mathbf{N}\}$) est une partie majorée de $\mathbf{R}$.

[3] Ce qui se retrouve par une simple étude de fonction.

Terminologie
On ne parle pas **du** majorant, mais bien d'**un** majorant, car si une suite est majorée, elle possède toujours une infinité de majorants.
Par exemple ici, (u_n) est également majorée par 2, par π, par e^{100}, etc

[5] par $-M$.
[4] Par M.

13.1.2 Suites monotones

Puisqu'une suite est une application de l'ensemble ordonné $(\mathbf{N}, \leqslant)$ vers l'ensemble ordonné $(\mathbf{R}, \leqslant)$, nous avons déjà donné la définition de suite croissante : une suite (u_n) est croissante si et seulement si

$$\forall (m,n) \in \mathbf{N}^2,\ m \leqslant n \Rightarrow u_m \leqslant u_n.$$

Toutefois, cette définition n'est pas forcément la plus facile à manipuler, et ce n'est pas la caractérisation des suites croissantes rencontrée au lycée.
Rassurons-nous, il s'agit bien de la même notion comme le prouve la proposition suivante :

Proposition 13.7 : *Soit (u_n) une suite à valeurs réelles. Alors (u_n) est croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} \geqslant u_n$.*

Démonstration. Si (u_n) est croissante, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n+1 \geqslant n$ et donc $u_{n+1} \geqslant u_n$.
Inversement, si $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$, alors pour m, n deux entiers avec $m \geqslant n$,

$$u_m = u_{(m-1)+1} \geqslant u_{m-1} \geqslant u_{m-2} \geqslant \cdots \geqslant u_{n+1} \geqslant u_n.$$

Et donc (u_n) est croissante. □

Pointillés ?
Une récurrence (finie) serait probablement plus rigoureuse, mais vous avez compris l'idée.

Définition 13.8 – Une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est dite **monotone** si elle est soit croissante soit décroissante.

Remarque
Une suite peut être à la fois croissante et décroissante, mais c'est le cas si et seulement si elle est constante.

Pour étudier la monotonie d'une suite, on peut notamment étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
Si ce signe est toujours positif, (u_n) est croissante (car $u_{n+1} - u_n \geqslant 0 \Leftrightarrow u_{n+1} \geqslant u_n$), s'il est toujours négatif, (u_n) est décroissante, et si ce signe n'est pas constant[6], alors (u_n) n'est pas monotone.

[6] C'est-à-dire s'il dépend de la valeur de n.

Proposition 13.9 : *Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite **à valeurs strictement positives**. Alors (u_n) est croissante (resp. décroissante) si et seulement si $\forall n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ (resp. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$).*

Démonstration. Il s'agit seulement de remarquer que $u_{n+1} \geqslant u_n \Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$.
Notons que ceci ne vaut plus si u_n n'est pas positif, car il faut alors changer le sens de l'inégalité ! □

Remarque
En réalité, ceci s'adapte assez bien aux suites à termes négatifs : il suffit de changer le sens des inégalités. Par contre, plus rien ne fonctionne pour les suites qui ne sont pas de signe constant.

Ceci nous fournit donc une autre méthode pour étudier la monotonie des suites à termes positifs.
On préférera cette méthode à la précédente pour les suites dont le terme général contient un produit ou une factorielle, c'est-à-dire lorsque le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ se simplifie.
Au contraire, pour les suites faisant apparaître une somme, cette méthode a peu de chances d'aboutir.

Exemple 13.10

Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $u_n = \dbinom{2n}{n} = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$.
Alors il est clair que la suite (u_n) est à termes positifs, et on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!}\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 2\frac{2n+1}{n+1} \geqslant 2 \geqslant 1.$$

Et donc $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.

Définition 13.11 – Une suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est **strictement croissante** (respectivement **strictement décroissante**) si pour tout $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} > u_n$ (resp. $u_{n+1} < u_n$).
On dit que (u_n) est **strictement monotone** si elle est soit strictement croissante, soit strictement décroissante.

Notons qu'en particulier, une suite strictement croissante est croissante.
Les méthodes ci-dessus s'adaptent sans difficulté aux suites strictement monotones : $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement croissante si et seulement si pour tout n, $u_{n+1} > u_n$, et dans le cas d'une suite positive, si et seulement si pour tout n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

13.2 LIMITE D'UNE SUITE

13.2.1 Suites convergentes

Définition 13.12 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **converge vers un réel ℓ** si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Lorsque (u_n) converge vers ℓ, on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

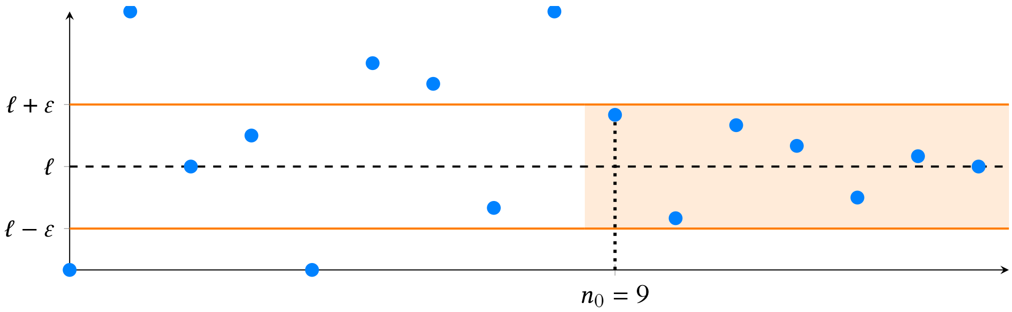


FIGURE 13.1 – La suite (u_n) converge vers ℓ : pour $n \geqslant n_0$, u_n est dans la «bande» $[\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$.

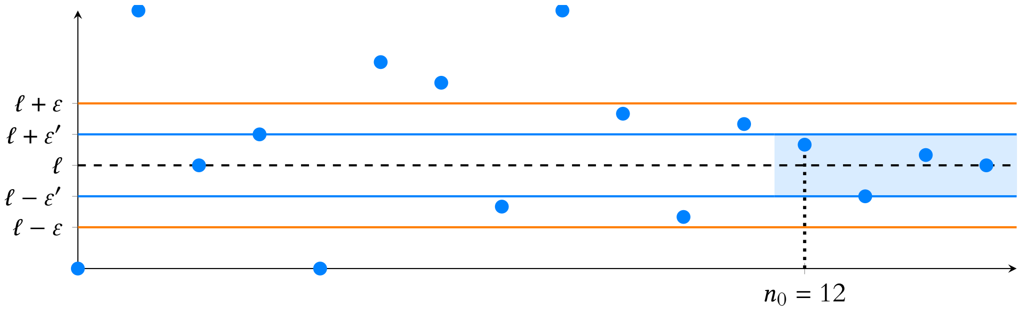
Remarques.
- Intuitivement, cela signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, à partir d'un certain rang, l'écart entre u_n et ℓ est inférieur à ε.
- Il n'y a pas unicité de n_0 : dans le cas de la suite dessinée ci-dessus, $n_0 = 10$ convient également, et plus généralement, tout $n_0 \geqslant 9$ convient.
- Il se peut que pour (un ou plusieurs) $n < n_0$, on ait également $|u_n - \ell| < \varepsilon$. C'est par exemple ici le cas pour $n = 7$. L'essentiel n'est donc pas de trouver un terme u_n suffisamment proche de ε, mais de trouver à partir de quel rang **tous les termes** qui suivent sont suffisamment proches de ℓ.
- La valeur de n_0 dépend de ε : si ε diminue, il faudra augmenter la valeur de n_0. Par exemple, sur le dessin ci-dessous[7], avec $\varepsilon' < \varepsilon$, il faut prendre $n_0 \geqslant 12$.
- Il est quasi-immédiat que $u_n \to \ell$ si et seulement si $u_n - \ell \to 0$.
En effet, dans la définition de la convergence, il s'agit de noter que

$$|u_n - \ell| = |(u_n - \ell) - 0|.$$

[7] Avec la même suite que précédemment.

On peut prendre dans la définition $|u_n - \ell| < \varepsilon$ ou $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$, cela conduit à la même notion de convergence.
En effet, le fait que les inégalités larges impliquent les inégalités strictes est évident.
Et inversement, supposons que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Prenons alors $\varepsilon > 0$. En appliquant la définition précédente à $\frac{\varepsilon}{2}$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.
Et donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$.

Moralité
Ne vous souciez pas trop de savoir si il nous faut $< \varepsilon$ ou $\leqslant \varepsilon$ dans la définition, c'est la même chose, et on peut utiliser indifféremment l'un ou l'autre.
En revanche, c'est bien un pour tout $\varepsilon > 0$, et surtout pas pour $\varepsilon \geqslant 0$ (voyez-vous pourquoi ?).



La proposition qui suit vient traduire un principe général : les premiers[8] termes d'une suite ne changent pas son éventuelle limite.
En effet, la limite ne regarde que ce qui se passe «pour n suffisamment grand».
Et donc on peut toujours changer un nombre fini de termes d'une suite sans en changer la limite éventuelle.

[8] Les deux premiers, les 100 premiers ou les 10^100 premiers.

Proposition 13.13 (Indifférence des premiers termes) : *Si deux suites (u_n) et (v_n) sont égales à partir d'un certain rang, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ si et seulement si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.*

Démonstration. Puisque (u_n) et (v_n) sont égales à partir d'un certain rang, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant N$, $u_n = v_n$.
Supposons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, et soit $\varepsilon > 0$.
Alors il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$.
Soit alors $n_1 = \max(n_0, N)$, et soit $n \geqslant n_1$. Alors

$$|v_n - \ell| = |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Nous venons de prouver que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, n \geqslant n_1 \Rightarrow |v_n - \ell| < \varepsilon$.
Et donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. La réciproque se prouve exactement de la même manière. □

La conséquence est que la plupart des théorèmes qui vont suivre restent vrais si leurs hypothèses sont satisfaites à partir d'un certain rang seulement.
Par exemple pour le théorème de la limite monotone[9], si on a une suite qui n'est que croissante à partir d'un certain rang, alors le théorème s'applique tout de même.

[9] Que vous connaissez déjà : il dit qu'une suite croissante et majorée converge.

Proposition 13.14 (Unicité de la limite) : *Si (u_n) converge vers ℓ_1 et converge vers ℓ_2, alors $\ell_1 = \ell_2$. Autrement dit, si une suite converge, c'est vers un unique réel.*
Ce réel est alors appelé ***la limite de la suite*** *(u_n) et on note $\ell = \lim(u_n)$ ou bien $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, ou encore $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.*

Remarque

Notons que pour une suite, il n'est pas vraiment nécessaire de préciser vers quoi tend n : il tend nécessairement vers $+\infty$.

Démonstration. Soient ℓ_1 et ℓ_2 deux réels tels que (u_n) converge à la fois vers ℓ_1 et vers ℓ_2.
Supposons par l'absurde que $\ell_1 \neq \ell_2$, et soit $\varepsilon = \dfrac{|\ell_1 - \ell_2|}{3}$.
Alors[10] il existe un entier $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon$.
De même, il existe un entier $n_1 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_1$, $|u_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon$.
Alors pour $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, on a à la fois $|u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon$ et $|u_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon$.
Or, on a $\ell_1 - \ell_2 = \ell_1 - u_n + (u_n - \ell_2)$ de sorte que par l'inégalité triangulaire,

$$|\ell_1 - \ell_2| \leqslant |\ell_1 - u_n| + |u_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Soit encore $|\ell_1 - \ell_2| < \dfrac{2}{3}|\ell_1 - \ell_2|$, ce qui est absurde.
On en déduit que $\ell_1 = \ell_2$. □

[10] Car (u_n) converge vers ℓ_1.

Définition 13.15 – S'il existe un réel ℓ tel que (u_n) converge vers ℓ, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est dite **convergente.** Dans le cas contraire, on dit que (u_n) est **divergente.**

Exemple 13.16

La suite $(u_n) = ((-1)^n)$ est divergente.
En effet, supposons par l'absurde qu'elle converge vers ℓ, et choisissons $\varepsilon = \frac{1}{2}$ dans la définition de la convergence : il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| < \frac{1}{2}$.
Mais alors, par l'inégalité triangulaire, on a

$$|u_{n_0} - u_{n_0+1}| = |(u_{n_0} - \ell) + (\ell - u_{n_0+1})| < |u_{n_0} - \ell| + |u_{n_0+1} - \ell| \leqslant 1.$$

Or, la différence de deux termes consécutifs de (u_n) vaut toujours ± 2, et donc on arrive à $2 \leqslant 1$, ce qui est absurde.

⚠ Il est hors de question d'utiliser la notation $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ avant d'avoir prouvé la convergence de la suite (soit par un calcul direct de la limite, soit à l'aide d'un des théorèmes d'existence ci-après).
Cette notation n'aura du sens que dans le cas d'une suite convergente[11], ce qui n'est pas le cas de toutes les suites.
Et notamment, la négation de $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ n'est pas $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ avec $\ell \neq 1$.
Il existe des suites qui n'ont pas de limite !

[11] Ou éventuellement des limites égales à $\pm\infty$ que nous allons définir dans un instant.

Proposition 13.17 : *Toute suite convergente est bornée.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite convergente, et soit $\ell = \lim u_n$.
Alors[12] il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant 1$. Et par conséquent, pour $n \geqslant n_0$,

$$|u_n| = |u_n - \ell + \ell| \leqslant |u_n - \ell| + |\ell| \leqslant |\ell| + 1.$$

Posons alors $M = \max(|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{n_0-1}|, |\ell| + 1)$.
Pour $n \in \mathbf{N}$, il y a alors deux cas de figure :

- soit $n \geqslant n_0$, auquel cas $|u_n| \leqslant |\ell| + 1 \leqslant M$;
- soit $n < n_0$, auquel cas, par définition de M, $|u_n| \leqslant M$.

Ainsi, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, $|u_n| \leqslant M$, et donc (u_n) est bornée. □

[12] En prenant $\varepsilon = 1$ dans la définition de limite.

Remarque
Cette preuve montre qu'une suite bornée à partir d'un certain rang est bornée.

⚠ La réciproque est archi-fausse, comme le prouve la suite de terme général $(-1)^n$.

13.2.2 Limites infinies

Définition 13.18 – On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **tend vers** $+\infty$, et on note $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si

$$\forall A \in \mathbf{R}, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n > A.$$

Ceci signifie que quel que soit le réel A qu'on se fixe, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite sont plus grands que A.

Exemple 13.19

La suite $u_n = n^2$ tend vers $+\infty$. En effet, soit $A \geqslant 0$.

- si $A \leqslant 0$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geqslant A$, donc on peut prendre $n_0 = 0$.
- si $A > 0$, soit $n_0 = \left\lfloor \sqrt{A} \right\rfloor + 1$. Alors $n_0 \geqslant \sqrt{A}$, et donc pour $n \geqslant n_0$, il vient $u_n \geqslant \sqrt{A}^2 \geqslant A$.

Proposition 13.20 : *Une suite (u_n) qui tend vers $+\infty$ est minorée*[13].

[13] Mais n'est évidemment pas majorée.

Démonstration. Soit $A = 1$. Alors $\exists n \in \mathbf{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 1$.
Notons alors $m = \min(u_0, u_1, \cdots, u_{n-1}, 1)$.
Alors pour $n \geqslant n_0$, on a $u_n \geqslant 1 \geqslant m$.
Et pour $n < n_0$, $u_n \geqslant \min(u_0, u_1, \cdots, u_{n_0-1}) \geqslant m$. Et donc m est un minorant de (u_n). □

Définition 13.21 – On dit que (u_n) **tend vers** $-\infty$ si

$$\forall B \in \mathbf{R},\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n < B.$$

Notons qu'en particulier, une suite qui tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) n'est pas majorée[14] (resp. minorée) et donc qu'elle n'est pas convergente.
On prendra donc bien garde au fait qu'une suite qui tend vers $\pm\infty$ est une suite divergente !
D'ailleurs, on dit souvent que (u_n) diverge vers $\pm\infty$.
Une suite convergente est donc une suite qui admet une limite **finie.**

[14] Car elle prend des valeurs plus grandes que n'importe quel réel.

Proposition 13.22 : *Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, alors (u_n) est majorée.*

⚠ On n'utilisera la notation $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ que pour une suite (u_n) dont on sait qu'elle admet une limite (finie ou non).
Par exemple, si $u_n = (-1)^n n$, alors la notation $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ne veut rien dire !

13.2.3 Notion de voisinage

Bien que différentes, vous constatez que les notions de limites finies et infinies ont certaines caractéristiques en commun.
Il existe en fait un vocabulaire qui permet d'unifier ces deux définitions : celui de voisinage.

Définition 13.23 – Soit $x \in \overline{\mathbf{R}}$. On appelle **voisinage de** x tout ensemble de réels de la forme :

1. $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$, avec $\varepsilon > 0$, si x est un réel.
2. $]A, +\infty[$, avec $A \in \mathbf{R}$ si $x = +\infty$
3. $]-\infty, B[$, avec $B \in \mathbf{R}$ si $x = -\infty$.

On note alors $\mathscr{V}_x$ l'ensemble des voisinages de x.

Proposition 13.24 : *Soit (u_n) une suite réelle, et soit $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$. Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ si et seulement si pour tout voisinage V de ℓ, alors, à partir d'un certain rang, (u_n) est à valeurs dans V. Soit encore*

$$\forall V \in \mathscr{V}_\ell,\ \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant n_0,\ u_n \in V.$$

Démonstration. C'est une simple combinaison des définitions de voisinage et de limite (finie ou infinie). □

On dit parfois que (u_n) admet une limite dans $\overline{\mathbf{R}}$ pour dire que (u_n) est convergente ou qu'elle tend vers $\pm\infty$.
Ainsi, toute suite monotone[15] admet une limite dans $\overline{\mathbf{R}}$. En revanche, ce n'est pas le cas de $(-(1)^n)_n$.

[15] Le théorème de la limite monotone nous dit qu'elle converge si elle est majorée et qu'elle tend vers $+\infty$ dans le cas contraire.

13.3 Opérations sur les limites ou l'art de découper les ε

13.3.1 Somme de limites

Rappelons que pour $(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ et $\ell \in \mathbf{R}$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ si et seulement si $u_n - \ell \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Lemme 13.25. Soit (u_n) une suite à valeurs réelles et $\ell \in \mathbf{R}$. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}^*$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \Leftrightarrow \lambda u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda\ell$.

Démonstration. Supposons $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, et soit $\lambda \in \mathbf{R}^*$.
Soit alors $\varepsilon > 0$. Puisque $u_n \to \ell$, alors il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$.
Et donc après multiplication par $|\lambda|$, on a, pour $n \geqslant n_0$, $|\lambda u_n - \lambda\ell| < \varepsilon$.
Nous venons donc de prouver que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant n_0 \Rightarrow |\lambda u_n - \lambda\ell| < \varepsilon$.
Et donc $\lambda u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda\ell$.

Pour le sens réciproque, il suffit d'appliquer le sens direct avec (λu_n) et $\frac{1}{\lambda}$ en lieu et place de (u_n) et λ. □

Lemme 13.26. Soient (u_n) et (v_n) deux suites de limite nulle. Alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $n_1 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_1$, $|u_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
De même, il existe $n_2 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_2$, $|v_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Posons alors $n_0 = \max(n_1, n_2)$, de sorte que pour $n \geqslant n_0$, on a à la fois $n \geqslant n_1$ et $n \geqslant n_2$, et donc

$$|u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon.$$

Et donc ceci prouve bien que $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. □

> **Proposition 13.27 :** *Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2. Alors pour tous $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$, $\lambda u_n + \mu v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda\ell_1 + \mu\ell_2$.*

Démonstration. Nous allons prouver que $\lambda u_n + \mu v_n - (\lambda\ell_1 + \mu\ell_2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ce qui est équivalent au résultat annoncé.
Commençons par noter que $\lambda(u_n - \ell_1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En effet, la suite[16] de terme général λ est bornée et $u_n - \ell_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc la proposition 13.33 s'applique.
De même, $\mu(v_n - \ell_2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Et donc par le lemme 13.26, $\lambda(u_n - \ell_1) + \mu(v_n - \ell_2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. □

[16] Constante !

Remarque. Notons en particulier que ceci prouve que la somme de deux suites convergentes est convergente.
Nous n'énoncerons aucun résultat concernant les sommes de suites divergentes, et pour cause : la somme de deux suites divergentes peut converger comme elle peut diverger.
Par exemple, $n + (1 - n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, alors que c'est la somme de deux suites divergentes, et $n + ((-1)^n - n)$ diverge, bien qu'également somme de deux suites divergentes.
En revanche, il est toujours vrai que la somme d'une suite convergente et d'une suite convergente soit divergente.
Par exemple, supposons que (u_n) tende vers une limite finie ℓ et que (v_n) diverge. Supposons par l'absurde que $(u_n + v_n)$ converge vers une limite ℓ'. _ Alors $v_n = (u_n + v_n) - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell' - \ell$, contredisant la divergence de (v_n).

> **Proposition 13.28 :** *Si (u_n) est minorée et si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.*

Démonstration. Soit $m \in \mathbf{R}$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $m \leqslant u_n$.
Soit alors $A \in \mathbf{R}$. Puisque $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $v_n > A - m$.
Et alors, pour $n \geqslant n_0$, $u_n + v_n > m + A - m \geqslant A$.
Et donc $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. □

Corollaire 13.29 – *Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbf{R}$, et si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.*
Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Démonstration. Il s'agit de remarquer qu'une suite convergente ou qui tend vers $+\infty$ est minorée. □

Sur le même principe, on prouve que :

Proposition 13.30 : *Soit (u_n) une suite majorée. Si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.*

Corollaire 13.31 – *Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbf{R}$ et si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.*
Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ et si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

Notons qu'on ne dit rien de la somme d'une suite qui tend vers $+\infty$ et d'une suite qui tend vers $-\infty$, tout bonnement car il s'agit[17] d'une forme indéterminée.
Ce qui veut dire qu'il n'existe pas de règle générale, mais que vous devrez vous débrouiller au cas par cas !

[17] Toujours.

Exemples 13.32

- Si $u_n = n$ et $v_n = -2n$, alors $u_n \to +\infty$, $v_n \to -\infty$ et $u_n + v_n \to -\infty$.
- Si $u_n = n$ et $v_n = 1 - n$. Alors $u_n \to +\infty$, $v_n \to -\infty$ et $u_n + v_n \to 1$.
- Si $u_n = n$ et $v_n = -n + (-1)^n$, alors $u_n \to +\infty$, $v_n \to -\infty$ et $(u_n + v_n)$ diverge.

Une manière pratique de synthétiser tout cela : si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1 \in \overline{\mathbf{R}}$, si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_2 \in \overline{\mathbf{R}}$, et si $\ell_1 + \ell_2$ est défini dans $\overline{\mathbf{R}}$, alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1 + \ell_2$.

13.3.2 Produit et quotient de limites

Commençons par une proposition qui sert très souvent :

Proposition 13.33 : *Le produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle tend vers 0.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite qui tend vers 0 et soit (v_n) une suite bornée. Notons M un réel tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $|v_n| \leqslant M$.
Soit $\varepsilon > 0$, et soit $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|u_n| < \dfrac{\varepsilon}{M}$.
Alors pour $n \geqslant n_0$, il vient $|u_n v_n| \leqslant |u_n| \cdot |v_n| < \dfrac{\varepsilon}{M} M \leqslant \varepsilon$.
Et donc ceci prouve bien que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel $|u_n v_n| < \varepsilon$, et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 0$. □

Détails
C'est la **définition** de $u_n \to 0$, où on a pris $\frac{\varepsilon}{M}$ au lieu d'ε (ce qui est toujours possible puisque la propriété est vraie **pour tout** nombre positif).

Proposition 13.34 : *Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_2$, alors $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1 \ell_2$.*

Démonstration. On a $u_n v_n = u_n(v_n - \ell_2) + u_n \ell_2 = u_n(v_n - \ell_2) + (u_n - \ell_1)\ell_2 + \ell_1 \ell_2$.
Puisque (u_n) est convergente, elle est bornée, et donc la proposition 13.33 s'applique : $u_n(v_n - \ell_2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

De même, $u_n - \ell_1 \to 0$ et la suite constante égale à ℓ_2 est bornée, et donc $(u_n - \ell_1)\ell_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Et donc par somme de limites,

$$u_n v_n = \underbrace{u_n(v_n - \ell_2)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{(u_n - \ell_1)\ell_2}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} + \ell_1\ell_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1\ell_2.$$

□

Lemme 13.35. Soient (u_n) et (v_n) deux suites, avec $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et (v_n) minorée à partir d'un certain rang par un réel $m > 0$. Alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Démonstration. Il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant m$.
Pour tout $n \geqslant n_0$, on a $u_n v_n \geqslant m v_n$.
Soit donc $A > 0$. Alors $\exists n_1 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_1$, $v_n \geqslant \dfrac{A}{m}$.
Et donc pour $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, $u_n v_n \geqslant m v_n \geqslant m\frac{A}{m} \geqslant A$.
Et donc $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. □

Corollaire 13.36 – *Si $u_n \to \ell \in \overline{\mathbf{R}}$, avec $\ell > 0$, et si $v_n \to +\infty$, alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.*

Démonstration. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors à partir d'un certain rang, elle est plus grande que 1.
Et si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell > 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| < \dfrac{\ell}{2}$, et donc $u_n \geqslant \dfrac{\ell}{2} > 0$.
Donc dans les deux cas, le lemme précédent s'applique. □

De même, on prouve que

Proposition 13.37 :

- *Si $u_n \to \ell \in \overline{\mathbf{R}}$, avec $\ell < 0$, et si $v_n \to +\infty$, alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.*
- *Si $u_n \to \ell \in \overline{\mathbf{R}}$, avec $\ell > 0$, et si $v_n \to -\infty$, alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.*
- *Si $u_n \to \ell \in \overline{\mathbf{R}}$, avec $\ell < 0$, et si $v_n \to -\infty$, alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.*

Comme pour le cas des sommes de limites, si $u_n \to \ell_1 \in \overline{\mathbf{R}}$ et si $v_n \to \ell_2 \in \overline{\mathbf{R}}$, alors si $\ell_1\ell_2$ existe dans $\overline{\mathbf{R}}$, alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1\ell_2$.

Proposition 13.38 : *Soit (u_n) une suite convergeant vers un réel $\ell \neq 0$. Alors à partir d'un certain rang, $u_n \neq 0$, de sorte que $\dfrac{1}{u_n}$ est bien défini.*
On a alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\ell}$.

Démonstration. Soit $\varepsilon = \dfrac{|\ell|}{2} > 0$ car $\ell \neq 0$. Par définition d'une limite, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. Prenons un tel n_0.
Alors, pour $n \geqslant n_0$, d'après l'inégalité triangulaire renversée,

$$|u_n| = |\ell + (u_n - \ell)| \geqslant |\ell| - |u_n - \ell| \geqslant |\ell| - \varepsilon \geqslant \frac{|\ell|}{2} > 0.$$

En particulier[18], $u_n \neq 0$ pour $n \geqslant n_0$.

On a alors, pour $n \geqslant n_0$, $\left|\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{\ell}\right| = \dfrac{|u_n - \ell|}{|u_n|\,|\ell|}$.
En utilisant la minoration de $|u_n|$ que nous venons de prouver, il vient donc :

$$0 \leqslant \frac{|u_n - \ell|}{|u_n|\,|\ell|} \leqslant \frac{|u_n - \ell|}{\frac{|\ell|}{2}|\ell|} \leqslant 2\frac{|u_n - \ell|}{|\ell|^2}.$$

[18] Un nombre est nul si et seulement si sa valeur absolue est nulle.

Or, $\dfrac{|u_n - \ell|}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc pour $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0, |u_n - \ell| < \frac{|\ell|^2\varepsilon}{2}$.
Et alors pour $n \geqslant n_0, \left|\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{\ell}\right| < \varepsilon$.
Par conséquent $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\ell}$. □

Corollaire 13.39 – *Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2$, avec $\ell_2 \neq 0$. Alors $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que $\dfrac{u_n}{v_n} = u_n \dfrac{1}{v_n}$, et d'utiliser les résultats vus précédemment pour l'inverse et le produit de limites. □

L'inverse d'une suite de limite nulle n'a pas toujours de limite, comme le prouve le cas de la suite $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, qui tend bien vers 0 car produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle.
Mais $\dfrac{1}{u_n} = (-1)^n n$ n'admet pas de limite[19].
En revanche, on dispose de résultats pour les suites de signe constant.

[19] Considérer les suites des termes d'ordre pair et d'ordre impair pour s'en convaincre.

Proposition 13.40 : *Soit (u_n) une suite dont tous les termes sont strictement positifs (resp. négatifs), et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.*

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = -\infty$).

Démonstration. Supposons (u_n) strictement positive, et soit $A > 0$. Alors il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{A}$.
Et donc pour $n \geqslant n_0$, $\dfrac{1}{u_n} \geqslant A$. Et par conséquent, $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Le cas d'une suite strictement négative se traite de la même manière en considérant $A < 0$. □

Remarque

Notons qu'en particulier, cette proposition s'applique si $u_n \to +\infty$ ou si $u_n \to -\infty$. Mais aussi à des suites sans limite dans $\overline{\mathbf{R}}$, comme $(-2)^n$.

Proposition 13.41 : *Soit (u_n) une suite telle que $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Démonstration. Commençons par noter que $\dfrac{1}{u_n}$ est bien définie, au moins pour n suffisamment grand. En effet, par définition d'une limite infinie, et en prenant $A = 1$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|u_n| \geqslant 1$.
Et donc en particulier, pour $n \geqslant n_0$, $u_n \neq 0$.

Considérons à présent $\varepsilon > 0$ fixé. Alors il existe $n_1 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_1$, $|u_n| \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$.
Et donc en passant à l'inverse, pour $n \geqslant n_1$, $\left|\dfrac{1}{u_n}\right| \leqslant \varepsilon$.
Ceci prouve que $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. □

13.3.3 Tableau récapitulatif

Les tableaux suivants récapitulent les principaux résultats sur les limites :

$\lim u_n$	$\ell \in \mathbf{R}$	$\ell \in \mathbf{R}$ ou $+\infty$	$\ell \in \mathbf{R}$ ou $-\infty$	$+\infty$
$\lim v_n$	$\ell' \in \mathbf{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	**F. I.**

$\lim u_n$	ℓ	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$
$\lim u_n v_n$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**F.I.**

Remarquons que ceci nous donne également la limite de λu_n en fonction de celle de u_n (il suffit de prendre (v_n) constante égale à λ).
Seul le cas $\lambda = 0$ ne figure pas dans ce tableau, mais je suis à peu près sûr que vous savez trouver la limite de $0 \times u_n$...

Une forme indéterminée classique qui n'est pas non plus dans le tableau est celle que l'on note généralement 1^∞ : si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors aucun théorème ne permet de conclure quand à la limite de $u_n^{v_n}$.
En effet, on a $u_n^{v_n} = \exp\left(v_n \ln(u_n)\right)$.
Or $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui nous ramène à une forme indéterminée bien connue.

13.3.4 Limites et inégalités

Le lemme qui suit sera largement généralisé dans le chapitre sur la continuité.

Lemme 13.42. Soit (u_n) une suite convergente, de limite ℓ. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|$.

Démonstration. Par l'inégalité triangulaire renversée, $\big||u_n| - |\ell|\big| \leqslant |u_n - \ell|$.
Soit alors $\varepsilon > 0$. Il existe alors $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Et donc, pour $n \geqslant n_0$, $\big||u_n| - |\ell|\big| \leqslant \varepsilon$.
Ainsi, $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |\ell|$. □

⚠ La réciproque est complètement fausse, par exemple, si $u_n = (-1)^n$, alors $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, mais (u_n) est divergente.
La réciproque est toutefois vraie dans un cas particulier : $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ si et seulement si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Proposition 13.43 : *Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes telles que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant v_n$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.*

Remarque
Ce résultat reste valable si l'inégalité $u_n \leqslant v_n$ n'est vraie qu'à partir d'un certain rang.

⚠ Ce résultat suppose déjà que l'on sait les suites convergentes. Il ne peut en aucun cas suffire à prouver l'existence d'une limite !
Par exemple, bien que pour tout entier n, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$, il n'est pas question d'écrire qu'alors $-1 \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n \leqslant 1$. En effet, $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n$ ne veut rien dire !

Détails
Ici, -1 et 1 sont vus comme deux suites constantes, donc convergentes.

Démonstration. Par différence de limites, $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2 - \ell_1$.
Et donc $|v_n - u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |\ell_2 - \ell_1|$.
Or puisque $u_n \leqslant v_n$, $v_n - u_n \geqslant 0$, de sorte que $|v_n - u_n| = v_n - u_n$.
Et donc par unicité de la limite de $v_n - u_n$, il vient $|\ell_2 - \ell_1| = \ell_2 - \ell_1$, de sorte que $\ell_2 - \ell_1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \ell_1 \leqslant \ell_2$. □

⚠ Il n'existe pas de résultat analogue avec des inégalités strictes : si $u_n < v_n$, la seule chose que l'on puisse affirmer[20], qui découle directement de la proposition précédente, c'est que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
Il se peut que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n < \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, mais ce n'est pas toujours le cas.
Par exemple, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$, mais pourtant $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}$.

[20] Sous réserve que ces suites convergent.

Lemme 13.44. Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\forall n \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Remarque
Notons que ceci prouve directement que (u_n) converge, condition qui ne figurait pas dans les hypothèses.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|v_n - 0| \leqslant \varepsilon$.
Mais $v_n \geqslant 0$, de sorte que $|v_n| = v_n$.
Et donc pour $n \geqslant n_0$, $\underbrace{|u_n|}_{=u_n} \leqslant \varepsilon$.

On en déduit donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. □

Théorème 13.45 (Théorème des gendarmes (ou d'encadrement)) :
Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ trois suites telles que :

1. $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$

Alors (v_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Remarque
Notons que ce résultat englobe le lemme précédent : il suffit de prendre $u_n = 0$ et $\ell = 0$.

Démonstration. On a $0 \leqslant v_n - u_n \leqslant w_n - u_n$.
Mais $w_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell - \ell = 0$.
Et donc par le lemme précédent, $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On en déduit donc que $v_n = u_n + (v_n - u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell + 0 = \ell$. □

Exemple 13.46

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{3n^2+k}{2k+n^3}$.
Alors, pour tout $k \geqslant 1$, $\dfrac{3n^2+1}{2n+n^3} \leqslant \dfrac{3n^2+k}{n^3+2k} \leqslant \dfrac{3n^2+n}{n^3+2}$.
En sommant pour k allant de 1 à n, il vient

$$n\frac{3n^2+1}{n^3+2n} \leqslant u_n \leqslant n\frac{3n^2+n}{n^3+2}.$$

Or, $\dfrac{3n^3+n}{n^3+2} = \dfrac{3+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3$.
Et de même, $\dfrac{3n^3+n^2}{n^3+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3$.
Par le théorème des gendarmes, on en déduit donc que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3$.

Méthode
Rappelons que pour majorer une fraction (positive), il suffit de majorer son numérateur et de minorer son dénominateur.

Proposition 13.47 : *Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant v_n$. Alors*

1. *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.*
2. *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.*

Démonstration. Nous ne prouvons que le point 1), la preuve de 2) étant similaire.
Soit $A \in \mathbf{R}$, et soit $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant A$.
Alors pour tout $n \geqslant n_0$, $v_n \geqslant A$.
Et ainsi, nous venons de prouver que $\forall A \in \mathbf{R}$, $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant n_0 \Rightarrow v_n \geqslant A$, et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. □

13.3.5 Limites usuelles

Proposition 13.48 (Limite d'une suite géométrique) : *Soit $q \in \mathbf{R}$. Alors :*

1. *si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$*
2. *si $q \in]-1,1[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$*
3. *si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.*
4. *si $q < -1$, alors la suite $(q^n)_n$ n'a pas de limite dans $\overline{\mathbf{R}}$.*

Démonstration. 1. Si $q > 1$, alors nous avons prouvé[21] que pour tout $A \in \mathbf{R}$, $\exists n_0 \in \mathbf{R}$ tel que $q^n \geq A$.
Puisque de plus (q^n) est croissante, on a donc, pour tout $n \geqslant n_0$, $q^n \geqslant q^{n_0} \geqslant A$.
Et donc ceci prouve que

$$\forall A \in \mathbf{R},\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant n_0, q^n \geqslant A.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

2. Si $q \in]-1,1[$, alors pour tout n, $0 \leqslant |q^n| \leqslant |q|^n$.
Mais $\dfrac{1}{|q|} > 1$, et donc par le point précédent, $\dfrac{1}{|q|^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Et donc $|q|^n = \dfrac{1}{\frac{1}{|q|^n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. Si $q = 1$, il n'y a rien à dire.
4. Enfin, si $q < -1$, alors $q^{2n} = (q^2)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car $q^2 > 1$.
Donc (q^n) n'est pas majorée, et donc ne peut converger, ni tendre vers $-\infty$.
Et de même, $q^{2n+1} = q\left(q^2\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, de sorte que (q^n) n'est pas minorée, et donc ne tend pas vers $+\infty$.
Et donc (q^n) n'a pas de limite dans $\overline{\mathbf{R}}$.

□

Il est très simple de constater que $n! \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et donc que pour $x \in \mathbf{R} \setminus [-1,1]$, le calcul de l'éventuelle limite de $\dfrac{x^n}{n!}$ fait apparaître une forme indéterminée.

Proposition 13.49 : *Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$.*

Démonstration. Soit $x \in \mathbf{R}^*$. Posons alors $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$. Alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{x}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Et donc en particulier, à partir d'un certain rang n_0, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$, et donc $|u_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n|$.
Une récurrence rapide prouve alors que pour $n \geqslant n_0$, $|u_n| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-n_0} |u_{n_0}|$.
Et donc par le théorème des gendarmes $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. □

Ce résultat signifie que $n!$ tend vers $+\infty$ «plus rapidement» que toute suite géométrique.
Nous donnerons bientôt d'autres résultats allant dans ce sens, avec l'idée de comparer les vitesse de convergence des suites.

13.4 THÉORÈMES D'EXISTENCE DE LIMITE

Tous les théorèmes précédemment rencontrés[22] ne s'appliquent que lorsqu'on sait que certaines suites admettent des limites.
Dans cette partie, nous prouvons deux grands théorèmes qui ne nécessitent pas de savoir qu'une limite existe, mais prouvent bien son existence.
Ce qui permet ensuite, par exemple, un passage à la limite dans des inégalités, afin de déterminer la valeur de la limite en question.

[21] Juste après le fait que $\mathbf{R}$ soit archimédien.

[22] À l'exception du théorème des gendarmes.

13.4.1 Le théorème de la limite monotone

Théorème 13.50 (Théorème de la limite monotone) :

1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite croissante. Alors :*
   - *si (u_n) est majorée, elle converge, et sa limite est* $\sup\{u_n, n\in\mathbf{N}\}$
   - *si (u_n) n'est pas majorée, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite décroissante. Alors :*
   - *si (u_n) est minorée, elle converge, et sa limite est* $\inf\{u_n, n\in\mathbf{N}\}$
   - *si (u_n) n'est pas minorée, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration. Traitons le cas d'une suite croissante, celui d'une suite décroissante s'en déduit en changeant le sens des inégalités.

► **Supposons (u_n) majorée.**

Notons alors $\ell = \sup\{u_n,\ n\in\mathbf{N}\}$, et considérons $\varepsilon > 0$ fixé.
Alors, d'après la caractérisation epsilonesque d'une borne supérieure, il existe $n_0\in\mathbf{N}$ tel que $\ell-\varepsilon \leqslant u_{n_0} \leqslant \ell$.
Et donc par croissance de (u_n), pour $n\geqslant n_0$, $u_n \geqslant u_{n_0} \geqslant \ell-\varepsilon$.
D'autre part, (u_n) étant majorée[23] par ℓ, il vient donc, pour tout $n\geqslant n_0$,

$$\ell-\varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell \Rightarrow -\varepsilon \leqslant u_n-\ell \leqslant 0 \Rightarrow |u_n-\ell| \leqslant \varepsilon.$$

Et donc nous avons prouvé que $\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbf{N},\ \forall n\in\mathbf{N},\ n\geqslant n_0 \Rightarrow |u_n-\ell|\leqslant\varepsilon$, et donc (u_n) converge vers ℓ.

Remarque
Notons que ce sup existe bien puisque nous considérons une partie non vide et majorée de $\mathbf{R}$.

[23] Par définition, ℓ est le plus petit majorant de la suite.

► **Supposons (u_n) non majorée.**

Soit $A\in\mathbf{R}$. Alors A n'est pas un majorant de (u_n), et donc il existe $n_0\in\mathbf{N}$ tel que $u_{n_0}\geqslant A$.
Et par croissance de (u_n), pour tout $n\geqslant n_0$, $u_n\geqslant u_{n_0}\geqslant A$.
Nous avons donc prouvé que $\forall A\in\mathbf{R},\ \exists n_0\in\mathbf{N},\ \forall n\in\mathbf{N},\ n\geqslant n_0 \Rightarrow u_n\geqslant A$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. □

Notons que pour les suites monotones, cela traite tous les cas de figure : une suite croissante est soit convergente, soit diverge vers $+\infty$. Il n'y a pas d'autres cas possibles ! Notons également qu'il s'agit là d'une théorème d'existence, qui permet souvent de prouver qu'une limite existe, mais rarement de la calculer (sauf dans les cas où on connaît la valeur de $\sup\{u_n,\ n\in\mathbf{N}\}$).

Exemple 13.51

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par : $\forall n\geqslant 1,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.

Alors pour tout $n\geqslant 1$, $u_{n+1}-u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0$.

Donc (u_n) est croissante.

Prouvons par récurrence sur n que $\forall n\geqslant 1,\ u_n\leqslant 2-\dfrac{1}{n}$.

Pour $n=1$, c'est trivial. Supposons donc que $u_n\leqslant 2-\dfrac{1}{n}$. Alors

$$u_{n+1} = u_n+\frac{1}{(n+1)^2} \leqslant 2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2} \leqslant 2-\frac{(n+1)^2-n}{n(n+1)^2} \leqslant 2-\frac{n^2+n}{n(n+1)^2} \leqslant 2-\frac{n(n+1)}{n(n+1)^2} \leqslant 2-\frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbf{N}$, on a $u_n\leqslant 2-\dfrac{1}{n}$, et en particulier, $u_n\leqslant 2$, de sorte que (u_n) est majorée.
Étant croissante, par le théorème de la limite monotone, elle converge.
Notons que tout ce que nous savons au sujet de sa limite est qu'elle est inférieure ou

égale à 2. Mais les calculs que nous venons de faire ne nous permettent pas de la calculer.

Remarque
Mais nous avons déjà rencontré cette limite : elle vaut $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Enfin, remarquons que ceci nous dit que si une suite croissante converge vers ℓ, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant \ell$ puisque $\ell = \sup\{u_n,\ n \in \mathbf{N}\}$ est un majorant de la suite (u_n).
Et de même, une suite décroissante convergente est toujours supérieure ou égale à sa limite.

13.4.2 Suites adjacentes

Définition 13.52 – Deux suites (a_n) et (b_n) sont **adjacentes** si

1. l'une est croissante
2. l'autre est décroissante
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n - b_n) = 0$.

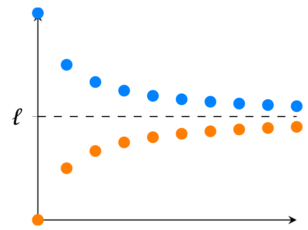


FIGURE 13.2– Deux suites adjacentes convergent vers une même limite.

Proposition 13.53 : *Deux suites adjacentes convergent vers une même limite.*
Plus précisément : si (a_n) et (b_n) sont adjacentes, que (a_n) est croissante et que (b_n) est décroissante, alors leur limite commune ℓ vérifie : $\forall (m,n) \in \mathbf{N}^2$, $a_m \leqslant \ell \leqslant b_n$.

Démonstration. Puisque $(a_n - b_n)$ est convergente, elle est bornée : il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $-M \leqslant a_n - b_n \leqslant M$.
D'autre part, (b_n) étant décroissante, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $b_n \leqslant b_0$.
Et donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n = b_n + (a_n - b_n) \leqslant b_0 + M$.
Ceci prouve donc que $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est majorée, et puisqu'elle est croissante, elle est donc convergente. Notons $\ell_1 = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

On prouve sur le même principe que (b_n) est décroissante et minorée, donc qu'elle converge vers un réel ℓ_2.
On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n - b_n = \ell_1 - \ell_2$.
Et donc, par unicité de la limite de $(a_n - b_n)$, $\ell_1 - \ell_2 = 0 \Leftrightarrow \ell_1 = \ell_2$.
Notons donc ℓ cette limite commune aux deux suites. En vertu de la remarque suivant le théorème 13.50, on a, pour tout $m \in \mathbf{N}$, $a_m \leqslant \ell$ car (a_n) est croissante et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\ell \leqslant b_n$ car (b_n) est décroissante. □

Exemple 13.54

Considérons les deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$.

Alors $v_n - u_n = \frac{1}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
D'autre part, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} \geqslant 0$, donc $(u_n)_n$ est croissante.
Enfin, $v_{n+1} - v_n = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2-(n+1)}{(n+1)!} = \frac{1-n}{(n+1)!}$, qui est négatif pour $n \geqslant 1$.
Et donc $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
Par conséquent, les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, et convergent vers une même limite.
Nous prouverons plus tard que cette limite commune aux deux suites vaut e.