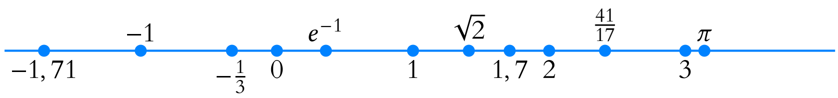
12

Nombres réels

Nous étudions dans ce chapitre quelques propriétés de l'ensemble des nombres réels. Mais au fait, qu'est-ce qu'un nombre réel ?
Les manipulant depuis quelques années, vous avez déjà une assez bonne idée de ce qu'est $\mathbf{R}$, ne serait-ce que géométriquement : c'est l'ensemble des abscisses des points d'une droite horizontale[1] :



Vous savez déjà que $\mathbf{R}$ est muni d'une addition, d'une multiplication, qu'il y a une relation d'ordre total sur $\mathbf{R}$, et qu'il y a certaines compatibilités entre ces différentes structures.
Par exemple la distributivité de l'addition par rapport au produit : $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$ ou encore la sommation d'inégalités : $(a \leqslant b)$ **et** $(c \leqslant d) \Rightarrow a+c \leqslant b+d$.

Pourtant, il nous faudrait donner une définition rigoureuse de ce qu'est un nombre réel.
Un nombre naturel, c'est facile : $\mathbf{N}$ c'est l'ensemble des nombres que vous pouvez compter avec vos doigts[2] : $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Bien entendu ceci n'est pas très rigoureux, mais passons ceci sous silence.
Partant des entiers naturels, il est assez facile de construire l'ensemble des entiers relatifs : il suffit d'ajouter un signe (négatif ou positif) aux entiers naturels. Donc $\mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
Un nombre rationnel, ce n'est rien d'autre qu'un couple d'entiers relatifs : un numérateur et un dénominateur (forcément non nul). Il y a quelques précautions à prendre, puisque deux couples d'entiers peuvent représenter la même fraction, par exemple : $\dfrac{4}{11} = \dfrac{8}{22} = \dfrac{-12}{-33}$.

Donc jusqu'à $\mathbf{Q}$, tout va bien. Pourquoi vouloir alors faire plus ? Pourquoi ne pas travailler uniquement en manipulant des rationnels ?
Un des inconvénients de $\mathbf{Q}$, c'est qu'il n'existe pas de rationnel[3] dont le carré vaut 2.
Est-ce vraiment si problématique ? Par exemple, il n'existe pas de réel dont le carré vaut -1, et on arrive à s'en accommoder.
C'est un peu plus gênant pour $\sqrt{2}$, puisqu'il s'agit de la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1. Rester dans les rationnels, c'est donc s'interdire de mesurer la diagonale de ce carré (mais aussi le périmètre du cercle trigonométrique).

Nous ne rentrerons pas dans les détails[4] de la construction de $\mathbf{R}$.
Il existe deux manières classiques de construire $\mathbf{R}$, d'esprits très différents, mais qui construisent bien des ensembles ayant les mêmes propriétés.
L'une d'entre elles fut proposée par Dedekind en 1872 et utilise ce qu'on appelle aujourd'hui les coupures de Dedekind.

L'idée principale de cette construction est qu'un nombre réel x «coupe en deux» l'ensemble des rationnels : il y a ceux qui sont plus petits que x et ceux qui sont plus grands que x.
Un nombre réel est alors une partition de $\mathbf{Q}$ en deux ensembles A et B tels que tout élément de A soit plus petit que tout élément de B.
Notons qu'il faut ruser un peu, et qu'on ne peut définir $\sqrt{2}$ comme étant la partition (A, B) où $A = \{x \in \mathbf{Q} \mid x < \sqrt{2}\}$, $B = \{x \in \mathbf{Q} \mid x \geqslant \sqrt{2}\}$: $\sqrt{2}$ ne peut pas être défini à partir de $\sqrt{2}$, on se mord la queue !
En revanche, cette même partition est définie par $A = \left\{x \in \mathbf{Q} \mid x \leqslant 0 \text{ \textbf{ou} } x^2 < 2\right\}$ et

[1] Ou de toute droite non verticale.

[2] Plus éventuellement ceux d'autres personnes.

[3] Autrement dit, $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

[4] Non pas que ce soit inintéressant, mais c'est difficile et hors-programme.

$B = \{x \in \mathbf{Q} \mid x > 0 \text{ et } x^2 \geqslant 2\}$.
Une fois les réels définis ainsi, il resterait à définir ce qu'est la somme de deux réels, ce qu'est leur produit, ce qu'est la relation d'ordre sur $\mathbf{R}$, et vérifier que toutes ces opérations ont bien les propriétés qu'on leur connaît. Tout ceci est fastidieux, et nous n'en dirons rien, et admettrons donc que $\mathbf{R}$ existe et possède bien les propriétés qu'on lui connaît déjà.

L'autre construction possible, formalisée par MÉRAY et CANTOR quelques années seulement avec celle de Dedekind utilise que qu'on appelle des suites de Cauchy, et définit en gros un nombre réel comme étant une classe d'équivalence d'une certaine relation d'équivalence sur un ensemble de suites à valeurs rationnelles. Avec cette construction, la somme et le produit sur $\mathbf{R}$ sont plus faciles à définir, mais il faut travailler davantage pour définir et prouver les propriétés de la relation d'ordre.

12.1 LA RELATION D'ORDRE SUR R

Sur $\mathbf{R}$, on dispose de la relation d'ordre usuelle, que nous ne définirons à aucun moment[5]. Dans le chapitre 2, nous avons déjà rappelé les propriétés de la relation d'ordre sur $\mathbf{R}$, et notamment le fait qu'elle se comporte relativement bien par rapport aux opérations (on peut sommer des inégalités, les multiplier par un nombre positif, etc).

12.1.1 Bornes supérieures dans R

Nous admettrons qu'on dispose de la propriété suivante[6] :

Théorème 12.1 : *Toute partie **non vide et majorée** de $\mathbf{R}$ admet une borne supérieure.*

Exemple 12.2

Considérons l'ensemble $A = [0,1[$, qui est une partie de $\mathbf{R}$, évidemment majorée puisque pour tout $x \in [0,1[$, $x \leqslant 1$.
Alors $[0,1[$ admet une borne supérieure. Essayons de la déterminer, sans oublier que, par définition, $\sup A$ est le plus petit des majorants de A.
Nous avons prouvé ci-dessus que 1 est un majorant de A, prouvons que c'est le plus petit.
Soit M un majorant de A, et supposons par l'absurde que $M < 1$.
Alors $\frac{1+M}{2} < 1$, et donc $\frac{1+M}{2} \in [0,1[$.
Puisque M est un majorant de $[0,1[$, il vient donc $\frac{1+M}{2} \leqslant M$, et donc $1 \leqslant M$, contredisant l'hypothèse faite ci-dessus.
Donc $M \leqslant 1$, si bien que 1 est le plus petit des majorants de A, et donc égal à $\sup A$.

Corollaire 12.3 – *Toute partie **non vide et minorée** de $\mathbf{R}$ admet une borne inférieure.*

Démonstration. Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbf{R}$, et soit $B = -A = \{-a,\ a \in A\}$.
Alors B est non vide, et un réel m est un minorant de A, si et seulement si $-m$ est un majorant de B, donc B est majorée et possède une borne supérieure b.
Alors, si m est un minorant de A, $-m$ est un majorant de B, donc $-m \geqslant b$.
Et donc $m \leqslant -b$: $-b$ est le plus grand des minorants de A, c'est donc sa borne inférieure. □

Exemple 12.4 Q ne possède pas la propriété de la borne supérieure

Notons que cette propriété de la borne supérieure n'était pas vraie dans $\mathbf{Q}$. Par exemple, $A = \{x \in \mathbf{Q}^+ \mid x^2 \leqslant 2\}$ ne possède pas de borne supérieure **dans l'ensemble ordonné Q**. Il est assez clair que A est non vide, et majorée par exemple par 2, puisque pour tout $x \in A$, $x^2 \leqslant 2 \leqslant 2^2$, si bien que par stricte croissance de la fonction carré sur $\mathbf{Q}^+$, $x \leqslant 2$.

[5] Elle fait partie du package «construction de $\mathbf{R}$», où l'on définit non seulement ce qu'est l'ensemble $\mathbf{R}$, mais aussi comment on définit les deux opérations et la relation d'ordre sur $\mathbf{R}$.

[6] Qui fait cruellement défaut à $\mathbf{Q}$, voir ci-dessous.

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $b \in \mathbf{Q}$ qui soit le plus petit des majorants (rationnels). de A.
Nous allons en fait construire un autre majorant de A, strictement plus petit que b.
Posons $c = \frac{b}{2} + \frac{1}{b}$, qui est encore un rationnel.
On a alors $c^2 - 2 = \frac{b^2}{4} + \frac{1}{b^2} - 1 = \left(\frac{b}{2} - \frac{1}{b}\right)^2 \geqslant 0$, et donc $c^2 \geqslant 2$.
Donc pour tout $x \in A$, si $x^2 \leqslant 2 \leqslant c^2$, si bien que $x \leqslant c$.
Donc c est un majorant de A.

Par ailleurs, on a

$$c < b \Leftrightarrow \frac{1}{b} + \frac{b}{2} < b \Leftrightarrow \frac{1}{b} < \frac{b}{2} \Leftrightarrow 2 < b^2.$$

Nous avons envie de dire que cette dernière inégalité est vraie... parce que nous avons l'intuition dans $\mathbf{R}$, et voyons b comme un rationnel supérieur à $\sqrt{2}$, mais il faut travailler un peu plus pour l'écrire proprement.

D'après ce qui précède $\left(\frac{2}{c}\right)^2 \leqslant 2$, donc $\frac{2}{c} \in A$, si bien que[7]

$$b \geqslant \frac{2}{c} \Leftrightarrow bc \geqslant 2 \Leftrightarrow \frac{b^2}{2} + 1 \geqslant 2 \Leftrightarrow b^2 \geqslant 2.$$

[7] b est un majorant de A.

Mais b^2 ne peut pas être égal à 2 (nous savons bien qu'il n'existe pas de rationnel dont le carré serait égal à 2), donc $b^2 > 2$.
Ceci achève de prouver que $c < b$, et donc c est un majorant de A, strictement plus petit que b, ce qui contredit la définition de borne supérieure.
Conclusion : A n'a pas de borne supérieure dans $\mathbf{Q}$.

Proposition 12.5 (Caractérisation «epsilonesque» de la borne supérieure) : *Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbf{R}$. Alors un réel m est la borne supérieure de A si et seulement si*

1. *m est un majorant de A*
2. *$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, m - \varepsilon < a \leqslant m$.*

Remarque

Notons que l'inégalité $a \leqslant m$ découle directement du fait que m est un majorant de A.

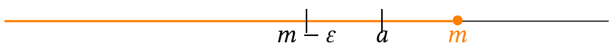


Figure 12.1 – L'idée est simple : un nombre strictement inférieur à m (qui est donc de la forme $m - \varepsilon$ pour un certain $\varepsilon > 0$) n'est plus un majorant de A.

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $m = \sup(A)$. Par définition m est un majorant[8] de A. Soit alors $\varepsilon > 0$. Puisque $m - \varepsilon < m$, et que m est le plus petit des majorants de A, $m - \varepsilon$ n'est plus un majorant de A.
Et donc il existe $a \in A$ tel que $m - \varepsilon < a$.

[8] C'est même le plus petit d'entre eux.

$\boxed{\Leftarrow}$ Pour la réciproque, supposons qu'on dispose d'un réel m satisfaisant aux deux conditions, et prouvons qu'il s'agit nécessairement de $\sup(A)$. Puisque m est un majorant $m \geqslant \sup(A)$. Raisonnons par l'absurde, et supposons que $m > \sup(A)$. Soit alors $\varepsilon = m - \sup(A) > 0$. Alors il existe $a \in A$ tel que $m - \varepsilon < a \leqslant m$, soit encore

$$\sup(A) < a \leqslant m.$$

Ceci contredit le fait que $\sup(A)$ soit un majorant de A.
Donc $m = \sup(A)$. $\square$

Sur le même principe[9], on prouve que :

Proposition 12.6 : *Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbf{R}$. Alors un réel m est la borne inférieure de A si et seulement si :*

1. *m est un minorant de A*
2. *$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A,\ m \leqslant a < m + \varepsilon$.*

[9] En changeant le sens des inégalités.

Exemple 12.7

Soit $A = \left\{3 - \frac{2}{n^2},\ n \in \mathbf{N}^*\right\}$.
Alors A est une partie non vide et majorée[10] de $\mathbf{R}$, donc elle admet une borne supérieure.
Prouvons que $\sup A = 3$. Nous venons de dire que 3 est un majorant de A.
Soit à présent $\varepsilon > 0$. Prouvons que $2 - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A.
Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on a $3 - \dfrac{2}{n^2} > 3 - \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon > \dfrac{2}{n^2} \Leftrightarrow n^2 > \dfrac{2}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}}$.
Donc si on note $n_0 = \left\lceil \sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}} \right\rceil$, alors $3 - \dfrac{2}{n_0^2} > 3 - \varepsilon$.
Donc nous venons de prouver que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que $3 - \varepsilon < a \leqslant 3$.
C'est bien la caractérisation de $\sup A = 3$.

[10] Par 3.

12.1.2 Propriété d'Archimède

Proposition 12.8 : *L'ensemble $\mathbf{R}$ est archimédien, ce qui signifie que*

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ \forall y \in \mathbf{R},\ \exists n \in \mathbf{N},\ nx \geqslant y.$$

Histoire
L'énoncé originel d'Archimède est assez parlant : «Pour deux grandeurs inégales, il existe toujours un multiple entier de la plus petite, supérieur à la plus grande.»

Démonstration. Soit $x > 0$. Il s'agit donc de prouver que $A_x = \{nx,\ n \in \mathbf{N}\}$ n'est pas un ensemble majoré.
En effet, dire que A_x n'est pas majoré signifie qu'il n'admet pas de majorant, soit encore que pour tout $y \in \mathbf{R}$, y n'est pas un majorant de A_x.
Soit encore : $\forall y \in \mathbf{R},\ \exists u \in A_x, u \geqslant y$. Et donc $\forall y \in \mathbf{R},\ \exists n \in \mathbf{N},\ nx \geqslant y$.
Raisonnons par l'absurde, et supposons A_x majoré. Alors A_x admet une borne supérieure $a > 0$. Donc pour $n \in \mathbf{N}$, $nx \leqslant a$. Mais aussi $(n+1)x \leqslant a$. Soit encore $nx \leqslant a - x$. Ceci étant vrai pour tout n, $a - x$ est donc également un majorant de A_x, ce qui contredit la définition de borne supérieure puisque $a - x < a$.
Ainsi, A_x n'est pas majoré : pour tout $y \in \mathbf{R}$, $\exists n \in \mathbf{N}$, $nx \geqslant y$. □

Corollaire 12.9 – *Soit $x > 1$. Alors $\forall y \in \mathbf{R}, \exists n \in \mathbf{N},\ x^n \geqslant y$.*

Plus loin
L'énoncé qui se profile en filigrane ici est bien connu : une suite géométrique de raison strictement plus grande que 1 prend des valeurs arbitrairement grandes, ce qui voudra bientôt dire qu'elle tend vers $+\infty$.

Démonstration. Puisque $x > 1$, en posant $h = x - 1$, on a $h > 0$. Et donc par la formule du binôme, $\forall n \in \mathbf{N}$,

$$x^n = (1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k \geqslant 1 + nh.$$

Mais pour $y \in \mathbf{R}$ il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $nh \geqslant y - 1$, et donc $x^n \geqslant y$. □

Remarque. On pourrait sûrement s'en tirer bien plus facilement à l'aide de logarithmes et d'exponentielles, en remarquant que $x^n \geqslant y \Leftrightarrow n \ln x \geqslant \ln y$, et utiliser ensuite le fait que $\mathbf{R}$ est archimédien et $\ln x > 0$.
C'est vrai. Mais en réalité, nous sommes en train de reprouver les fondements de l'analyse, et il est fort probable que la définition et/ou les propriétés de l'exponentielle et du logarithme dépendent en fait de cette propriété qui a toujours du vous sembler évidente et à propos de laquelle vous ne vous étiez jamais questionné.

Nous sommes alors désormais en mesure de justifier la définition de la partie entière, dont nous avions admis précédemment qu'elle était bien définie.

Corollaire 12.10 – *Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors il existe un unique entier relatif n tel que $n \leqslant x < n+1$. On note alors $n = \lfloor x \rfloor$.*

Démonstration. Soit $A = \{k \in \mathbf{Z} \mid k \leqslant x\}$.
Supposons qu'il existe $n \in \mathbf{Z}$ tel que $n \leqslant x < n+1$, et considérons alors un tel n. Alors nécessairement le plus grand élément de A.
En effet, il s'agit d'un élément de A, et pour $n' \in \mathbf{Z}$ vérifiant $n' > n$, on a $n' \geqslant n+1 > x$, et donc $n' \notin A$.
Par contraposée, si $n' \in A$, alors $n' \leqslant n$.
Puisqu'un plus grand élément, quand il existe, est unique, cela prouve qu'il existe au plus un seul tel n.

Passons à présent à l'existence. Nous allons prouver que A est une partie non vide et majorée de $\mathbf{Z}$, elle aura alors automatiquement un plus grand élément.
▸ Si $x > 0$, $0 \in A$, qui est donc non vide. Et $\mathbf{R}$ étant archimédien, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geqslant x$. Et alors un tel n est plus grand que tous les éléments de A, et donc est un majorant de A.
▸ Si $x \leqslant 0$, alors 0 majore A, et par le premier cas il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geqslant -x \Leftrightarrow -n \leqslant x$, de sorte que $-n \in A$, et donc A est non vide. Dans les deux cas, A est non vide et majorée, et donc admet un plus grand élément n, qui est donc tel que $n \leqslant x < n+1$ (car $n+1 \notin A$). □

Remarque
Bien qu'il semble absolument évident que A soit majoré, essayez de le prouver sans utiliser la partie entière (et donc sans aucun argument du type «l'entier juste après ...»), vous allez voir que ce n'est finalement pas si simple...

Notons que ceci ne fait que justifier la définition de la partie entière, mais que ça ne change en rien ses propriétés étudiées plus tôt dans l'année.
Sur le même principe, on pourrait prouver que pour tout réel x, il existe un unique entier n tel que $n-1 < x \leqslant n$, ce réel étant noté $\lceil x \rceil$. Nous ne l'utiliserons en pratique jamais.

12.1.3 Intervalles de R

Revenons à présent sur un résultat admis en début d'année : la classification des intervalles de $\mathbf{R}$. On rappelle qu'un intervalle de $\mathbf{R}$ est une partie I de $\mathbf{R}$ telle que

$$\forall (x,y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow [x,y] \subset I$$

où l'on note $[x,y] = \{t \in \mathbf{R} \mid x \leqslant t \leqslant y\}$.

Encore plus simple
I est un intervalle si et seulement si

$$\forall x,y \in I^2,\ [x,y] \subset I.$$

En effet, si $x > y$, alors $[x,y] = \emptyset \subset I$.

Dans la suite, on considère un intervalle **non vide**[11] I et $x \in I$.

- si I n'est pas majoré, alors pour tout $y \geqslant x$, $\exists a \in I, a \geqslant y$.
  Donc $y \in [x,a] \subset I$, et donc $y \in I$. Par conséquent[12], $[x,+\infty[\subset I$.
- si I est majoré, il possède une borne supérieure b. Par définition d'une borne supérieure il est clair que $I \cap]b,+\infty[= \emptyset$. Distinguons encore deux cas.
  - si $b \in I$, c'est-à-dire si I possède un plus grand élément. Alors $[x,b] \subset I$. Donc $I \cap [x,+\infty[= \underbrace{(I \cap [x,b])}_{=[x,b]} \cup \underbrace{(I \cap]b,+\infty[)}_{=\emptyset} = [x,b]$.
  - si $b \notin I$, alors pour tout $y \in [x,b[$, il existe[13] $t \in I$ tel que $t > y$.
    Et donc $[x,t] \subset I$, de sorte que $y \in [x,t] \subset I$.
    Ainsi, $[x,b[\subset I$, et donc $I \cap [x,+\infty[= [x,b[$.

Le même type de raisonnement avec des bornes inférieures prouve que $I \cap]-\infty,x]$ est soit égal à $]-\infty,x]$ tout entier, soit à $]a,x]$, soit à $[a,x]$, où a désigne l'éventuelle[14] borne inférieure de I.
Et donc $I = (I \cap]-\infty,x]) \cup (I \cap [x,+\infty[)$ est de l'une des formes suivantes :

$$\mathbf{R},]-\infty,b],]-\infty,b[,]a,b[,]a,b], [a,b], [a,b[,]a,+\infty[, [a,+\infty[.$$

[11] Il ne vous aura pas échappé que $\emptyset$ satisfait la définition d'intervalle.

[12] Car ce qui précède est vrai pour tout $y \geqslant x$.

[13] Car y n'est pas un majorant de I car $y < \sup I$.

[14] I.e. quand elle existe.

		I majoré, $b = \sup I$		I non majoré
		$b \in I$	$b \notin I$	
I minoré	$a \in I$	$[a, b]$	$[a, b[$	$[a, +\infty[$
$a = \inf I$	$a \notin I$	$]a, b]$	$]a, b[$	$]a, +\infty[$
I non minoré		$]-\infty, b]$	$]-\infty, b[$	$\mathbf{R}$

12.2 APPROXIMATIONS D'UN RÉEL

Proposition 12.11 : *Soit $x \in \mathbf{R}$ et soit $n \in \mathbf{N}$. On appelle approximation décimale de x par défaut à 10^{-n} près le nombre $r_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.*

On a alors $r_n \leqslant x < r_n + \dfrac{1}{10^n}$.

Démonstration. Immédiat d'après les propriétés de la partie entière puisque $10^n r_n \leqslant 10^n x < 10^n r_n + 1$. □

Ne nous attardons pas là-dessus, vous savez très bien ce que ça signifie. Notons simplement que $r_n + \dfrac{1}{10^n}$ est l'approximation par excès à 10^{-n} près.

12.2.1 Parties denses

Proposition 12.12 : *Soit A une partie de $\mathbf{R}$. Alors il y a équivalence entre :*

i) tout intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}$ contient un élément de A

ii) entre deux réels distincts, il y a un élément de A. Soit encore

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ (x < y) \Rightarrow (\exists a \in A, x \leqslant a \leqslant y).$$

*Une partie A de $\mathbf{R}$ qui a ces propriétés est dite **dense** dans $\mathbf{R}$.*

Démonstration. Soit $A \in \mathbf{R}$. Si *i*) est vérifiée, soient alors $x < y$ deux réels. Alors l'intervalle ouvert $]x, y[$ contient au moins un élément de A.

Supposons à présent que *ii*) est vérifiée, et soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}$. Soient alors $x < y$ deux éléments de I. Alors il existe un élément a de A dans $[x, y]$. Mais I étant un intervalle, $[x, y] \subset I$, et donc $a \in I$. □

Remarque

Notons qu'un intervalle ouvert de I ne peut pas être réduit à un point. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle on travaille ici avec des intervalles **ouverts**.
En effet, les singletons sont des intervalles (non ouverts) qui contiennent un seul élément (mais ce sont les seuls, avec l'ensemble vide, à ne pas contenir une infinité d'éléments).

Exemple 12.13

On rappelle que l'ensemble $\mathbf{D}$ des nombres décimaux est :

$$\mathbf{D} = \left\{x \in \mathbf{R} \mid \exists k \in \mathbf{N},\ 10^k x \in \mathbf{Z}\right\} = \left\{\frac{n}{10^k},\ (n, k) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}\right\}.$$

L'ensemble $\mathbf{D}$ est alors dense dans $\mathbf{R}$. En effet, soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert avec $a < b$.
Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $10^n > \dfrac{1}{b-a}$, l'existence d'un tel n étant garantie par le corollaire 12.9.
Alors $\dfrac{1}{10^n} < b - a$.
Notons alors r l'approximation décimale de a par défaut à 10^{-n} près, c'est-à-dire $r = \dfrac{\lfloor 10^n a \rfloor}{10^n}$.
Alors $a < r + \dfrac{1}{10^n} < a + b - a = b$. Donc $r + \dfrac{1}{10^n}$ est un nombre décimal dans l'intervalle $]a, b[$, si bien que $\mathbf{D}$ est dense dans $\mathbf{R}$.

Proposition 12.14 (Densité de Q) : *L'ensemble* $\mathbf{Q}$ *des nombres rationnels est dense dans* $\mathbf{R}$.

Démonstration. Nous venons de prouver que l'ensemble $\mathbf{D}$ des décimaux est dense dans $\mathbf{R}$.
Mais $\mathbf{D}$ est inclus dans $\mathbf{Q}$.
Et donc dans tout intervalle ouvert non vide se trouve au moins un décimal, et donc au moins un rationnel. □

Ceci signifie qu'il y a vraiment des rationnels partout : entre deux réels distincts se trouve toujours au moins un rationnel.
Mieux : entre deux réels a et b, avec $a < b$ se trouvent toujours au moins deux rationnels.
En effet, il y en a au moins un dans $\left]a, \frac{a+b}{2}\right[$ et au moins un dans $\left]\frac{a+b}{2}, b\right[$, ces deux rationnels étant alors nécessairement distincts.
Mais de la même manière, si on coupe $]a,b[$ en n petits intervalles[15] disjoints, on prouve alors que $]a,b[$ contient au moins n rationnels.
Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbf{N}$, on en déduit que $]a,b[$ contient une infinité de rationnels.

[15] De même longueur ou non.

Corollaire 12.15 (Densité de l'ensemble des irrationnels) – *L'ensemble* $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ *des nombres irrationnels est dense dans* $\mathbf{R}$.

Démonstration. Soit $]a,b[$ un intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}$. Alors $]a+\sqrt{2}, b+\sqrt{2}[$ n'est pas vide non plus, et donc par densité de $\mathbf{Q}$, contient au moins un nombre rationnel r.
Le réel $r - \sqrt{2}$ est alors irrationnel. En effet, s'il était rationnel, on aurait alors
$\sqrt{2} = \underbrace{-\left(r-\sqrt{2}\right)}_{\in \mathbf{Q}} + \underbrace{r}_{\in \mathbf{Q}} \in \mathbf{Q}$, ce qui est absurde.
Donc $r - \sqrt{2}$ est un irrationnel, qui se trouve précisément dans l'intervalle $]a,b[$.
Et donc ainsi, tout intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}$ contient au moins un irrationnel. □

Plus généralement
Le même raisonnement pourrait être tenu avec n'importe quel irrationnel (par exemple π^2), $\sqrt{2}$ n'est en rien plus important que les autres irrationnels (si ce n'est que son irrationalité est facile à prouver).

12.3 Droite numérique achevée

Définition 12.16 – On note $\overline{\mathbf{R}}$ l'ensemble défini par $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Pour l'instant $-\infty$ et $+\infty$ ne sont que deux symboles[16], auxquels on n'a donné aucune signification particulière. Tout juste sait-on que ce ne sont pas deux nombres réels.
On décide de prolonger la relation d'ordre usuelle à $\overline{\mathbf{R}}$ en décrétant que :

$$\forall x \in \overline{\mathbf{R}},\ -\infty \leqslant x \text{ et } \forall x \in \overline{\mathbf{R}},\ x \leqslant +\infty.$$

[16] Qui n'appartiennent pas à $\mathbf{R}$.

En particulier
$-\infty \leqslant +\infty$.

On a ainsi une relation d'ordre totale sur $\overline{\mathbf{R}}$, et on pourrait prouver[17] que toute partie non vide de $\overline{\mathbf{R}}$ (et donc également toute partie non vide de $\mathbf{R}$) possède une borne supérieure dans $\overline{\mathbf{R}}$.
En effet, si $A \subset \overline{\mathbf{R}}$ est non vide, distinguons trois cas cas :
▸ Si $A = \{-\infty\}$, alors $-\infty$ est l'unique majorant de A, et donc $\sup A = -\infty$.
▸ Si $+\infty \in A$, alors $+\infty$ est le seul majorant de A, donc égal à $\sup A$.
▸ Si $+\infty \notin A$ et $A \neq \{-\infty\}$. Alors $A \cap \mathbf{R}$ est une partie non vide de $\mathbf{R}$.
Soit elle est majorée, et donc possède une borne supérieure (pour la relation d'ordre de $\mathbf{R}$) $m \in \mathbf{R}$, qui est donc aussi le plus petit des majorants dans $\overline{\mathbf{R}}$ de A. Donc m est la borne supérieure de A pour la relation d'ordre sur $\overline{\mathbf{R}}$.
Soit elle n'est pas majorée dans $\mathbf{R}$, auquel cas $+\infty$ est le seul majorant (dans $\overline{\mathbf{R}}$) de A, et donc c'est la borne supérieure de A dans $\overline{\mathbf{R}}$.

[17] Mais c'est hors programme.

On prolonge également partiellement l'addition de $\mathbf{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ x + (-\infty) = -\infty,\ \forall x \in \mathbf{R},\ x + (+\infty) = +\infty,\ -\infty + (-\infty) = -\infty,\ +\infty + (+\infty) = +\infty.$$

Notons qu'on ne donne pas de valeur à la somme $+\infty + (-\infty)$, en cohérence avec le fait qu'il s'agit d'une forme indéterminée lorsqu'on manipule des limites.
De même, on étend partiellement le produit en posant :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ x \times (+\infty) = +\infty \text{ et } x \times (-\infty) = -\infty,\ \forall x \in \mathbf{R}_-^*,\ x \times (+\infty) = -\infty \text{ et } x \times (-\infty) = +\infty$$

et de même, $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) \times (+\infty) = -\infty$, $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$.
Notons que tout ceci et en accord avec les règles bien connues[18] sur les sommes et produits de limites. Nous ne donnons pas de valeur à $0 \times \pm\infty$, qui sont des formes indéterminées.

[18] Et bientôt prouvées.