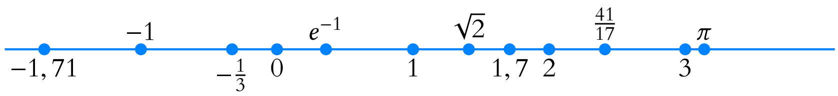
11

Nombres réels

Nous étudions dans ce chapitre quelques propriétés de l'ensemble des nombres réels. Mais au fait, qu'est-ce qu'un nombre réel ?
Les manipulant depuis quelques années, vous avez déjà une assez bonne idée de ce qu'est $\mathbf{R}$, ne serait-ce que géométriquement : c'est l'ensemble des abscisses des points d'une droite horizontale[1] :



Vous savez déjà que $\mathbf{R}$ est muni d'une addition, d'une multiplication, qu'il y a une relation d'ordre total sur $\mathbf{R}$, et qu'il y a certaines compatibilités entre ces différentes structures.
Par exemple la distributivité de l'addition par rapport au produit : $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ ou encore la sommation d'inégalités : $(a \leqslant b)$ **et** $(c \leqslant d) \Rightarrow a + c \leqslant b + d$.

Pourtant, il nous faudrait donner une définition rigoureuse de ce qu'est un nombre réel.
Un nombre naturel, c'est facile : $\mathbf{N}$ c'est l'ensemble des nombres que vous pouvez compter avec vos doigts[2] : $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Bien entendu ceci n'est pas très rigoureux, mais passons ceci sous silence.
Partant des entiers naturels, il est assez facile de construire l'ensemble des entiers relatifs : il suffit d'ajouter un signe (négatif ou positif) aux entiers naturels. Donc $\mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
Un nombre rationnel, ce n'est rien d'autre qu'un couple d'entiers relatifs : un numérateur et un dénominateur (forcément non nul). Il y a quelques précautions à prendre, puisque deux couples d'entiers peuvent représenter la même fraction, par exemple : $\dfrac{4}{11} = \dfrac{8}{22} = \dfrac{-12}{-33}$.

Donc jusqu'à $\mathbf{Q}$, tout va bien. Pourquoi vouloir alors faire plus ? Pourquoi ne pas travailler uniquement en manipulant des rationnels ?
Un des inconvénients de $\mathbf{Q}$, c'est qu'il n'existe pas de rationnel[3] dont le carré vaut 2.
Est-ce vraiment si problématique ? Par exemple, il n'existe pas de réel dont le carré vaut -1, et on arrive à s'en accommoder.
C'est un peu plus gênant pour $\sqrt{2}$, puisqu'il s'agit de la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1. Rester dans les rationnels, c'est donc s'interdire de mesurer la diagonale de ce carré (mais aussi le périmètre du cercle trigonométrique).

Nous ne rentrerons pas dans les détails[4] de la construction de $\mathbf{R}$, mais l'idée principale est qu'un nombre réel x «coupe en deux» l'ensemble des rationnels : il y a ceux qui sont plus petits que x et ceux qui sont plus grands que x.
Un nombre réel est alors une partition de $\mathbf{Q}$ en deux ensembles A et B tels que tout élément de A soit plus petit que tout élément de B.
Notons qu'il faut ruser un peu, et qu'on ne peut définir $\sqrt{2}$ comme étant la partition (A, B) où $A = \{x \in \mathbf{Q} \mid x < \sqrt{2}\}$, $B = \{x \in \mathbf{Q} \mid x \geqslant \sqrt{2}\}$: $\sqrt{2}$ ne peut pas être défini à partir de $\sqrt{2}$, on se mord la queue !
En revanche, cette même partition est définie par $A = \{x \in \mathbf{Q}, x \leqslant 0 \textbf{ ou } x^2 < 2\}$ et $B = \{x \in \mathbf{Q} \mid x > 0 \textbf{ et } x^2 \geqslant 2\}$.
Une fois les réels définis ainsi, il resterait à définir ce qu'est la somme de deux réels, ce qu'est leur produit, ce qu'est la relation d'ordre sur $\mathbf{R}$, et vérifier que toutes ces opérations ont bien les propriétés qu'on leur connaît. Tout ceci est fastidieux, et nous n'en dirons rien, et admettrons donc que $\mathbf{R}$ existe et possède bien les propriétés qu'on lui connaît déjà.

[1] Ou de toute droite non verticale.

[2] Plus éventuellement ceux d'autres personnes.

[3] Autrement dit, $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

[4] Non pas que ce soit inintéressant, mais c'est difficile et hors-programme.

Pour la culture

La construction de $\mathbf{R}$ proposée ici n'en est qu'une parmi d'autres possibles (bien qu'on montre que toutes jouissent bien des mêmes propriétés). Une autre très classique construit les nombres réels comme classes d'équivalence d'une relation d'équivalence définie sur un ensemble de suites à valeurs rationnelles.

11.1 La relation d'ordre sur R

11.1.1 Borne supérieure dans un ensemble ordonné

Définition 11.1 – Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné, soit $A \in \mathscr{P}(E)$, et soit $a \in E$.
On dit que a est :

- la **borne supérieure de** A si a est le plus petit des majorants de A. On note alors $a = \sup(A)$.
- la **borne inférieure de** A si a est le plus grand des minorants de A. On note alors $a = \inf(A)$.

Remarques. ► Pour le dire avec des quantificateurs : a est la borne supérieure de A si

$$a = \min\{x \in E \mid x \text{ majorant de } A\} = \min\{x \in E \mid \forall y \in A,\ y \leqslant x\}.$$

Ou encore

$$a = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A,\ x \leqslant a \ \textit{(c'est-à-dire a est un majorant de A)} \\ \forall x \in E,\ \underbrace{(\forall y \in A \Rightarrow y \leqslant x)}_{y \text{ majorant de } A} \Rightarrow a \leqslant x \ \textit{(c'est-à-dire a est plus petit que tout majorant de A)} \end{cases}.$$

► La terminologie le laisse penser, mais une telle borne supérieure, **si elle existe** est unique, car c'est le plus petit élément de l'ensemble des majorants, et qu'un tel plus petit élément est unique. Idem pour la borne inférieure.
► Une borne supérieure (resp. inférieure) ne peut exister que pour un ensemble majoré (resp. minoré) faute de quoi l'ensemble des majorants (resp. minorants) est vide, et donc ne contient pas de plus grand (resp. petit) élément.

Exemple 11.2

► Dans $(\mathbf{N}, |)$, $\sup\{2, 3\} = 6$. En effet, les majorants de $\{2, 3\}$ sont les nombres divisibles par 2 et par 3, donc les multiples de 6. Et donc si a est un majorant de $\{2, 3\}$, alors $6|a$.
► Une partie peut être majorée sans avoir de borne supérieure.
Par exemple dans l'ensemble ordonné $(\mathbf{R} \setminus \{1\})$, $A = [0, 1[$ est majoré (par 2 par exemple), mais ne possède pas de borne supérieure.
En effet, l'ensemble des majorants de A est $]1, +\infty[$, qui ne possède pas de plus petit élément.
Vous allez me dire que je l'ai un peu fait exprès, la borne supérieure de $[0, 1[$ devant être égale à 1. En effet, mais nous verrons bientôt que des exemples moins triviaux existent, par exemple dans $\mathbf{Q}$, $\{x \in \mathbf{Q} \mid x^2 \leqslant 2\}$ est majoré mais n'admet pas de borne supérieure.

Théorème 11.3 : *Si A possède un plus grand (resp. petit) élément, alors A possède une borne supérieure (resp. inférieure) et $\sup A = \max A$ (resp. $\inf A = \min A$).*

Démonstration. Par définition, $\max A$ est un majorant de A. Il s'agit donc de prouver que $\max A$ est le plus petit des majorants de A.
Soit donc M un majorant de A. Puisque $\max A \in A$, on a donc $\max A \leqslant M$.
Et donc $\max A$ est bien le plus petit des majorants de A : A possède une borne supérieure, qui est donc égale à $\max A$. □

Remarque. Inversement, il est aisé de constater que si $\sup(A)$ existe, et appartient à A, alors il s'agit d'un majorant de A, dans A, et donc du plus grand élément de A.

11.1.2 Bornes supérieures dans R

Sur $\mathbf{R}$ on dispose de la relation d'ordre $\leqslant$ usuelle.
Nous admettrons qu'on dispose alors de la propriété suivante[5] :

Théorème 11.4 : *Toute partie **non vide et majorée** de $\mathbf{R}$ admet une borne supérieure.*

Corollaire 11.5 – *Toute partie **non vide et minorée** de $\mathbf{R}$ admet une borne inférieure.*

Démonstration. Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbf{R}$, et soit $B = -A = \{-a,\ a \in A\}$. Alors B est non vide, et un réel m est un minorant de A, si et seulement si $-m$ est un majorant de B, donc B est majorée et possède une borne supérieure b.
Alors, si m est un minorant de A, $-m$ est un majorant de B, donc $-m \geqslant b$.
Et donc $m \leqslant -b$: $-b$ est le plus grand des minorants de A, c'est donc sa borne inférieure. □

Exemple 11.6 Q ne possède pas la propriété de la borne supérieure

Notons que cette propriété de la borne supérieure n'était pas vraie dans $\mathbf{Q}$. Par exemple, $A = \{x \in \mathbf{Q}^+ \mid x^2 \leqslant 2\}$ ne possède pas de borne supérieure **dans** $\mathbf{Q}$.
En effet, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $b \in \mathbf{Q}$ qui soit le plus petit des majorants de A.
Nous allons en fait construire un autre majorant de A, strictement plus petit que b.
Posons $c = \dfrac{b}{2} + \dfrac{1}{b}$, qui est encore un rationnel.
On a alors $c^2 - 2 = \dfrac{b^2}{4} + \dfrac{1}{b^2} - 1 = \left(\dfrac{b}{2} - \dfrac{1}{b}\right)^2 \geqslant 0$, on a $c^2 \geqslant 2$.
Donc pour tout $x \in A$, si $x^2 \leqslant 2 \leqslant c^2$, si bien que $x \leqslant c$.
Donc c est un majorant de A.
D'autre part $\left(\dfrac{2}{c}\right)^2 \leqslant 2$, donc $\dfrac{2}{c} \in A$, et donc $b \geqslant \dfrac{2}{c} \Leftrightarrow bc \geqslant 2 \Leftrightarrow \dfrac{b^2}{2} + 1 \geqslant 2 \Leftrightarrow b^2 \geqslant 2$.
Mais b^2 ne peut pas être égal à 2 (il n'y a pas de rationnel dont le carré serait égal à 2), donc $b^2 > 2 \Leftrightarrow c > \dfrac{2}{b} \Leftrightarrow c - \dfrac{2}{b} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{b}{2} - \dfrac{1}{b} > 0 \Leftrightarrow b - c > 0 \Leftrightarrow c < b$.
Donc c est un majorant de A, strictement inférieur à b, ce qui contredit la définition de borne supérieure.
Conclusion : A n'a pas de borne supérieure dans $\mathbf{Q}$.

Proposition 11.7 (Caractérisation «epsilonesque» de la borne supérieure) : *Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbf{R}$. Alors un réel m est la borne supérieure de A si et seulement si*

1. *m est un majorant de A*
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, m - \varepsilon < a \leqslant m$.

Remarque
Notons que l'inégalité $a \leqslant m$ découle directement du fait que m est un majorant de A.

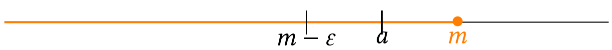


Figure 11.1 – L'idée est simple : un nombre strictement inférieur à m (qui est donc de la forme $m - \varepsilon$ pour un certain $\varepsilon > 0$) n'est plus un majorant de A.

Démonstration. Soit $m = \sup(A)$. Par définition m est un majorant[6] de A.
Soit alors $\varepsilon > 0$. Puisque $m - \varepsilon < m$, et que m est le plus petit des majorants de A, $m - \varepsilon$

[5] Qui fait cruellement défaut à $\mathbf{Q}$.

[6] C'est même le plus petit d'entre eux.

n'est plus un majorant de A.
Et donc il existe $a \in A$ tel que $m-\varepsilon < a$.
Pour la réciproque, supposons qu'on dispose d'un réel m satisfaisant aux deux conditions, et prouvons qu'il s'agit nécessairement de $\sup(A)$. Puisque m est un majorant $m \geqslant \sup(A)$. Raisonnons par l'absurde, et supposons que $m > \sup(A)$. Soit alors $\varepsilon = m - \sup(A) > 0$. Alors il existe $a \in A$ tel que

$$m-\varepsilon < a \leqslant m \Leftrightarrow \sup(A) < a \leqslant m.$$

Ceci contredit le fait que $\sup(A)$ soit un majorant de A.
Donc $m = \sup(A)$. □

Sur le même principe[7], on prouve que :

[7] En changeant le sens des inégalités.

Proposition 11.8 : *Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbf{R}$. Alors un réel m est la borne inférieure de A si et seulement si :*

1. *m est un minorant de A*
2. *$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A,\ m \leqslant a < m+\varepsilon$.*

Exemple 11.9

Avec ces caractérisations, il est facile[8] de constater que $[0,1[$ possède 1 comme borne supérieure : soit $\varepsilon > 0$.

[8] Mais en réalité, ce n'était pas très dur non plus en se servant de la définition (plus petit des majorants).

► Si $\varepsilon \geqslant 1$, alors $1-\varepsilon \leqslant 0$, et donc il existe bien $x \in [0,1[$, par exemple $x = \dfrac{1}{2}$ tel que $1-\varepsilon < x \leqslant 1$.
► Si $\varepsilon < 1$, soit $x = 1 - \dfrac{\varepsilon}{2}$. Alors $x \in [0,1[$, et $1-\varepsilon < x \leqslant 1$.
Donc $1 = \sup[0,1[$.

Exemple 11.10

Soit $A = \left\{3 - \frac{2}{n^2},\ n \in \mathbf{N}^*\right\}$.
Alors A est une partie non vide et majorée[9] de $\mathbf{R}$, donc elle admet une borne supérieure.

[9] Par 3.

Prouvons que $\sup A = 3$. Nous venons de dire que 3 est un majorant de A.
Soit à présent $\varepsilon > 0$. Prouvons que $2-\varepsilon$ n'est pas un majorant de A.
Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on a $3 - \dfrac{2}{n^2} > 3 - \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon > \dfrac{2}{n^2} \Leftrightarrow n^2 > \dfrac{2}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}}$.
Donc si on note $n_0 = \left\lceil \sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}} \right\rceil$, alors $3 - \dfrac{2}{n_0^2} > 3 - \varepsilon$.
Donc nous venons de prouver que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que $3 - \varepsilon < a \leqslant 3$.
C'est bien la caractérisation de $\sup A = 3$.

11.1.3 Propriété d'Archimède

Histoire
L'énoncé originel d'Archimède est assez parlant : «Pour deux grandeurs inégales, il existe toujours un multiple entier de la plus petite, supérieur à la plus grande.»

Proposition 11.11 : *L'ensemble $\mathbf{R}$ est archimédien, ce qui signifie que*

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \forall y \in \mathbf{R}, \exists n \in \mathbf{N},\ nx \geqslant y.$$

Démonstration. Soit $x > 0$. Il s'agit donc de prouver que $A_x = \{nx,\ n \in \mathbf{N}\}$ n'est pas un ensemble majoré.
En effet, dire que A_x n'est pas majoré signifie qu'il n'admet pas de majorant, soit encore que pour tout $y \in \mathbf{R}$, y n'est pas un majorant de A_x.
Soit encore : $\forall y \in \mathbf{R}, \exists u \in A_x, u \geqslant y$.

Et donc $\forall y \in \mathbf{R}$, $\exists n \in \mathbf{N}$, $nx \geqslant y$. Raisonnons par l'absurde, et supposons A_x majoré. Alors A_x admet une borne supérieure $a > 0$. Donc pour $n \in \mathbf{N}$, $nx \leqslant a$. Mais aussi $(n+1)x \leqslant a$. Soit encore $nx \leqslant a - x$. Ceci étant vrai pour tout n, $a - x$ est donc également un majorant de A_x, ce qui contredit la définition de borne supérieure.
Ainsi, A_x n'est pas majoré : pour tout $y \in \mathbf{R}$, $\exists n \in \mathbf{N}$, $nx \geqslant y$. □

Plus loin — L'énoncé qui se profile en filigrane ici est bien connu : une suite géométrique de raison strictement plus grande que 1 prend des valeurs arbitrairement grandes, ce qui voudra bientôt dire qu'elle tend vers $+\infty$.

Corollaire 11.12 – *Soit $x > 1$. Alors $\forall y \in \mathbf{R}$, $\exists n \in \mathbf{N}$, $x^n \geqslant y$.*

Démonstration. Puisque $x > 1$, en posant $h = x - 1$, on a $h > 0$. Et donc par la formule du binôme, $\forall n \in \mathbf{N}$,

$$x^n = (1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k \geqslant 1 + nh.$$

Mais pour $y \in \mathbf{R}$ il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $nh \geqslant y - 1$, et donc $x^n \geqslant y$. □

Remarque. On pourrait sûrement s'en tirer bien plus facilement à l'aide de logarithmes et d'exponentielles, en remarquant que $x^n \geqslant y \Leftrightarrow n \ln x \geqslant \ln y$, et utiliser ensuite le fait que $\mathbf{R}$ est archimédien et $\ln x > 0$.
C'est vrai. Mais en réalité, nous sommes en train de reprouver les fondements de l'analyse, et il est fort probable que la définition et/ou les propriétés de l'exponentielle et du logarithme dépendent en fait de cette propriété qui a toujours du vous sembler évidente et à propos de laquelle vous ne vous étiez jamais questionné.

Nous sommes alors désormais en mesure de justifier la définition de la partie entière, dont nous avions admis précédemment qu'elle était bien définie.

Corollaire 11.13 – *Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors il existe un unique entier relatif n tel que $n \leqslant x < n+1$. On note alors $n = \lfloor x \rfloor$.*

Démonstration. Soit $A = \{k \in \mathbf{Z},\ k \leqslant x\}$.
S'il existe $n \in \mathbf{Z}$ tel que $n \leqslant x < n+1$, alors c'est nécessairement le plus grand élément de A.
En effet, supposons par l'absurde qu'il existe $n' \in A$ tel que $n' > n$.
Alors $n' - n \geqslant 1 \Leftrightarrow n + 1 \leqslant n'$. Et donc $n + 1 \leqslant n' \leqslant x$, ce qui est absurde.
Puisqu'un plus grand élément, quand il existe, est unique, cela prouve qu'il existe au plus un seul tel n.
Passons à présent à l'existence. Nous allons prouver que A est une partie non vide et majorée de $\mathbf{Z}$, elle aura alors automatiquement un plus grand élément.
▶ Si $x > 0$, $0 \in A$, qui est donc non vide. Et $\mathbf{R}$ étant archimédien, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geqslant x$. Et alors un tel n majore tous les éléments de A.
▶ Si $x \leqslant 0$, alors 0 majore A, et il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geqslant -x \Leftrightarrow -n \leqslant x$, de sorte que $-n \in A$, et donc A est non vide. Dans les deux cas, A est non vide et majorée, et donc admet un plus grand élément n, qui est donc tel que $n \leqslant x < n+1$ (car $n + 1 \notin A$).
□

Remarque — Bien qu'il semble absolument évident que A soit majoré, essayez de le prouver sans utiliser la partie entière (et donc sans aucun argument du type «l'entier juste après ...»), vous allez voir que ce n'est finalement pas si simple...

Notons que ceci ne fait que justifier la définition de la partie entière, mais que ça ne change en rien ses propriétés étudiées plus tôt dans l'année.
Sur le même principe, on pourrait prouver que pour tout réel x, il existe un unique entier n tel que $n - 1 < x \leqslant n$, ce réel étant noté $\lceil x \rceil$. Nous ne l'utiliserons en pratique jamais.

11.1.4 Intervalles de R

Revenons à présent sur un résultat admis en début d'année : la classification des intervalles de $\mathbf{R}$. On rappelle qu'un intervalle de $\mathbf{R}$ est une partie I de $\mathbf{R}$ telle que

$$\forall (x,y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow [x,y] \subset I$$

où l'on note $[x,y] = \{t \in \mathbf{R} \mid x \leqslant t \leqslant y\}$.
Encore plus simple si et seulement si $\forall (x,y) \in I^2$, $[x,y] \subset I$.
En effet, si $x > y$, $[x,y] = \{t \in \mathbf{R} \mid x \leqslant t \leqslant y\} = \emptyset$.

Dans la suite, on considère un intervalle **non vide**[10] I et $x \in I$.

[10] Il ne vous aura pas échappé que $\emptyset$ satisfait la définition d'intervalle.

- si I n'est pas majoré, alors pour tout $y \geqslant x$, $\exists a \in I, a \geqslant y$.
  Donc $y \in [x, a] \subset I$, et donc $y \in I$. Par conséquent[11], $[x, +\infty[\subset I$.
- si I est majoré, il possède une borne supérieure b. Par définition d'une borne supérieure il est clair que $I \cap]b, +\infty[= \emptyset$. Distinguons encore deux cas.
  — si $b \in I$, c'est-à-dire si I possède un plus grand élément. Alors $[x, b] \subset I$. Donc $I \cap [x, +\infty[= \underbrace{(I \cap [x, b])}_{=[x,b]} \cup \underbrace{(I \cap]b, +\infty[)}_{=\emptyset} = [x, b]$.
  — si $b \notin I$, alors pour tout $y \in [x, b[$, il existe $t \in I$ tel que $t > y$. Et donc $[x, t] \subset I$, de sorte que $y \in [x, t] \subset I$.
  Ainsi, $[x, b[\subset I$, et donc $I \cap [x, +\infty[= [x, b[$.

Le même type de raisonnement avec des bornes inférieures prouve que $I \cap]-\infty, x]$ est soit égal à $]-\infty, x]$ tout entier, soit à $]a, x]$, soit à $[a, x]$, où a désigne l'éventuelle[12] borne inférieure de I.
Et donc $I = (I \cap]-\infty, x]) \cup (I \cap [x, +\infty[)$ est de l'une des formes suivantes :

$$\mathbf{R},]-\infty, b],]-\infty, b[,]a, b[,]a, b], [a, b], [a, b[,]a, +\infty[, [a, +\infty[.$$

[11] Car ce qui précède est vrai pour tout $y \geqslant x$.

[12] I.e. quand elle existe.

		I majoré, $b = \sup I$		I non majoré
		$b \in I$	$b \notin I$	
I minoré	$a \in I$	$[a, b]$	$[a, b[$	$[a, +\infty[$
$a = \inf I$	$a \notin I$	$]a, b]$	$]a, b[$	$]a, +\infty[$
I non minoré		$]-\infty, b]$	$]-\infty, b[$	$\mathbf{R}$

11.2 Approximations d'un réel

Proposition 11.14 : *Soit $x \in \mathbf{R}$ et soit $n \in \mathbf{N}$. On appelle approximation décimale de x par défaut à 10^{-n} près le nombre $r_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.*
On a alors $r_n \leqslant x < r_n + \dfrac{1}{10^n}$.

Démonstration. Immédiat d'après les propriétés de la partie entière puisque $10^n r_n \leqslant 10^n x < 10^n r_n + 1$. □

Ne nous attardons pas là-dessus, vous savez très bien ce que ça signifie. Notons simplement que $r_n + \dfrac{1}{10^n}$ est l'approximation par excès à 10^{-n} près.

11.2.1 Parties denses

Proposition 11.15 : *Soit A une partie de $\mathbf{R}$. Alors il y a équivalence entre :*
i) tout intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}$ contient un élément de A
ii) entre deux réels distincts, il y a un élément de A. Soit encore

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, (x < y) \Rightarrow (\exists a \in A, x \leqslant a \leqslant y).$$

*Une partie A de $\mathbf{R}$ qui a ces propriétés est dite **dense** dans $\mathbf{R}$.*

Démonstration. Soit $A \in \mathbf{R}$. Si $i)$ est vérifiée, soient alors $x < y$ deux réels. Alors l'intervalle ouvert $]x, y[$ contient au moins un élément de A.

Supposons à présent que $ii)$ est vérifiée, et soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}$. Soient alors $x < y$ deux éléments de I. Alors il existe un élément a de A dans $[x, y]$. Mais I étant un intervalle, $[x, y] \subset I$, et donc $a \in I$. □

Remarque
Notons qu'un intervalle ouvert de I ne peut pas être réduit à un point. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle on travaille ici avec des intervalles **ouverts**.
En effet, les singletons sont des intervalles (non ouverts) qui contiennent un seul élément (mais ce sont les seuls, avec l'ensemble vide, à ne pas contenir une infinité d'éléments).

Exemple 11.16

On rappelle qu'un nombre décimal est un nombre de la forme $\frac{n}{10^k}$, $(n,k) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$.
L'ensemble des nombres décimaux est dense dans $\mathbf{R}$. En effet, soit $I =]a,b[$ un intervalle ouvert avec $a < b$.
Notons alors $\ell = b - a$ la longueur de I et soit $n = \lfloor \log_{10} \ell \rfloor - 1 \in \mathbf{Z}$.
Soit alors $d = 10^n (\lfloor 10^{-n}a \rfloor + 1)$, qui est un nombre décimal. Montrons qu'il est dans $]a,b[$.
Par définition de la partie entière, on a $10^{-n}a - 1 < \lfloor 10^{-n}a \rfloor \leqslant 10^{-n}a$ et donc

$$10^{-n}a < \lfloor 10^{-n}a \rfloor + 1 \leqslant 10^{-n}a + 1 \Rightarrow a < d \leqslant a + 10^n.$$

Mais $n + 1 \leqslant \log_{10} \ell \Rightarrow n \leqslant \log_{10} \ell - 1 \Rightarrow 10^n \leqslant \frac{\ell}{10} < \ell$.
Et donc $d < a + \ell = a + b - a = b$.
Nous avons donc bien prouvé que $d \in [a,b]$.

Intuition — d est l'approximation décimale **par excès** de a à 10^{-n} près, l'idée étant que pour n suffisamment grand, d est bien dans $]a,b[$.

Proposition 11.17 (Densité de Q) : *L'ensemble $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels est dense dans $\mathbf{R}$.*

Démonstration. Nous venons de prouver que l'ensemble $\mathbf{D}$ des décimaux est dense dans $\mathbf{R}$.
Mais $\mathbf{D}$ est inclus dans $\mathbf{Q}$.
Et donc dans tout intervalle ouvert non vide se trouve au moins un décimal, et donc au moins un rationnel. □

Ceci signifie qu'il y a vraiment des rationnels partout : entre deux réels distincts se trouve toujours au moins un rationnel.
Mieux : entre deux réels a et b, avec $a < b$ se trouvent toujours au moins deux rationnels.
En effet, il y en a au moins un dans $\left]a, \frac{a+b}{2}\right[$ et au moins un dans $\left]\frac{a+b}{2}, b\right[$, ces deux rationnels étant alors nécessairement distincts.
Mais de la même manière, si on coupe $]a,b[$ en n petits intervalles[13] disjoints, on prouve alors que $]a,b[$ contient au moins n rationnels.
Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbf{N}$, on en déduit que $]a,b[$ contient une infinité de rationnels.

[13] De même longueur ou non.

Corollaire 11.18 (Densité de l'ensemble des irrationnels) – *L'ensemble $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ des nombres irrationnels est dense dans $\mathbf{R}$.*

Démonstration. Soit $]a,b[$ un intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}$. Alors $]a+\sqrt{2}, b+\sqrt{2}[$ n'est pas vide non plus, et donc par densité de $\mathbf{Q}$, contient au moins un nombre rationnel r.
Le réel $r - \sqrt{2}$ est alors irrationnel. En effet, s'il était rationnel, on aurait alors
$\sqrt{2} = \underbrace{-\left(r - \sqrt{2}\right)}_{\in \mathbf{Q}} + \underbrace{r}_{\in \mathbf{Q}} \in \mathbf{Q}$, ce qui est absurde.
Donc $r - \sqrt{2}$ est un irrationnel, qui se trouve précisément dans l'intervalle $]a,b[$.
Et donc ainsi, tout intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}$ contient au moins un irrationnel. □

Plus généralement — Le même raisonnement pourrait être tenu avec n'importe quel irrationnel (par exemple π^2), $\sqrt{2}$ n'est en rien plus important que les autres irrationnels (si ce n'est que son irrationalité est facile à prouver).

11.3 Droite numérique achevée

Définition 11.19 – On note $\overline{\mathbf{R}}$ l'ensemble défini par $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Pour l'instant $-\infty$ et $+\infty$ ne sont que deux symboles, auxquels on n'a donné aucune signification particulière. Tout juste sait-on que ce ne sont pas deux nombres réels.
On décide de prolonger la relation d'ordre usuelle à $\overline{\mathbf{R}}$ en décrétant que :

$$\forall x \in \overline{\mathbf{R}},\ -\infty \leqslant x \text{ et } \forall x \in \overline{\mathbf{R}},\ x \leqslant +\infty.$$

En particulier — $-\infty \leqslant +\infty$.

On a ainsi une relation d'ordre totale sur $\overline{\mathbf{R}}$, et on pourrait prouver[14] que toute partie non vide de $\overline{\mathbf{R}}$ (et donc également toute partie non vide de $\mathbf{R}$) possède une borne supérieure dans $\overline{\mathbf{R}}$.
En effet, si $A \subset \overline{\mathbf{R}}$ est non vide. Si $+\infty \in A$, alors $+\infty$ est le seul majorant de A, donc égal à $\sup A$.
Si $+\infty \notin A$, alors $A \cap \mathbf{R}_+$ est une partie non vide de $\mathbf{R}$.
Soit elle est majorée, et donc possède une borne supérieure (pour la relation d'ordre de $\mathbf{R}$) $m \in \mathbf{R}$, qui est donc aussi le plus petit des majorants dans $\overline{\mathbf{R}}$ de A. Donc m est la borne supérieure de A pour la relation d'ordre sur $\overline{\mathbf{R}}$.
Soit elle n'est pas majorée dans $\mathbf{R}$, auquel cas $+\infty$ est le seul majorant (dans $\overline{\mathbf{R}}$) de A, et donc c'est la borne supérieure de A dans $\mathbf{R}$.

[14] Mais c'est hors programme.

On prolonge également partiellement l'addition de $\mathbf{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ x + (-\infty) = -\infty,\ \forall x \in \mathbf{R},\ x + (+\infty) = +\infty,\ -\infty + (-\infty) = -\infty,\ +\infty + (+\infty) = +\infty.$$

Notons qu'on ne donne pas de valeur à la somme $+\infty + (-\infty)$, en cohérence avec le fait qu'il s'agit d'une forme indéterminée lorsqu'on manipule des limites.
De même, on étend partiellement le produit en posant :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ x \times (+\infty) = +\infty \text{ et } x \times (-\infty) = -\infty,\ \forall x \in \mathbf{R}_-^*,\ x \times (+\infty) = -\infty \text{ et } x \times (-\infty) = +\infty$$

et de même,

$$(+\infty) \times (+\infty) = +\infty, (-\infty) \times (+\infty) = -\infty,\ (-\infty) \times (-\infty) = +\infty.$$

Notons que tout ceci et en accord avec les règles bien connues[15] sur les sommes et produits de limites. Nous ne donnons pas de valeur à $0 \times \pm\infty$, qui sont des formes indéterminées.

[15] Et bientôt prouvées.

On peut alors étendre la notion d'intervalle de $\mathbf{R}$ de la manière suivante :

Définition 11.20 – Une partie $I \subset \overline{\mathbf{R}}$ est un intervalle de $\overline{\mathbf{R}}$ si

$$\forall (x, y) \in I^2,\ [x, y] = \{t \in \overline{\mathbf{R}} \mid x \leqslant t \leqslant y\} \subset I.$$

Exemple 11.21

$[0, 1[$, $]1, +\infty[$ et $[1, +\infty]$ sont des intervalles de $\overline{\mathbf{R}}$.

Proposition 11.22 : *Soit I un intervalle de $\overline{\mathbf{R}}$. Alors il est de l'une des formes $]a, b]$, $]a, b[$, $[a, b]$ ou $[a, b[$ où $a = \inf I$ et $b = \sup I$, ces bornes supérieures et inférieures étant prises dans $\overline{\mathbf{R}}$ (où elles existent toujours).*

Démonstration. Notons donc $a = \inf I$ et $b = \sup I$. Alors :

- Si $a \in I$ et $b \in I$. Alors pour tout $x \in I$, on a $a \leqslant x \leqslant b$, et donc $[a, b] \subset I$.
  Inversement, soit $x \in I$. Alors $x \leqslant a$, car a majore I, et $x \geqslant b$ car b minore I, donc $x \in [a, b]$.
  Ainsi, $I \subset [a, b]$, et donc $I = [a, b]$.
- Si $a \in I$ et $b \notin I$. Montrons alors que $I = [a, b[$.
  Si $x \in I$, alors $x \geqslant a$ (car a minore I) et $x \leqslant b$. Puisque de plus $x \neq b$, on a $x < b$. Et donc $x \in [a, b[$.
  Inversement, soit $x \in [a, b[$. Alors il existe $x' \in I$ tel que $x < x' < b$, faute de quoi x serait le plus grand élément de I, qui n'existe pas puisque $b \notin I$.
  Et donc $a \leqslant x \leqslant x'$, de sorte que $x \in [a, x'] \subset I$ car I est un intervalle.
  Par double inclusion, on a donc $I = [a, b[$.
- Les deux autres cas se traitent de la même manière.

□

Il est alors facile de retrouver la liste des intervalles de $\mathbf{R}$: si I est un intervalle de $\mathbf{R}$, alors c'est aussi un intervalle de $\overline{\mathbf{R}}$.
Donc de l'une des formes indiquées précédemment. Il suffit alors de remarquer que $I = I \cap \mathbf{R}$ pour retrouver les neuf types d'intervalles de $\mathbf{R}$.