

# ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

## LINÉAIRES ET SUITES RÉCURRENTES

### LINÉAIRES

#### EXEMPLE INTRODUCTIF : LE CIRCUIT RC

Un circuit RC est un circuit formé d'un résistor de résistance  $R$  et d'un condensateur de capacité  $C$  montés en série.

On ajoute un générateur de courant délivrant une tension sinusoïdale  $E \cos(\omega t)$ .

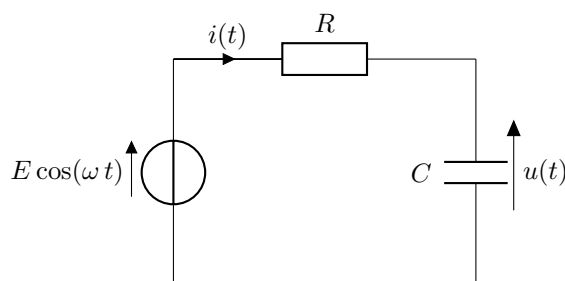
Sachant que le condensateur est déchargé à l'instant initial ( $t = 0$ ), peut-on décrire l'évolution de la tension  $u(t)$  aux bornes du condensateur ?

La loi des mailles nous donne alors  $u(t) + Ri(t) = E \cos(\omega t)$ .

Mais aux bornes du condensateur, on a  $i(t) = C \frac{du}{dt} = Cu'(t)$ .

Et donc la tension  $u$  satisfait à l'équation  $RCu'(t) + u(t) = E \cos(\omega t)$ .

Cette équation suffit-elle à déterminer totalement l'évolution de  $u$  au cours du temps ?



Dans tout le chapitre, en l'absence de précisions,  $\mathbf{K}$  désigne indifféremment  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ , et  $I$  est un intervalle de  $\mathbf{R}$ .

## 10.1 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES D'ORDRE 1

### 10.1.1 Définition

**Définition 10.1** – Soient  $a$  et  $b$  deux fonctions continues sur  $I$ , à valeurs dans  $\mathbf{K}$ . Résoudre l'équation différentielle  $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ , c'est trouver toutes les fonctions  $y : I \rightarrow \mathbf{K}$ , dérivables, et telles que

$$\forall t \in I, y'(t) + a(t)y(t) = b(t).$$

On parle alors d'équation différentielle linéaire du premier ordre.

*Remarques.* ► L'équation différentielle est dite linéaire, car elle ne fait intervenir que  $y'(t)$  et  $y(t)$ , et pas leurs puissances, ou leur exponentielle, ni quoi que ce soit d'autre.

Par exemple,  $y'(t)^2 + e^{y(t)}t^2 = \ln(t)$  est une équation différentielle, mais qui n'est pas linéaire<sup>1</sup>.

Et elle est dite du premier ordre car elle ne fait intervenir que la dérivée première de  $y$  ( $y'$ ) et pas ses dérivées secondes, troisièmes, etc.

► Une solution de  $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$  n'est pas seulement dérivable : elle est en plus  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ . En effet, on a alors  $y'(t) = b(t) - a(t)y(t)$ , qui est continue car somme de fonctions continues.

#### Abbréviation

On abrège «équation différentielle linéaire du premier ordre» en «EDL<sub>1</sub>».

<sup>1</sup> Vous reparlerez davantage de ce type d'équations en seconde année.

**Exemple 10.2**

$y'(t) - 2ty(t) = t^3$  est une équation différentielle linéaire du premier ordre.

On note généralement les équations sous forme condensée :  $y' - 2ty = t^3$ , où il est alors sous-entendu que  $y$  est une fonction, et que  $t$  est la variable dont dépend la fonction.

Bien entendu, cette équation se note également  $y' - 2xy = x^3$ .

On rencontre souvent des équations sous la forme  $c(t)y'(t) + d(t)y(t) = e(t)$  ( $E$ ).

Dans ce cas, on se ramène à une équation de la forme précédente en divisant par  $c(t)$ , ce qui nécessite de se placer sur un intervalle sur lequel  $c$  ne s'annule pas.

Sur un tel intervalle ( $E$ ) est alors équivalente<sup>2</sup> à l'équation  $y'(t) + \frac{d(t)}{c(t)}y(t) = \frac{e(t)}{c(t)}$ .

On parle alors de la **forme normalisée** de l'équation ( $E$ ).

<sup>2</sup> C'est-à-dire possède même ensemble de solutions.

**Exemple 10.3**

Considérons l'équation  $ty'(t) - y(t) = \frac{1}{t}$ .

Sur chacun des intervalles  $\mathbf{R}_-$  et  $\mathbf{R}_+$ , sur lesquels  $t$  ne s'annule pas, elle est équivalente

$$\text{à } y'(t) - \frac{1}{t}y(t) = \frac{1}{t^2}.$$

**Définition 10.4** – Lorsque la fonction  $b$  est la fonction nulle, on dit que l'équation  $y'(t) + a(t)y(t) = 0$  est une **équation homogène**.

Et de manière générale, si ( $E$ ) :  $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$  est une équation différentielle linéaire du premier ordre, on dit que l'équation  $y'(t) + a(t)y(t) = 0$  est l'**équation homogène associée** à ( $E$ ). Dans la suite, nous la noterons généralement ( $E_0$ ).

**10.1.2 Structure de l'ensemble des solutions**

Soit ( $E$ ) :  $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$  une équation différentielle linéaire du premier ordre, et soit ( $E_0$ ) l'équation homogène associée.

Notons  $\mathcal{S} = \{y \in \mathcal{D}(I, \mathbf{K}) : \forall t \in I, y'(t) + a(t)y(t) = b(t)\}$  l'ensemble des solutions de ( $E$ ) et de même, notons  $\mathcal{S}_H$  l'ensemble des solutions de l'équation homogène ( $E_0$ ).

**Proposition 10.5** : L'ensemble  $\mathcal{S}_H$  contient la fonction nulle, et il est stable par combinaisons linéaires. Cela signifie que pour tout  $(u, v) \in \mathcal{S}_H^2$  et pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$ ,  $\lambda u + \mu v \in \mathcal{S}_H$ .

*Démonstration.* Il est clair que la fonction nulle est dérivable, et que si on la note  $f$ , alors pour tout  $t \in I$ ,  $f'(t) + a(t)f(t) = 0 + 0 = 0$ , donc  $f \in \mathcal{S}_H$ .

Soient  $u, v \in \mathcal{S}_H$ , et soient  $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ . Alors  $\lambda u + \mu v$  est dérivable sur  $I$  car somme de fonctions dérivables, et pour tout  $t \in I$ ,

$$\begin{aligned} (\lambda u + \mu v)'(t) + a(t)(\lambda u(t) + \mu v(t)) &= \lambda u'(t) + \mu v'(t) + \lambda a(t)u(t) + \mu a(t)v(t) \\ &= \lambda \underbrace{(u'(t) + a(t)u(t))}_{=0} + \mu \underbrace{(v'(t) + a(t)v(t))}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

Et donc  $\lambda u + \mu v$  est dans  $\mathcal{S}_H$ . □

**Proposition 10.6** : Soit  $y_p \in \mathcal{S}$  une solution de l'équation . Alors une fonction  $y \in \mathcal{D}(I, \mathbf{K})$  est solution de ( $E$ ) si et seulement si  $y - y_p \in \mathcal{S}_H$ , c'est-à-dire est solution de ( $E_0$ ).

Ainsi, on a  $\mathcal{S} = \{y_p + y_H, y_H \in \mathcal{S}_H\}$ .

**Notation**

La notation sera en fait introduite plus tard, mais  $\mathcal{D}(I, \mathbf{K})$  désigne l'ensemble des fonctions dérivables sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbf{K}$ .

**Terminologie**

On dit alors que  $y_p$  est une solution particulière de  $\mathcal{S}$ , raison pour laquelle on la note  $y_p$ .

Démonstration. Soit  $y \in \mathcal{D}(I, \mathbf{R})$ . Alors pour tout  $t \in I$ , on a

$$\begin{aligned} (y - y_p)'(t) + a(t)(y - y_p)(t) &= y'(t) - y_p'(t) + a(t)y(t) - a(t)y_p'(t) \\ &= y'(t) + a(t)y(t) - (y_p'(t) + a(t)y_p(t)) = y'(t) + a(t)y(t) - b(t). \end{aligned}$$

Et donc on a  $y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \Leftrightarrow (y - y_p)'(t) + a(t)(y - y_p)(t) = 0$ .

Et donc  $y \in \mathcal{S} \Leftrightarrow y - y_p \in \mathcal{S}_H$ .

Soit encore si et seulement si il existe  $y_H \in \mathcal{S}_H$  tel que  $y - y_p = y_H \Leftrightarrow y = y_p + y_H$ .

Et donc  $\mathcal{S} = \{y_p + y_H, y_H \in \mathcal{S}_H\}$ . □

Ce résultat est très important, puisqu'il nous dit que pour connaître toutes les solutions de (E), il suffit d'en trouver une seule<sup>3</sup>, et de connaître toutes les solutions de (E<sub>0</sub>).

<sup>3</sup> Qu'on appellera donc une «solution particulière».

### 10.1.3 Le principe de superposition

Lorsque le second membre se présente sous forme d'une somme de deux termes, on peut se contenter de résoudre deux équations plus simples :

**Proposition 10.7 :** Soient  $b_1$  et  $b_2$  deux fonctions continues sur  $I$ . Soit  $y_1$  une solution de (E<sub>1</sub>) :  $y'(t) + a(t)y(t) = b_1(t)$  et soit  $y_2$  une solution de (E<sub>2</sub>) :  $y'(t) + a(t)y(t) = b_2(t)$ . Alors pour tous  $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$ ,  $\lambda y_1 + \mu y_2$  est solution de  $y'(t) + a(t)y(t) = \lambda b_1(t) + \mu b_2(t)$ .

Démonstration. C'est un simple calcul : pour  $t \in I$ ,

$$(\lambda y_1 + \mu y_2)'(t) + a(t)(\lambda y_1(t) + \mu y_2(t)) = \lambda(y_1'(t) + a(t)y_1(t)) + \mu(y_2'(t) + a(t)y_2(t)) = \lambda b_1(t) + \mu b_2(t).$$

□

### 10.1.4 Solutions de l'équation homogène

**Proposition 10.8 :** Soit (E<sub>0</sub>) :  $y'(t) + a(t)y(t) = 0$  une équation différentielle linéaire homogène, et soit  $A$  une primitive de  $a$  sur  $I$ . Alors les solutions de (E<sub>0</sub>) sont les fonctions de la forme  $t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$ ,  $\lambda \in \mathbf{K}$ .

Démonstration. Commençons par prouver que les fonctions de la forme  $y_\lambda : t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$ ,  $\lambda \in \mathbf{K}$  sont solutions de (E<sub>0</sub>).

On a alors pour tout  $t \in I$ ,  $y'_\lambda(t) = -\lambda a(t)e^{-A(t)}$ , de sorte que

$$y'_\lambda(t) + a(t)y_\lambda(t) = -\lambda a(t)e^{-A(t)} + \lambda a(t)e^{-A(t)} = 0.$$

Inversement, soit  $y$  une solution de (E<sub>0</sub>), de sorte que  $y'(t) = -a(t)y(t)$  et soit  $z : t \mapsto y(t)e^{A(t)}$ . Alors  $z$  est dérivable sur  $I$ , et  $\forall t \in I$ ,

$$z'(t) = y'(t)e^{A(t)} + y(t)a(t)e^{A(t)} = e^{A(t)}(y'(t) + a(t)y(t)) = 0.$$

Et donc  $z$  est constante sur  $I$  : il existe  $\lambda \in \mathbf{K}$  tel que pour tout  $t \in I$ ,

$$y(t)e^{A(t)} = \lambda \Leftrightarrow y(t) = \lambda e^{-A(t)}.$$

Et donc toutes les solutions de (E<sub>0</sub>) sont bien de la forme annoncée. □

Remarque. Notons qu'un bon moyen de se souvenir du résultat, est de remarquer que l'équation  $y'(t) + a(t)y(t) = 0$  peut également se mettre sous la forme  $\frac{y'(t)}{y(t)} = -a(t)$ .

Mais nous reconnaissons là la dérivée de  $t \mapsto \ln(y(t))$ . Donc  $\ln(y)$  est une primitive de  $-a$ , de sorte qu'il existe  $C \in \mathbf{K}$  tel que  $\ln(y(t)) = -A(t) + C$ .

Et donc  $y(t) = e^{-A(t)+C} = \underbrace{e^C}_{=\lambda} e^{-A(t)}$ .

Ce raisonnement manque tout de même cruellement de rigueur<sup>4</sup> ! En effet, pour diviser par  $y(t)$ , encore faudrait-il s'assurer que  $y$  ne s'annule pas.

Et il faudrait une valeur absolue dans le ln. Et que dire du cas où  $y$  est à valeurs complexes ?

#### Nbe. de solutions

Une équation homogène possède donc toujours une infinité de solutions.

#### Raisonnement

Attention : à ce stade, nous avons prouvé que toutes les fonctions de la forme annoncée sont solutions, mais rien n'exclut qu'il y ait d'autres solutions.

<sup>4</sup> Et n'est donc en aucun cas une preuve, tout au plus un moyen de retrouver rapidement le résultat si vous l'avez oublié.

## Exemples 10.9

► Équations à coefficients constants<sup>5</sup>

Soit  $a \in \mathbf{R}^*$ , et soit l'équation différentielle  $(E_a) : y' + ay = 0$ . Alors ses solutions sont les  $x \mapsto \lambda e^{-ax}$ ,  $\lambda \in \mathbf{K}$ .

►  $y' - \frac{1}{t}y = 0$ , sur  $I = \mathbf{R}_+^*$  ou  $I = \mathbf{R}_-^*$ .

Ici,  $a(t) = -\frac{1}{t}$ , de sorte qu'on peut prendre  $A(t) = -\ln(|t|)$ , et donc les solutions sont les  $t \mapsto \lambda e^{-A(t)} = \lambda|t|$ ,  $\lambda \in \mathbf{K}$ .

Mais si  $I = \mathbf{R}_+^*$ , alors  $|t| = t$ .

Et si  $I = \mathbf{R}_-^*$ , alors  $|t| = -t$ , et donc quitte à changer  $\lambda$  en son opposé, les solutions sont donc les  $t \mapsto \lambda t$ ,  $\lambda \in \mathbf{K}$ .

►  $y' - \frac{1}{t(t+1)}y = 0$  sur  $I = \mathbf{R}_+^* \text{ ou } I = ]-1, 0[ \text{ ou } I = ]-\infty, -1[$ .

Nous savons<sup>6</sup> que  $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$ .

Et donc une primitive de  $t \mapsto \frac{1}{t(t+1)}$  est  $t \mapsto \ln|t| - \ln|t+1| = \ln\left|\frac{t}{t+1}\right|$ .

Et par conséquent, les solutions de  $(E_0)$  sont les  $t \mapsto \lambda e^{\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|} = \lambda \left|\frac{t}{t+1}\right|$ ,  $\lambda \in \mathbf{K}$ .

Notons que sur chacun des intervalles de résolution,  $\frac{t}{t+1}$  est de signe constant, et donc une fois l'intervalle choisi, il est possible de donner une expression des solutions ne contenant pas de valeur absolue, ce qui est toujours plus agréable.

<sup>5</sup> Les plus fréquemment rencontrées en physique.

<sup>6</sup> Ou le retrouvons facilement via une décomposition en éléments simples.

## 10.1.5 Recherche d'une solution particulière : la méthode de variation de la constante

Revenons à présent au cas général d'une équation  $(E) : y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$  avec second membre, et notons toujours  $A$  une primitive de  $a$ .

Grâce à la proposition 10.6 et à la proposition 10.8, il nous suffit de trouver **une** solution de  $(E)$  pour toutes les connaître. La méthode de variation de la constante permet de trouver une telle solution.

L'idée est de chercher une solution  $y$  sous la forme  $y(t) = \lambda(t)e^{-A(t)}$ , où  $\lambda$  n'est plus une constante, mais une fonction dérivable.

La fonction  $y$  est alors dérivable et pour tout  $t \in I$ ,  $y'(t) = \lambda'(t)e^{-A(t)} - \lambda a(t)e^{-A(t)}$ . Et donc  $y$  est solution de  $(E)$  si et seulement si

$$\begin{aligned} \forall t \in I, y'(t) + a(t)y(t) = b(t) &\Leftrightarrow \lambda'(t)e^{-A(t)} - \lambda(t)a(t)e^{-A(t)} + a(t)\lambda(t)e^{-A(t)} = b(t) \\ &\Leftrightarrow \lambda'(t)e^{-A(t)} = b(t) \\ &\Leftrightarrow \lambda'(t) = b(t)e^{A(t)}. \end{aligned}$$

Et donc  $y$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $\lambda$  est une primitive de  $t \mapsto b(t)e^{A(t)}$ .

Mais de telles primitives existent (c'est le théorème fondamental de l'analyse), ce qui garantit bien qu'il existe au moins une<sup>7</sup> solution de  $(E)$ .

<sup>7</sup> Et donc une infinité.

## Exemples 10.10

► Considérons l'équation  $y' - \frac{1}{t}y = \frac{1}{t^2}$  sur  $I = \mathbf{R}_+^*$ .

Nous avons déjà prouvé que les solutions de l'équation homogène sont les  $t \mapsto \lambda t$ . Cherchons une solution particulière sous la forme  $y : t \mapsto \lambda(t)t$ , où  $\lambda$  est une fonction dérivable sur  $\mathbf{R}_+^*$ .

Alors  $y$  est solution de  $(E)$  si et seulement pour tout  $t \in \mathbf{R}_+^*$ ,

$$\lambda'(t)t + \lambda(t) - \frac{1}{t}\lambda(t)t = \frac{1}{t^2} \Leftrightarrow \lambda'(t) = \frac{1}{t^3}.$$

On peut donc par exemple<sup>8</sup> prendre  $\lambda(t) = -\frac{1}{2t^2}$ .

Et donc  $y(t) = \frac{-1}{2t}$  est solution de (E).

Par conséquent, les solutions de (E) sont les fonctions qui sont sommes de la solution particulière et d'une solution de l'équation homogène, donc ce sont les  $t \mapsto \lambda t - \frac{1}{2t}$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}$ .

► Soit (E) :  $y' - \frac{1}{t(t+1)}y = te^t$  sur  $\mathbf{R}_+^*$ .

Alors nous savons déjà que l'équation homogène associée possède pour solutions les  $t \mapsto \lambda \frac{t}{t+1}$ .

Cherchons une solution de (E) sous la forme  $y : t \mapsto \lambda(t) \frac{t}{t+1}$ . Alors  $y$  est solution de (E) si et seulement si pour tout  $t > 0$ ,

$$\lambda'(t) \frac{t}{t+1} + \lambda(t) \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{t(t+1)} \lambda(t) \frac{t}{t+1} = te^t \Leftrightarrow \lambda'(t) = (t+1)e^t.$$

Procédons alors à une intégration par parties<sup>9</sup> :

$$\int^x (t+1)e^t dt = [(t+1)e^t]^x - \int^x e^t dt = xe^x.$$

Et donc une solution particulière est  $t \mapsto \frac{t^2}{t+1}e^t$ .

Et donc les solutions de (E) sont les  $t \mapsto \frac{\lambda t}{t+1} + \frac{t^2}{t+1}e^t$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}$ .

<sup>8</sup> Il y a toujours une infinité de fonctions  $\lambda$  qui conviennent, mais notre but est d'en trouver une seule, donc autant prendre la plus simple possible.

<sup>9</sup> Bien entendu, tous les outils dont nous disposons pour le calcul de primitives sont susceptibles de nous aider à résoudre des équations différentielles : intégration par parties, changement de variable, utilisation des complexes, etc

Terminons par un cas très particulier où on peut se passer de la variation de la constante : celui des équations à coefficients constants et à second membre polynomial.

**Proposition 10.11 :** Soit  $a \neq 0$ , et soit  $P$  un polynôme. Alors il existe une solution de (E) :  $y'(t) + ay(t) = P(t)$  de la forme  $t \mapsto Q(t)$ , avec  $Q$  un polynôme de même degré que  $P$ .

**Remarque**

L'hypothèse  $a \neq 0$  n'est pas vraiment contraignante, pour  $a = 0$ , le problème se ramène au calcul d'une primitive de  $P$ , ce que l'on sait toujours faire.

*Démonstration.* Notons  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ , avec  $n = \deg P$ , et soit  $Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k$  un polynôme de degré au plus  $n$ .

On a alors  $Q' = \sum_{k=1}^n b_k k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)b_{k+1} X^k$ .

Et  $Q$  est solution de (E) si et seulement si pour tout  $t \in \mathbf{R}$ ,

$$\sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} (k+1) t^k + a \sum_{k=0}^n b_k t^k = \sum_{k=0}^n a_k t^k.$$

Mais deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux.

Donc  $Q$  est solution si et seulement si ses coefficients  $b_0, b_1, \dots, b_n$  sont solution du système :

$$\begin{cases} ab_0 + b_1 & = a_0 \\ ab_1 + 2b_2 & = a_1 \\ ab_2 + 3b_3 & = a_2 \\ & \vdots \\ ab_{n-1} + nb_n & = a_{n-1} \\ ab_n & = a_n \end{cases}$$

Ce système est triangulaire, et ses coefficients diagonaux sont non nuls, donc il possède une unique solution.

Et donc il existe bien  $Q$  polynôme de degré  $n$  solution de (E). □

**Exemple 10.12**

Soit  $(E) : y' + 3y = t^2 - 1$ .

Alors il existe une solution particulière de  $(E)$  de la forme  $t \mapsto P(t)$ , avec  $P$  un polynôme de degré 2.

Notons  $P(t) = at^2 + bt + c$ , si bien que  $P'(t) = 2at + b$ .

Et donc  $P$  est solution de  $(E)$  si et seulement si pour tout  $t \in \mathbf{R}$ ,

$$2at + b + 3(at^2 + bt + c) = t^2 - 1 \Leftrightarrow 3at^2 + (2a + 3b)t + (b + 3c) = t^2 - 1.$$

$$\text{Soit si et seulement si } \begin{cases} 3a = 1 \\ 2a + 3b = 0 \\ b + 3c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{2}{9} \\ c = -\frac{7}{27} \end{cases}$$

Et donc  $t \mapsto \frac{t^2}{3} - \frac{2}{9}t - \frac{7}{27}$  est une solution particulière de  $(E)$ .

On en déduit que l'ensemble des solutions de  $(E)$  est

$$\left\{ t \mapsto \lambda e^{-3t} + \frac{t^2}{3} - \frac{2}{9}t - \frac{7}{27}, \lambda \in \mathbf{R}, \right\}.$$

**10.1.6 Problèmes de Cauchy, ou équations avec conditions initiales**

Nous venons de voir qu'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 possède toujours une infinité de solutions.

Pourtant, pour un système physique dont l'évolution est régie par une équation différentielle<sup>10</sup>, il ne peut y avoir qu'une seule évolution possible, et donc une seule solution.

Ceci tient au fait qu'on connaît en général une **condition initiale**, par exemple l'état du système au temps  $t = 0$ .

<sup>10</sup> Par exemple la décharge d'un condensateur à travers une résistance.

**Proposition 10.13 (Problème de Cauchy) :** Soit  $t_0 \in I$  et soit  $y_0 \in \mathbf{K}$ . Alors il existe une unique solution à l'équation  $(E) : y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$  vérifiant  $y(t_0) = y_0$ .

**Remarque**

Notons qu'on n'a pas besoin de connaître nécessairement  $y(0)$ , et que la connaissance de l'état du système à n'importe quel instant suffit.

*Démonstration.* Nous venons de voir que les solutions de  $(E)$  sont de la forme  $y : t \mapsto \lambda e^{-A(t)} + y_1(t)$ , avec  $\lambda \in \mathbf{K}$  et où  $y_1$  désigne une solution particulière de l'équation.

En particulier, on a  $y(t_0) = \lambda e^{-A(t_0)} + y_1(t_0)$  et donc

$$y(t_0) = y_0 \Leftrightarrow \lambda = e^{A(t_0)} (y_0 - y_1(t_0)).$$

Et donc il existe bien une et une seule solution vérifiant  $y(t_0) = y_0$ .  $\square$

Les courbes représentatives des solutions d'une équation différentielle  $(E)$  sont appelées **courbes intégrales de  $(E)$** .

Par exemple, les courbes intégrales de l'équation  $y' - \frac{1}{t}y = \frac{1}{t^2}$  sur  $\mathbf{R}_+^*$  sont les courbes représentatives des  $t \mapsto \lambda t - \frac{1}{2t}$ .

Ce que nous dit le résultat ci-dessus, c'est que pour tout point  $(t_0, y_0) \in I \times \mathbf{K}$ , il existe une et une seule courbe intégrale qui passe par ce point.

Et en particulier, deux courbes intégrales ne peuvent jamais se croiser.

**10.1.7 Raccordement de solutions**

En mettant sous forme normalisée une équation, nous sommes parfois contraints de restreindre l'intervalle d'étude afin de ne pas effectuer de division par 0.

Par exemple, considérons l'équation  $(E) : t^2y' - (2t - 1)y = t^2$ , d'inconnue  $y : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  dérivable.

Pour utiliser ce qui a été dit précédemment, et passer par la forme normalisée  $y' - \frac{2t-1}{t^2}y = 1$ , il faut donc restreindre l'étude à l'un des deux intervalles  $I = \mathbf{R}_+^*$  ou  $I = \mathbf{R}_-^*$ .

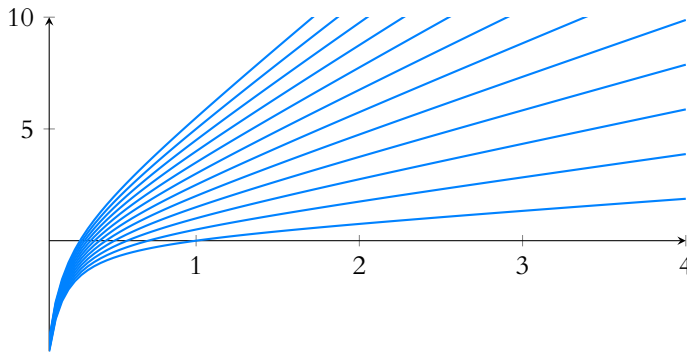


FIGURE 10.1 – Les courbes intégrales de l'équation  $y' - \frac{1}{t}y = \frac{1}{t^2}$ .

Sur chacun de ces intervalles, une primitive de  $t \mapsto \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2}$  est  $t \mapsto 2 \ln(|t|) + \frac{1}{t} = \ln(t^2) + \frac{1}{t}$ .  
 Et donc les solutions de l'équation homogène sont les  $t \mapsto \lambda e^{\ln(t^2) + \frac{1}{t}} = \lambda t^2 e^{1/t}$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}$ .  
 Une fonction  $y : t \mapsto \lambda(t)t^2 e^{1/t}$  est solution de (E) si et seulement si

$$\lambda'(t)t^2 e^{1/t} + (2t-1)e^{1/t}\lambda(t) - \frac{2t-1}{t^2}t^2 e^{1/t}\lambda(t) = 1 \Leftrightarrow \lambda'(t) = \frac{e^{-1/t}}{t^2}$$

Et donc  $\lambda(t) = e^{-1/t}$  convient, de sorte que les solutions de (E) sur  $I = \mathbf{R}_+^*$  ou  $I = \mathbf{R}_-^*$  sont les  $t \mapsto t^2 + \lambda t^2 e^{1/t}$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}$ .

Soit à présent  $y : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , dérivable et solution de (E).  
 En particulier, en prenant  $t = 0$  dans l'équation (E) il vient  $y(0) = 0$ .  
 De plus,  $y$  est solution de l'équation normalisée sur chacun des intervalles  $\mathbf{R}_+^*$  et  $\mathbf{R}_-^*$ . Donc il existe deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que pour tout  $t \in \mathbf{R}^*$ ,

$$y(t) = \begin{cases} t^2 + \lambda t^2 e^{1/t} & \text{si } t > 0 \\ t^2 + \mu t^2 e^{1/t} & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

De plus,  $y$  doit être continue en 0. Il nous faut donc calculer  $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^2 e^{1/t}$ .  
 Pour cela procédons au changement de variable  $x = 1/t$ , de sorte que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^2 e^{1/t} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty.$$

Et donc  $\lim_{t \rightarrow 0^+} (\lambda t^2 e^{1/t} + t^2) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \lambda > 0 \\ 0 & \text{si } \lambda = 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$

Donc déjà, le seul moyen que  $y$  soit continue en 0 est que  $\lambda = 0$ .  
 D'autre part, on a  $\lim_{t \rightarrow 0^-} t^2 e^{1/t} = 0$ , et donc quelle que soit la valeur de  $\mu$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0^-} \mu t^2 e^{1/t} = 0$ .

Donc les solutions possibles de (E) sont parmi les  $y_\mu : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ t^2 & \text{si } t > 0 \\ \mu t^2 e^{1/t} + t^2 & \text{si } t < 0 \end{cases}$

$\mu \in \mathbf{R}$ .

Reste à vérifier si une telle fonction est bien dérivable en 0.

Il est clair que pour  $h > 0$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{y_\mu(h) - y_\mu(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2}{h} = 0$ , et si  $h < 0$ ,

$$\frac{y_\mu(h) - y_\mu(0)}{h} = \frac{\mu h^2 e^{1/h} + h^2}{h} = \mu h e^{1/h} + h e^{1/h} \xrightarrow{h \rightarrow 0^-} 0.$$

Et donc  $y_\mu$  est toujours dérivable en 0, avec  $y'_\mu(0) = 0$ .

–  $\lambda$  vs.  $\mu$  –

Il est important de noter que rien n'oblige  $\lambda$  et  $\mu$  à être égaux : l'un vient de la résolution de (E) sur  $\mathbf{R}_+^*$ , l'autre de la résolution sur  $\mathbf{R}_-^*$ , et ces deux résolutions sont complètement disjointes et ne supposent rien de la résolution sur l'autre intervalle.

Analyse/synthèse

Nous venons de procéder à l'analyse : une solution est nécessairement de cette forme.  
 Reste à faire la synthèse, à savoir vérifier si toutes les telles fonctions conviennent, donc sont dérivables sur  $\mathbf{R}$  et satisfont (E) pour tout  $x \in \mathbf{R}$ .

Ainsi, les solutions de  $(E)$  sont exactement les  $y_\mu$ ,  $\mu \in \mathbf{R}$ .

Notons qu'on perd alors l'unicité dans le problème de Cauchy : il existe une infinité de solutions de  $(E)$  sur  $\mathbf{R}$  telles que  $y(1) = 1$ , puisque toutes les solutions de  $(E)$  le vérifient. En revanche, il n'existe aucune solution de  $(E)$  vérifiant  $y(1) = 2$ .

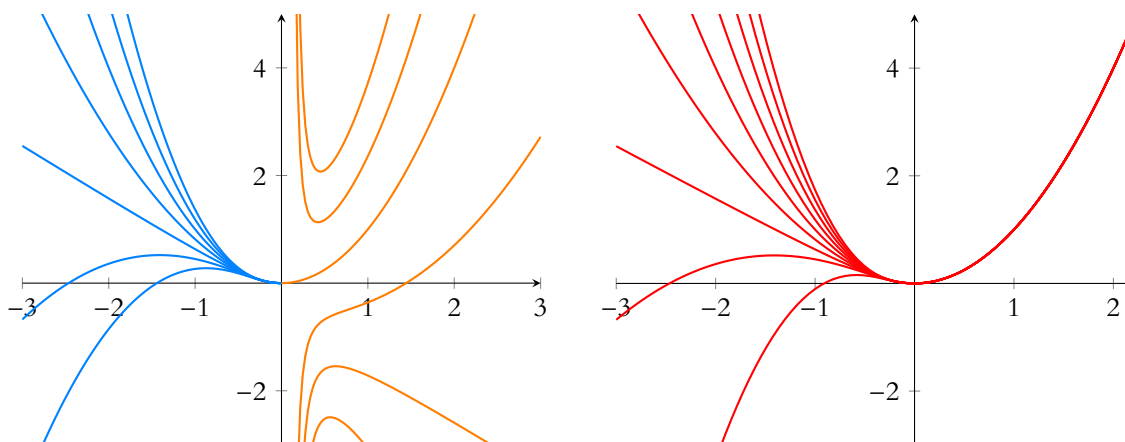


FIGURE 10.2 – En bleu (resp. orange) : les courbes intégrales des solutions sur  $\mathbf{R}_*$  (resp.  $\mathbf{R}_+$ ).

Pour raccorder ces courbes en la courbe d'une fonction dérivable, il n'y a qu'un choix possible sur  $\mathbf{R}_+$ , et tous les choix possibles sur  $\mathbf{R}_*$ .

## 10.2 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRE D'ORDRE 2 À COEFFICIENTS CONSTANTS

Dans cette partie, nous nous intéressons maintenant à des équations différentielles du type

$$(E) : y''(t) + ay'(t) + by(t) = c(t)$$

où  $a$  et  $b$  sont des **constantes**,  $c$  est une fonction continue sur  $I$ .

Résoudre l'équation, c'est donc trouver toutes les fonctions deux fois dérivables<sup>11</sup> telles que  $\forall t \in I$ ,  $y''(t) + ay'(t) + by(t) = c(t)$ .

Une telle équation est appelée **équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants**.

Notons comme précédemment que si  $y$  est solution, alors  $y''(t) = c(t) - ay'(t) - by$  sera automatiquement continue<sup>12</sup>.

<sup>11</sup> C'est le minimum qu'on puisse demander pour que le membre de gauche de l'équation soit bien défini.

<sup>12</sup> On dit alors que  $y$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ .

**Définition 10.14** – Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants est dite **homogène** si son second membre est nul.

Si  $(E) : y''(t) + ay'(t) + by(t) = c(t)$  est une **équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants**, l'équation  $(E_0) : y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$  est appelée **équation homogène associée à  $(E)$** .

**Définition 10.15** – Le polynôme  $X^2 + aX + b$  est appelé le **polynôme caractéristique** associé à l'équation  $y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$ .

### 10.2.1 Structure de l'ensemble des solutions

Soit  $(E) : y''(t) + ay'(t) + by(t) = c(t)$  une équation différentielle linéaire du second ordre, et soit  $(E_0)$  l'équation homogène associée.

Notons  $\mathcal{S}$  l'ensemble des solutions de  $(E)$  et de même, notons  $\mathcal{S}_H$  l'ensemble des solutions de  $(E_0)$ .

Nous retrouvons alors les mêmes résultats que pour les équations d'ordre 1, et les preuves



des deux propositions qui suivent sont exactement les mêmes que dans le cas des équations d'ordre 1.

**Proposition 10.16 :** L'ensemble  $\mathcal{S}_H$  contient la fonction nulle, et il est stable par combinaisons linéaires. Cela signifie que pour tout  $(y_1, y_2) \in \mathcal{S}_H^2$  et pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$ ,  $\lambda y_1 + \mu y_2 \in \mathcal{S}_H$ .

**Proposition 10.17 :** Soit  $y_P \in \mathcal{S}$ . Alors une fonction  $y$  deux fois dérivable sur  $I$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $y - y_P \in \mathcal{S}_H$ . Ainsi, on a  $\mathcal{S} = \{y_P + y_H, y_H \in \mathcal{S}_H\}$ .

## 10.2.2 Résolution de l'équation homogène dans le cas où $\mathbf{K} = \mathbf{C}$

Notons  $r_1$  et  $r_2$  les deux racines<sup>13</sup> complexes du polynôme caractéristique de  $(E_0)$ .

<sup>13</sup> Éventuellement confondues.

**Proposition 10.18 :**

► Si  $r_1 \neq r_2$ , alors les solutions de  $(E_0)$  sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}, (\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2.$$

► Si  $r_1 = r_2$ , alors les solutions de  $(E_0)$  sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{r_1 t}, (\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2.$$

*Démonstration.* Soit  $y$  une fonction deux fois dérivable sur  $I$ .

Notons alors  $z : t \mapsto e^{-r_1 t} y(t)$ . La fonction  $z$  est alors deux fois dérivable car produit de fonctions deux fois dérivables, et on a  $y(t) = e^{r_1 t} z(t)$ .

Par conséquent pour tout  $t \in I$ ,

$$\begin{aligned} y'(t) &= e^{r_1 t} (r_1 z(t) + z'(t)) \\ y''(t) &= e^{r_1 t} (z''(t) + 2r_1 z'(t) + r_1^2 z(t)). \end{aligned}$$

Et donc  $y$  est solution de  $(E_0)$  si et seulement si :

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0 \Leftrightarrow e^{r_1 t} (z''(t) + 2r_1 z'(t) + r_1^2 z(t) + ar_1 z(t) + az'(t) + bz(t)) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{r_1 t} \left( z''(t) + (2r_1 + a)z'(t) + \underbrace{(r_1^2 + ar_1 + b)}_{=0} z(t) \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{r_1 t} (z''(t) + (2r_1 + a)z'(t)) = 0$$

$$\Leftrightarrow z''(t) + (2r_1 + a)z'(t) = 0.$$

Ainsi,  $y$  est solution de  $(E_0)$  si et seulement si  $z'$  est solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre (homogène et à coefficients constants)

$$f' + (2r_1 + a)f = 0 \quad (E'_0).$$

Souvenons nous que la somme des racines de l'équation caractéristique vaut  $-a$ . Et donc  $2r_1 + a = 0$  si et seulement si  $r_1 = r_2$ .

► Si  $r_1 \neq r_2$ , alors les solutions de  $(E'_0)$  sont de la forme  $t \mapsto \lambda e^{-(2r_1+a)t}$ ,  $\lambda \in \mathbf{C}$ .

Et donc  $y$  est solution de  $E$  si et seulement si  $z'$  est la forme  $t \mapsto \lambda e^{-(2r_1+a)t}$ ,  $\lambda \in \mathbf{C}$ .

Soit si et seulement si  $z$  est de la forme  $\lambda e^{-(2r_1+a)t} + \mu$ ,  $(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2$ .

Et par conséquent, en multipliant par  $e^{r_1 t}$ ,  $y$  est solution de  $(E)$  si et seulement si elle est de la forme

$$t \mapsto \lambda e^{(-a-r_1)t} + \mu e^{r_1 t} = \lambda e^{r_2 t} + \mu e^{r_1 t}, (\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2.$$

$r_1$  est racine du polynôme caractéristique.

Une exponentielle n'est jamais nulle.

### Détails

Pour le dire autrement : l'équation possède une racine double si et seulement si cette racine est  $-\frac{a}{2}$ .

- Si  $r_1 = r_2$ . Alors  $2r_1 + a = 0$ , et donc  $y$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $z'' = 0$ .  
Soit si et seulement si il existe  $\lambda \in \mathbf{C}$  telle que  $\forall t \in I, z'(t) = \lambda$  et donc si et seulement si il existe  $(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2$  tels que  $\forall t \in I, z(t) = \lambda t + \mu$ .  
Et donc après multiplication par  $e^{r_1 t}$ , si et seulement si  $y(t) = (\lambda t + \mu)e^{r_1 t}$ .

□

**Exemple 10.19**

Les solutions de  $y'' - y' - 12y = 0$  sont les

$$t \mapsto \lambda e^{4t} + \mu e^{-3t}, (\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2.$$

Les solutions de  $y'' + 4y' + 4y = 0$  sont les

$$t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{-2t}, (\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2.$$

**10.2.3 Résolution de l'équation homogène dans le cas où  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$** **Théorème 10.20 :**

- Si le polynôme caractéristique possède deux racines réelles distinctes  $r_1$  et  $r_2$ , alors les solutions de  $(E_0)$  sont de la forme  $t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}, (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ .
- Si le polynôme caractéristique possède une racine double<sup>14</sup>  $r$ , alors les solutions de  $(E_0)$  sont de la forme  $t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{rt}, (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ .
- Si le polynôme caractéristique possède deux racines complexes conjuguées  $r \pm i\omega$ , alors les solutions de  $(E_0)$  sont de la forme  $t \mapsto e^{rt} (\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)), (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ .

<sup>14</sup> Nécessairement réelle.

*Démonstration.* Les deux premiers cas se traitent exactement comme dans le cas complexe. Concentrons nous donc sur le dernier cas : celui où le polynôme caractéristique possède deux racines complexes conjuguées  $r \pm i\omega$ , avec  $\omega \neq 0$ .

Soit  $y$  une solution de  $(E_0)$ . Alors  $y$  peut être vue comme une fonction complexe, et donc d'après les résultats précédents, il existe deux complexes  $\lambda_1$  et  $\mu_1$  tels que

$$\forall t \in I, y(t) = \lambda_1 e^{(r+i\omega)t} + \mu_1 e^{(r-i\omega)t}.$$

Mais  $y$  étant à valeurs réelles, elle est égale à sa partie réelle :

$$\begin{aligned} y(t) &= \operatorname{Re}(y(t)) = \operatorname{Re}(\lambda_1 e^{rt} \cos(\omega t) - \operatorname{Im}(\lambda_1) e^{rt} \sin(\omega t) + \operatorname{Re}(\mu_1) e^{rt} \cos(-\omega t) - \operatorname{Im}(\mu_1) e^{rt} \sin(-\omega t)) \\ &= (\operatorname{Re}(\lambda_1) + \operatorname{Re}(\mu_1)) e^{rt} \cos(\omega t) + (\operatorname{Im}(\mu_1) - \operatorname{Im}(\lambda_1)) e^{rt} \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Et donc en posant  $\lambda = \operatorname{Re}(\lambda_1) + \operatorname{Re}(\mu_1) \in \mathbf{R}$  et  $\mu = \operatorname{Im}(\mu_1) - \operatorname{Im}(\lambda_1)$ ,  $y$  est bien de la forme annoncée.

Inversement, on a  $e^{rt} \cos(\omega t) = \frac{1}{2} e^{rt} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) = \frac{1}{2} (e^{(r+i\omega)t} + e^{(r-i\omega)t})$  qui est solution de  $(E_0)$  d'après ce qui a été dit dans le cas complexe.

Et de même,  $t \mapsto e^{rt} \sin(\omega t) = \frac{1}{2i} (e^{(r+i\omega)t} - e^{(r-i\omega)t})$  est solution de  $(E_0)$ .

Et donc toutes les fonctions<sup>15</sup> de la forme  $t \mapsto \lambda e^{rt} \cos(\omega t) + \mu e^{rt} \sin(\omega t)$  sont solutions de  $(E_0)$ . □

<sup>15</sup> C'est une conséquence de la proposition 10.16.**Exemple 10.21**

$y'' + y = 0$ . Le polynôme caractéristique est  $X^2 + 1 = 0$ , qui possède  $i$  et  $-i$  comme racines, de sorte que les solutions de l'équation homogène sont les

$$t \mapsto \lambda \cos(t) + \mu \sin(t), (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2.$$

### 10.2.4 Recherche d'une solution particulière

Le principe de superposition reste valable pour les équations d'ordre 2, avec la même preuve que pour les équations d'ordre 1 :

**Proposition 10.22 :** Soient  $c_1$  et  $c_2$  deux fonctions continues sur  $I$ . Soit  $y_1$  une solution de  $(E_1)$  :  $y''(t) + ay'(t) + by(t) = c_1(t)$  et soit  $y_2$  une solution de  $(E_2)$  :  $y''(t) + ay'(t) + by(t) = c_2(t)$ .  
Alors pour tous  $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$ ,  $\lambda y_1 + \mu y_2$  est solution de  $y''(t) + ay'(t) + by(t) = \lambda c_1(t) + \mu c_2(t)$ .

Bien qu'il existe une méthode de variation des constantes pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2, celle-ci ne figure pas à notre programme, et nous ne saurons donc pas toujours résoudre une équation avec second membre.

Seuls certains cas particuliers sont à connaître, qui sont tous englobés par la proposition suivante (qui dépasse légèrement le cadre du programme officiel).

**Proposition 10.23 (Recherche d'une solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme «exponentielle fois polynôme») :**

Soit  $(E)$  :  $y''(t) + ay'(t) + by(t) = c(t)$  une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, où  $c$  est de la forme  $t \mapsto P(t)e^{\lambda t}$ ,  $\lambda \in \mathbf{K}$  et  $P$  un polynôme à coefficients dans  $\mathbf{K}$ . Alors il existe une solution de  $(E)$  sous la forme  $t \mapsto Q(t)e^{\lambda t}$ , où  $Q$  est un polynôme à coefficients dans  $\mathbf{K}$ , avec

- ▶  $\deg Q = \deg P$  si  $\lambda$  n'est pas racine du polynôme caractéristique de  $(E)$ .
- ▶  $\deg Q = \deg P + 1$  si  $\lambda$  est racine simple du polynôme caractéristique de  $(E)$ .
- ▶  $\deg Q = \deg P + 2$  si  $\lambda$  est racine double du polynôme caractéristique de  $(E)$ .

*Démonstration.* Soit  $Q$  un polynôme, et soit  $y : t \mapsto Q(t)e^{\lambda t}$ . Alors pour tout  $t \in I$ ,

$$y'(t) = Q'(t)e^{\lambda t} + Q(t)\lambda e^{\lambda t} \text{ et } y''(t) = Q''(t)e^{\lambda t} + 2Q'(t)\lambda e^{\lambda t} + Q(t)\lambda^2 e^{\lambda t}.$$

Et donc  $y$  est solution de  $(E)$  si et seulement si pour tout  $t \in I$ ,

$$e^{\lambda t} (Q''(t) + (2\lambda + a)Q'(t) + (\lambda^2 + a\lambda + b)Q(t)) = P(t)e^{\lambda t}.$$

Soit si et seulement si  $Q'' + (2\lambda + a)Q' + (\lambda^2 + a\lambda + b)Q = P$  ( $E'$ ).

▶ Si  $\lambda$  n'est pas racine de  $X^2 + aX + b$ , posons  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ , et cherchons une solution de

$(E')$  de la forme  $t \mapsto Q(t)$ , avec  $Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k$ .

On a alors  $Q' = \sum_{k=1}^n k b_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} (k+1) X^k$  et de même

$$Q'' = \sum_{k=2}^n b_k k(k-1) X^{k-2} = \sum_{k=0}^{n-2} b_{k+2} (k+1)(k+2) X^k.$$

Alors  $Q$  est solution de  $(E')$  si et seulement si

$$\begin{aligned} & (\lambda^2 + a\lambda + b)b_n X^n + [(\lambda^2 + a\lambda + b)b_{n-1} + (2\lambda + a)nb_n] X^{n-1} \\ & + \sum_{k=0}^{n-2} [(\lambda^2 + a\lambda + b)b_k + (2\lambda + a)(k+1)b_{k+1} + (k+1)(k+2)b_{k+2}] X^k = \sum_{k=0}^n a_k X^k. \end{aligned}$$

Soit encore si et seulement si

$$\begin{cases} (\lambda^2 + a\lambda + b)b_0 + (2\lambda + a)b_1 + 2b_2 & = a_0 \\ (\lambda^2 + a\lambda + b)b_1 + (2\lambda + 1)b_2 + 6b_3 & = a_1 \\ \vdots & = \vdots \\ (\lambda^2 + a\lambda + b)b_{n-1} + (2\lambda + a)nb_n & = a_{n-1} \\ (\lambda^2 + a\lambda + b)b_n & = a_n \end{cases}$$

Il s'agit alors d'un système de  $n + 1$  équations en les inconnues  $b_n, b_{n-1}, \dots, b_0$ , triangulaire, et dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à  $\lambda^2 + a\lambda + b \neq 0$ , donc il possède une unique solution, si bien qu'il existe une<sup>16</sup> solution de (E) de la forme  $t \mapsto Q(t)e^{\lambda t}$ , avec  $\deg Q = \deg P$ .

<sup>16</sup> Unique.

► Si  $\lambda$  est racine simple de  $X^2 + aX + b$ . Alors  $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$  et comme nous l'avons vu lors de la résolution de l'équation homogène,  $2\lambda + a \neq 0$ .

Donc  $y$  est solution de (E) si et seulement si  $Q'' + (2\lambda + a)Q' = P$ .

Autrement dit, si et seulement si  $Q'$  est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants, et de second membre  $P$ .

Mais alors comme expliqué à la proposition 10.11, il existe une solution polynomiale avec  $R$  de même degré que  $P$ .

Et alors toute primitive  $Q$  de  $R$  est un polynôme de degré  $\deg P + 1$ , et qui satisfait  $Q'' + (2\lambda + a)Q' = P$ , donc avec  $t \mapsto Q(t)e^{\lambda t}$  solution de (E).

#### Astuce

Puisque toute primitive de  $R$  convient, on pourra se souvenir que celle qui s'annule en 0 (= celle dont le coefficient constant est nul) convient.

Et donc chercher des solutions sous la forme  $t \mapsto Q(t)e^{\lambda t}$  avec  $\deg Q = \deg P + 1$  et  $Q(0) = 0$ .

► Si  $\lambda$  est racine double de  $X^2 + aX + b$ , alors  $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$  et  $2\lambda + a = 0$ , si bien que  $y : t \mapsto Q(t)e^{\lambda t}$  est solution de (E) si et seulement si  $Q'' = P$ .

Mais alors toute primitive d'une primitive de  $P$ , qui est un polynôme de degré  $\deg P + 2$  convient.  $\square$

#### Astuce

Comme dans le cas précédent, on peut choisir l'unique «primitive deuxième» de  $P$  dont le coefficient constant et le coefficient de degré 1 sont nuls.

Les cas particuliers qui nous intéressent (et qui sont a priori les seuls au programme) sont les suivants :

- le cas d'un second membre  $P$  polynomial qui correspond donc à  $\lambda = 0$ . La proposition précédente nous garantit donc l'existence d'une solution de même degré que  $P$  si 0 n'est pas racine du polynôme caractéristique, de degré  $\deg P + 1$  si 0 est racine simple, et de degré  $\deg P + 2$  si 0 est racine double.
- le cas d'un second membre de la forme  $t \mapsto Ae^{\lambda t}$ ,  $(A, \lambda) \in \mathbf{R}^2$ , qui correspond donc à celui où  $P$  est un polynôme constant. On cherchera donc une solution sous la forme  $t \mapsto P(t)e^{\lambda t}$ , avec  $P$  de degré 0, 1 ou 2 suivant que  $\lambda$  n'est pas racine/est racine simple/est racine double du polynôme caractéristique.
- le cas d'un second membre de la forme  $t \mapsto \lambda \cos(\omega t)$  ou  $t \mapsto \lambda \sin(\omega t)$ . Dans ce cas, on passera par les complexes, et on commencera par chercher les solutions à l'équation  $y'' + ay' + b = \lambda e^{i\omega t}$ , donc sous la forme  $t \mapsto P(t)e^{i\omega t}$ , avec  $P$  de degré 0, 1 ou 2, puis on passera à la partie réelle/imaginaire.

### Exemples 10.24

►  $y'' - 2y' + y = e^t$ .

Le polynôme caractéristique est  $X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$ .

Donc 1 est racine double, et donc il existe une solution sous la forme  $t \mapsto \lambda t^2 e^t$ .

Posons alors  $y(t) = \lambda t^2 e^t$ , de sorte que

$$y'(t) = \lambda(t^2 + 2t)e^t$$

$$y''(t) = \lambda(t^2 + 4t + 2)e^t.$$

On a alors  $y'' - 2y' + y = e^t \lambda(t^2 + 4t + 2 - 2t^2 - 8t + t^2) = e^t \lambda 2e^t$ , qui vaut  $e^t$  si et seulement si  $\lambda = \frac{1}{2}$ .

Donc  $t \mapsto \frac{t^2}{2} e^t$  est une solution particulière.

►  $y'' + y' - 2y = 5e^{-2t}$ .

Le polynôme caractéristique est  $X^2 + X - 2 = (X - 1)(X + 2)$ , dont  $-2$  est racine simple.

On cherche donc une solution sous la forme  $y(t) = \lambda t e^{-2t}$ .

On a alors

$$\begin{aligned} y'(t) &= \lambda(-2t + 1)e^{-2t} \\ y''(t) &= \lambda e^{-2t}(-2 + 4t - 2) = \lambda e^{-2t}(4t - 4). \end{aligned}$$

Et donc  $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = \lambda e^{-2t}(4t - 4 + 1 - 2t - 2t) = -3\lambda e^{-2t}$ , qui vaut  $5e^{-2t}$  si et seulement si  $\lambda = -\frac{5}{3}$ .

Donc une solution particulière est  $t \mapsto -\frac{5t}{3}e^{-2t}$ .

►  $y'' + 4y = 3 \sin(2t)$ .

Cherchons donc une solution particulière de  $(\tilde{E}) : y'' + 4y = 3e^{2it}$ , il suffira ensuite d'en prendre la partie imaginaire.

Puisque  $2i$  est racine simple de  $X^2 + 4$ , on cherche une solution sous la forme  $y : t \mapsto \lambda t e^{2it}$ .

On a alors  $y' : t \mapsto \lambda e^{2it}(1 + 2it)$  et  $y'' : t \mapsto \lambda e^{2it}(2i - 4t + 2i)$ .

Et donc  $y$  est solution de  $(\tilde{E})$  si et seulement si

$$y'' + 4y = 3e^{2it} \Leftrightarrow \lambda e^{2it}(4i - 4t + 4t) 3e^{2it} \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{4i} = -\frac{3}{4}i.$$

Donc  $t \mapsto -\frac{3}{4}ite^{2it} = \frac{3}{4}t(-i \cos(2t) + \sin(2t))$  est solution de  $(\tilde{E})$ .

Et alors en considérant la partie imaginaire,  $t \mapsto -\frac{3}{4}t \cos(2t)$  est une solution particulière de  $(E)$ .

La proposition précédente nous permet également de traiter par exemple le cas de seconds membres de la forme  $e^{rt} \cos(\omega t)$ , ou  $e^{rt} \sin(\omega t)$  en utilisant les parties réelles/imaginaires de  $e^{rt} e^{i\omega t} = e^{(r+i\omega)t}$ .

### Exemple 10.25

Cherchons les solutions réelles à l'équation

$$(E) : y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 3e^{-t} \cos(t) + t^2 - t.$$

Alors le polynôme caractéristique est  $X^2 + 2X + 2$ , dont les racines complexes sont  $-1 \pm i$ .

Donc les solutions de l'équation homogène sont les

$$t \mapsto \lambda e^{-t} \cos(t) + \mu e^{-t} \sin(t), (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2.$$

Cherchons à présent une solution particulière de  $(E)$ . Par le principe de superposition, il suffit de trouver une solution de  $(E_1) : y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = e^{-t} \cos(t)$  et une solution de  $(E_2) : y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = t^2 - t$ .

► **Recherche d'une solution de  $(E_1)$**  : puisque  $e^{-t} \cos(t) = \operatorname{Re}(e^{(-1+i)t})$ , cherchons une solution de  $(E'_1) : y'' + 2y' + 2y = e^{(-1+i)t}$ , sa partie réelle sera alors une solution de  $(E_1)$ .

Nous sommes donc dans le cadre de la proposition précédente, avec  $P$  le polynôme constant égal à 1, et  $\lambda = -1 + i$  racine simple du polynôme caractéristique.

Donc nous cherchons une solution sous la forme  $t \mapsto (at + b)e^{(-1+i)t}$ . Et comme mentionné dans la preuve de 10.23, il est possible de supposer  $b = 0$ .

Soit donc  $y : t \mapsto ate^{(-1+i)t}$ , de sorte que

$$y'(t) = ae^{(-1+i)t}((-1+i)t + 1) \text{ et } y''(t) = ae^{(-1+i)t}((-1+i) + (-1+i)^2t + -1+i) = ae^{(-1+i)t}(-2it - 2 + 2i).$$

Alors  $y$  est solution de  $(E'_1)$  si et seulement si pour tout  $t \in I$ ,

$$ae^{(-1+i)t} [-2it - 2 + 2i + 2 + 2(-1+i)t + 2t] = e^{(-1+i)t} \Leftrightarrow a2i = 1 \Leftrightarrow a = -\frac{i}{2}.$$

Et donc une solution de  $(E'_1)$  est  $t \mapsto \frac{t}{2}e^{-t}(-i \cos t + \sin t)$ , si bien qu'une solution de  $(E_1)$  est  $t \mapsto \frac{te^{-t}}{2} \sin t$ .

► **Recherche d'une solution de  $(E_2)$**  : ici le second membre est polynomial de degré 2, et 0 n'est pas racine du polynôme caractéristique, donc nous cherchons une solution sous la forme d'un polynôme de degré 2.

Soit  $y : t \mapsto at^2 + bt + c$ , de sorte que  $y'(t) = 2at + b$  et  $y''(t) = 2a$ .

Alors  $y$  est solution de  $(E)$  si et seulement si pour tout  $t \in I$ ,

$$2a + 4at + 2b + 2at^2 + 2bt + 2c = t^2 - t \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ 4a + 2b = -1 \\ 2a + 2b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \\ c = 1 \end{cases}$$

Et donc une solution de  $(E_2)$  est  $t \mapsto \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + 1$ .

Par le principe de superposition, une solution de  $(E)$  est donc

$$t \mapsto \frac{3}{2}te^{-t} \sin t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + 1.$$

Et donc l'ensemble des solutions de  $(E)$  est

$$\left\{ t \mapsto \lambda e^{-t} \cos t + \mu e^{-t} \sin t + \frac{3}{2}te^{-t} \sin t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + 1, (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

### 10.2.5 Problème de Cauchy

Comme pour les équations différentielles linéaires d'ordre 1, la connaissance d'une condition initiale permet de déterminer totalement une solution.

Il y a toutefois une différence : pour choisir une solution d'une équation d'ordre 2, il faut choisir les valeurs de deux paramètres : ceux que nous avons nommés  $\lambda$  et  $\mu$ .

Or, la seule connaissance de la valeur de  $y(t_0)$  ne nous donne qu'une équation, qui ne suffit pas à elle seule à déterminer les valeurs de  $\lambda$  et de  $\mu$ .

Pour garantir l'unicité de la solution, il faut connaître les valeurs de  $y$  et de sa dérivée en  $t_0$ .

**Proposition 10.26 :** Soit  $t_0 \in I$ . Alors pour tous  $(y_0, y_1) \in \mathbf{K}^2$ , il existe une unique

solution de  $(E) : y'' + ay' + by = c$  vérifiant  $\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$

*Démonstration.* La preuve ne figure pas explicitement au programme, mais donnons-en les grandes lignes.

Si  $f$  est une solution particulière de  $E$ , nous savons qu'il existe deux fonctions  $u$  et  $v$  telles que l'ensemble des solutions de  $(E_0)$  soit  $\{\lambda u + \mu v, (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2\}$ , de sorte que toute solution de  $(E)$  est de la forme  $\lambda u + \mu v + f$ .

Et donc

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda u(t_0) + \mu v(t_0) + f(t_0) = y_0 \\ \lambda u'(t_0) + \mu v'(t_0) + f'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

Il faut alors travailler un peu pour prouver que dans tous les cas, ce système de deux équations à deux inconnues<sup>17</sup> possède bien une unique solution. Sans grande surprise, le cas le plus désagréable est celui où le polynôme caractéristique possède deux racines complexes conjuguées. □

#### Détails ( $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ )

Si le polynôme caractéristique possède deux racines distinctes  $r_1$  et  $r_2$ , alors  $u : t \mapsto e^{r_1 t}$  et  $v : t \mapsto e^{r_2 t}$ .  
S'il possède une racine double, alors  $u(t) = e^{rt}$  et  $v(t) = te^{rt}$ .  
Etc...

<sup>17</sup> Qui sont  $\lambda$  et  $\mu$ .

**Exemple 10.27**

Reprenons l'équation  $y'' - 2y' + y = e^t$ .

Les solutions de l'équation homogène sont les  $t \mapsto (\lambda + \mu t)e^t$ ,  $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ , et nous

avons déterminé une solution particulière, qui est  $t \mapsto \frac{t^2}{2}e^t$ .

Donc l'ensemble des solutions est

$$\left\{ t \mapsto \left( \lambda + \mu t + \frac{t^2}{2} \right) e^t, (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

Cherchons en particulier l'unique solution  $y$  telle que  $\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ .

On a  $y(0) = \lambda$ , et de même,  $y'(0) = \lambda + \mu$ .

Et donc

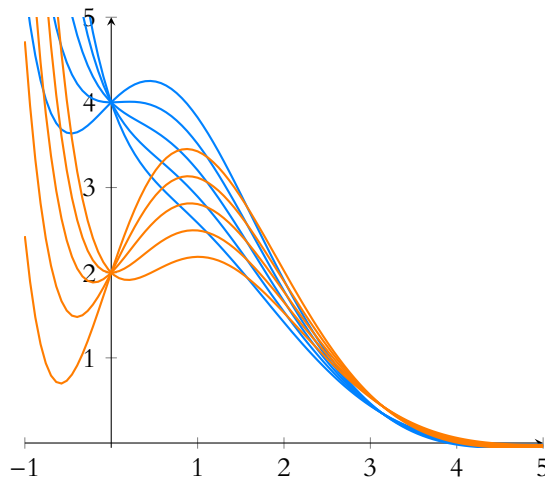
$$\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = -2 \end{cases}$$

Contrairement au cas des équations d'ordre 1, les courbes intégrales d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 peuvent donc se croiser<sup>18</sup>.

Plus précisément : pour chaque  $(t_0, y_0) \in I \times \mathbf{K}$ , il existe une infinité de courbes intégrales passant par  $(t_0, y_0)$  : une pour chaque valeur possible de  $y'(t_0)$ .

En revanche, deux courbes intégrales qui passent par le même point et qui ont la même tangente en ce point sont confondues.

Par exemple, nous avons représenté ci-dessous plusieurs courbes intégrales de l'équation  $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 3e^{-t}(\cos(t) + 2)$  résolue précédemment.



<sup>18</sup> Elles peuvent même se croiser en plusieurs points.

## 10.3 SUITES USUELLES

On considère dans cette partie des suites à valeurs dans  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{K}$  étant égal à  $\mathbf{R}$  ou à  $\mathbf{C}$ .

### 10.3.1 Rappels sur les suites arithmétiques et géométriques

**Définition 10.28** – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite à valeurs dans  $\mathbf{K}$ .

1. Soit  $q \in \mathbf{K}$ . On dit que  $(u_n)$  est une **suite géométrique** de raison  $q$  si pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_{n+1} = qu_n$ .
2. Soit  $r \in \mathbf{K}$ . On dit que  $(u_n)$  est une **suite arithmétique** de raison  $r$  si pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n + r$ .

**Proposition 10.29 :** ► Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite arithmétique de raison  $r$ . Alors pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n = u_0 + nr$ .  
 Plus généralement, pour tout  $n_0 \in \mathbf{N}$  et pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$ .  
 ► Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite géométrique de raison  $q$ . Alors pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n = u_0 q^n$ .  
 Plus généralement, pour tout  $n_0 \in \mathbf{N}$  et pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}$ .

**Remarque**

Cette seconde formule sert notamment pour des suites qui ne démarreraient pas à  $u_0$ .

Démonstration. Par récurrence sur  $n$ . □

**10.3.2 Suites arithmético-géométriques**

**Définition 10.30** – On appelle **suite arithmético-géométrique** toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  à valeurs dans  $\mathbf{K}$  pour laquelle il existe deux nombres  $a$  et  $b$  dans  $\mathbf{K}$  tels que

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = au_n + b.$$

Remarque. Notons que si  $a = 1$ , alors  $(u_n)$  est une suite arithmétique de raison  $b$ , et si  $b = 0$ , alors  $(u_n)$  est géométrique de raison  $a$ .

**Proposition 10.31 :** Soit  $(u_n)$  une suite arithmético-géométrique, à valeurs dans  $\mathbf{K}$ , vérifiant  $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = au_n + b$ , avec  $a \neq 1$ .  
 Soit alors  $\ell$  l'unique solution de l'équation  $\ell = a\ell + b$ . Alors il existe  $\lambda \in \mathbf{K}$  tel que  $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = \ell + \lambda a^n$ .

 **$a \neq 1$** 

Notons que le cas  $a = 1$  n'a que peu d'intérêt, il s'agirait de celui d'une suite arithmétique, que l'on sait déjà traiter.

Démonstration. Posons  $v_n = u_n - \ell$ . Alors pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on a

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \ell = au_n + b - \ell = a(v_n + \ell) + b - \ell = av_n + \underbrace{a\ell - \ell + b}_{=0}.$$

Et donc  $(v_n)$  est géométrique de raison  $a$  : pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $v_n = v_0 a^n$ , de sorte que

$$u_n = v_n + \ell = \ell + v_0 a^n.$$

Remarque : notons qu'on pourrait donner une formule pour le terme général de  $(u_n)$  :

$$u_n = a^n \left( u_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a}, \text{ mais il n'y a aucun intérêt à l'apprendre.} \quad \square$$

**Remarque**

Il est facile de vérifier que la seule valeur de  $c$  pour laquelle la suite  $(u_n + c)$  est géométrique de raison  $a$  est  $c = \ell$ .

**Exemple 10.32**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  la suite réelle définie par  $u_0 = 2$  et pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_{n+1} = 5u_n - 2$ .

$$\text{Alors } \ell = 5\ell - 2 \Leftrightarrow \ell = \frac{1}{2}.$$

Et donc il existe  $\lambda \in \mathbf{R}$  tel que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n = \frac{1}{2} + \lambda 5^n$ .

$$\text{En particulier, } 2 = u_0 = \frac{1}{2} + \lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Et donc pour tout } n \in \mathbf{N}, u_n = \frac{1}{2} + \frac{3 \times 5^n}{2}.$$

**Méthode**

La proposition précédente garantit l'existence de  $\lambda$ , mais pour déterminer sa valeur, on utilisera le premier terme de la suite (il faut y voir là une sorte de condition initiale).

Nous pourrions pousser bien plus loin l'analogie avec les équations différentielles, et chercher, à  $(v_n)$  fixée, toutes les suites  $(u_n)$  telles que  $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} - au_n = v_n$ .

On pourrait prouver alors qu'une telle suite est toujours la somme d'une solution particulière et d'une solution de «l'équation homogène» :  $u_{n+1} - au_n = 0$ .

Or nous savons parfaitement décrire les suites satisfaisant cette relation : ce sont les suites géométriques de raison  $a$ .

Dans le cas où  $\forall n \in \mathbf{N}, v_n = b$ , on peut chercher une solution particulière sous la forme d'une suite constante. On trouve alors facilement que la suite constante égale à  $\frac{b}{1-a}$  est solution.



Et donc toute suite vérifiant  $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} - au_n = b$  est de la forme  $u_n = \lambda a_n + \frac{b}{1-a}$ .

Si on ajoute une condition initiale, à savoir la donnée de  $u_0$ , alors cela détermine uniquement la valeur de  $\lambda$ , et on retrouve sur l'expression précédente.

### 10.3.3 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

**Définition 10.33** – On appelle **suite récurrente linéaire d'ordre 2** toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  à valeurs dans  $\mathbf{K}$  telle qu'il existe  $(a, b) \in \mathbf{K}^2$ , avec  $b \neq 0$  tels que

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0.$$

Dans ce cas, le polynôme  $X^2 + aX + b$  est appelé **polynôme caractéristique** de la suite  $(u_n)$ .

*Remarque.* Le cas  $b = 0$  correspond à celui des suites arithmético-géométriques, que nous savons déjà traiter.

**Proposition 10.34 (Cas où  $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ ) :** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite récurrente linéaire d'ordre 2, à valeurs complexes, et soit  $P(X) = X^2 + aX + b$  son polynôme caractéristique<sup>19</sup>, où  $b \neq 0$ .

- ▶ Si  $P$  possède deux racines distinctes  $r_1$  et  $r_2$ , alors il existe deux complexes  $\lambda$  et  $\mu$  tels que pour tout  $n \in \mathbf{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ .
- ▶ Si  $P$  possède une racine double  $r$ , alors il existe deux complexes  $\lambda$  et  $\mu$  tels que pour tout  $n \in \mathbf{N}, u_n = (\lambda n + \mu)r^n$ .

*Démonstration.* L'idée générale est qu'une suite  $(v_n)$  qui satisfait à la même relation de récurrence :  $\forall n \in \mathbf{N}, v_{n+2} + av_{n+1} + bv_n = 0$ , et qui en plus vérifie  $v_0 = v_1 = 0$  est entièrement nulle :  $\forall n \in \mathbf{N}, v_n = 0$ .

La preuve en est aisée :  $v_2 = -av_1 - bv_0 = 0$ . Puis  $v_3 = -av_2 - bv_1 = 0$ , etc. Une récurrence facile<sup>20</sup> amène au résultat.

▶ Supposons dans un premier temps que  $P$  possède deux racines distinctes  $r_1$  et  $r_2$ . Pour  $(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2$ , on pose alors  $v_n = u_n - \lambda r_1^n - \mu r_2^n$ . Alors

$$\begin{aligned} v_{n+2} + av_{n+1} + bv_n &= u_{n+2} - \lambda r_1^{n+2} - \mu r_2^{n+2} + au_{n+1} + a\lambda r_1^{n+1} + a\mu r_2^{n+1} + bu_n + b\lambda r_1^n + b\mu r_2^n \\ &= u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n + \lambda r_1^n (r_1^2 + ar_1 + b) + \mu r_2^n (r_2^2 + ar_2 + b) \\ &= 0 + 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Notons que ceci reste valable quel que soit le choix de  $\lambda$  et  $\mu$ .

Peut-on alors choisir  $\lambda$  et  $\mu$  tels que  $v_0 = v_1 = 0$ , et donc<sup>21</sup> que  $(v_n)$  soit la suite nulle ?

C'est le cas si et seulement si

$$\begin{cases} u_0 - \lambda - \mu = 0 \\ v_1 - \lambda r_1 + \mu r_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = u_0 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = u_1 \end{cases}$$

Il s'agit alors d'un système de deux équations en les deux inconnues  $\lambda$  et  $\mu$ , de déterminant  $r_1 - r_2 \neq 0$ , donc de Cramer, et qui possède une unique solution.

Donc il existe  $(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2$  tels que

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_n - \lambda r_1^n - \mu r_2^n = 0 \Leftrightarrow u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

▶ Dans le cas d'une racine double<sup>22</sup>  $r$ , on pose  $v_n = u_n - (\lambda n + \mu)r^n$ . Comme précédemment, on a

$$\begin{aligned} v_{n+2} + av_{n+1} + bv_n &= u_{n+2} - (\lambda(n+2) + \mu)r^{n+2} + au_{n+1} - a(\lambda(n+1) + \mu)r^{n+1} + bu_n - b(\lambda n + \mu)r^n \\ &= \underbrace{u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n}_{=0} - \lambda r^n \left( (n+2)r^2 + a(n+1)r + bn \right) - \mu r^n \left( r^2 + ar + b \right) \end{aligned}$$

$b \neq 0$

Notons que le cas  $b = 0$  n'a pas d'intérêt, il s'agirait de celui où  $(u_n)_{n \geq 1}$  est géométrique, cas que l'on sait déjà traiter.

<sup>19</sup> Ce qui implique qu'on suppose que pour tout  $n$ ,

$$u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0.$$

<sup>20</sup> Mais double.

<sup>21</sup> D'après ce qui a été dit au début de la preuve.

**Remarque**

Pour l'instant, nous n'avons vraiment parlé du déterminant que pour les systèmes de deux équations à deux inconnues réelles, mais admettons temporairement que les choses se passent de la même manière en complexe. Et si vous n'êtes pas convaincus, prouvez à la main que ce système possède une unique solution.

<sup>22</sup> Notons que cette racine ne peut être nulle. Mr V. Q. Nguyen

$$= -\lambda r^n \left( (r^2 + ar + b)n + r(2r + a) \right).$$

Mais  $r$  étant racine de  $P$ , on a  $r^2 + ar + b = 0$ , et puisqu'il s'agit d'une racine double, on a  $r = -\frac{a}{2} \Leftrightarrow 2r + a = 0$ , de sorte que  $v_{n+2} + av_{n+1} + bv_n = 0$ .

Comme précédemment, on cherche alors s'il existe des valeurs de  $\lambda$  et  $\mu$  telles que  $v_0 = v_1 = 0$  (et donc  $v_n = 0$  pour tout  $n$ ).

Mais ceci est équivalent à  $\begin{cases} \lambda = u_0 \\ (\lambda + \mu)r = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = u_0 \\ \mu = \frac{u_1}{r} - u_0 \end{cases}$ .

On conclut alors comme dans le premier cas.

Notons que dans les deux cas, nous avons prouvé un peu mieux que le résultat annoncé : il existe un **unique** couple  $(\lambda, \mu)$  tel que...  $\square$

<sup>23</sup> Appliquer la formule bien connue donnant la racine double dans le cas où  $\Delta = 0$ .

$r \neq 0$   
Puisque nous avons supposé que  $c \neq 0$ , les racines de  $P$  ne peuvent être nulles, puisque leur produit vaut  $c$ .

**Proposition 10.35 (Cas où  $K = \mathbf{R}$ ) :** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite récurrente linéaire d'ordre 2, à valeurs réelles, et soit  $P$  son polynôme caractéristique.

- ▶ Si  $P$  possède deux racines réelles distinctes  $r_1$  et  $r_2$ , alors il existe deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ .
- ▶ Si  $P$  possède une racine double  $r$ , alors il existe deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n = (\lambda n + \mu)r^n$ .
- ▶ Si  $P$  possède deux racines complexes conjuguées,  $\rho e^{\pm i\theta}$ . Alors il existe deux réels  $\lambda, \mu$  tels que

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_n = \rho^n (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)).$$

*Démonstration.* Les deux premiers cas se prouvent exactement comme dans le cas complexe. Si  $P$  possède  $\rho e^{\pm i\theta}$  comme racines complexes, avec  $\rho \neq 0$  et  $\theta \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ , alors<sup>24</sup> il existe deux complexes  $\alpha$  et  $\beta$  tels que

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_n = \alpha \rho^n e^{in\theta} + \beta \rho^n e^{-in\theta}.$$

Mais alors  $u_0 = \bar{u}_0 \Leftrightarrow \alpha \rho + \beta \rho = \bar{\alpha} \rho + \bar{\beta} \rho$ , si bien que  $\alpha + \beta = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$ .

De même,  $u_1 = \bar{u}_1 \Leftrightarrow \alpha \rho e^{i\theta} + \beta \rho e^{-i\theta} = \bar{\alpha} \rho e^{-i\theta} + \bar{\beta} \rho e^{i\theta}$ .

Et donc

$$\alpha e^{i\theta} + \beta e^{-i\theta} = (\alpha + \beta - \bar{\beta})e^{-i\theta} + \bar{\beta} e^{i\theta} \Leftrightarrow 2i\alpha \sin \theta = 2i\bar{\beta} \sin \theta.$$

Et puisque  $\sin \theta \neq 0$ ,  $\alpha = \bar{\beta}$ , si bien que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$u_n = \alpha \rho^n e^{in\theta} + \bar{\alpha} \rho^n e^{-in\theta} = 2\rho^n \operatorname{Re} \left( \underbrace{\alpha e^{in\theta}}_{=\lambda \in \mathbf{R}} \right) = \rho^n \left( \underbrace{2 \operatorname{Re}(\alpha) \cos(n\theta)}_{=\lambda \in \mathbf{R}} - \underbrace{2 \operatorname{Im}(\alpha) \sin(n\theta)}_{=\mu \in \mathbf{R}} \right).$$

$\square$



J'imagine que vous aurez reconnu la ressemblance avec les solutions de certaines équations différentielles d'ordre 2.

J'attire toutefois votre attention quant au fait que dans le cas de deux racines conjuguées de  $P$  ce sont son module et son argument ( $\rho$  et  $\theta$ ) qui vont intervenir dans les formules, alors que pour les équations différentielles, il nous fallait mettre les racines de  $P$  sous forme algébrique.

### Exemples 10.36

- ▶ Soit  $(u_n)$  la suite<sup>25</sup> définie par  $u_0 = 0$  et  $u_1 = 1$  et  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ . Alors son polynôme caractéristique est  $X^2 - X - 1$ , qui possède pour racines  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  et  $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ .

<sup>25</sup> Dite de Fibonacci

Donc il existe deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$u_n = \lambda \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \mu \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

En particulier, on a  $u_0 = \lambda \times 1 + \mu \times 1$ , de sorte que  $\lambda = -\mu$ .

Et on a  $u_1 = 1 = \lambda \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \lambda \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \lambda \sqrt{5}$ , et donc  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ .

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$ .

► Soit  $u_n$  vérifiant  $u_0 = 2$  et  $u_1 = -1$  et pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$ .

Alors son polynôme caractéristique est  $X^2 - 2X + 2$ , qui possède  $1 \pm i$  comme racines.

C'est-à-dire  $\sqrt{2}e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$ .

Donc il existe deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$u_n = (\sqrt{2})^n \left( \lambda \cos \frac{n\pi}{4} + \mu \sin \frac{n\pi}{4} \right).$$

En utilisant les valeurs de  $u_0$  et  $u_1$ , on trouve

$$\begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda + \mu = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = -3 \end{cases}$$

Et donc pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n = (\sqrt{2})^n \left( 2 \cos \frac{n\pi}{4} - 3 \sin \frac{n\pi}{4} \right)$ .