Éléments de logique

1

Observons un instant la suite de symboles suivante :

$$\big((\forall n, p \in \mathbf{N},\ n \geqslant p \Rightarrow u_n \geqslant u_p) \wedge (\exists M \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, u_n \leqslant M)\big) \Rightarrow \big(\exists \ell \in \mathbf{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon\big).$$

Si elle doit vous sembler bien mystérieuse au premier abord, il s'agit en fait d'un résultat que vous connaissez bien, à savoir le théorème de la limite monotone qui affirme qu'une suite croissante et majorée converge.

Généralement, nous préférerons continuer à l'énoncer avec une phrase («une suite croissante et majorée ...»). Mais il est important de donner un sens précis, sans ambiguité à cette phrase, et c'est précisément ce que fait la première formulation. C'est par exemple sous cette forme qu'il faudrait le dire pour le faire comprendre à un ordinateur.

Il s'agit dans ce premier chapitre d'adopter un vocabulaire rigoureux qui nous servira toute l'année, ainsi que de commencer à mettre en place de bons réflexes pour rédiger efficacement.
Nous détaillerons également les principaux modes de raisonnements[1] que nous utiliserons tout au long de l'année.

[1] Par l'absurde, par récurrence, etc.

Quelques notations usuelles

Nous utiliserons tout au long de l'année les notations usuelles pour les ensembles de nombres : $\mathbf{N}$ pour l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{Z}$ pour l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbf{Q}$ pour l'ensemble des rationnels, $\mathbf{R}$ pour l'ensemble des réels et enfin $\mathbf{C}$ pour l'ensemble des complexes.

Note historique

Ces notations ont été popularisées dans les années 1930 par Nicolas Bourbaki, pseudonyme derrière lequel se cache un groupe de mathématiciens français.
L'emploi de la lettre Z pour les entiers vient de l'allemand Zahlen (nombres) et le Q pour les rationnels de «quotient» (puisqu'un rationnel est un quotient d'entiers).

Nous supposons que ces ensembles de nombres et leurs propriétés élémentaires sont connus et nous ne les définirons rigoureusement (ce qui n'est pas chose facile...) à aucun moment.

On a donc des inclusions $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.

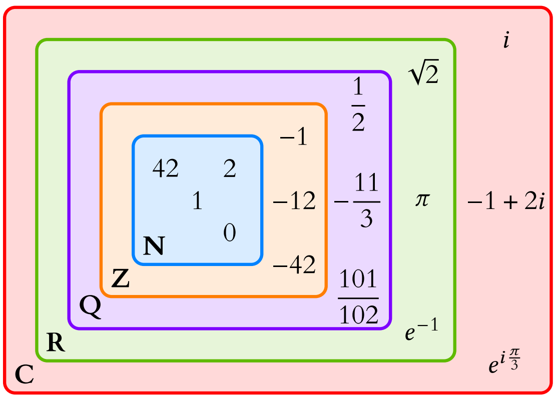


Figure 1.1 – Les inclusions entre les ensembles usuels. Notons que toutes ces inclusions sont strictes : il n'y a pas égalité entre deux de ces ensembles.

Nous donnerons dans quelques temps une définition précise de ce que sont les suites et les fonctions, mais en attendant nous nous contenterons de l'idée intuitive que vous en avez déjà.
Pour désigner une fonction nommée f, définie sur $\mathbf{R}$, on notera souvent $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, le $\mathbf{R}$ à

droite de la flèche signifiant que f est à valeurs dans $\mathbf{R}$. Autrement dit, qu'à un réel x, elle associe un autre réel $f(x)$.
Et si notre fonction f n'est définie que sur une partie de $\mathbf{R}$, par exemple sur $\mathbf{R}_+^*$ (comme c'est le cas de la fonction logarithme népérien), on note alors $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$. Encore une fois, le $\mathbf{R}$ à droite de la flèche signifiant que f est à valeurs réelles. Nous parlerons plus tard de fonctions à valeurs dans d'autres ensembles que $\mathbf{R}$, mais n'en avons pas l'utilité pour l'instant.

1.1 Propositions logiques

Une **proposition logique** (ou **assertion**) P est une phrase dont on peut dire qu'elle est soit vraie soit fausse[2].
Par exemple, la proposition «2 est positif» est vraie, et la proposition «$-1 > 2$» est fausse.
La **valeur de vérité** d'une proposition est donc soit «vrai» (noté généralement V), soit «faux» (noté F).

[2] Mais pas les deux à la fois !

Une phrase en français n'est pas forcément une proposition logique :

- «S'il n'y a pas de nuages, alors il ne pleut pas» est bien vraie, donc est une assertion logique.
- «Federer est le meilleur tennisman de tous les temps» ne fait pas l'unanimité, donc ne peut être considérée comme une proposition logique.

Remarquons qu'une proposition peut dépendre d'un ou plusieurs paramètres, comme par exemple la proposition «$\lfloor x^2 \rfloor \geqslant 9$» qui dépend d'un réel x, ou encore «n est divisible par 6», qui dépend d'un entier n. On parle alors de **prédicat**.
On fera alors attention à nommer correctement ces propositions, en faisant apparaître la ou les variables dans le nom. Par exemple $P(x)$ et $Q(n)$ et pas seulement P ou Q.
Ceci évite les confusions car par exemple, $Q(2)$ est fausse alors que $Q(6)$ est vraie. Si on l'avait nommée uniquement Q, quelle valeur de vérité donner à Q ?

Remarque
Cette notation ne doit pas vous surprendre, c'est celle que vous avez utilisé pour les récurrences en terminale !

À partir de plusieurs propositions logiques, il est possible d'en créer d'autres, par exemple la proposition «2 est positif **et** $-1 > 2$». Cette dernière proposition est fausse, puisque -1 n'est toujours pas supérieur à 2.
On peut aussi par exemple considérer la proposition «si il neige, alors il fait froid».

La **table de vérité** d'une formule R construite à base d'autres propositions[3] est un tableau donnant la valeur de vérité de R en fonction des valeurs de vérité des propositions utilisées pour la construire.

[3] Qu'on appellera des variables propositionnelles.

Par exemple, la table de vérité de la proposition «P et Q» est la suivante :

P	Q	P **et** Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Autrement dit, la proposition «P **et** Q» est vraie si et seulement si P et Q sont toutes les deux vraies.
Deux formules qui ont la même table de vérité sont dites **équivalentes**. Autrement dit, quelle que soit la valeur de vérité des variables propositionnelles qui les composent, elles ont la même valeur de vérité.
Si deux formules P et Q sont équivalentes, on note alors $P \equiv Q$.

Nous présentons dans la suite les principaux connecteurs logiques qui permettent de construire de nouvelles propositions à partir de propositions existantes.

1.1.1 Négation

Définition 1.1 – Si P est une proposition logique, alors sa **négation** notée $\neg P$ (ou **non** P) est la proposition qui est vraie si et seulement si P est fausse.

Elle a donc la table de vérité suivante :

P	$\neg P$
V	F
F	V

Exemples 1.2

La négation de $P : x < 4$ est $\neg P : x \geqslant 4$.
La négation de «il fait chaud tous les jours» est «certains jours, il ne fait pas chaud».
Et sûrement pas «tous les jours, il ne fait pas chaud» !
La négation de $P : x^2 = 3$ et $\neg P : x^2 \neq 3$.
La négation de $P : -1 < x \leqslant 2$ est $\neg P : x \leqslant -1$ **ou** $x > 2$.

Proposition 1.3 (Loi de la double négation) : *Si P est une proposition logique, alors $\neg(\neg P) \equiv P$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que P et $\neg(\neg P)$ ont la même table de vérité :

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$
V	F	V
F	V	F

□

1.1.2 Conjonction («et») et disjonction («ou»)

Définition 1.4 – Soient P et Q deux propositions logiques.

1. La **conjonction** de P et Q, notée $P \wedge Q$ (ou «P **et** Q») est la proposition qui est vraie si et seulement si P et Q sont simultanément vraies, et qui est fausse sinon.
2. La **disjonction** de P et Q, notée $P \vee Q$ (ou «P **ou** Q») est la proposition qui est fausse si et seulement si P et Q sont simultanément fausses, et qui est vraie sinon.

Autrement dit, les tables de vérité de ces deux propositions sont données par

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Autrement dit
P **ou** Q est vraie dès que l'une (ou les deux !) des deux propositions P et Q est vraie.

Ordre ?
L'ordre n'a bien évidemment aucune importance : $P \wedge Q$ et $Q \wedge P$ sont équivalentes, de même que $P \vee Q$ et $Q \vee P$.

Exemple 1.5

Si n est un entier naturel, alors si $P(n)$ est la proposition «n est pair», si $Q(n)$ est la proposition «n est divisible par 3», alors $P(n) \wedge Q(n)$ est la proposition «n est divisible par 6».
En revanche, $P(n) \vee Q(n)$ est la proposition «n est divisible par 2 ou par 3», qui est vraie pour tous les entiers qui ne sont pas de la forme $6k+1$ ou $6k+5$, $k \in \mathbf{N}$.

⚠ En français, le **ou** est souvent (mais pas toujours) exclusif, comme dans «fromage **ou** dessert». Autrement dit, on considère qu'il est vrai si une et une seule des propositions qui le composent est vraie.
En logique, le **ou** que l'on manipule, et dont on vient de donner la table de vérité est inclusif : (P **ou** Q) est vraie dès que l'une des deux propositions P ou Q est vraie, y compris si les deux sont vraies.

Proposition 1.6 : *Pour toute proposition P, on a :*

1. $P \wedge (\neg P)$ *est fausse*
2. $P \vee (\neg P)$ *est vraie (principe du tiers-exclus).*

Remarque
Ces deux propositions traduisent le fait que P est toujours soit vraie soit fausse (il n'y a pas de troisième option), et ne peut être les deux à la fois.

Démonstration. Dresser les tables de vérité de $P \wedge (\neg P)$ et $P \vee (\neg P)$. □

Proposition 1.7 (Négation d'une conjonction/disjonction) : *Soient P et Q deux propositions logiques. On a alors*

1. $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$.
   Autrement dit **non**$(P$ **et** $Q) \equiv ($**non** $P)$ **ou** $($**non** $Q)$.
2. $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$.
   Autrement dit **non**$(P$ **ou** $Q) \equiv ($**non** $P)$ **et** $($**non** $Q)$.

Démonstration. Une fois encore, dressons des tables de vérité.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$(\neg P) \wedge (\neg Q)$
V	V	F	F	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V	V	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V	F	V	V

Nous constatons donc que les tables de vérité de $\neg(P \wedge Q)$ et $(\neg P) \vee (\neg Q)$ (resp. $\neg(P \vee Q)$ et $(\neg P) \wedge (\neg Q)$) sont les mêmes. □

Exemple 1.8

Si P est la proposition : «je fais du ski» et Q la proposition «je fais de l'escalade», alors $P \wedge Q$ est la proposition «je fais du ski et de l'escalade».
Sa négation est $(\neg P) \vee (\neg Q)$: «je ne fais pas de ski ou ne fais pas d'escalade».
Et pas : «je ne fais ni ski ni escalade» !
En effet, si vous ne pratiquez que l'un des deux sports, alors $P \wedge Q$ est fausse, donc $\neg(P \wedge Q)$ est vraie, alors que $(\neg P) \wedge (\neg Q)$ est fausse.
En revanche, la négation de $P \vee Q$ («je fais du ski ou de l'escalade) est bien $(\neg P) \wedge (\neg Q)$: «je ne pratique pas le ski et ne pratique pas l'escalade» (ou encore «je ne pratique ni le ski ni l'escalade»).

Le résultat qui suit est plutôt intuitif, mais il est bon de le mentionner :

Proposition 1.9 (Associativité de $\wedge$ et $\vee$) : *Soient P, Q, R trois assertions logiques. Alors*

1. $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$
2. $(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$

Démonstration. Dresser des tables de vérité. □

La proposition précédente signifie que lorsqu'on utilise plusieurs fois de suite le même symbole $\vee$ ou $\wedge$, il n'est pas utile de mettre des parenthèses. Attention, ceci n'est plus vrai si l'on mélange conjonction $(\wedge)$ et disjonction $(\vee)$.
Mais on dispose alors du résultat suivant :

Proposition 1.10 (Distributivités) : *Soient P, Q, R trois propositions logiques. Alors*

1. $(P \vee Q) \wedge R \equiv (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$.
   Soit encore $(P$ **ou** $Q)$ **et** $R \equiv (P$ **et** $R)$ **ou** $(Q$ **et** $R)$.
2. $(P \wedge Q) \vee R \equiv (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$.
   Soit encore $(P$ **et** $Q)$ **ou** $R \equiv (P$ **ou** $R)$ **et** $(Q$ **ou** $R)$.

Démonstration. Prouvons uniquement le premier point, comme toujours à l'aide d'une table de vérité.

P	Q	R	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \wedge R$	$(P \wedge R)$	$(Q \wedge R)$	$(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	F	V
V	F	F	V	F	F	F	F
F	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

□

1.1.3 Implication, équivalence

Définition 1.11 (Implication) – Si P et Q sont deux propositions, on note $P \Rightarrow Q$, et on lit «P implique Q» la proposition dont la table de vérité est la suivante :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Remarque
$P \Rightarrow Q$ est fausse si et seulement si P est vraie et que Q est fausse.

Dire que la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie signifie que dès que P est vraie, alors Q l'est aussi. Par exemple, si x est un nombre réel, alors «$x \geqslant 4 \Rightarrow x \geqslant 0$» est vraie, puisqu'un réel plus grand que 4 est positif. En revanche, si x n'est pas plus grand que 4 (donc si $x \geqslant 4$ est fausse), alors $x \geqslant 0$ peut être vraie (par exemple si $x = 1$) ou fausse (si $x = -1$).

Proposition 1.12 : *Si P et Q sont deux propositions logiques, alors $P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$.*

Démonstration.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

□

Remarques. ► Puisqu'on a toujours une des deux propositions P et $\neg P$ qui est vraie, on a donc une méthode simple pour prouver une implication $P \Rightarrow Q$: il faut prouver que quand P est vraie, alors Q l'est aussi. Autrement dit, supposer P pour montrer Q.
En revanche, il n'y a absolument pas besoin de se préoccuper du cas où P n'est pas vraie.
► La proposition précédente nous permet aussi de donner la négation de $P \Rightarrow Q$:

$$\neg(P \Rightarrow Q) \equiv \neg(\neg P \vee Q) \equiv P \wedge (\neg Q).$$

Remarque
Le résultat n'est pas très surprenant : l'implication sera fausse si P peut-être vraie sans que Q ne le soit.

Rédaction : En vertu de la remarque ci-dessus, pour prouver une implication $P \Rightarrow Q$, on commencera donc par «Supposons P», pour arrive à la conclusion que Q est vraie.

Dans une copie, un symbole $\Rightarrow$ ne remplace pas un «donc».
En particulier, si vous écrivez $P \Rightarrow Q$, cela ne signifie en aucun cas que Q est vraie.
Par exemple, l'implication $x \geqslant 1 \Rightarrow x^2 \geqslant 1$ est vraie, mais si $x = 3$, il n'est pas vrai que

$x^2 \geqslant 1$.
La signification de $P \Rightarrow Q$ est «**si** P est vraie, **alors** Q est vraie».
Si votre but est de prouver que Q est vraie, vous pouvez donc prouver que $P \Rightarrow Q$, et que P est vraie.
En termes plus formels, la proposition suivante[4] : $(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$ est vraie.
Si l'implication $P \Rightarrow Q$ est évidente, ou qu'elle a été prouvée précédemment, on se contentera d'un «P est vraie, **donc** Q est vraie».

[4] Pafois appelée *modus ponens*.

Exemple 1.13

Soient a et b deux réels. Prouvons que $|a-b| \geqslant 1 \Rightarrow ab \leqslant \frac{1}{2}\left(a^2+b^2-1\right)$.
Soient donc a, b des réels tels que $|a-b| \geqslant 1$.
Alors $(a-b)^2 = |a-b|^2 \geqslant 1^2 = 1$.
Donc $a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 1$, et donc $ab \leqslant \frac{1}{2}\left(a^2+b^2-1\right)$.

Définition 1.14 (Contraposée d'une implication) – On appelle **contraposée** de la proposition $P \Rightarrow Q$ la proposition $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$.

Proposition 1.15 : *La proposition $P \Rightarrow Q$ est équivalente à sa contraposée.*

Démonstration. Nous pourrions le prouver à l'aide d'une table de vérité[5], mais notons plutôt que $(P \Rightarrow Q) \equiv (\textbf{non}\, P)$ **ou** Q.
Et donc $(\textbf{non}\, Q) \Rightarrow (\textbf{non}\, P)$ est équivalente à $(\textbf{non}(\textbf{non}\, Q))$ **ou** $(\textbf{non}\, P)$, soit encore à Q **ou** $(\textbf{non}\, P)$. □

[5] Encore une...

Un exemple simple de la vie de tous les jours est le suivant : la proposition «s'il neige alors il fait froid» a pour contraposée «s'il ne fait pas froid, alors il ne neige pas».

Cette proposition d'apparence anodine est en réalité très importante : pour montrer qu'une implication est vraie, on peut en fait montrer que sa contraposée est vraie
Par exemple, si n est un entier, prouvons la proposition «si n^2 est pair, alors n est pair». Soit encore «n^2 pair $\Rightarrow n$ pair».
Sa contraposée est alors «n impair $\Rightarrow n^2$ impair».
Or, si $n = 2k+1$ est impair, alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$ est impair.
Ainsi, «n impair $\Rightarrow n^2$ impair» est vraie, et donc sa contraposée «n^2 pair $\Rightarrow n$ pair» est également vraie.

Terminologie
On parle alors de raisonnement par contraposition.

Définition 1.16 – Soient P et Q deux assertions.

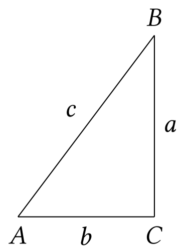
1. Si la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie, alors on dit que
   — P est une **condition suffisante** de Q, ce qui traduit que dès que P est vraie, alors Q l'est aussi.
   — Q est une **condition nécessaire** de P, ce qui traduit que P ne peut pas être vraie si Q n'est pas vraie.
2. La proposition $Q \Rightarrow P$ est appelée **réciproque** de la proposition $P \Rightarrow Q$.

Autrement dit
Pour que Q soit vraie, il **suffit** que P le soit.
Pour que P soit vraie, il est nécessaire que Q le soit aussi.

⚠ Il ne faut pas confondre réciproque et contraposée.
Comme dit précédemment, une implication et sa contraposée ont même valeur de vérité.
En revanche, il n'y a pas de lien entre une implication et sa réciproque, l'une peut être vraie et pas l'autre, les deux peuvent être vraies, etc.

Par exemple, si ABC est un triangle de côtés a, b, c, alors vous savez depuis toujours que $(ABC \text{ est rectangle en } C) \Rightarrow (a^2+b^2=c^2)$ (c'est le théorème de Pythagore).

Sa contraposée est $(a^2 + b^2 \neq c^2) \Rightarrow$ (ABC n'est pas rectangle en C) est donc également vraie, et peut-être utilisée pour prouver qu'un triangle n'est pas rectangle.
Et la réciproque est $(a^2 + b^2 = c^2) \Rightarrow$ (ABC est rectangle en C) est également vraie, mais c'est un résultat à part entière, et pas une conséquence immédiate du théorème de Pythagore.



En revanche, si f est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, alors la proposition

$$f \text{ est dérivable et sa dérivée est positive} \Rightarrow f \text{ est croissante}$$

est vraie, mais sa réciproque ne l'est pas. En effet, la fonction $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array} \right.$ est une[6] fonction croissante sur $\mathbf{R}$ qui n'est pas dérivable sur $\mathbf{R}$.

[6] Parmi bien d'autres !

De même, l'implication f dérivable $\Rightarrow f$ continue est vraie, mais sa réciproque est fausse, avec la fonction valeur absolue comme contre-exemple.

Définition 1.17 (Équivalence) – Si P et Q sont deux propositions logiques, on note $P \Leftrightarrow Q$ la proposition qui est vraie si et seulement si P et Q ont les mêmes valeurs de vérité :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Remarque
Cette table de vérité nous convainc facilement que $P \Leftrightarrow Q$ est équivalente à
$$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q).$$

⚠ Si j'écris $P \Longleftrightarrow Q$, je ne me prononce ni sur la valeur de P, ni sur celle de Q.
Par exemple, si x est un réel, alors $x + 2 = x \Leftrightarrow 2 = 0$.
L'équivalence ainsi écrite est vraie, mais ne signifie pas que l'une ou l'autre des deux assertions qui la composent le soient. Elle dit juste que si l'une des deux assertions est vraie, alors l'autre l'est aussi.
Si on prouve $P \Leftrightarrow Q$, et qu'on veut en déduire que Q est vraie, il ne faudra pas oublier de prouver que P est vraie (ou au moins de le mentionner si ceci est trivial).

Exemple 1.18

Soient a et b deux réels. Alors

$$ab < \frac{a^2 + b^2}{2} \Leftrightarrow 2ab < a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab > 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 > 0.$$

Si la suite d'équivalences ci-dessus est correcte, elle ne suffit pas à prouver $ab < \frac{a^2+b^2}{2}$.
D'ailleurs, la suite d'équivalences suivante est également correcte :

$$ab > \frac{a^2 + b^2}{2} \Leftrightarrow 2ab > a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab < 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 < 0.$$

En revanche si on suppose de plus que $a \neq b$, alors $a - b \neq 0$, et donc $(a - b)^2 > 0$.
Et donc en vertu de la première équivalence, il vient $ab < \dfrac{a^2 + b^2}{2}$.

Proposition 1.19 (Équivalence et double implication) : *Si P et Q sont deux propositions logiques, alors les propositions $P \Leftrightarrow Q$ et $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ sont équivalentes.*

Démonstration.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

□

Remarque. Ceci justifie le raisonnement par double implication : pour prouver une équivalence, il est possible de prouver séparément les deux implications.

1.2 QUANTIFICATEURS

1.2.1 Quantificateur universel, quantificateur existentiel

Nous avons vu plus haut des exemples de propositions dépendant d'un ou plusieurs paramètres, qui peuvent être vraies pour certaines valeurs du paramètre et fausses pour d'autres.

Définition 1.20 (Quantificateur universel) – Soit P un prédicat dépendant d'une variable x.
On note $\forall x \in E,\ P(x)$, et on lit «pour tout x appartenant à E, $P(x)$», la proposition qui est vraie si quel que soit l'élément x dans l'ensemble E, la proposition $P(x)$ est vraie.
Le symbole $\forall$ est appelé **quantificateur universel**.

Exemples 1.21

- La proposition $\forall x \in \mathbf{R},\ x^2 \geqslant 0$ est vraie, puisqu'un carré est toujours positif.
- La proposition $\forall x \in \mathbf{R},\ x^2 + 2x \geqslant 0$ est fausse, puisque pour $x = -1$, on a $x^2 + 2x = -1 < 0$.
- La proposition $\forall n \in \mathbf{Z},\ n^2 \in \mathbf{N}$ est vraie puisque le carré d'un entier relatif est **toujours** un entier naturel.
- La proposition $\forall n \in \mathbf{N},\ n - 1 \in \mathbf{N}$ est fausse puisque pour $n = 0$, on a $n - 1 = -1 \notin \mathbf{N}$.
- La proposition $\forall x \in \mathbf{R},\ x \geqslant 2 \Rightarrow x \geqslant 3$ est fausse. En effet, pour $x = 2$, on a $x \geqslant 2$ qui est vraie, et $x \geqslant 3$ qui est fausse, de sorte que $x \geqslant 2 \Rightarrow x \geqslant 3$ est fausse.
- En revanche, $\forall x \in \mathbf{R},\ x \geqslant 2 \Rightarrow x > 0$ est vraie.
  En effet, si x est un réel, deux cas de figure sont possibles :
  — soit $x \geqslant 2$, et alors on a bien $x > 0$, de sorte que $x \geqslant 2 \Rightarrow x > 0$ est vraie ;
  — soit $x < 2$, auquel cas $x \geqslant 2$ est fausse et donc $x \geqslant 2 \Rightarrow x > 0$ est vraie.
- Soit (u_n) une suite. Alors la proposition $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = u_0$ signifie que la suite est constante.

Remarque
Notons que $n = 0$ est le seul entier de $\mathbf{N}$ pour lequel $n - 1 \notin \mathbf{N}$. Par conséquent, la proposition
$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ n - 1 \in \mathbf{N}$$
est vraie.

Rédaction : pour prouver une proposition du type $\forall x \in E,\ P(x)$, on commencera systématiquement par «Soit $x \in E$», pour arriver à la conclusion que $P(x)$ est vraie.
Ceci signifie que l'on prend un x dont on sait qu'il est dans E, mais qui peut être n'importe quel élément de E (autrement dit, x est un élément quelconque de E).
Si on arrive alors à prouver $P(x)$, en n'utilisant que les propriétés communes à tous les éléments de E, alors on a bien prouvé $\forall x \in E,\ P(x)$.
Si on part de «Soit $n \in \mathbf{N}$» et que pour prouver $\mathscr{P}(n)$ on utilise que n est pair, alors il y a un problème : certains élément de $\mathbf{N}$ sont bien pairs, mais ce n'est pas un point commun à tous les entiers. Donc nous sommes en train de prouver $\forall n \in \{2k,\ k \in \mathbf{N}\},\ P(n)$ et non $\forall n \in \mathbf{N},\ P(n)$.

Détails
L'ensemble noté
$$\{2k, k \in \mathbf{N}\}$$
est l'ensemble des multiples de 2, donc l'ensemble des entiers pairs.

Définition 1.22 (Quantificateur existentiel) – On note $\exists x \in E,\ P(x)$, et on lit «il existe x appartenant à E tel que $P(x)$», la proposition qui est vraie si il existe au moins un[7] élément x_0 de E pour lequel $P(x_0)$ soit vraie.
Le symbole $\exists$ est appelé **quantificateur existentiel**.

[7] Il peut y en avoir plusieurs !

Exemples 1.23

► La proposition $\exists x \in \mathbf{R},\ x \geqslant 0$ est vraie, puisqu'il existe bien un réel positif, par exemple $x = 4$.
► La proposition $\exists z \in \mathbf{C},\ z^2 + 1 = 0$ est vraie, puisque $z = i$ convient[8].
► En revanche, la proposition $\exists x \in \mathbf{R},\ x^2 + 1 = 0$ est fausse. On prendra donc bien garde à l'ensemble auquel appartient la variable quantifiée.
► Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction, alors la proposition $\exists x \in \mathbf{R},\ f(x) = 0$ signifie que f s'annule au moins une fois.
Par exemple, elle est vraie si f est la fonction $x \mapsto x^2 - 1$, puisque $f(1) = 0$.

[8] Notons que $z = -i$ convient également.

Rédaction : Il est beaucoup plus difficile de prouver des propositions du type $\exists x \in E,\ P(x)$ puisqu'il faut pour cela exhiber un $x \in E$ vérifiant $P(x)$. Et que pour trouver un tel x, il faut en général un peu d'intuition.
Mais une fois qu'on a trouvé un tel x, la rédaction est simplissime, il faut se contenter de «Notons $x = \dots$» (où l'on remplace $\dots$ par la valeur de x qu'on a «devinée»), et on prouve qu'alors $P(x)$ est vraie.

Il reste enfin une dernière notation, qui n'est qu'une variation du précédent : on note $\exists! x \in E,\ P(x)$ pour signifier qu'il existe un **unique** $x \in E$ vérifiant la propriété P.
Autrement dit, on note $\exists! x \in E,\ P(x)$ pour

$$\exists x \in E,\ \big(P(x) \textbf{ et } (\forall y \in E,\ (P(y) \Rightarrow y = x))\big)$$

qui signifie qu'il existe un $x \in E$ qui satisfait $P(x)$, et que tout autre $y \in E$ satisfaisant la propriété P doit être égal à x, ce qui est bien l'idée qu'on se fait de l'unicité.
On a donc notamment $(\exists! x \in E,\ P(x)) \Rightarrow (\exists x \in E,\ P(x))$.

Exemple 1.24

La proposition $\exists! x \in \mathbf{R},\ x^2 = 4$ est fausse, puisque $x = 2$ et $x = -2$ vérifient tous les deux $x^2 = 4$.
En revanche, $\exists! x \in \mathbf{R}_+,\ x^2 = 4$ est vraie, puisque $x = 2$ est l'unique réel **positif** dont le carré vaut 4.

1.2.2 Négation des propositions quantifiées

Faute de définition formelle et rigoureuse des quantificateurs, nous ne pouvons qu'admettre les résultats suivants, qui sont très intuitifs.

Proposition 1.25 :
1. *La négation de* $\forall x \in E,\ P(x)$ *est* $\exists x \in E,\ \textbf{non}\, P(x)$.
2. *La négation de* $\exists x \in E,\ P(x)$ *est* $\forall x \in E,\ \textbf{non}\, P(x)$.

Danger !
La négation de

$$\forall x \in E,\ P(x)$$

n'est surtout pas

$$\forall x \in E,\ \textbf{non}\, P(x).$$

Exemples 1.26

► La négation de $\forall x \in \mathbf{R},\ x^2 + 1 \geqslant 0$ est $\exists x \in \mathbf{R},\ x^2 + 1 < 0$.
Puisque la proposition de départ est vraie, sa négation est fausse.
► La négation de $\exists n \in \mathbf{N},\ \dfrac{n}{3} \in \mathbf{N}$ est $\forall n \in \mathbf{N},\ \dfrac{n}{3} \notin \mathbf{N}$.
Puisque la proposition de départ est vraie (par exemple pour $n = 3$), sa négation est fausse.
► Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$. Alors la négation de «$f$ est la fonction nulle» est $\exists x \in \mathbf{R},\ f(x) \neq 0$.
À ne pas confondre avec $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) \neq 0$ qui signifie que la fonction f ne s'annule jamais !
► Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, alors la proposition «$f$ est croissante» s'écrit

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \forall y \in \mathbf{R},\ x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y).$$

Donc sa négation[9] est

$$\exists x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, \mathbf{non}(x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)).$$

Mais nous avons déjà mentionné que la négation de $P \Rightarrow Q$ est P **et** $(\mathbf{non}\, Q)$.
Donc la négation de «f est croissante» est

$$\exists x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R},\ x \leqslant y \ \mathbf{et}\ f(x) > f(y).$$

▸ L'assertion suivante signifie qu'une fonction $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ est constante :

$$\exists a \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}_+,\ f(x) = a.$$

Sa négation est

$$\forall a \in \mathbf{R},\ \exists x \in \mathbf{R}_+,\ f(x) \neq a.$$

[9] Qui n'est pas «f est décroissante» !

Autrement dit

Il existe deux réels dont les images sont dans l'ordre inverse.
Ce qui est différent de la décroissance de f.

Nous utiliserons parfois une quantification du type $\forall \varepsilon > 0$, ou $\exists x < 1$, qui sont des raccourcis pour $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ et $\exists x \in]-\infty, 1[$.
L'usage de ce type de quantifications ne pose généralement pas de problème, mais on sera tout de même vigilant au moment d'écrire leur négation : la négation de $\forall x > 0, P(x)$ est $\exists x > 0,\ \neg P(x)$, et surtout pas $\exists x \leqslant 0,\ \neg P(x)$.

Exemple 1.27

Soit $(u_n)_n$ une suite. La négation de

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, (n \geqslant N \Rightarrow |u_n| \leqslant \varepsilon)$$

est

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbf{N}, \exists n \in \mathbf{N}, (n \geqslant N\ \mathbf{et}\ |u_n| > \varepsilon).$$

En effet, rappelons que la négation de $P \Rightarrow Q$ est P **et** $(\mathbf{non}\, Q)$.

Explication

Dans quelques temps, cette assertion sera la définition de $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

1.2.3 Succession de quantificateurs

Une proposition logique peut contenir plusieurs quantificateurs successifs.
Par exemple, $\forall n \in \mathbf{N},\ \exists m \in \mathbf{Z},\ n = m + 1$.
Déterminons la valeur de vérité de cette proposition, en la découpant en morceaux plus simples.
Notons $P(n)$ la proposition $\exists m \in \mathbf{Z},\ n = m + 1$.
Alors $P(0)$ est vraie, puisque $m = -1$ convient, $P(1)$ est vraie puisque $m = 0$ convient, etc.
Plus généralement, si $n \in \mathbf{Z}$, alors $P(n)$ est vraie, puisqu'on peut prendre $m = n - 1$, qui est encore un élément de $\mathbf{Z}$.
Et donc notre proposition de départ, qui n'est autre que $(\forall n \in \mathbf{Z},\ P(n))$ est vraie.

Cet exemple prouve que, lorsqu'on a deux quantificateurs à la suite, et que le second est un quantificateur existentiel, alors la seconde variable (ici m) peut dépendre de la première (ici n) : pour tout n, il existe un m **dépendant du n choisi** tel que $n = m + 1$.

⚠ Dans une expression possédant plusieurs quantificateurs, changer l'ordre des quantificateurs peut changer la valeur de vérité de la proposition !
Par exemple, la proposition $\exists m \in \mathbf{Z},\ \forall n \in \mathbf{N},\ n = m + 1$ est fausse. En effet, elle signifierait qu'il existe un entier m tel que $m = n - 1$, et ce pour tous les entiers naturels n (avec le **même** m).
Plus rigoureusement, supposons par l'absurde qu'un tel m existe. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n = m + 1$. Et donc en particulier, $0 = m + 1$, donc $m = -1$.
Et de même, pour $n = 1$, $1 = m + 1$, donc $1 = 0$, ce qui est évidemment absurde.
Plus généralement, on peut permuter l'ordre de deux quantificateurs universels, on peut permuter l'ordre de deux quantificateurs existentiels, mais on ne peut pas toujours permuter l'ordre de deux quantificateurs différents.

Exemples 1.28

- Les propositions $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}_+, x^2 \geqslant -y$ et $\forall y \in \mathbf{R}_+, \forall x \in \mathbf{R}, x^2 \geqslant -y$ sont équivalentes[10].
- De même, $\exists n \in \mathbf{N}, \exists p \in \mathbf{N}, n = 2p$ et $\exists p \in \mathbf{N}, \exists n \in \mathbf{N}, n = 2p$ signifient toutes deux qu'il existe un entier pair.

[10] Et elles sont les deux vraies.

On s'autorisera à écrire $\forall x, y \in E, P(x, y)$ au lieu de $\forall x \in E, \forall y \in E, P(x, y)$.
Par exemple : $\forall x, y \in \mathbf{R}, x \leqslant y \Leftrightarrow \exists z \geqslant 0, y = x + z$.
Et de même, on pourra écrire $\exists x, y \in E$, ou encore $\exists x, y, z \in E$.

1.3 LES MODES DE RAISONNEMENTS

1.3.1 Par disjonction de cas

Il est possible de prouver une proposition du type $\forall x \in E, P(x)$ en écrivant E sous la forme $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n$, et en prouvant séparément les assertions

$$\forall x \in E_1, P(x), \qquad \forall x \in E_2, P(x) \qquad \dots, \forall x \in E_n, P(x).$$

Remarque
Les E_i peuvent être deux à deux disjoints, ou avoir des éléments en commun (dans ce cas, pour les x se trouvant dans plusieurs des E_i, on aura prouvé plusieurs fois que $P(x)$ est vraie).

Exemple 1.29

Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $n^3 - n$ est divisible par 3.
Pour cela, notons que $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1)$.
Distinguons alors trois cas, suivant la valeur du reste de la division de n par 3 :

- si n est de la forme $3k$, avec $k \in \mathbf{N}$. Alors $n^3 - n = (3k-1)3k(3k+1)$ est divisible par 3.
- si n est de la forme $3k+1$, avec $k \in \mathbf{N}$. Alors $n^3 - n = 3k(3k+1)(3k+2)$ est divisible par 3.
- si n est de la forme $3k+2$, avec $k \in \mathbf{N}$. Alors $n^3 - n = (3k+2)(3k+3)(3k+4) = 3(3k+2)(k+1)(3k+4)$ est divisible par 3.

Détails
Ici on aurait

$$\mathbf{N} = E_0 \cup E_1 \cup E_2,$$

où E_i est l'ensemble des entiers congrus à i modulo 3.

1.3.2 Par contraposition

Nous avons mentionné précédemment qu'une implication $P \Rightarrow Q$ est toujours équivalente à sa contraposée $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$.
Et donc pour prouver qu'une implication est vraie, on peut se contenter de prouver sa contraposée.

Intuition
L'idée qui se cache ici est assez simple : si P était vraie, puisque $P \Rightarrow Q$, alors Q serait vraie également.
Mais Q et sa négation ne peuvent être vraies en même temps !

Exemple 1.30

Prouvons que si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair.
Si on souhaite vraiment tout quantifier, cette proposition est

$$\forall n \in \mathbf{N}, (\forall k \in \mathbf{N}, n^2 - 1 \neq 8k) \Rightarrow (\exists p \in \mathbf{N}, n = 2p).$$

Cela dit, nous n'avons pas besoin de tout écrire avec des quantificateurs.
La contraposée est «n impair $\Rightarrow n^2 - 1$ est divisible par 8», et nous allons prouver que cette contraposée est vraie.
Soit donc n un entier impair. Il existe donc $p \in \mathbf{Z}$ tel que $n = 2p + 1$, et alors

$$n^2 - 1 = (2p+1)^2 - 1 = 4p^2 + 4p = 4p(p+1).$$

Or, l'un des deux entiers p et $p+1$ est pair[11], donc $p(p+1)$ est pair, de sorte qu'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $p(p+1) = 2k$.
Et donc $n^2 - 1 = 4 \cdot 2k = 8k$ est divisible par 8.
Ainsi, la contraposée de notre proposition initiale est vraie, et donc la proposition de départ l'est aussi.

[11] De deux entiers consécutifs, l'un (et un seul) est toujours pair.

1.3.3 Par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde consiste à prouver que $\neg P \Rightarrow$ **Faux**, c'est-à-dire à supposer que P est fausse, pour arriver à **Faux**, c'est-à-dire à une contradiction (qui est généralement le fait qu'une assertion Q et sa négation sont simultanément vraies : $Q \wedge \neg Q \equiv$ **Faux**).
Mais on a toujours $\neg P \Rightarrow$ **Faux** $\equiv P \vee$ **Faux** $\equiv P$.
Et donc si $\neg P \Rightarrow$ **Faux** est vrai, alors P est également vraie.

Détails
Puisque **Faux** est toujours faux, **Faux ou** P a même valeur de vérité que P.

Exemple 1.31 Irrationalité de $\sqrt{2}$

Prouvons par l'absurde que $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.
À cet effet, supposons que $\sqrt{2}$ est un rationnel, et soit alors $\dfrac{p}{q}$ une fraction irréductible égale à $\sqrt{2}$.
Alors $2 = \dfrac{p^2}{q^2}$ et donc $2q^2 = p^2$.
Donc p^2 est pair, et donc p lui-même est pair.
Et donc il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $p = 2k$, et donc $p^2 = (2k)^2 = 4k^2$.
Donc $2q^2 = 4k^2$, et alors $q^2 = 2k^2$ est pair. Donc q est pair.
Mais p et q étant tous deux divisibles par 2, ceci vient contredire l'irréductibilité de la fraction $\dfrac{p}{q}$.
Et donc notre hypothèse initiale est fausse : $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

Remarque
Nous avons déjà prouvé un peu plus tôt que p^2 pair $\Rightarrow p$ pair.

Exemple 1.32 Principe des tiroirs de Dirichlet

Si vous rangez $n + 1$ paires de chaussettes dans une commode à n tiroirs, alors il existe un tiroir qui contient au moins deux paires de chaussettes.
En effet, supposons par l'absurde que chaque tiroir contienne au plus une seule paire de chaussettes.
Alors la commode contient au plus $\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ fois}}$ paires de chaussettes, ce qui est absurde.
Par conséquent, un tiroir contient au moins deux paires de chaussettes.
Ce résultat est loin d'être anodin et sert plus souvent qu'il n'y paraît[12].

⚠ Attention !
La négation de «au moins 2» est bien «au plus une», et pas «une seule».
Un tiroir peut tout à fait ne contenir aucune paire de chaussettes.

[12] Même si nous nous en servirons plutôt pour ranger des nombres dans des ensembles que des chaussettes dans des tiroirs...

1.3.4 Le raisonnement par analyse-synthèse

Expliquons le raisonnement par analyse-synthèse sur un exemple : prouvons que toute fonction définie sur $\mathbf{R}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Soit donc $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction.

► **Analyse** : supposons qu'il existe deux fonctions f_1 paire et f_2 impaire telles que $f = f_1 + f_2$.
Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.
Donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = f_1(x) - f_2(x)$.
En sommant ces deux égalités, il vient $f(x)+f(-x) = 2f_1(x)$ et donc $f_1(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$.
Et de même, $f(x) - f(-x) = 2f_2(x)$ donc $f_2(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.
Donc si deux telles fonctions existent, ce sont nécessairement celles définies par : pour tout $x \in \mathbf{R}$

$$f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

► **Synthèse** : nous cherchons désormais à prouver que deux telles fonctions f_1 et f_2 existent.
Or le raisonnement tenu dans la phase d'analyse nous dit ce que doivent être ces fonctions, il n'y a pas le choix.

Rappel (?)
Une fonction $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est dite **paire** si

$$\forall x \in \mathbf{R},\ g(-x) = g(x)$$

et elle est dite **impaire** si

$$\forall x \in \mathbf{R},\ g(-x) = -g(x).$$

Remarque
Nous venons donc de prouver l'unicité : seules les fonctions écrites ici sont susceptibles de convenir. Mais nous n'avons pas encore prouvé l'existence de deux telles fonctions (nous l'avions **supposée** dans le raisonnement que nous venons de tenir).
La synthèse a pour but de prouver l'existence.

Reste à vérifier que les formules obtenues précédemment pour f_1 et f_2 définissent bien une fonction paire et une fonction impaire dont la somme vaut f.
Posons donc, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f_1(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $f_2(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.
Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f_1(-x) = \dfrac{f(-x)+f(-(-x))}{2} = \dfrac{f(-x)+f(x)}{2} = f_1(x)$, de sorte que f_1 est paire.
D'autre part, $f_2(-x) = \dfrac{f(-x)-f(-(-x))}{2} = \dfrac{f(-x)-f(x)}{2} = -f_2(x)$ donc f_2 est impaire.
Enfin, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $f_1(x)+f_2(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} + \dfrac{f(x)-f(-x)}{2} = \dfrac{2f(x)}{2} = f(x)$.
Donc $f = f_1 + f_2$.
Donc nous venons de prouver qu'il existe bien deux telles fonctions f_1 et f_2.

▸ **Conclusion** : il existe un unique couple formé d'une fonction paire et d'une fonction impaire dont la somme vaut f.

⚠ Si on oublie la synthèse, on prouve seulement qu'il existe **au plus** un tel couple, mais pas qu'il en existe **au moins** un !

En résumé, la phase d'analyse revient à dire «s'il existe une solution au problème posé, alors la/les voilà». La synthèse n'est alors rien d'autre qu'une vérification.

Un tel raisonnement peut aussi servir à résoudre une équation/inéquation.

Exemple 1.33

Résolvons l'équation $\sqrt{x+2} = x$, d'inconnue $x \in [-2, +\infty[$.

> **$x \geqslant -2$**
> x doit nécessairement être supérieur ou égal à -2 faute de quoi l'égalité n'a pas de sens.

Analyse : supposons qu'un réel x soit une solution de l'équation.
Alors $\sqrt{x+2} = x$, et donc $\left(\sqrt{x+2}\right)^2 = x^2$, soit encore $x+2 = x^2$.
Les solutions de cette équation sont -1 et 2, si bien que l'ensemble des solutions de $\sqrt{x+2} = x$ est **inclus** dans $\{-1, 2\}$. Autrement dit, si l'équation admet des solutions, celles-ci ne peuvent être égales qu'à -1 ou à 2.
Soyons clairs, il n'y a aucune raison d'affirmer que l'ensemble des solutions est **égal** à $\{-1, 2\}$.

> **Autrement dit**
> L'analyse nous donne une liste de candidats possibles pour être des solutions. Reste à voir si ce sont vraiment des solutions.

C'est d'ailleurs à ceci que sert la phase de **synthèse** : soit $x \in \{-1, 2\}$.
Alors si $x = -1$, $\sqrt{x+2} = 1 \neq -1$, si bien que -1 n'est pas solution.
En revanche, si $x = 2$, alors $\sqrt{x+2} = 2$, et donc 2 est solution.
Ainsi, l'équation $\sqrt{x+2} = x$ possède une unique solution, qui est 2.

1.4 Le raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence, que vous avez déjà manipulé en terminale, connaît plusieurs variantes, dont le but est à chaque fois de montrer qu'un prédicat $\mathscr{P}(n)$, dépendant de n, est valable pour tout n dans une certaine partie de $\mathbf{N}$.

1.4.1 Récurrence simple

C'est la récurrence étudiée en terminale : on initialise la récurrence à $n_0 \in \mathbf{N}$, et on prouve que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$.
Ceci prouve alors que $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant n_0 \Rightarrow \mathscr{P}(n)$.

Plus rigoureusement :

Théorème 1.34 : *Soit $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que*

1. *$\mathscr{P}(n_0)$ est vraie*
2. *$\forall n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n_0)$.*

Alors pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n)$.

La preuve de ce principe ne sera pas donnée, elle fait partie des axiomes définissant $\mathbf{N}$, et donc nous ne pourrons que l'admettre.

Exemple 1.35

Montrons que pour tout $n \geqslant 4$, $2^n \leqslant n!$
Soit donc $\mathscr{P}(n)$ la propriété $2^n \leqslant n!$
Initialisation : $\mathscr{P}(4)$ est vérifiée car $2^4 = 16 \leqslant 24 = 4!$
Hérédité : soit $n \geqslant 4$ tel que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie.
Alors $2^{n+1} = 2 \times 2^n \leqslant 2 \times n! \leqslant (n+1) \times n! \leqslant (n+1)!$.
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par le principe de récurrence, pour tout $n \geqslant 4$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

1.4.2 Récurrence multiple à pas fixé

Commençons par la récurrence double : il s'agit d'une légère variation de la précédente, où pour prouver $\mathscr{P}(n+1)$, vous n'avez pas seulement besoin de savoir que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, mais aussi que $\mathscr{P}(n-1)$ est vraie.

Le principe est donc le suivant : on initialise la récurrence en prouvant que pour un certain $n_0 \in \mathbf{N}$, $\mathscr{P}(n_0)$ et $\mathscr{P}(n_0+1)$ sont toutes deux vraies.
Puis on prouve que $(\mathscr{P}(n)$ **et** $\mathscr{P}(n+1)) \Rightarrow \mathscr{P}(n+2)$.
Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant n_0 \Rightarrow \mathscr{P}(n)$.

Exemple 1.36

Soit $x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. Montrons par récurrence double sur $n \in \mathbf{N}$ que $x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbf{Z}$.
Soit donc $\mathscr{P}(n)$: $x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbf{Z}$.
Initialisation : $\mathscr{P}(0)$ est vraie car $x^0 + \dfrac{1}{x^0} = 1 + 1 = 2 \in \mathbf{Z}$.
$\mathscr{P}(1)$ est vraie car

$$x + \frac{1}{x} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{2(3-\sqrt{5})}{9-5} = \frac{6+2\sqrt{5}+6-2\sqrt{5}}{4} = 3.$$

Hérédité : soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ soient vraies. Alors

$$\left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{n+2} + x^n + \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n+2}}$$

et donc

$$x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}} = \underbrace{\left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right)}_{\in \mathbf{Z} \text{ car } \mathscr{P}(n+1)} \underbrace{\left(x + \frac{1}{x}\right)}_{=3} - \underbrace{\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)}_{\in \mathbf{Z} \text{ car } \mathscr{P}(n)} \in \mathbf{Z}.$$

Donc $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.
Par le principe de récurrence **double**, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

⚠ Attention !
Qui dit récurrence **double** dit initialisation **double**.

Ce principe se généralise à des récurrences triples, quadruples, etc.
Énonçons directement un «principe de récurrence d'ordre k» (qui pour $k = 2$ correspond donc à ce que l'on vient de faire dans l'exemple) :

Proposition 1.37 : *Soit $\mathcal{P}(n)$ un prédicat dépendant d'un entier $n \in \mathbf{N}$, et soit $k \in \mathbf{N}$ fixé. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que*

1. *$\mathcal{P}(n_0), \mathcal{P}(n_0+1), \cdots \mathcal{P}(n_0+k)$ soient vraies*
2. *pour tout $n \geqslant n_0$, $(\mathcal{P}(n)$ **et** $\mathcal{P}(n+1)$ **et** $\dots$ **et** $\mathcal{P}(n+k)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+k+1)$.*

Alors, pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Démonstration. Pour $n \in \mathbf{N}$, notons $\mathcal{Q}(n)$ la proposition $\mathcal{P}(n) \wedge \mathcal{P}(n+1) \wedge \cdots \wedge \mathcal{P}(n+k)$.
Par hypothèse, $\mathcal{Q}(n_0)$ est vraie.
Soit $n \geqslant n_0$ tel que $\mathcal{Q}(n)$ soit vraie.
Alors $\mathcal{P}(n), \dots, \mathcal{P}(n+k)$ sont vraies.
Donc $\mathcal{P}(n+k+1)$ est vraie.
Ainsi, $\mathcal{P}(n+1), \mathcal{P}(n+2), \dots, \mathcal{P}(n+k), \mathcal{P}(n+1+k)$ sont vraies.
Donc $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie.
Par le principe de récurrence simple appliqué à la proposition $\mathcal{Q}(n)$, pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie.
Et en particulier, pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. □

1.4.3 Récurrence forte

Cette fois, il s'agit d'une récurrence où pour prouver $\mathcal{P}(n+1)$, on a non seulement besoin de savoir que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, mais aussi que $\mathcal{P}(n-1), \mathcal{P}(n-2), \dots, \mathcal{P}(0)$ sont vraies.

Exemple 1.38

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite vérifiant $u_0 \geqslant 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
Prouvons que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant 2^n u_0$.
Notons donc $\mathcal{P}(n)$ le prédicat $u_n \leqslant 2^n u_0$.
Alors $\mathcal{P}(0)$ est trivialement vérifié.
Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathcal{P}(k)$ soit vrai. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\leqslant u_0\left(2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n\right) \\ &\leqslant u_0 \frac{1-2^{n+1}}{1-2} \\ &\leqslant u_0\left(2^{n+1}-1\right) \leqslant u_0 2^{n+1}. \end{aligned}$$

Par le principe de récurrence **forte**, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant u_0 2^n$.

Détails
On a utilisé à la fois $\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \dots, \mathcal{P}(n)$.

Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 2.

Proposition 1.39 : *Soit $\mathcal{P}(n)$ un prédicat dépendant d'un entier n tel qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ vérifiant :*

1. *$\mathcal{P}(n_0)$ est vrai.*
2. *pour tout $n \geqslant n_0$, $(\forall k \in [\![n_0, n]\!], \mathcal{P}(k)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.*

Alors pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vrai.

Démonstration. Notons $\mathcal{Q}(n)$ la proposition «$\forall k \in [\![n_0, n]\!], \mathcal{P}(k)$ est vraie».
Alors $\mathcal{Q}(n_0)$ n'est rien d'autre que $\mathcal{P}(n_0)$, donc est vraie par hypothèse.
Supposons que $\mathcal{Q}(n)$ soit vraie. Alors $\mathcal{P}(n_0), \mathcal{P}(n_0+1), \dots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies.
Par hypothèse, cela implique que $\mathcal{P}(n+1)$ soit vraie.
Donc $\mathcal{P}(n_0), \dots, \mathcal{P}(n), \mathcal{P}(n+1)$ sont vraies : $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie.
Par le principe de récurrence (simple), pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. □

1.4.4 Récurrence finie

Citons enfin une dernière variante du principe de récurrence : la récurrence finie, qui consiste non plus à supposer que $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$, mais

seulement pour $n \in [\![n_0, n_1 - 1]\!]$.
Alors dans ce cas, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in [\![n_0, n_1]\!]$.

Exemple 1.40

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ fixé. Prouvons que pour tout $p \in [\![1, n+1]\!]$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^p < 1 + \frac{p}{n} + \left(\frac{p}{n}\right)^2$.
Pour $p = 1$, on a $1 + \frac{1}{n} < 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$, donc la récurrence est initialisée.
Soit $p \leqslant n$ tel que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^p < 1 + \frac{p}{n} + \frac{p^2}{n^2}$. Alors

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+1} &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^p \left(1+\frac{1}{n}\right)\\
&< \left(1+\frac{p}{n}+\frac{p^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\\
&\leqslant 1 + \frac{p+1}{n} + \frac{p^2}{n^2} + \frac{p}{n^2} + \frac{p^2}{n^3}\\
&\leqslant 1 + \frac{p+1}{n} + \frac{p^2}{n^2} + \frac{p}{n^2} + \frac{p}{n^2}\\
&\leqslant 1 + \frac{p+1}{n} + \frac{p^2+2p}{n^2}\\
&\leqslant 1 + \frac{p+1}{n} + \frac{(p+1)^2}{n^2}.
\end{aligned}$$

Nous avons ici utilisé le fait que $p \leqslant n$ et donc $\frac{p}{n} \leqslant 1$.

Par le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $p \in [\![1, n+1]\!]$,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^p < 1 + \frac{p}{n} + \frac{p^2}{n^2}.$$

En particulier, pour $p = n$, alors $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$.

Or nous prouverons plus tard dans l'année que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$, et donc ceci prouve[13] que $e \leqslant 3$.

[13] Sans aucun calcul de valeur approchée.

1.4.5 La récurrence fausse !

Juste pour la culture, citons une petite curiosité.
Prouvons par récurrence sur n que pour tout $n \geqslant 1$, n crayons sont toujours de la même couleur.
On note donc $\mathscr{P}(n)$ la proposition : quels que soient les n crayons $C_1, \dots, C_n$, alors ils ont tous la même couleur.
$\mathscr{P}(1)$ est vrai si je n'ai qu'un crayon, alors tous mes crayons sont de la même couleur.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie, et soient $C_1, \dots, C_{n+1}$, $n+1$ crayons.
Alors par hypothèse de récurrence, $C_1, \dots, C_n$ sont de même couleur, de la couleur de C_2.
De même, $C_2, \dots, C_{n+1}$ sont de même couleur, de la couleur de C_2.
Et donc $C_1, \dots, C_n, C_{n+1}$ ont tous la couleur de C_2.
Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, et donc par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Pourtant j'ai dans ma trousse un crayon bleu et trois crayons rouges, qui ne sont clairement pas de la même couleur ! Où se cache le problème ?