MP2I : Colle 30 (15/06/26 au 19/06/26)

Reprise de tout le programme précédent : espaces préhilbertiens

Groupes symétriques et déterminants

- Groupe symétrique : définition, notation d'une permutation sous forme de tableau. Support d'une permutation. p-cycles, transpositions.
- Toute permutation de $\mathfrak{S}_n$ s'écrit de manière unique (à l'ordre des facteurs près) comme produit de cycles à supports disjoints. *Démonstration non exigible.* Toute permutation est produit de transpositions.
- Signature d'une transposition : c'est l'unique morphisme de groupes non trivial de $\mathfrak{S}_n$ dans $\{-1, 1\}$, il vaut -1 sur les transpositions. *La démonstration de l'existence est hors programme, seule l'unicité est exigible.* Signature d'un p-cycle.
- Formes n-linéaires, n-linéaires alternées. Une forme n-linéaire est alternée si et seulement si elle est antisymétrique. Si φ est une forme n-linéaire alternée d'un espace E de dimension n, de base $(e_1, \dots, e_n)$, alors pour toute famille $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n) = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, alors $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$.
- Déterminant d'une famille de n vecteurs dans une base $\mathscr{B}$: c'est l'unique forme n-linéaire alternée telle que $\varphi(\mathscr{B}) = 1$.
  Si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et que φ est une forme n-linéaire alternée sur E, alors $\varphi = \varphi(e_1, \dots, e_n) \det_{\mathscr{B}}$.
  Toute forme n-linéaire alternée φ est proportionnelle à $\det_{\mathscr{B}}$ avec un coefficient de proportionnalité égal à $\varphi(\mathscr{B})$.
  Formule de changement de base. Une famille de n vecteurs est une base si et seulement si son déterminant dans la base $\mathscr{B}$ est non nul.
- Déterminant d'une matrice carrée.
  Effet des opérations élémentaires sur les colonnes sur un déterminant. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
  Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.
  Deux matrices semblables ont même déterminant. A et $A^\top$ ont même déterminant.
- Calcul de déterminants par opérations sur les lignes et les colonnes. Déterminant d'une matrice triangulaire.
- Mineurs, cofacteurs. Développement par rapport à une ligne ou une colonne.
  Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.
- Comatrice. $A^\top \mathrm{Com}(A) = A^\top \mathrm{Com}(A) = \det(A) I_n$.
- Déterminant de Vandermonde.
- Déterminant d'un endomorphisme (défini comme étant le déterminant de sa matrice dans n'importe quelle base).
  $\det(g \circ f) = \det(g)\det(f)$. $\det_{\mathscr{B}}(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \det(f) \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)$.