MP2I : Colle 30 (08/06/26 au 13/06/26)

Intégration

- *Reprise de tout le programme précédent*
- Sommes de Riemann.

Espaces préhilbertiens

- Définition d'un produit scalaire sur un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. Exemples à connaître : produit scalaire canonique sur $\mathbf{R}^n$, $\int_a^b f(t)g(t)\,dt$ sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbf{R})$, $\mathrm{tr}({}^tAB)$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
- Calculs à l'aide d'un produit scalaire : bilinéarité, identités remarquables.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité.
- Norme associée à un produit scalaire. Inégalité triangulaire (et cas d'égalité). Identités de polarisation.
- Orthogonalité d'une famille de vecteurs.
- Orthogonalité de deux sous-espaces vectoriels. Deux sous-espaces orthogonaux sont en somme directe.
- Famille orthogonales et orthonormée. Une telle famille ne contenant pas le vecteur nul est libre.
- Théorème de Pythagore.
- Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Existence de bases orthonormées en dimension finie. Théorème de la base orthonormée incomplète. Calcul de la norme et du produit scalaire dans une base orthonormée.
- Orthogonal d'une partie de E : définition, propriétés. $F \subset (F^\perp)^\perp$.
- Si F est de dimension finie, alors $F^\perp$ est supplémentaire à F. C'est le seul supplémentaire de F qui soit orthogonal à F. Et $F = (F^\perp)^\perp$.
- Projecteur orthogonal sur un sous-espace de dimension finie. Distance d'un point x à une partie A. Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, alors $d(x,F) = \|x - p_F(x)\|$.