MP2I : Colle 29 (09/06/25 au 13/06/25)

Reprise du programme précédent : espaces préhilbertiens.

Intégration

- Fonctions uniformément continues. Théorème de Heine.
- Fonctions en escalier sur un segment (notation : $\mathscr{E}([a,b],\mathbf{R})$). Intégrale des fonctions en escalier.
- Fonctions continues par morceaux sur un segment. L'ensemble $\mathscr{C}_m([a,b],\mathbf{R})$ est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathscr{F}([a,b],\mathbf{R})$. Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux par une fonction en escaliers. Définition de l'intégrale d'une fonction f continue par morceaux comme étant la limite de $\int_a^b \varphi_n(t)\,dt$ où (φ_n) est n'importe quelle suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$.
  Les détails de la construction ne sont pas exigibles.
  Propriétés de l'intégrale : linéarité, Chasles, positivité, inégalité triangulaire.
- Si f est continue sur $[a,b]$ et de signe constant, alors $\int_a^b f(t)\,dt = 0 \Leftrightarrow f = 0$.
- Théorème fondamental de l'analyse : si f est continue sur I, alors $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.
- Intégrale des fonctions paires, impaires, périodiques.
- Formule de Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange. Application : calcul de la somme des séries exponentielles.
- Sommes de Riemann : si $f : [a,b] \to \mathbf{K}$ est continue par morceaux, alors $\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,dt$.
  La preuve n'a été donnée que dans le cas d'une fonction continue.