MP2I : Colle 27 (21/05/24 au 26/05/24)

Séries numériques

- *Reprise de tout le programme précédent*
- Critère spécial des séries alternées : convergence et majoration du reste.

Groupes symétriques et déterminants

- Groupe symétrique : définition, notation d'une permutation sous forme de tableau. Support d'une permutation. p-cycles, transpositions.
- Toute permutation de $\mathfrak{S}_n$ s'écrit de manière unique (à l'ordre des facteurs près) comme produit de cycles à supports disjoints *Démonstration non exigible*. Toute permutation est produit de transpositions.
- Signature d'une transposition : c'est l'unique morphisme de groupes non trivial de $\mathfrak{S}_n$ dans $\{-1, 1\}$, il vaut -1 sur les transpositions. *La démonstration de l'existence est hors programme, seule l'unicité est exigible.* Signature d'un p-cycle.
- Formes n-linéaires, n-linéaires alternées. Une forme n-linéaire est alternée si et seulement si elle est antisymétrique. Si φ est une forme n-linéaire alternée d'un espace E de dimension n, de base $(e_1, \dots, e_n)$, alors pour toute famille $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n) = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, alors $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$.
- Déterminant d'une famille de n vecteurs dans une base $\mathscr{B}$: c'est l'unique forme n-linéaire alternée telle que $\varphi(\mathscr{B}) = 1$.
- Déterminant d'une famille de n vecteurs dans une base $\mathscr{B}$: c'est l'unique forme n-linéaire alternée telle que $\varphi(\mathscr{B}) = 1$.
  Toute forme n-linéaire alternée φ est proportionnelle à $\det_{\mathscr{B}}$ avec un coefficient de proportionnalité égal à $\varphi(\mathscr{B})$. Formule de changement de base. Une famille de n vecteurs est une base si et seulement si son déterminant dans la base $\mathscr{B}$ est non nul.
- Déterminant d'une matrice carrée.
  Effet des opérations élémentaires sur les colonnes sur un déterminant. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
  Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.
  Deux matrices semblables ont même déterminant. A et $A^\top$ ont même déterminant.
- **Pas de déterminant de matrices triangulaires/diagonales, et pas de développement par rapport à une ligne et une colonne pour l'instant.**