MP2I : Colle 26 (13/05/24 au 17/05/24)

Intégration

- Sommes de Riemann : si $f : [a, b] \to \mathbf{K}$ est continue par morceaux, alors $\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,dt$.

  La preuve n'a été donnée que dans le cas d'une fonction continue.

Espaces probabilisés et variables aléatoires

Tous les univers considérés en première année sont ***finis****.*

- Vocabulaire des probabilités : univers, événement élémentaire, événement, contraire d'un événement, événements incompatibles. Système complet d'événements.
- Probabilité sur un univers fini (application $\mathbf{P}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$ telle que $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ et $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$ pour A, B incompatibles.).
- Règles de calcul usuelles : probabilité de $\overline{A}$, de $A \cup B$, croissance de la probabilité.
- Probabilité uniforme. Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ est fini et si $p_1, \dots, p_n$ sont des réels positifs dont la somme vaut 1, alors il existe une unique probabilité sur Ω telle que pour tout i, $\mathbf{P}(\{\omega_i\}) = p_i$.
- Probabilités conditionnelles. Définition, formule des probabilités composées, formule(s) des probabilités totales, formule(s) de Bayes.
- Indépendance de deux événements. Indépendance mutuelle de n événements.
- Variable aléatoire finie (à valeur dans un ensemble quelconque). Support d'une variable aléatoire, système complet d'événements associé à X.
- Loi d'une variable aléatoire. Lois usuelles (Bernoulli $\mathscr{B}(p)$, binomiale $\mathscr{B}(n, p)$, loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$ $\mathscr{U}([\![a, b]\!])$).
- *Ni espérance, ni variance, ni indépendance de variables aléatoires pour l'instant.*

Séries numériques

- Définition d'une série (à valeurs réelles ou complexes), sommes partielles.
- Convergence d'une série, somme d'une série convergente. Restes d'une série convergente.
- Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.
- Critère usuels pour les séries à termes positifs : inégalités, équivalents.
- Comparaison série intégrale : si $f : [1, +\infty[\to \mathbf{R}$ est continue, positive et décroissante, alors $\sum f(n)$ est convergente si et seulement si la suite $\left(\displaystyle\int_1^n f(t)\,dt\right)$ est convergente. Application à l'obtention d'équivalents pour les sommes partielles d'une série divergente (ex : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$) et à l'obtention d'équivalents pour les restes d'une série convergente.
- Séries de référence : série exponentielle ($x^n/n!$, $x \in \mathbf{R}$), séries géométriques, séries de Riemann.
- Séries absolument convergentes. La convergence absolue implique la convergence. Inégalité triangulaire.
- Si $(u_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ et $(v_n) \in (\mathbf{R}_+)^{\mathbf{N}}$ sont telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$. et $\sum v_n$ CV, alors $\sum u_n$ converge absolument. Règle $n^\alpha u_n$: s'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $\sum u_n$ CV absolument.
- Critère de d'Alembert : si $(u_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$, et si $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, alors si $\ell < 1$, $\sum u_n$ CV absolument, et si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.