MP2I : Colle 26 (12/05/25 au 16/05/25)

Reprise du programme précédent : espaces probabilisés et variables aléatoires.

Séries numériques

- Définition d'une série (à valeurs réelles ou complexes), sommes partielles.
- Convergence d'une série, somme d'une série convergente. Restes d'une série convergente.
- Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.
- Critère usuels pour les séries à termes positifs : inégalités, équivalents.
- Comparaison série intégrale : si $f : [1,+\infty[\to \mathbf{R}$ est continue, positive et décroissante, alors $\sum f(n)$ est convergente si et seulement si la suite $\left(\int_1^n f(t)\,dt\right)$ est convergente. Application à l'obtention d'équivalents pour les sommes partielles d'une série divergente (ex : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$) et à l'obtention d'équivalents pour les restes d'une série convergente.
- Séries de référence : série exponentielle ($x^n/n!$, $x \in \mathbf{R}$), séries géométriques, séries de Riemann.
- Séries absolument convergentes. La convergence absolue implique la convergence. Inégalité triangulaire.
- Si $(u_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ et $(v_n) \in (\mathbf{R}_+)^{\mathbf{N}}$ sont telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$. et $\sum v_n$ CV, alors $\sum u_n$ converge absolument. Règle $n^\alpha u_n$: s'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $\sum u_n$ CV absolument.
- Critère de d'Alembert : si $(u_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$, et si $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, alors si $\ell < 1$, $\sum u_n$ CV absolument, et si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Critère spécial des séries alternées : convergence et majoration du reste.