MP2I : Colle 24 (14/04/25 au 18/04/25)

Reprise du programme précédent : dénombrement, convexité.

Représentations matricielles en algèbre linéaire

- Matrice d'une application linéaire dans des bases (notation $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ où $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $\mathscr{B}$ base de E et $\mathscr{C}$ base de F), matrice d'un vecteur ou d'une famille de vecteurs.
- Applications linéaires canoniquement associées à une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ (de $\mathbf{K}^p$ dans $\mathbf{K}^n$ ou encore de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$).
- Compatibilité de $f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$. f est un isomorphisme si et seulement si sa matrice (dans toutes bases) est inversible. Une matrice carrée est inversible si et seulement si elle est inversible à droite ou à gauche.
- Rang d'une matrice. Le rang d'une application linéaire est le rang de sa matrice dans toutes bases. Caractérisation des matrices inversibles par le rang. Invariance du rang par multiplication par une matrice inversible.
- Calcul pratique du rang d'une matrice par opérations sur les lignes. Rang d'une matrice échelonnée.
- Une famille de cardinal $\dim E$ est une base si et seulement si sa matrice dans n'importe quelle base est inversible. Matrice de passage entre deux bases (notation $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E)$). Formules de changement de base (pour les vecteurs, pour les applications linéaires, pour les endomorphismes).
- Relation de similitude. Deux matrices semblables ont même rang et même trace. Trace d'un endomorphisme.
- Relation d'équivalence des matrices sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Une matrice de rang r est équivalente à $\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$. Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles sont de même rang. Une matrice et sa transposée ont même rang (et donc le rang est le rang de la famille des lignes).
- Matrices extraites. Le rang d'une matrice A est la taille de sa plus grande matrice extraite inversible.
- Noyau et image d'une matrice. Forme matricielle d'un système d'équations linéaires, structure de l'ensemble des solutions et nombre de solutions (sur un corps infini).