MP2I : Colle 23 (08/04/24 au 12/04/24)

Fonctions convexes

Toutes les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I.

- Définition de la convexité. Interprétation graphique : sur $[a, b]$, la courbe de f est située au dessus de la corde joignant a à b.
  En dehors de $[a, b]$, la corde est en dessous.
- Caractérisation de la convexité par la croissance des fonctions $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, pour tout $a \in I$. Inégalité des pentes.
  Si f est une fonction convexe sur un intervalle **ouvert**, alors elle est continue (*démonstration non exigible*).
- Inégalité de Jensen.
- Une fonction dérivable est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante, si et seulement si son graphe est au dessus de ses tangentes.

Représentations matricielles en algèbre linéaire

- Matrice d'une application linéaire dans des bases (notation $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ où $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $\mathscr{B}$ base de E et $\mathscr{C}$ base de F), matrice d'un vecteur ou d'une famille de vecteurs.
- Applications linéaires canoniquement associées à une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ (de $\mathbf{K}^p$ dans $\mathbf{K}^n$ ou encore de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$).
- Compatibilité de $f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$. f est un isomorphisme si et seulement si sa matrice (dans toutes bases) est inversible. Une matrice carrée est inversible si et seulement si elle est inversible à droite ou à gauche.
- Rang d'une matrice. Le rang d'une application linéaire est le rang de sa matrice dans toutes bases. Caractérisation des matrices inversibles par le rang. Invariance du rang par multiplication par une matrice inversible.
- Calcul pratique du rang d'une matrice par opérations sur les lignes. Rang d'une matrice échelonnée.
- Une famille de cardinal $\dim E$ est une base si et seulement si sa matrice dans n'importe quelle base est inversible. Matrice de passage entre deux bases (notation $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E)$). Formules de changement de base (pour les vecteurs, pour les applications linéaires, pour les endomorphismes).
- Relation de similitude. Deux matrices semblables ont même rang et même trace. Trace d'un endomorphisme.
- *Pas encore de matrices équivalentes, ni de noyau et image d'une matrice.*