MP2I : Colle 22 (28/03/26 au 03/04/26)

Reprise du programme précédent (dérivation)

Dénombrement

- Cardinal d'un ensemble fini non vide E (l'unique $n \in \mathbf{N}^*$ tel qu'il existe une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur E). Une partie F d'un ensemble fini E est finie et $\mathrm{Card}(F) \leqslant \mathrm{Card}(E)$ avec égalité si et seulement si $E = F$.
- Si $f : E \to F$ est injective (resp. surjective), alors $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$ (resp. $\geqslant$). Principe (des tiroirs) de Dirichlet. Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est injective ssi elle est surjective ssi elle est bijective.
- Cardinal de $A \cup B$, d'une union disjointe de n parties de E. *La formule du crible est hors programme.* Cardinal d'un produit cartésien d'ensembles finis, de E^F, de $\mathscr{P}(E)$. Lemme des bergers.
- Arrangements et combinaisons. Réinterprétation des formules classiques sur les coefficients binomiaux par des arguments combinatoires.

Le programme officiel stipule que «l'utilisation systématique de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme».

Fonctions convexes

Toutes les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I.

- Définition de la convexité. Interprétation graphique : sur $[a, b]$, la courbe de f est située au dessus de la corde joignant a à b.
  En dehors de $[a, b]$, la corde est en dessous.
- Caractérisation de la convexité par la croissance des fonctions $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, pour tout $a \in I$. Inégalité des pentes.
  Si f est une fonction convexe sur un intervalle **ouvert**, alors elle est continue (*démonstration non exigible*).
- Inégalité de Jensen.
- Une fonction dérivable est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante, si et seulement si son graphe est au dessus de ses tangentes.