

# MP2I : COLLE 19 (10/03/25 AU 14/03/25)

---

Reprise du programme précédent (analyse asymptotique) plus

## ESPACES VECTORIELS ET APPLICATIONS LINÉAIRES

- ▶ Structure d'espace vectoriel. Espaces vectoriels usuels :  $\mathbf{K}^n$ ,  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ ,  $\mathbf{K}[X]$ ,  $\mathcal{F}(X, E)$ , où  $X$  est un ensemble quelconque et  $E$  un  $\mathbf{K}$ -ev. Règles de calcul dans un espace vectoriel.
- ▶ Sous-espace vectoriel. Caractérisation des sev. Intersection de sev.
- ▶ Combinaisons linéaires, espace engendré par une partie (notation  $\text{Vect}$ ). Si  $X$  est une partie de  $E$  (finie ou infinie),  $\text{Vect}(X)$  est le plus petit sev de  $E$  qui contient  $X$ .  
Si  $x_n \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1})$ , alors  $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1})$ .
- ▶ Famille libres (finies et infinies). Une famille de polynômes de degrés deux à deux distincts est libre.
- ▶ Bases. Une famille  $(e_i)_{i \in I}$  est une base de  $E$  si et seulement si tout vecteur de  $E$  s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des  $(e_i)$ .
- ▶ Somme de deux sous-espaces vectoriels.  $F + G$  est le plus petit sous-espace vectoriel de  $E$  qui contient à la fois  $F$  et  $G$ . Somme de  $n$  sous-espaces vectoriels. L'union d'une famille génératrice de  $F$  et d'une famille génératrice de  $G$  est génératrice de  $F + G$ .
- ▶ Somme directe de deux sous-espaces vectoriels. Caractérisation via  $F \cap G$ . Somme de  $n$  sous-espaces vectoriels.
- ▶ Sous-espaces supplémentaires dans  $E$ .  $E = F \oplus G$  si et seulement si tout vecteur de  $E$  s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de  $F$  et d'un élément de  $G$ .
- ▶ Applications linéaires. Somme et composée d'applications linéaires. Anneau  $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ .
- ▶ Image et noyau d'une application linéaire. Caractérisation de l'injectivité par le noyau. L'image par  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  d'une famille génératrice de  $E$  est une famille génératrice de  $\text{Im } f$ .
- ▶ Isomorphismes.
- ▶ Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base. Caractérisation de l'injectivité/la surjectivité/la bijectivité par l'image d'une base.
- ▶ Projecteurs et symétries : définition de la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$ .  $p \in \mathcal{L}(E)$  est une projection si et seulement si  $p \circ p = p$ , et dans ce cas c'est la projection sur  $\text{Im } p$  parallèlement à  $\text{Ker } p$ . Symétries, relation avec les projecteurs (si  $s$  (resp.  $p$ ) est la symétrie (resp. la projection) par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$ , alors  $s = 2p - \text{id}_E$ ).
- ▶ Définition d'une application linéaire par ses restrictions à deux sous-espaces supplémentaires.