MP2I : Colle 18 (04/03/24 au 08/03/24)

Reprise du programme précédent (anaylse asymptotique) plus

Espaces vectoriels et applications linéaires

- Structure d'espace vectoriel. Espaces vectoriels usuels : $\mathbf{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $\mathbf{K}[X]$, $\mathcal{F}(X, E)$, où X est un ensemble quelconque et E un $\mathbf{K}$-ev. Règles de calcul dans un espace vectoriel.
- Sous-espace vectoriel. Caractérisation des sev. Intersection de sev.
- Combinaisons linéaires, espace engendré par une partie (notation Vect). Si X est une partie de E (finie ou infinie), $\mathrm{Vect}(X)$ est le plus petit sev de E qui contient X.
  Si $x_n \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1})$, alors $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1})$.
- Famille libres (finies et infinies). Une famille de polynômes de degrés deux à deux distincts est libre.
- Bases (famille libre génératrice). Une famille $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des (e_i).
- Somme de deux sous-espaces vectoriels. $F + G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient à la fois F et G. Somme de n sous-espaces vectoriels. L'union d'une famille génératrice de F et d'une famille génératrice de G est génératrice de $F + G$.
- Somme directe de deux sous-espaces vectoriels. Caractérisation via $F \cap G$. Somme de n sous-espaces vectoriels.
- Sous-espaces supplémentaires dans E. $E = F \oplus G$ si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.
- Applications linéaires. Somme et composée d'applications linéaires. Anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$.
- Image et noyau d'une application linéaire. Caractérisation de l'injectivité par le noyau. L'image par $f \in \mathcal{L}(E, F)$ d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\, f$.
- Isomorphismes. Caractérisation par l'image d'une base.
- Projecteurs et symétries : définition de la projection sur F parallèlement à G. $p \in \mathcal{L}(E)$ est une projection si et seulement si $p \circ p = p$, et dans ce cas c'est la projection sur $\mathrm{Im}\, p$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, p$. Symétries, relation avec les projecteurs (si s (resp. p) est la symétrie (resp. la projection) par rapport à F parallèlement à G, alors $s = 2p - \mathrm{id}_E$).
- Définition d'une application linéaire par ses restrictions à deux sous-espaces supplémentaires.