

MP2I : COLLE 17 (10/02/25 AU 14/02/25)

Reprise du programme précédent (fonctions continues)

CHAPITRE 18 : POLYNÔMES À UNE INDÉTERMINÉE

La plupart des définitions ont été données pour \mathbf{K} corps quelconque, mais le programme officiel nous demande de nous limiter à $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

- ▶ Définition des polynômes, structure d'anneau commutatif. Composition des polynômes.
- ▶ Degré d'un polynôme, ensemble $\mathbf{K}_n[X]$, intégrité de $\mathbf{K}[X]$.
- ▶ Polynôme dérivé/dérivé $n^{\text{ème}}$. Dérivée d'une somme/d'un produit/d'une composée. Formule de Leibniz.
- ▶ Relation de divisibilité dans $\mathbf{K}[X]$. Division euclidienne.
- ▶ Racines d'un polynôme. a est racine de P si et seulement P est divisible par $X - a$. Multiplicité d'une racine.
- ▶ Formule de Taylor. $a \in \mathbf{K}$ est racine de P de multiplicité $m \in \mathbf{N}^*$ si et seulement si $P(a) = P'(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$.
- ▶ Factorisation par les racines distinctes : si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des racines distinctes de P de multiplicités m_1, \dots, m_n , alors P est divisible par $(X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_n)^{m_n}$.
Le nombre de racines, comptées avec multiplicité ne peut pas dépasser le degré, et conséquences (un polynôme de $\mathbf{K}_n[X]$ qui possède $n + 1$ racines est nul, un polynôme qui possède une infinité de racines est nul). Polynômes scindés.
- ▶ Théorème de d'Alembert-Gauss (admis). Tout polynôme de $\mathbf{C}[X]$ est scindé.
- ▶ Polynômes irréductibles. Tout polynôme est produit d'irréductible. Description et unicité de la décomposition sur $\mathbf{R}[X]$ et sur $\mathbf{C}[X]$ (ces résultats seront précisés dans un chapitre ultérieur d'arithmétique des polynômes).
- ▶ Relations racines-coefficients.
- ▶ Polynômes de Lagrange L_0, L_1, \dots, L_n associés à des scalaires $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$: définition, $L_i(\lambda_j) = \delta_{i,j}$. Tout polynôme de $\mathbf{K}_n[X]$ s'écrit de manière comme combinaison linéaire de (L_0, L_1, \dots, L_n) .

 Pas d'arithmétique des polynômes pour l'instant.