MP2I : Colle 16 (05/01/24 au 09/02/24)

Reprise du programme précédent plus :

Chapitre 18 : Polynômes à une indéterminée

La plupart des définitions ont été données pour $\mathbf{K}$ *corps quelconque, mais le programme officiel nous demande de nous limiter à* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

- Définition des polynômes, structure d'anneau commutatif. Composition des polynômes.
- Degré d'un polynôme, ensemble $\mathbf{K}_n[X]$, intégrité de $\mathbf{K}[X]$.
- Polynôme dérivé/dérivé $n^{\text{ème}}$. Dérivée d'une somme/d'un produit/d'une composée. Formule de Leibniz.
- Relation de divisibilité dans $\mathbf{K}[X]$. Division euclidienne.
- Racines d'un polynôme. a est racine de P si et seulement P est divisible par $X - a$. Multiplicité d'une racine.
- Formule de Taylor. $a \in \mathbf{K}$ est racine de P de multiplicité $m \in \mathbf{N}^*$ si et seulement si $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$.
- Factorisation par les racines distinctes : si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des racines distinctes de P de multiplicités $m_1, \ldots, m_n$, alors P est divisible par $(X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_n)^{m_n}$.
  Le nombre de racines, comptées avec multiplicité ne peut pas dépasser le degré, et conséquences (un polynôme de $\mathbf{K}_n[X]$ qui possède $n + 1$ racines est nul, un polynôme qui possède une infinité de racines est nul). Polynômes scindés.
- Théorème de d'Alembert-Gauss (admis). Tout polynôme de $\mathbf{C}[X]$ est scindé.
- Polynômes irréductibles. Tout polynôme est produit d'irréductible. Description et unicité de la décomposition sur $\mathbf{R}[X]$ et sur $\mathbf{C}[X]$ (*ces résultats seront reprécisés dans un chapitre ultérieur d'arithmétique des polynômes*).
- Relations racines-coefficients.
- Polynômes de Lagrange $L_0, L_1, \ldots, L_n$ associés à des scalaires $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$: définition, $L_i(\lambda_j) = \delta_{i,j}$. Tout polynôme de $\mathbf{K}_n[X]$ s'écrit de manière comme combinaison linéaire de $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$.

⚠ Pas d'arithmétique des polynômes pour l'instant.