

MP2I : COLLE 14 (22/01/24 AU 12601/24)

Reprise du programme précédent plus :

CHAPITRE 16 : ARITHMÉTIQUE

- ▶ Reprise du programme précédent.
- ▶ PPCM : notation $a \vee b$. Un entier est multiple de a et b ssi c'est un multiple de $a \vee b$. Lien avec le PGCD : $(a \wedge b)(a \vee b) = ab$.
- ▶ PGCD de n nombres, entiers premiers dans leur ensemble.
- ▶ Décomposition d'un entier en produit de premiers : existence et unicité. Valuation p -adique d'un entier positif. Caractérisation de la divisibilité en termes de valuations p -adiques. Expression du pgcd et du ppcm à l'aide des décompositions primaires.
- ▶ Petit théorème de Fermat : si p est premier, alors pour tout $a \in \mathbf{Z}$, $a^p \equiv a \pmod{p}$. Si de plus $a \wedge p = 1$, alors $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.
- ▶ Introduction à $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$: définition, structure d'anneau, la surjection canonique $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est un morphisme d'anneaux. Éléments inversibles. $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est intègre si et seulement si n est premier, et alors c'est un corps. *Aucune connaissance n'est exigible à ce sujet.*

CHAPITRE 17 : LIMITE D'UNE FONCTION, CONTINUITÉ

Aucune démonstration n'est exigible, mais les étudiants doivent pouvoir donner des définitions et des énoncés précis.

- ▶ Notion de point adhérent à un ensemble. Limite (finie ou infinie) d'une fonction en un point adhérent à son ensemble de définition.
Les étudiants doivent être capables de manipuler les 9 définitions quantifiées de limites (finies ou infinies, en un réel ou en $\pm\infty$), mais également savoir manipuler les notions de voisinage.
- ▶ Limite à gauche et limite à droite en un point. Une fonction f admet une limite en a si et seulement si elle admet une limite à droite et une limite à gauche, et que ces limites sont égales (et égales à $f(a)$ s'il est défini).
- ▶ Caractérisation séquentielle des limites.
- ▶ Opérations usuelles sur les limites : somme, produit, composition (la preuve en a été donnée en termes de voisinages, mais doit savoir être refaite avec des quantificateurs en distinguant les cas des limites finies/infinies).
Le produit d'une fonction bornée par une fonction de limite nulle tend vers 0.
Une fonction qui admet une limite finie en $a \in \overline{\mathbf{R}}$ est bornée au voisinage de a .
- ▶ Passage à la limite dans les inégalités, théorèmes d'encadrement.
- ▶ Théorème de la limite monotone. Application : une fonction croissante admet une limite finie en tout a , et
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x).$$