MP2I : Colle 12 (06/01/25 au 10/01/25)

Reprise du programme précédent (suites) plus :

Chapitre 14 : Calcul matriciel

Toutes les matrices considérées sont à coefficients dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

- Définition, opérations sur les matrices : somme, produit, produit par un scalaire.
- Matrices triangulaires supérieures et triangulaires inférieures, diagonales, scalaires, nilpotentes.
- Produit de matrices : associativité, bilinéarité. Le produit d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ par $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ est une combinaison linéaire des colonnes de A. Puissances d'une matrice carrée. Matrices nilpotentes (définition uniquement). Formule du binôme matricielle. Produit de matrices triangulaires, de matrices diagonales. Produit par bloc (**preuve non exigible**).
- Transposée d'une matrice. Transposée d'une somme, d'un produit. Matrices symétriques, antisymétriques.
- Trace d'une matrice carrée. Linéarité. $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
- Écriture d'un système linéaire sous forme d'équation matricielle.
- Inversibilité d'une matrice carrée (A est inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $AB = I_n$ **et** $BA = I_n$). Inverse d'un produit de matrices inversibles, d'une transposée. Caractérisation de l'inversibilité en termes de systèmes linéaires : A est inversible si et seulement si $AX = Y$ possède une unique solution pour toute matrice colonne Y.
  Calcul de l'inverse par résolution de système.
  Une matrice triangulaire A est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, et alors son inverse A^{-1} est encore triangulaire, à coefficients diagonaux inverses de ceux de A. (**preuve non exigible**)
- Cas des matrices 2×2 : déterminant, caractérisation de l'inversibilité par le déterminant, formule pour l'inverse.
- Calcul de l'inverse à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes.
- Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est inversible si et seulement si pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, $AX = 0_{n,1} \Rightarrow X = 0_{n,1}$.(**preuve non exigible**)
- Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ sont telles que $AB = I_n$, alors A et B sont inversibles, et $B = A^{-1}$. Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, AB est inversible si et seulement si A et B sont inversibles.

Bonnes fêtes de fin d'année à tous !