# MP2I : Colle 12 (08/01/24 au 12/01/24)

*Reprise du programme précédent plus :*

## Chapitre 14 : Calcul matriciel

*Reprise du début du chapitre plus*

- Écriture d'un système linéaire sous forme d'équation matricielle.
- Inversibilité d'une matrice carrée ($A$ est inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $AB = I_n$ **et** $BA = I_n$). Inverse d'un produit de matrices inversibles, d'une transposée. Caractérisation de l'inversibilité en termes de systèmes linéaires : $A$ est inversible si et seulement si $AX = Y$ possède une unique solution pour toute matrice colonne $Y$.
  Calcul de l'inverse par résolution de système.
  Une matrice triangulaire $A$ est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, et alors son inverse $A^{-1}$ est encore triangulaire, à coefficients diagonaux inverses de ceux de $A$.
- Cas des matrices $2 \times 2$ : déterminant, caractérisation de l'inversibilité par le déterminant, formule pour l'inverse.
- Calcul de l'inverse à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes.
- Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est inversible si et seulement si pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, $AX = 0_{n,1} \Rightarrow X = 0_{n,1}$.
- Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ sont telles que $AB = I_n$, alors $A$ et $B$ sont inversibles, et $B = A^{-1}$. Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $AB$ est inversible si et seulement si $A$ et $B$ sont inversibles.

## Chapitre 15 : Structures algébriques

- Lois de composition interne. Associativité, commutativité, distributivité d'une loi sur une autre. Partie stable par une LCI.
- Élément neutre, unicité en cas d'existence. Éléments inversibles, inverse d'un produit. Les éléments inversibles sont réguliers.
- Groupes. Exemples : $\mathbf{C}, \mathbf{R}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{N}, \mathbf{C}^*, \mathbf{R}^*, \mathbf{Q}^*, \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), GL_n(\mathbf{K}), \mathfrak{S}(E)$.
  Groupes de cardinal 2 et 3. Produit direct de deux groupes.
- Sous-groupes. Caractérisation des sous-groupes. Exemples : $\mathbf{U}, \mathbf{U}_n$ , divers exemples de groupes de matrices. Intersection de sous-groupes. Groupe engendré par un élément.
- *Les morphismes de groupes seront au programme suivant. La notion d'ordre d'un élément et le théorème de Lagrange sont hors-programme et n'ont pas été mentionnés en cours.*