TD 8 : Calculs de primitives et d'intégrales

► Théorème fondamental de l'analyse

Exercice 8.1 À l'aide d'un calcul de dérivée, montrer que $\forall x \in \mathbf{R}$, $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. **PD**

Exercice 8.2 **(Centrale PSI 2009)** **AD**
Étudier la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{\sin^2 x} \operatorname{Arcsin}\sqrt{t}\,dt + \int_0^{\cos^2 x} \operatorname{Arccos}\sqrt{t}\,dt$.

► Calcul direct

Exercice 8.3 Donner sans calculs des primitives des fonctions suivantes sur l'intervalle I (qui est égal à $\mathbf{R}$ lorsqu'il n'est pas mentionné) : **F**

1. $t \mapsto 2te^{-3t^2}$
2. $x \mapsto \dfrac{\sin(2x)}{3-\cos^2(x)}$
3. $x \mapsto \sqrt{x^4+x^2}, I = \mathbf{R}_+^*$
4. $t \mapsto \tan^2(t), I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
5. $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{th}(t)}, I = \mathbf{R}_-^*$
6. $t \mapsto \dfrac{e^{-\frac{2}{t^2}}}{t^3}, I = \mathbf{R}_+^*$
7. $x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^3}, I = \mathbf{R}_+^*$
8. $t \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 t\sqrt{\tan t}}$, $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
9. $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2(t)}, I = \mathbf{R}_+^*$
10. $t \mapsto \sqrt{e^t}$
11. $t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$
12. $t \mapsto \dfrac{t^2}{1+t^6}$

Exercice 8.4 Donner des primitives des fonctions suivantes : **F**

1. $x \mapsto \cos^2(2x)$
2. $x \mapsto \sin^3(x)$
3. $x \mapsto \cos(2x)\sin^2(3x)$

Exercice 8.5 Pour $(p,q) \in \mathbf{Z}^2$, calculer $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(pt)\sin(qt)\,dt$. **F**

Exercice 8.6 En utilisant les nombres complexes, déterminer une primitive de $t \mapsto e^{-t}\sin^2 t$. **PD**

Exercice 8.7 **Fractions rationnelles 1 : les éléments simples** **PD**
Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-2x+2}$
2. $x \mapsto \dfrac{1}{(3x-2)^3}$
3. $x \mapsto \dfrac{1}{2x^2+4x+3}$
4. $x \mapsto \dfrac{3x+1}{2x^2-4x+3}$

Exercice 8.8 **Fractions rationnelles 2 : la totale** **AD**
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3-1}$
2. $\displaystyle\int_3^4 \frac{dt}{2t^2-8}$
3. $\displaystyle\int_2^3 \frac{4x^2}{x^4-1}\,dx$
4. $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^3-x^2}{x^2-2x+1}\,dx$

► Intégration par parties

Exercice 8.9 Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une ou plusieurs intégrations par parties. **PD**

1. $\displaystyle\int_1^2 (t^2-t+1)e^{-t}\,dt$
2. $\displaystyle\int_1^e t(\ln t)^2\,dt$
3. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x^2\operatorname{Arctan}(x)\,dx$
4. $\displaystyle\int_{-1}^1 \ln(t^2+\rho^2)\,dt$, où $\rho > 0$
5. $\displaystyle\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2} \sqrt{1-t^2}\,dt$
6. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi/3} e^{-2t}\sin(3t)\,dt$
7. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$
8. $\displaystyle\int_1^{e^\pi} \sin(\ln t)\,dt$

Exercice 8.10 Déterminer des primitives des fonctions suivantes : **PD**

1. $x \mapsto x\sin^3 x$
2. $x \mapsto \operatorname{Arcsin}(x)$
3. $x \mapsto x\operatorname{sh}(x)$
4. $x \mapsto \dfrac{\ln(\ln(x))}{x}$

Exercice 8.11 En utilisant les nombres complexes, déterminer une primitive de $t \mapsto te^t\cos t$. **AD**

▸ Changement de variable

Exercice 8.12 Calculer les intégrales suivantes en utilisant les changements de variable indiqués. **AD**

1. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2t}}{e^t+1}\,dt$, $x = e^t$.
2. $\displaystyle\int_{e^{-1}}^{e} \frac{\ln t}{t^2+1}\,dt$, $x = \frac{1}{t}$
3. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x+\sqrt{x-1}}$, $t = \sqrt{x-1}$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{d\theta}{\cos\theta}$, $x = \sin\theta$
5. $\displaystyle\int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{3}} \sin(2\theta)\sqrt{\cos\theta}\,d\theta$, $t = \cos\theta$
6. $\displaystyle\int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt$, $u = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$

Exercice 8.13 Déterminer des primitives des fonctions suivantes en utilisant le changement de variable indiqué : **AD**

1. $x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, $u = \dfrac{1}{x}$ sur $]1,+\infty[$.
2. $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$, $u = \sqrt{1+x}$
3. $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}$ sur $\mathbf{R}_+^*$, avec $x = t^2$
4. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ sur $\mathbf{R}_+^*$, avec les changements $x = \frac{1}{t}$, $x = \tan(u)$ et $x = \mathrm{sh}(v)$.
5. $x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$, $x = \cos u$

Exercice 8.14 Encore des fractions rationnelles **AD**

Dans cet exercice, nous allons voir, sur des exemples, comment intégrer des éléments simples de seconde espèce du type $x \mapsto \dfrac{\lambda x+\mu}{(ax^2+bx+c)^n}$, $n \geqslant 2$.

1. Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{2t}{(t^2+1)^n}\,dt$, $n \geqslant 2$.
2. En utilisant le changement de variable $t = \tan y$, calculer $J_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt$.
3. Avec le même changement de variable, calculer $J_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(t^2+1)^3}$.
4. À l'aide d'un changement de variable bien choisi, exprimer $\displaystyle\int_1^3 \frac{2x+1}{(2x^2-4x+10)^2}\,dx$ en fonction de I_2 et J_2, et en déduire sa valeur.

Exercice 8.15 On pose $S = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t+\cos t}\,dt$ et $C = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\,dt$. **PD**

1. Montrer que ces intégrales sont bien définies.
2. Déterminer la valeur de $S + C$.
3. À l'aide d'un changement de variable, montrer que $S = C$. En déduire leur valeur commune.
4. Déduire de ce qui précède la valeur de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 8.16 Fractions rationnelles trigonométriques **AD**

Calculer les intégrales suivantes à l'aide des changements de variables indiqués :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{th}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}\,dx$, $t = \mathrm{ch}(x)$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^4 t}$, $x = \tan t$.
3. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2\theta)}{(\sin\theta-2)(2+\sin\theta-\cos^2\theta)}\,d\theta$, $x = \sin\theta$

▸ Et sans indications ?

Exercice 8.17 Déterminer, par les moyens de votre choix les primitives (ou intégrales) des fonctions suivantes **AD**

1. $t \mapsto \mathrm{Arctan}(t)/t^2$
2. $t \mapsto \sin(\ln t)$
3. $x \mapsto \dfrac{1}{e^{2x}+e^x}$
4. $x \mapsto x\,\mathrm{Arcsin}(x)$
5. $x \mapsto \dfrac{1}{\tan^3 x}$
6. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}}$
7. $(\star)$ $\displaystyle\int_{1/2}^2 \left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{Arctan}(t)\,dt$.

Exercice 8.18 (Oral Mines Ponts 2010) **D**

Déterminer une primitive de $x \mapsto \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^3$.

Exercice 8.19 (Oral Polytechnique) **D**

Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx$. En déduire la valeur de $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{Arctan}\,t}{1+t}\,dt$.

Correction des exercices du TD 8

Solution de l'exercice 8.1

Notons $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$.

Alors, par le théorème fondamental de l'analyse, F est l'unique primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ qui s'annule en 0.

D'autre part, la fonction $G : x \mapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ est dérivable sur $\mathbf{R}$, car composée de fonctions dérivables, et sa dérivée est donnée par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ G'(x) = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Sur R ?
Il n'est pas trop difficile de constater que G est définie sur $\mathbf{R}$ car pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$$-x \leqslant \sqrt{x^2+1}.$$

Donc G est une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Puisque $G(0) = 0$, c'est donc l'unique primitive de f qui s'annule en 0 : c'est F.

Et donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

Remarque
On pourrait prouver que F est la bijection réciproque de sh.

Solution de l'exercice 8.2

Notons que f est π-périodique, car $\cos^2$ et $\sin^2$ le sont. Donc il suffit de déterminer f sur $[0, \pi]$.

De plus, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\sin^2(\pi - x) = \sin^2 x$ et $\cos^2(\pi - x) = \cos^2(x)$.

Donc il suffit de déterminer f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Par le théorème fondamental de l'analyse[1], f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

[1] f est une composée de fonctions dérivables.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\sin(x)\cos(x)\operatorname{Arcsin}(\sqrt{\sin^2(x)}) - 2\sin(x)\cos(x)\operatorname{Arccos}(\sqrt{\cos^2(x)}) \\ &= 2\sin(x)\cos(x)\operatorname{Arcsin}(\sin x) - 2\sin(x)\cos(x)\operatorname{Arccos}(\cos(x)) = 2x\sin(x)\cos(x) - 2x\sin(x)\cos(x) = 0. \end{aligned}$$

Donc f est constante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, égale à $f(0)$.

Mais $f(0) = \displaystyle\int_0^1 \operatorname{Arccos}\sqrt{t}\,dt$.

Un changement de variable $u = \sqrt{t}$ nous donne alors $f(0) = 2\displaystyle\int_0^1 u\operatorname{Arccos}(u)\,du$.

Et alors par intégration par parties,

$$\begin{aligned} f(0) &= \left[u^2\operatorname{Arccos} u\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}\,du \\ &= \int_0^1 \frac{u^2-1+1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = -\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,du + [\operatorname{Arcsin} u]_0^1 \\ &= -\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\,dx + \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{\pi}{2} - \left[\frac{2x+\sin(2x)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Détails
On a procédé au changement de variable $u = \cos x$.

Et donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{\pi}{4}$.

Solution de l'exercice 8.3

1. À une constante près, on reconnaît une expression de la forme $u'e^u$ où $u(t) = -3t^2$: une primitive de $t \mapsto 2te^{-3t^2}$ est $t \mapsto -\dfrac{1}{3}e^{-3t^2}$.
2. Notons que $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ est la dérivée de $\cos^2(x)$.
   Et donc une primitive de $x \mapsto \dfrac{\sin(2x)}{3-\cos^2(x)}$ est $x \mapsto \ln(3-\cos^2 x)$.

Valeur absolue
Notons qu'il n'est pas nécessaire ici de mettre une valeur absolue dans le ln puisque $3-\cos^2(x) > 0$, quel que soit $x \in \mathbf{R}$.

3. On a $\sqrt{x^4+x^2} = \sqrt{x^2(x^2+1)} = x\sqrt{x^2+1}$.
Mais la dérivée de $x \mapsto x^2+1$ est $2x$, de sorte que $x\sqrt{x^2+1} = \dfrac{1}{2}u'(x)\,(u(x))^{1/2}$, où $u(x) = x^2+1$.
Donc une primitive en est $x \mapsto \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{2}(u(x))^{3/2} = \dfrac{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}{3}$.

Rappel
Une primitive de $u'u^\alpha$ est $\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$.

4. On a $\tan^2(t) = \tan^2(t)+1-1$, et nous connaissons une primitive de $1+\tan^2(t)$, donc une primitive de $\tan^2(t)$ est $t \mapsto \tan(t) - t$.

5. Puisque $\dfrac{1}{\operatorname{th}(x)} = \dfrac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)} = \dfrac{\operatorname{sh}'(x)}{\operatorname{sh}(x)}$, une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{th}(x)}$ est $x \mapsto \ln(|\operatorname{sh}(x)|)$.
Mais sur $I = \mathbf{R}_-^*$, $\operatorname{sh}(x) < 0$, et donc une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{th}(x)}$ est $x \mapsto \ln(-\operatorname{sh}(x))$.

6. C'est de la forme $u'e^u$: une primitive de $t \mapsto \dfrac{e^{-2/t^2}}{t^3}$ est $t \mapsto \dfrac{1}{4}e^{-\frac{2}{t^2}}$.

Astuce
Plutôt que d'apprendre des formules pour les primitives de $\frac{u'}{u^n}$, utilisez les puissances négatives et la formule pour une primitive de $u'u^n$ (qui reste valable pour $n<0$.)

7. Si $u(x) = \ln(x)$, alors $\dfrac{1}{x(\ln(x))^3} = \dfrac{u'(x)}{u(x)^3} = u'(x)(u(x))^{-3}$.
Donc une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^3}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{-3+1}u(x)^{-3+1} = \dfrac{-1}{2(\ln(x))^2}$.

8. Nous savons que $\dfrac{1}{\cos^2}$ est la dérivée de tan. Et donc nous sommes en présence d'une expression de la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.
Par conséquent, une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 t\sqrt{\tan t}}$ est $t \mapsto 2\sqrt{\tan t}$.

9. On a, pour tout $t \in \mathbf{R}^*$,
$$\frac{1}{\operatorname{sh}^2(t)} = \frac{4}{(e^t-e^{-t})^2} = \frac{4}{\left(e^t\left(1-e^{-2t}\right)\right)^2} = \frac{4e^{-2t}}{(1-e^{-2t})^2}.$$
Et donc[2] une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2(t)}$ est $t \mapsto -\dfrac{2}{1-e^{-2t}}$.
Une autre méthode est la suivante : $\operatorname{sh}^2(t) = \operatorname{th}^2(t)\operatorname{ch}^2(t)$, donc $\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(t)}\dfrac{1}{\operatorname{th}^2(t)}$.
Mais $\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2}$ est la dérivée de th, de sorte qu'une primitive est $t \mapsto -\dfrac{1}{\operatorname{th}(t)}$.
Enfin, plus astucieux :
$$\frac{1}{\operatorname{sh}^2} = \frac{\operatorname{ch}^2-\operatorname{sh}^2}{\operatorname{sh}^2} = -\frac{\operatorname{ch}'\operatorname{sh}-\operatorname{ch}\operatorname{sh}'}{\operatorname{sh}^2}.$$
Et donc on reconnaît (chose rare !) la dérivée du quotient $-\dfrac{\operatorname{ch}}{\operatorname{sh}}$, dont une primitive est $-\dfrac{\operatorname{ch}}{\operatorname{sh}} = -\dfrac{1}{\operatorname{th}}$.

[2] On a reconnu une expression de la forme $\frac{u'}{u^2}$.

Remarque
Cette primitive n'est pas la même que la précédente, mais on peut vérifier qu'elle en diffère par une constante (bien entendu !).

10. Il suffit de remarquer que $\sqrt{e^t} = e^{t/2}$, et donc une primitive de $t \mapsto \sqrt{e^t}$ est $t \mapsto 2e^{t/2}$.

11. On a $\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} = \dfrac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}$, et nous reconnaissons là la dérivée de $t \mapsto \sqrt{1+t^2}$.

12. On a $\dfrac{t^2}{1+t^6} = \dfrac{t^2}{1+(t^3)^2}$, qui est de la forme $\frac{1}{3}\frac{u'}{1+u^2}$.
Donc une primitive de $t \mapsto \dfrac{t^2}{1+t^6}$ est $t \mapsto \dfrac{1}{3}\operatorname{Arctan}(t^3)$.

Solution de l'exercice 8.4

Il s'agit à chaque fois de penser à linéariser l'expression considérée.

1. On a $\cos^2(2x) = \dfrac{1+\cos(4x)}{2}$ et donc une primitive de $x \mapsto \cos^2(2x)$ est $x \mapsto \dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin(4x)}{8}$.

Astuce
C'est la formule
$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1.$$

2. On a, en utilisant les formules d'Euler,

$$\sin^3(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{-1}{8i}\left(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}\right) = -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x).$$

Et donc une primitive de $x \mapsto \sin^3(x)$ est $x \mapsto \dfrac{1}{12}\cos(3x) - \dfrac{3}{4}\cos(x)$.

3. Toujours à l'aide des formules d'Euler,

$$\begin{aligned}\cos(2x)\sin^2(3x) &= \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2}\left(\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i}\right)^2 = \frac{-1}{8}\left(e^{2ix} + e^{-2ix}\right)\left(e^{6ix} - 2 + e^{-6ix}\right)\\ &= \frac{1}{8}\left(2e^{2ix} + 2e^{-2ix} - e^{8ix} - e^{-8ix} - e^{4ix} - e^{-4ix}\right)\\ &= \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{4}\cos(4x) - \frac{1}{4}\cos(8x).\end{aligned}$$

Et donc une primitive de $x \mapsto \cos(2x)\sin^2(3x)$ est

$$x \mapsto \frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{1}{16}\sin(4x) - \frac{1}{32}\sin(8x).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 8.5

Notons tout de suite que si $p = 0$ ou $q = 0$, alors $I_{p,q} = 0$.
Si $p = q$, alors $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2(pt)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1 - \cos(2pt))\,dt = \frac{1}{2}\left[t - \frac{\sin(2pt)}{2p}\right]_0^{2\pi} = \pi$.
De même, si $p = -q$, alors $I_{p,q} = -I_{p,p} = -\pi$.
Si $p \neq \pm q$, alors

$$I_{p,q} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos((p-q)t) - \cos((p+q)t))\;dt = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((p-q)t)}{p-q} - \frac{\sin((p+q)t)}{p+q}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Trigo

$\sin a \sin b =$
$\frac{1}{2}\cos(a-b) - \cos(a+b)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 8.6

On a $\sin^2 t = \dfrac{1 - \cos(2t)}{2}$ et donc $e^{-t}\sin^2 t = \dfrac{e^{-t}}{2} - \dfrac{e^{-t}\cos(2t)}{2}$.
Mais $e^{-t}\cos(2t) = e^{-t}\,\mathrm{Re}\left(e^{2it}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{(2i-1)t}\right)$.
Une primitive de $e^{(2i-1)t}$ est $\dfrac{1}{2i-1}e^{(2i-1)t} = -\dfrac{1}{5}(1+2i)e^{(2i-1)t} = -\dfrac{1}{5}(1+2i)(\cos(2t) + i\sin(2t))\,e^{-t}$.
Sa partie réelle, qui est une primitive de $t \mapsto e^{-t}\cos(2t)$.

$$t \mapsto \frac{1}{5}e^{-t}(2\sin(2t) - \cos(2t)).$$

Et donc une primitive de $t \mapsto e^{-t}\sin^2(t)$ est

$$t \mapsto e^{-t}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{10}(\cos(2t) - 2\sin(2t))\right).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 8.7

1. On a $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$, et donc

$$\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 1} = \int \frac{dx}{(x-1)^2 + 1} = \mathrm{Arctan}(x-1) + C,\ C \in \mathbf{R}.$$

2. On a $\dfrac{1}{(3x-2)^3} = (3x-2)^{-3}$ et donc

$$\int \frac{dx}{(3x-2)^3} = \frac{1}{-2}\frac{1}{3}(3x-2)^{-2} + C = \frac{-1}{6(3x-2)^2} + C,\ C \in \mathbf{R}.$$

3. On a $2x^2+4x+3 = 2\left(x^2+2x+\dfrac{3}{2}\right) = 2\left((x+1)^2+\dfrac{1}{2}\right) = \left(\sqrt{2}(x+1)\right)^2+1$.
Et donc

$$\int \frac{dx}{2x^2+4x+3} = \int \frac{dx}{\left(\sqrt{2}(x+1)\right)^2+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{2}(x+1)\right)+C,\ C\in\mathbf{R}.$$

Méthode
Il s'agit de s'occuper d'abord du terme en x au numérateur, et pour cela, on fait apparaître une expression de la forme $\frac{u'}{u}$.

4. On a

$$\frac{3x+1}{2x^2-4x+3} = \frac{3}{4}\frac{4x-4}{2x^2-4x+3} + \frac{4}{2x^2-4x+3}.$$

On a déjà facilement

$$\int \frac{4x-4}{2x^2-4x+3}\,dx = \ln(2x^2-4x+3)+C,\ C\in\mathbf{R}.$$

Valeur absolue
En général, une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln|u|$. Ici on peut se passer de la valeur absolue car $2x^2-4x+3$ est de signe constant sur $\mathbf{R}$.

D'autre part, une mise sous forme canonique du dénominateur nous donne

$$2x^2-4x+3 = 2\left(x^2-2x+\frac{3}{2}\right) = 2\left((x-1)^2+\frac{1}{2}\right) = \left(\sqrt{2}\,(x-1)\right)^2+1.$$

Et donc

$$\int \frac{1}{2x^2-4x+3}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{2}(x-1)\right)+C,\ C\in\mathbf{R}.$$

On en déduit donc que

$$\int \frac{3x+1}{2x^2-4x+3}\,dx = \frac{3}{4}\ln(2x^2-4x+3)+2\sqrt{2}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{2}\,(x-1)\right)+C,\ C\in\mathbf{R}.$$

Solution de l'exercice 8.8

1. Notons que $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$. Et donc la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{x^3-1}$ est de la forme $\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$ $\quad(\star)$.
En multipliant cette relation par $x-1$ et en évaluant en $x=1$, il vient $a=\dfrac{1}{3}$.
De même, en multipliant $(\star)$ par x et en passant à la limite en $+\infty$, il vient $b+a=0 \Leftrightarrow b=-\dfrac{1}{3}$.
Enfin, en évaluant $(\star)$ en $x=0$, on obtient $-1=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{c}{3}$, de sorte que $c=-\dfrac{2}{3}$.
Et donc $\dfrac{1}{x^3-1}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{x+2}{x^2+x+1}\right)$.
On a aisément $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x-1} = \left[\ln|x-1|\right]_{-1}^{0} = -\ln 2$.
D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0}\frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx &= \int_{-1}^{0}\frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \int_{-1}^{0}\frac{3}{2}\frac{1}{x^2+x+1}\,dx\\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+x+1)\right]_{-1}^{0}}_{=0} + \frac{3}{2}\int_{-1}^{0}\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx\\
&= 2\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\\
&= 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_{-1}^{0}\\
&= \sqrt{3}\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\operatorname{Arctan}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

On a factorisé le dénominateur par $\frac{3}{4}$.

Et donc pour conclure,

$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^3-1} = -\frac{1}{3}\left(\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right).$$

2. On a $\dfrac{1}{2t^2-8} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{t^2-4} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(t-2)(t+2)}$.
Et donc la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{(t-2)(t+2)}$ est de la forme $\dfrac{a}{t-2}+\dfrac{b}{t+2}$.
Il est facile[3] de constater que $a = \dfrac{1}{4}$ et $b = -\dfrac{1}{4}$, de sorte que

$$\int_3^4 \frac{dt}{2t^2-8} = \frac{1}{8}\left(\int_3^4 \frac{dt}{t-2} - \int_3^4 \frac{dt}{t+2}\right) = \frac{1}{8}\left[\ln\left(\frac{t-2}{t+2}\right)\right]_3^4 = \frac{1}{8}\ln\left(\frac{5}{3}\right).$$

[3] Nous sommes en présence de deux pôles simples.

3. La décomposition en éléments simples de $\dfrac{4X^2}{X^4-1}$ est $\dfrac{2}{X^2+1} - \dfrac{1}{X+1} + \dfrac{1}{X-1}$.
Donc une primitive est $x \mapsto 2\operatorname{Arctan}(x) + \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$.
Et donc au final $\displaystyle\int_2^3 \frac{4x^2}{x^4-1}\,dx = 2\operatorname{Arctan}3 - 2\operatorname{Arctan}2 + \ln\frac{3}{2}$.
Un peu de trigo nous donnerait en plus $\operatorname{Arctan}(2) - \operatorname{Arctan}(3) = \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{7}$.

Pôles
Les racines du dénominateur sont les racines 4èmes de l'unité, donc $1, i, -1$ et $-i$. Ceci doit permettre de factoriser très rapidement ce dénominateur.

4. Attention : la fraction rationnelle n'est pas de degré négatif, il faut donc commencer par faire la division euclidienne du numérateur par le dénominateur.
On obtient alors $X^3 - X^2 = (X+1)(X^2-2X+1) + X - 1$.
Et donc $\dfrac{X^3-X^2}{X^2-2X+1} = X+1+\dfrac{X-1}{X^2-2X+1} = X+1+\dfrac{X-1}{(X-1)^2} = X+1+\dfrac{1}{X-1}$.
On a d'une part $\displaystyle\int_2^3 (x+1)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}+x\right]_2^3 = \frac{7}{2}$.
D'autre part,

$$\int_2^3 \frac{x-1}{x^2-2x+1}\,dx = \int_2^3 \frac{x-1}{(x-1)^2}\,dx = \int_2^3 \frac{dx}{x-1} = [\ln(x-1)]_2^3 = \ln(2).$$

Et donc $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^3-x^2}{x^2-2x+1}\,dx = \frac{7}{2} + \ln(2)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 8.9

1. Procédons à une intégration par parties, en posant $u(t) = t^2 - t + 1$ et $v(t) = -e^{-t}$, de sorte que $u'(t) = 2t-1$ et $v'(t) = e^{-t}$, qui sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1,2]$.
Il vient alors

$$\begin{aligned}
\int_1^2 (t^2-t+1)e^{-t}\,dt &= \left[-(t^2-t+1)e^{-t}\right]_1^2 + \int_1^2 (2t-1)e^{-t}\,dt \\
&= -3e^{-2} + e^{-1} + \int_1^2 (2t-1)e^{-t}\,dt \\
&= -3e^{-2} + e^{-1} + \left[-(2t-1)e^{-t}\right]_1^2 + \int_1^2 2e^{-t}\,dt \\
&= -3e^{-2} + e^{-1} - 3e^{-2} + e^{-1} + 2\left[-e^{-t}\right]_1^2 \\
&= -6e^{-2} + 2e^{-1} - 2e^{-2} + 2e^{-1} = -8e^{-2} + 4e^{-1} = 4e^{-1}\left(1-2e^{-1}\right).
\end{aligned}$$

Méthode
Dans ce genre de situation, on sait aussi bien intégrer que dériver les deux termes. On remarque que dériver ou intégrer l'exponentielle revient au même, alors que dériver le polynôme fera baisser son degré quand l'intégrer augmentera son degré, ce qui nous conduirait à une expression probablement plus compliquée que celle de départ. On choisit donc de dériver le polynôme.

Nouvelle intégration par parties en dérivant toujours le polynôme.

2. En posant $u(t) = (\ln t)^2$ et $v(t) = \dfrac{t^2}{2}$, qui sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, avec $u'(t) = \dfrac{2}{t}\ln(t)$ et $v'(t) = t$, on a

$$\int_1^e t(\ln t)^2\,dt = \left[\frac{t^2(\ln t)^2}{2}\right]_1^e - \int_1^e t\ln(t)\,dt = \frac{e^2}{2} - \int_1^e t\ln(t)\,dt.$$

Une nouvelle intégration par parties[4] donne alors

$$\int_1^e t\ln(t)\,dt = \left[\frac{t^2\ln(t)}{2}\right]_1^e - \int_1^e \frac{t}{2}\,dt = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{e^2}{4}.$$

[4] Toujours en dérivant le ln.

Et donc $\displaystyle\int_1^e t(\ln t)^2\,dt = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}$.

3. Posons $u(x) = \frac{x^3}{3}$ et $v(x) = \text{Arctan}(x)$, de sorte que u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \sqrt{3}]$, avec $u'(x) = x^2$ et $v'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
Par intégration par parties, on a alors

$$\int_0^{\sqrt{3}} x^2 \,\text{Arctan}(x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\text{Arctan}(x)\right]_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{1+x^2}\,dx.$$

Mais une division euclidienne de x^3 par $1+x^2$ nous informe que $\frac{x^3}{1+x^2} = x - \frac{x}{1+x^2}$.
Et donc

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\sqrt{3}} \left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{3}{2} - \ln(2).$$

Et donc au final,

$$\int_0^{\sqrt{3}} x^2\,\text{Arctan}(x)\,dx = \frac{3\sqrt{3}}{3}\text{Arctan}\left(\sqrt{3}\right) - \frac{1}{2} + \frac{\ln(2)}{3} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} + \frac{\ln(2)}{3}.$$

4. Sur $[-1, 1]$, posons $u(t) = \ln(t^2+\rho^2)$ et $v(t) = t$. Ce sont alors deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ avec $u'(t) = \frac{2t}{t^2+\rho^2}$ et $v'(t) = 1$.
Une intégration par parties donne alors :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \ln(t^2+\rho^2)\,dt &= \left[t\ln(t^2+\rho^2)\right]_{-1}^1 - 2\int_{-1}^1 \frac{t^2}{t^2+\rho^2}\,dt\\
&= \ln(1^2+\rho^2) + \ln((-1)^2+\rho^2) - 2\int_{-1}^1 \frac{(t^2+\rho^2)-\rho^2}{t^2+\rho^2}\,dt\\
&= 2\ln(1+\rho^2) - 2\int_{-1}^1\left(1 - \frac{\rho^2}{t^2+\rho^2}\right)dt\\
&= 2\ln(1+\rho^2) - 2\int_{-1}^1 dt + 2\int_{-1}^1 \frac{\rho^2}{t^2+\rho^2}\,dt\\
&= 2\ln(1+\rho^2) - 4 + 2\int_{-1}^1 \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\rho}\right)^2}\,dt\\
&= 2\ln(1+\rho^2) - 4 + \left[2\rho\text{Arctan}\left(\frac{t}{\rho}\right)\right]_{-1}^1\\
&= 2\ln(1+\rho^2) - 4 + 4\rho\text{Arctan}\left(\frac{1}{\rho}\right).
\end{aligned}$$

Astuce
On sait toujours intégrer 1 ! Ce qui ne veut pas dire que cette astuce marche à tous les coups...

5. Posons $u(t) = t$ et $v(t) = \sqrt{1-t^2}$, de sorte que $u'(t) = 1$ et $v'(t) = \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}$.

$$\begin{aligned}
\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2} \sqrt{1-t^2}\,dt = \left[t\sqrt{1-t^2}\right]_{-1/\sqrt{2}}^{1/2} + \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2} \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} + \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2}\frac{t^2-1+1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} + \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2}\frac{t^2-1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt + \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} - \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2}\sqrt{1-t^2}\,dt + \left[\text{Arcsin}(t)\right]_{-1/\sqrt{2}}^{1/2}\\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} - \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2}\sqrt{1-t^2}\,dt + \text{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) - \text{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} - \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2}\sqrt{1-t^2}\,dt + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Et donc il vient

$$2\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2}\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{5\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2}\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{5\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{4}.$$

Une autre méthode, un peu plus astucieuse est la suivante :

$$\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2} \sqrt{1-t^2}\,dt = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2} t\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}\,dt.$$

Une intégration par parties donne alors

$$\begin{aligned}
\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2} t\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}\,dt &= \left[\frac{t^2}{2}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}\right]_{-1/\sqrt{2}}^{1/2} - \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2} \frac{t^2}{4}\frac{-2}{t^3}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}\,dt \\
&= \left[\frac{1}{2}t\sqrt{1-t^2}\right]_{-1/\sqrt{2}}^{1/2} + \frac{1}{2}\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}[\mathrm{Arcsin}(t)]_{-1/\sqrt{2}}^{1/2} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{4} + \frac{5\pi}{24}.
\end{aligned}$$

6. Notons I notre intégrale, et procédons à une première intégration par parties :

$$I = \int_{-\pi}^{\pi/3} e^{-2t}\sin(3t)\,dt = \underbrace{\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\sin(3t)\right]_{-\pi}^{\pi/3}}_{=0} + \frac{3}{2}\int_{-\pi}^{\pi/3} e^{-2t}\cos(3t)\,dt = \frac{3}{2}\int_{-\pi}^{\pi/3} e^{-2t}\cos(3t)\,dt.$$

Puisque nous ne savons pas davantage calculer cette seconde intégrale, procédons à une autre intégration par parties :

> ⚠ Attention !
> Ne pas intégrer le cos, car cela nous ferait revenir à l'intégrale de départ.

$$\int_{-\pi}^{\pi/3} e^{-2t}\cos(3t)\,dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\cos(3t)\right]_{-\pi}^{\pi/3} - \frac{3}{2}\int_{-\pi}^{\pi/3} e^{-2t}\sin(3t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{2\pi}{3}} - \frac{1}{2}e^{2\pi} - \frac{3}{2}I.$$

Au final, on a donc

$$I = \frac{3}{4}\left(e^{-\frac{2\pi}{3}} - e^{2\pi}\right) - \frac{9}{4}I$$

soit encore

$$I = \frac{3}{13}\left(e^{-\frac{2\pi}{3}} - e^{2\pi}\right).$$

7. Il s'agit de reconnaître que $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x}$ est la dérivée de la fonction tangente. Et donc, en posant $u(x) = x$ et $v(x) = \tan(x)$, qui sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, il vient

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx &= [x\tan(x)]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4}\tan(x)\,dx \\
&= \frac{\pi}{4} + [\ln(\cos x)]_0^{\pi/4} \\
&= \frac{\pi}{4} + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2).
\end{aligned}$$

8. Posons $u(t) = t$ et $v(t) = \sin(\ln t)$, de sorte que u et v sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1, e^\pi]$, avec $u'(t) = 1$ et $v'(t) = \frac{1}{t}\cos(\ln t)$. Alors par intégration par parties,

$$\int_1^{e^\pi}\sin(\ln t)\,dt = [t\sin(\ln t)]_1^{e^\pi} - \int_1^{e^\pi}\cos(\ln t)\,dt = -\int_1^{e^\pi}\cos(\ln t)\,dt.$$

Mais une nouvelle intégration par parties donne

$$\int_1^{e^\pi}\cos(\ln t)\,dt = [t\cos(\ln t)]_1^{e^\pi} + \int_1^{e^\pi}\sin(\ln t)\,dt = -(e^\pi+1) + \int_1^{e^\pi}\sin(\ln t)\,dt.$$

Au final, on a

$$\int_1^{e^\pi}\sin(\ln t)\,dt = 1 + e^\pi - \int_1^{e^\pi}\sin(\ln t)\,dt \Leftrightarrow \int_1^{e^\pi}\sin(\ln t)\,dt = \frac{1+e^\pi}{2}.$$

Solution de l'exercice 8.10

1. Commençons par linéariser le sinus :
$$\sin^3(x) = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{1}{-8i}\left(e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}\right) = -\frac{1}{4}\sin(3x)+\frac{3}{4}\sin(x).$$
Procédons alors à des intégrations par parties :
$$\int x\sin(3x)\,dx = \left[-\frac{x}{3}\cos(3x)\right]+\frac{1}{3}\int\cos(3x)\,dx = -\frac{x}{3}\cos(3x)+\frac{1}{9}\sin(3x)+C_1,\ C_1\in\mathbf{R}.$$
Et de même,
$$\int x\sin(x)\,dx = [-x\cos(x)]+\int\cos(x)\,dx = -x\cos(x)+\sin(x)+C_2,\ C_2\in\mathbf{R}.$$
Et par conséquent,
$$\int x\sin^3(x)\,dx = \frac{1}{12}x\cos(3x)-\frac{1}{36}\sin(3x)-\frac{3}{4}x\cos(x)+\frac{3}{4}\sin(x)+C,\ C\in\mathbf{R}.$$

2. Procédons à une intégration par parties en notant que $\operatorname{Arcsin}(x) = 1\times\operatorname{Arcsin}(x)$. Alors
$$\int\operatorname{Arcsin}(x)\,dx = [x\operatorname{Arcsin}(x)]-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\operatorname{Arcsin}(x)-\left[-\sqrt{1-x^2}\right] = x\operatorname{Arcsin}(x)+\sqrt{1-x^2}+C,\ C\in\mathbf{R}.$$

3. Dérivons x et intégrons le sh, en posant $u(x)=x$ et $v(x)=\operatorname{ch}(x)$, de sorte que
$$\int x\operatorname{sh}(x)\,dx = x\operatorname{ch}(x)-\int\operatorname{ch}(x)\,dx = x\operatorname{ch}(x)-\operatorname{sh}(x)+C,\ C\in\mathbf{R}.$$

Solution de l'exercice 8.11

Nous savons que $te^t\cos t = \operatorname{Re}\left(te^te^{it}\right) = \operatorname{Re}\left(te^{(1+i)t}\right)$.
Il s'agit donc de déterminer une primitive de $te^{(1+i)t}$.
Pour cela, nous pouvons procéder par intégration par parties, en posant $u(t)=t$, $v(t)=\frac{1}{1+i}e^{(1+i)t}$, et donc $u'(t)=1$ et $v'(t)=e^{(1+i)t}$. Il vient alors
$$\int te^{(1+i)t}\,dt = [\frac{t}{1+i}e^{(1+i)t}]-\int\frac{1}{1+i}e^{(1+i)t}\,dt = \left(\frac{t}{(1+i)}+\frac{1}{(1+i)^2}\right)e^{(1+i)t}.$$
Mais $\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{2}$ et donc $\frac{1}{(1+i)^2}=\frac{-i}{2}$.
Et par conséquent, une primitive de $t\mapsto te^t\cos t$ est
$$t\mapsto\operatorname{Re}\left(\frac{t(1-i)+i}{2}e^{(1+i)t}\right) = \frac{e^t}{2}\operatorname{Re}\left((t+(1-t)i)(\cos t+i\sin t)\right) = \frac{e^t}{2}(t\cos t+(t-1)\sin t).$$

Solution de l'exercice 8.12

1. Posons $x=e^t$. Lorsque $t=0$, alors $x=1$, et lorsque $t=\ln 2$, $x=2$.
On a alors $dx = e^t\,dt = x\,dt \Leftrightarrow dt=\frac{dx}{x}$. Il vient donc
$$\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2t}}{e^t+1}\,dt = \int_1^2\frac{x^2}{x+1}\frac{dx}{x} = \int_1^2\frac{x}{x+1}\,dx = \int_1^2\frac{x+1-1}{x+1}\,dx = \int_1^2\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx = [x-\ln(x+1)]_1^2 = 1-\ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

2. Lorsque $t=e^{-1}$, $x=e$ et vice-versa.
De plus, $t=\frac{1}{x}$, donc $dt=-\frac{dx}{x^2}$. Ainsi,
$$\int_{e^{-1}}^e\frac{\ln t}{t^2+1}\,dt = \int_e^{e^{-1}}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+1}\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx = \int_{e^{-1}}^e\frac{-\ln x}{x^2+1}\,dx.$$
Autrement dit, si I désigne l'intégrale de départ, nous venons de prouver que $I=-I$, et donc $I=0$.

3. En posant $t=\sqrt{x-1}$, on a $dt=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}\,dx$. De plus, on a $t^2=x-1 \Leftrightarrow x=t^2+1$.
Il vient donc

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{dx}{x+\sqrt{x-1}} &= \int_1^2 \frac{2\sqrt{x-1}}{x+\sqrt{x-1}}\frac{dx}{2\sqrt{x-1}} = \int_0^1 \frac{2t}{t^2+1+t}\,dt\\
&= \int_0^1 \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,dt - \int_0^1 \frac{1}{t^2+t+1}\,dt\\
&= \left[\ln(t^2+t+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{\left(t+\frac12\right)^2+\frac34}\,dt\\
&= \ln(3) - \frac43\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt3}\right)^2+1}\,dt\\
&= \ln(3) - \frac43\left[\frac{\sqrt3}{2}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2t+1}{\sqrt3}\right)\right]_0^1\\
&= \ln(3) - \frac{2}{\sqrt3}\left(\operatorname{Arctan}\left(\sqrt3\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt3}\right)\right)\\
&= \ln(3) - \frac{2}{\sqrt3}\frac{\pi}{6} = \ln(3) - \frac{\pi}{3\sqrt3}.
\end{aligned}$$

4. Lorsque $\theta=0$, alors $x=0$, et lorsque $\theta=\dfrac{\pi}{6}$, alors $x=\dfrac12$.
De plus, $dx=\cos\theta\,d\theta$. Et donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{d\theta}{\cos\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\theta\,d\theta}{1-\sin^2\theta} = \int_0^{1/2}\frac{1}{1-x^2}\,dx.$$

Mais $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{(x+1)(x-1)}$, et une décomposition en éléments simples nous donne $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac12\dfrac{1}{x+1} - \dfrac12\dfrac{1}{x-1}$. Et par conséquent,

$$\int_0^{1/2}\frac{dx}{1-x^2} = \frac12\int_0^{1/2}\frac{dx}{x+1} - \frac12\int_0^{1/2}\frac{dx}{x-1} = \left[\frac12\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)\right]_0^{1/2} = \frac12\ln 3.$$

5. Notons que sur l'intervalle[5] $\left[\dfrac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$, la fonction cos est bien positive, et donc la racine carrée est bien définie.
Posons alors $t=\cos\theta$, de sorte que $dt=-\sin\theta\,d\theta$, et donc

$$\begin{aligned}
\int_{2\pi}^{5\pi/3}\sin(2\theta)\sqrt{\cos\theta}\,d\theta &= \int_{2\pi}^{5\pi/3} 2\cos\theta\sqrt{\cos\theta}\sin\theta\,d\theta\\
&= \int_{1/2}^1 2t\sqrt{t}\,dt\\
&= \left[\frac45 t^2\sqrt{t}\right]_{1/2}^1\\
&= \frac45 - \frac{\sqrt2}{10}.
\end{aligned}$$

[5] Les bornes sont effectivement «à l'envers», et si vous ne l'aviez pas remarqué, ça ne change rien !

6. Notons que la fonction $t\mapsto\sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}$ est bien $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0,\dfrac12\right]$, ce qui ne serait pas le cas sur $[0,1]$ (car la racine carrée n'est pas dérivable en 0).

Procédons au changement de variable indiqué : on a alors $u^2=\dfrac{1-t}{1+t} \Leftrightarrow t=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ et donc $dt=\dfrac{-4u\,du}{(1+u^2)^2}$, de sorte que

$$\int_0^{1/2}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt = \int_{1/\sqrt3}^1 \frac{4u^2}{(1+u^2)}\,du.$$

Procédons alors à une intégration par parties, en posant $f(u) = u$ et $g(u) = -\dfrac{2}{1+u^2}$, qui sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, avec $f'(u) = 1$ et $g'(u) = \dfrac{4u}{(1+u^2)^2}$, de sorte que

$$\int_{1/\sqrt{3}}^{1} \frac{4u^2}{(1+u^2)^2}\,du = \left[\frac{-2u}{1+u^2}\right]_{1/\sqrt{3}}^{1} + \int_{1/\sqrt{3}}^{1} \frac{2}{1+u^2}\,du = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + [2\operatorname{Arctan}(u)]_{1/\sqrt{3}}^{1} = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$$

Solution de l'exercice 8.13

Dans le cas où vous n'êtes pas à l'aise avec le changement de variable sans bornes, vous pouvez toujours considérer que déterminer $\displaystyle\int f(t)\,dt$, c'est déterminer $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$, où a est n'importe quel élément fixé de l'intervalle de définition de f.

> **⚠ Attention !**
> Pour la borne «du bas» de l'intégrale, on peut prendre n'importe quel nombre, du moment qu'il est dans l'ensemble de définition de notre fonction. Et donc ici on ne prendra ni 0, ni 1, ni n'importe quel nombre hors de $]1, +\infty[$.

1. Une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ est $t \mapsto \displaystyle\int_2^t \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

   Posons $u = \dfrac{1}{x}$, de sorte que $x = \dfrac{1}{u}$ et donc $dx = -\dfrac{du}{u^2}$. Alors

$$\begin{aligned}\int_2^t \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} &= -\int_{1/2}^{1/t} \frac{du}{u^2\frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{u^2}-1}}\\ &= \int_{1/t}^{1/2} \frac{1}{u\sqrt{\frac{1}{u^2}-1}} = \int_{1/t}^{1/2} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = [\operatorname{Arcsin}(u)]_{1/t}^{1/2}\\ &= \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{t}\right).\end{aligned}$$

   Donc les primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ sont les $t \mapsto -\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{1}{t}\right) + C$, $C \in \mathbf{R}$.

   Rédaction alternative avec des intégrales «sans bornes»

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\int \frac{du}{u^2\frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{u^2}-1}} = -\int \frac{du}{u\sqrt{\frac{1}{u^2}-1}} = -\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -\operatorname{Arcsin}(u) + C = -\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{x}\right) + C,\ C \in \mathbf{R}.$$

2. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ est $t \mapsto \displaystyle\int_0^t \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx$.

   Si on pose $u = \sqrt{1+x}$, on a $du = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}\,dx$ et $x = u^2 - 1$.

   Et donc

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{x}{2\sqrt{1+x}}\,dx &= \int_1^{\sqrt{1+x}} 2(u^2-1)\,du\\ &= \left[\frac{2}{3}u^3 - 2u\right]_1^{\sqrt{1+t}}\\ &= \frac{2}{3}(1+t)\sqrt{1+t} - 2\sqrt{1+t} + \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

   Et donc les primitives de $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ sont les $t \mapsto \dfrac{2}{3}(1+t)\sqrt{1+t} - 2\sqrt{1+t} + C$, $C \in \mathbf{R}$.

> **Remarque**
> On a «caché» le $\frac{4}{3}$ dans la constante d'intégration.

   Rédaction alternative, avec des intégrales «sans bornes».

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx = \int x\frac{dx}{\sqrt{1+x}} = \int (u^2-1)2\,du = \frac{2u^3}{3} - 2u + C = 2\sqrt{1+x}\left(\frac{1+x}{3} - 1\right) + C,\ C \in \mathbf{R}.$$

3. Notons que $t \mapsto t^2$ réalise une bijection de $\mathbf{R}_+^*$ sur lui-même, et que la bijection réciproque est $x \mapsto \sqrt{x}$.
   Posons donc $x = t^2$, de sorte que $dx = 2t\,dt$. Alors

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} = \int \frac{2t}{\sqrt{t^2} + \sqrt{t^6}}\,dt = \int \frac{2t}{t + t^3}\,dt = \int \frac{2}{1+t^2}\,dt = 2\operatorname{Arctan}(t) + C = 2\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{x}\right) + C,\ C \in \mathbf{R}.$$

4. Si on utilise le changement de variable $x = \frac{1}{t}$, alors $dx = -\frac{dt}{t^2}$ et donc

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{1}{\frac{1}{t^2}\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}\left(-\frac{dt}{t^2}\right) = -\int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = -\sqrt{1+t^2}+C = -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+C.$$

Si on utilise le changement de variable $x = \tan(u)$, alors $dx = (1+\tan^2 u)\,du$ et donc

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{1+\tan^2 u}{\tan^2 u\sqrt{1+\tan^2 u}}\,du = \int \frac{\sqrt{1+\tan^2 u}}{\tan^2 u}\,du.$$

Mais $1+\tan^2 u = \frac{1}{\cos^2 u}$ et donc

$$\int \frac{\sqrt{1+\tan^2 u}}{\tan^2 u}\,du = \int \frac{1}{\cos u \tan^2 u}\,du = \int \frac{\cos u}{\sin^2 u}\,du = -\frac{1}{\sin u} + C.$$

Or, $\sin u = \tan u \cos u = \tan u \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 u}}$.

Donc $-\frac{1}{\sin u} + C = -\frac{\sqrt{1+\tan^2 u}}{\tan u} + C = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + = -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + C$.

Détails

C'est encore la formule

$$\frac{1}{\cos^2 u} = 1+\tan^2 u.$$

Enfin, si on utilise le changement de variable $x = \mathrm{sh}(v)$. Alors $dx = \mathrm{ch}(v)dv = \sqrt{1+\mathrm{sh}^2(v)}dv$.
Et donc

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\mathrm{ch}(v)}{\mathrm{sh}^2(v)\sqrt{1+\mathrm{sh}^2(v)}} = \int \frac{dv}{\mathrm{sh}^2 v} = 4\int \frac{1}{(e^v-e^{-v})^2}\,dv = 4\int \frac{e^{-2v}}{(1+e^{-2v})^2}\,dv = -\frac{2}{1-e^{-2v}}+C.$$

Mais $x = \mathrm{sh}(v) \Leftrightarrow 2x = e^v - e^{-v} \Leftrightarrow (e^{-v})^2 + 2xe^{-v} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{-v} = -x \pm \sqrt{1+x^2}$.
Puisque $e^{-v} \geqslant 0$, on a donc $e^{-v} = x - \sqrt{1+x^2}$.
Et alors $e^{-2v} = 1 - 2xe^{-v} = 1 + 2x^2 - 2x\sqrt{1+x^2}$.
Il vient alors

$$\frac{2}{e^{-2v}-1} = \frac{1}{x^2 - x\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{x}\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x^2-(1+x^2)} = -\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x} = -1 - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

Astuce

Vous aurez bien entendu reconnu la multiplication par la quantité conjuguée afin de ne pas garder de racines au dénominateur.

Et donc $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C'$.

Remarque *: notons au passage que nous avons quasiment calculé la bijection réciproque de* sh*, puisque nous avons (presque) résolu l'équation* $\mathrm{sh}(v) = x$.

5. Commençons par noter que la fonction $x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ n'est définie que sur $]-1,1]$. Or la fonction $u \mapsto \cos(u)$ réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $]0,\pi[$ sur $]-1,1[$, dont la bijection réciproque est la fonction Arccos.
Procédons donc au changement de variable indiqué : $x = \cos u$, de sorte que $dx = -\sin u\,du$.
On a alors $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = -\int \sqrt{\frac{1+\cos u}{1-\sin u}}\sin u\,du$.
Il va nous falloir faire un peu de trigonométrie pour aller plus loin…
L'idée est d'utiliser les formules $\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$, qui, en remplaçant t par $\frac{t}{2}$, nous donnent

$$\cos t = 2\cos^2\frac{t}{2} - 1 \Leftrightarrow 2\cos^2\frac{t}{2} = 1+\cos t \text{ et } 2\sin^2\frac{t}{2} = 1-\cos t.$$

Et donc

$$-\int \sqrt{\frac{1+\cos u}{1-\cos u}}\sin u\,du = -\int \sqrt{\frac{\cos^2\frac{u}{2}}{\sin^2\frac{u}{2}}}\sin u\,du = -\int \frac{\cos\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\sin u,\,du.$$

Signe

Pour $u \in]0,\pi[$, on a $0 \leqslant \frac{u}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}$, et donc $\sin\frac{u}{2}$ et $\cos\frac{u}{2}$ sont positifs.

Encore un peu de trigo : $\sin u = \sin\left(2\frac{u}{2}\right) = 2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}$, et donc

$$-\int \frac{\cos\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\sin u\,du = -\int 2\cos^2\frac{u}{2}\,du = -\int (1+\cos u)\,du = -u - \sin u + C,\ C \in \mathbf{R}.$$

Et donc enfin,

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = -\operatorname{Arccos}(x) - \sin(\operatorname{Arccos} x) + C = -\operatorname{Arccos}(x) - \sqrt{1-x^2} + C,\ C \in \mathbf{R}.$$

Notons que le changement de variable était en fait superflu :

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx = \int \sqrt{\frac{(x+1)^2}{1-x^2}}\,dx$$
$$= \int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{1-x^2} + \operatorname{Arcsin}(x) + C,\ C \in \mathbf{R}.$$

On multiplie numérateur et dénominateur par $\sqrt{1+x}$.

Solution de l'exercice 8.14

1. Le calcul est immédiat : une primitive de $t \mapsto \dfrac{2t}{(1+t^2)^n}$ est $t \mapsto \dfrac{1}{1-n}\dfrac{1}{(t^2+1)^{n-1}}$.
   Et donc $I_n = \left[\dfrac{1}{1-n}\dfrac{1}{(t^2+1)^{n-1}}\right]_0^1 = \dfrac{1}{n-1}\left(1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$.
2. Procédons au changement de variable indiqué, en notant que
   $dt = (1+\tan^2 y)\,dy \Leftrightarrow \dfrac{dt}{1+t^2} = dy$. Alors
   $$J_2 = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 y}\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 y\,dy.$$
   Mais alors $\cos^2 y = \dfrac{1+\cos(2y)}{2}$ et donc
   $$J_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} dy + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2y)\,dy = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\left[\sin(2y)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$$
3. Le même changement de variable qu'à la question précédente nous mène à
   $$J_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\tan^2 y)^2}\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4(y)\,dy.$$
   Mais en utilisant les formules d'Euler, il vient
   $$\cos^4 y = \left(\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^4}\left(e^{i4y} + 4e^{i2y} + 6 + 4e^{-2iy} + e^{-i4y}\right) = \frac{1}{8}\cos(4y) + \frac{1}{2}\cos(2y) + \frac{3}{8}.$$
   Et donc on obtient
   $$J_3 = \frac{3}{8}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{32}\underbrace{\left[\sin(4y)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}}_{=0} + \frac{1}{4}\left[\sin(2y)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}.$$
4. Commençons par noter que $2x^2 - 4x + 10 = 2(x^2 - 2x + 5) = 2\left((x-1)^2 + 4\right)$.
   Si nous voulons faire apparaître I_2 et J_2, il nous faut un changement de variable faisant apparaître $(u^2+1)^2$ au dénominateur. Posons donc $u = \dfrac{x-1}{2}$, de sorte que
   $$\frac{2x+1}{(2x^2-4x+10)^2} = \frac{1}{4}\frac{2x+1}{((x-1)^2+4)^2} = \frac{1}{64}\frac{2x+1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}$$
   et donc
   $$\int_1^3 \frac{2x+1}{(2x^2-4x+10)^2}\,dx = \frac{1}{64}\int_0^1 \frac{4u+3}{(u^2+1)^2}2\,du = \frac{1}{16}\int_0^1 \frac{2u}{(u^2+1)^2}\,du + \frac{3}{32}\int_0^1 \frac{du}{(u^2+1)^2}$$
   $$= \frac{1}{16}I_2 + \frac{3}{32}J_2 = \frac{1}{32} + \frac{3}{32}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\right)$$
   $$= \frac{3\pi}{256} + \frac{7}{128}.$$

Remarque
C'est exactement le changement de variable que nous aurions fait pour calculer $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2-4x+10}\,dx$.

Solution de l'exercice 8.15

1. Le seul éventuel soucis qui pourrait apparaître serait que les dénominateurs s'annulent sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Mais nous savons que

$$\cos(t) + \sin(t) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(t) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(t)\right) = \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Et sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, cette quantité reste comprise entre $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et 1.
Donc les deux intégrales sont bien définies, car intégrales de fonctions continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Il est clair que

$$S + C = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t + \sin t}{\cos t + \sin t}\, dt = \int_0^{\pi/2} 1\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

3. Procédons au changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$, de sorte que $dx = -dx$:

$$S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}(-dx) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\cos(x) + \sin(x)}\, dx = C.$$

Et donc $S + C = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2S = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow S = \frac{\pi}{4}$.

4. Procédons au changement de variable $x = \sin t$.
On a alors $dx = \cos t\, dt$ et donc

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \sqrt{1 - \sin^2 t}}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \sqrt{\cos^2 t}}\, dt.$$

Mais sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos t \geqslant 0$, de sorte que $\cos t = \sqrt{\cos^2 t}$, et donc

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t}\, dt = S = \frac{\pi}{4}.$$

Solution de l'exercice 8.16

1. Procédons au changement de variable indiqué : $t = \mathrm{ch}(x)$, de sorte que $dt = \mathrm{sh}(x)\, dx$.
Alors

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{th}(x)}{1 + \mathrm{ch}(x)}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{\mathrm{ch}(x)(1 + \mathrm{ch}(x))}\mathrm{sh}(x)\, dx = \int_1^{\mathrm{ch}(1)} \frac{1}{t(t+1)}\, dt = \int_1^{\mathrm{ch}(1)} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt.$$

Et donc

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{th}(x)}{1 + \mathrm{ch}(x)}\, dx = \left[\ln \frac{x}{x+1}\right]_1^{\mathrm{ch}(1)} = \ln\left(\frac{\mathrm{ch}(1)}{1 + \mathrm{ch}(1)}\right) + \ln(2).$$

2. Là aussi, procédons au changement de variable indiqué, $x = \tan t$, de sorte que $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$.
Et alors

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^4 t\, dt} = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 t}\frac{dt}{\cos^2 t} = \int_0^{\pi/4} (\tan^2 t + 1)\frac{dt}{\cos^2 t} = \int_0^1 (x^2 + 1)\, dx.$$

Ne reste alors qu'à calculer l'intégrale d'un polynôme, ce qui est trivial :

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dt}{\cos^4 t} = \left[\frac{t^3}{3} + t\right]_0^1 = \frac{4}{3}.$$

3. Commençons par remarquer que $\sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta)$ et que

$$2 + \sin\theta - \cos^2\theta = 2 + \sin\theta - 1 + \sin^2\theta = \sin^2\theta + \sin\theta + 1.$$

Procédons alors au changement de variable indiqué, en notant que $dx = \cos\theta\, d\theta$. Et donc

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2\theta)}{(\sin\theta - 2)(2+\sin\theta - \cos^2\theta)}\, d\theta &= \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin\theta}{(\sin\theta - 2)(\sin^2\theta + \sin\theta + 1)} \cos\theta\, d\theta \\ &= \int_0^1 \frac{2x}{(x-2)(x^2+x+1)}\, dx.\end{aligned}$$

Procédons alors à une décomposition en éléments simples : il existe a, b, c tels que

$$\frac{2x}{(x-2)(x^2+x+1)} = \frac{a}{x-2} + \frac{cx+d}{x^2+x+1}.$$

Après multiplication par $(x-2)$ et évaluation en $x = 2$, il vient $a = \frac{4}{7}$.

Après multiplication par x et passage à la limite $x \to +\infty$, il vient $0 = a + c \Leftrightarrow c = -\frac{2}{7}$.

Enfin, en évaluant en $x = 0$, on obtient $0 = -\frac{2}{7} + d \Leftrightarrow d = \frac{2}{7}$.

Et donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{2x}{(x-2)(x^2+x+1)}\, dx &= \frac{4}{7}\int_0^1 \frac{dx}{x-2} - \frac{2}{7}\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2+x+1}\, dx \\ &= \frac{4}{7}\left[\ln(|x-2|)\right]_0^1 - \frac{2}{7}\int_0^1 \frac{(2x+1)-2}{x^2+x+1}\, dx \\ &= -\frac{4}{7}\ln(2) - \frac{2}{7}\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\, dx + \frac{4}{7}\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}.\end{aligned}$$

Mais $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\, dx = \left[\ln(x^2+x+1)\right]_0^1 = \ln(3)$. Et d'autre part,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\, dx &= \int_0^1 \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\, dx \\ &= \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}\, dx \\ &= \frac{4}{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{Arctan}(\sqrt{3}) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Et donc[6]

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2\theta)}{(\sin\theta - 2)(2+\sin\theta-\cos^2\theta)}\, d\theta = -\frac{4}{7}\ln(2) - \frac{2}{7}\ln(3) + \frac{4\pi}{21\sqrt{3}}.$$

[6] Pousser un gros «Ouf !» de soulagement...

Solution de l'exercice 8.17

1. Commençons par une intégration par parties afin de nous débarrasser de l'arctangente :

$$\int \frac{\operatorname{Arctan} t}{t^2}\, dt = \left[-\frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\right] + \int \frac{1}{t(t^2+1)}\, dt.$$

Nous pouvons alors procéder à une décomposition en éléments simples, qui sera de la forme

$$\frac{1}{t(t^2+1)} = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{t^2+1}.$$

En multipliant par t et en évaluant en $t=0$, il vient $a=1$.
Puis en multipliant par t et en passant à la limite $t\to+\infty$, il vient $0=a+b \Leftrightarrow b=-1$.
Enfin, en évaluant en $t=1$, on obtient $\dfrac{1}{2}=1+\dfrac{-1+c}{2}\Leftrightarrow c=0$.
Et donc $\dfrac{1}{t(t^2+1)}=\dfrac{1}{t}-\dfrac{t}{t^2+1}$.
Et par conséquent, $\displaystyle\int\frac{dt}{t(t^2+1)}=\ln(|t|)-\frac{1}{2}\ln(t^2+1)$.
Donc une primitive de $t\mapsto\dfrac{\operatorname{Arctan} t}{t^2}$ est

$$t\mapsto\ln(|t|)-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\frac{\operatorname{Arctan} t}{t}=\ln\left(\sqrt{\frac{t^2}{t^2+1}}\right)-\frac{\operatorname{Arctan} t}{t}.$$

Remarque
Une telle primitive a déjà été calculée à l'exercice 8 par intégration par parties.

2. Essayons d'utiliser le changement de variable $x=\ln(t)$. On a alors $dx=\dfrac{1}{t}\,dt$, et donc

$$\int\sin(\ln t)\,dt=\int\sin(\ln t)e^{\ln t}\frac{1}{t}\,dt=\int\sin(x)e^x\,dx.$$

Notons alors que $\sin(x)e^x=\operatorname{Im}(e^{ix}e^x)=\operatorname{Im}(e^{(1+i)x})$.
Une primitive de $x\mapsto e^{(1+i)x}$ est

$$x\mapsto\frac{1}{1+i}e^{(1+i)x}=\frac{1-i}{2}e^x(\cos x+i\sin x).$$

Et donc une primitive de $x\mapsto\sin(x)e^x$ est $x\mapsto\left(-\dfrac{\cos x}{2}+\dfrac{\sin x}{2}\right)e^x$.
Enfin, on a donc $\displaystyle\int\sin(\ln t)\,dt=\frac{t}{2}(\sin(\ln t)-\cos(\ln t))+C,\ C\in\mathbf{R}$.

3. Procédons au changement de variable $t=e^x$, de sorte que $dt=e^x\,dx$. Alors

$$\int\frac{dx}{e^{2x}+e^x}=\int\frac{e^x dx}{e^x\left((e^x)^2+e^x\right)}=\int\frac{1}{t(t^2+t)}\,dt=\int\frac{dt}{t^2(t+1)}.$$

Procédons alors à une décomposition en éléments simples : il existe trois réels a,b,c tels que

$$\frac{1}{t^2(t+1)}=\frac{a}{t}+\frac{b}{t^2}+\frac{c}{t+1}\quad(\star).$$

En multipliant $(\star)$ par $t+1$ et en évaluant en $t=-1$, on obtient $c=1$.
En multipliant $(\star)$ par t^2 et en évaluant en $t=0$, on obtient $b=1$.
Enfin, en multipliant $(\star)$ par t en en faisant tendre t vers $+\infty$, on obtient $0=a+c$, de sorte que $a=-1$ et donc

$$\frac{1}{t^2(t+1)}=-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t+1}.$$

Et ainsi,

$$\int\frac{dt}{t^2(t+1)}=-\ln(|t|)-\frac{1}{t}+\ln(|t+1|)+C,\ C\in\mathbf{R}.$$

Et donc $\displaystyle\int\frac{dx}{e^{2x}+e^x}=-\ln(|e^x|)-\frac{1}{e^x}+\ln(|e^x+1|)+C=-x-e^{-x}+\ln(1+e^x)+C,\ C\in\mathbf{R}$.

4. Notons que la fonction intégrée n'est définie que sur $[-1,1]$.
Commençons par une intégration par parties :

$$\int x\operatorname{Arcsin}(x)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\operatorname{Arcsin}(x)\right]-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Calculons cette seconde intégrale à l'aide du changement de variable $x=\sin\theta$, qui réalise une bijection de $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$:

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int\frac{\sin^2\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\cos\theta\,d\theta=\int\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\cos\theta\,d\theta=\int(1-\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= \theta - \int \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,\theta = \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\sin(2\theta) = \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}(x) - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C.$$

Et donc $\displaystyle\int x\operatorname{Arcsin}(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{Arcsin}(x) - \frac{1}{4}\operatorname{Arcsin}(x) + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + C,\ C \in \mathbf{R}.$

5. On a $\displaystyle\frac{1}{\tan^3(x)} = \frac{1+\tan^2(x)-\tan^2(x)}{\tan^3(x)} = \frac{1+\tan^2(x)}{\tan^3(x)} - \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$
Or $\displaystyle\int \frac{1+\tan^2(x)}{\tan^3(x)}\,dx = -\frac{1}{2\tan^2(x)} + C$ et $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin(x)| + C.$
Et donc les primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{\tan^3(x)}$ sont les $x \mapsto -\dfrac{1}{2\tan^2(x)} - \ln|\sin x| + C.$

6. Procédons au changement de variable $t = \ln(x)$, de sorte que $dt = \dfrac{dx}{x}$. Alors

$$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}} = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\operatorname{Arcsin}(x)]_0^{1/2} = \frac{\pi}{6}.$$

7. Procédons au changement de variable $x = \dfrac{1}{t}$, avec $dt = -\dfrac{dx}{x^2}$. On a donc

$$I = \int_2^{1/2} \left(1+x^2\right)\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{dx}{x^2}\right) = \int_{1/2}^{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x)\right)dx.$$

Et donc $I = \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_{1/2}^{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx - I \Leftrightarrow 2I = \frac{\pi}{2}\int_{1/2}^{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx.$
Mais $\displaystyle\int_{1/2}^{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right),dx = \left[x - \frac{1}{x}\right]_{1/2}^{2} = 3.$
Et donc on en déduit que $I = \dfrac{3\pi}{4}$.

Solution de l'exercice 8.18

Peut-être l'avez-vous remarqué, mais pour les fonctions faisant apparaître $\sqrt{1-x^2}$, le changement de variable $x = \cos t$ est potentiellement intéressant, puisqu'il permet de faire apparaître $\sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t}$ en utilisant la relation $\cos^2 t + \sin^2 = 1$.
Puisqu'on a de la même manière $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$, si on pose $x = \operatorname{ch} t$, alors $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\operatorname{sh}^2 t}$.

Essayons donc de calculer une primitive de $f : x \mapsto \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^3$ à l'aide du changement de variable $x = \pm\operatorname{ch} t$.
Notons que f n'est définie que sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.
On a alors

$$\int \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^3 dx = \int (\operatorname{ch} t + |\operatorname{sh} t|)^3 \operatorname{sh} t\,dt.$$

► Sur $[1+\infty[$, $\operatorname{sh} t \geqslant 0$ et donc

$$\int (\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t)^3\,dt = \int (e^t)^3\,dt = \int e^{3t}\operatorname{sh} t\,dt = \frac{1}{2}\int\left(e^{4t} - e^{2t}\right)dt = \frac{1}{8}e^{4t} - \frac{1}{4}e^{2t} + C,\ C \in \mathbf{R}.$$

Mais il nous faut alors revenir à notre variable de départ, à savoir x.
Notons à cet effet que $e^{4t} = (e^t)^4 = (\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t)^3 = \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^4$.
Et de même, $e^{2t} = \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^2$.
Et donc une primitive de f sur $[1, +\infty[$ est $x \mapsto \dfrac{1}{8}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^4 - \dfrac{1}{4}\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^2$.

> **Alternative**
> Une option serait de déterminer la bijection réciproque de $\operatorname{ch}_{|\mathbf{R}_+}$, qu'on trouverait être égale à
> $$x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).$$

► Sur $]-\infty, -1]$, la principale différence viendra du fait que $\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} = |\operatorname{sh} t| = -\operatorname{sh} t$.
Mais il faudra aussi prendre garde au fait que ch est à valeurs dans $[1, +\infty[$, et qu'un élément x de $]-\infty, -1]$ ne saurait en aucun cas s'écrire sous la forme $x = \operatorname{ch} t$.

En revanche, nous pouvons utiliser le changement de variable $x = -\operatorname{ch} t$. On a alors $dx = -\operatorname{sh} t\, dt$.
Donc $\displaystyle\int (x+\sqrt{x^2-1})^3\,dt = \int (-\operatorname{ch} t - |\operatorname{sh} t|)^3(-\operatorname{sh} t)\,dt = \int (e^t)^3 \operatorname{sh} t\,dt$.
Et alors comme précédemment, on obtient comme primitive de f, la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{8}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^4 - \frac{1}{4}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 8.19

Notons I l'intégrale à calculer, et réalisons le changement de variable $t = \dfrac{\pi}{4} - x$, qui laisse invariantes les bornes de l'intégrale.
On a alors $\tan(x) = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - t\right) = \dfrac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan t}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan t} = \dfrac{1-\tan t}{1+\tan t}$.
Et par conséquent,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1+\tan t}\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(2)\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\,dt = \frac{\pi\ln 2}{4} - I.$$

Et donc $I = \dfrac{\pi \ln 2}{8}$.

Pour le calcul de J, procédons par intégration par parties :

$$J = \int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} t}{1+t}\,dt = \left[\ln(1+t)\operatorname{Arctan}(t)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\,dt.$$

Un changement de variable $u = \operatorname{Arctan} t$ dans cette intégrale nous donne alors
$t = \tan u \Leftrightarrow dt = (1+\tan^2 u)\,du \Leftrightarrow du = \dfrac{dt}{1+t^2}$. Et donc

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\,dt = \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan u)\,du = I.$$

Il vient donc $J = \dfrac{\pi\ln 2}{4} - I = \dfrac{\pi}{8}\ln 2$.