TD 7 : Nombres complexes

▸ Forme algébrique, forme exponentielle

Exercice 7.1 **Identité du parallélogramme** F
Montrer que pour tous $(z, z') \in \mathbf{C}^2$, $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$. Interpréter géométriquement.

Exercice 7.2 Soit $z = \dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}$. Donner la forme exponentielle, puis la forme algébrique de z^{2019}. PD

Exercice 7.3 Déterminer le module et un argument de $z = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$. PD

Exercice 7.4 Pour $\theta \in]-\pi, \pi]$, déterminer le module et un argument de $1+e^{i\theta}$, $1-e^{i\theta}$, $\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$, $1+i\theta$. AD

Exercice 7.5 Déterminer tous les complexes z tels que $|z| = \left|\dfrac{1}{z}\right| = |z+1|$. PD

Exercice 7.6 Soient a, b, c trois nombres complexes de module 1. Montrer que $|a+b+c| = |ab+ac+bc|$. AD

Exercice 7.7 Résoudre les équations $e^z + 1 = 0$ et $e^z + e^{-z} = 1$, d'inconnue $z \in \mathbf{C}$. PD

Exercice 7.8 Soit $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$, de forme algébrique $z = a + ib$, $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. AD
Montrer que l'argument principal de z est $\theta = 2\,\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{b}{a+\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

Exercice 7.9 Soit $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| \leqslant 1$. PD

1. Montrer que $|z^3 + 2iz| \leqslant 3$.
2. Quels sont les z pour lesquels cette inégalité est en fait une égalité ?

Exercice 7.10 Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k}$ et $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k+1}$. AD
Indication : calculer $(1+i)^n$ de deux manières différentes.

Exercice 7.11 Déterminer $\left\{\dfrac{1}{1-z}, z \in \mathbf{U} \setminus \{1\}\right\}$. AD

▸ Applications à la trigonométrie

Exercice 7.12 **Linéarisation** PD

1. Linéariser $\sin^5(x)$. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^\pi \sin^5(x)\,dx$.
2. Linéariser $\cos^2(2x)\sin^3(3x)$.

Exercice 7.13 Soit $\theta \in \mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z}$ et soit $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer $C_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta)$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(k\theta)$. PD

Exercice 7.14 Pour $\theta \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}^*$, calculer $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$. AD

Exercice 7.15 **Polynômes de Tchebychev** D
Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

1. Prouver qu'il existe des entiers $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, $\cos(n\theta) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \cos^k(\theta)$.
2. Montrer que $a_n = 2^{n-1}$.
3. Soit $w = \dfrac{3-4i}{5}$. Vérifier que $w \in \mathbf{U}$, mais que $w \notin \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} \mathbf{U}_n$, c'est-à-dire que w n'est pas une racine de l'unité.

Exercice 7.16 **Irrationalité de $\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Arccos}\,\frac{1}{3}$ (Oral ENS)** TD
Notons $\alpha = \dfrac{\mathrm{Arccos}\,\frac{1}{3}}{\pi}$. Le but de cet exercice est de prouver que α est irrationnel, c'est-à-dire que $\alpha \notin \mathbf{Q}$.

1. Donner la forme algébrique de $e^{i\pi\alpha}$.
2. Montrer que $\alpha \in \mathbf{Q}$ si et seulement si il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $(1+2i\sqrt{2})^n = 3^n$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe des entiers a_n et b_n tels que $(1+2i\sqrt{2})^n = a_n + ib_n\sqrt{2}$, et tels que $a_n - b_n$ ne soit pas divisible par 3. Conclure.

▸ Racines $n^{\text{èmes}}$

Exercice 7.17 Déterminer les racines cinquièmes de j et de $\dfrac{2\sqrt{2}}{i-1}$. F

Exercice 7.18 Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $a \in \mathbf{R}$. Résoudre l'équation $(1+z)^n = \cos(2na) + i\sin(2na)$. PD

Exercice 7.19 Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer $\displaystyle\prod_{\omega \in \mathbf{U}_n} \omega$. PD

Exercice 7.20 Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$, d'inconnue $z \in \mathbf{C}$ possède exactement $n-1$ solutions, qui sont toutes réelles. AD

Exercice 7.21 AD

1. Résoudre l'équation $Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0$, $Z \in \mathbf{C}$.
2. En déduire les solutions de $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right) + 1 = 0$.

Exercice 7.22 **(Banque CCINP 89)** AD
Soit $n \in \mathbf{N}$, avec $n \geqslant 2$ et soit $\zeta = e^{2i\frac{\pi}{n}}$.

1. On suppose que $k \in [\![1, n-1]\!]$. Déterminer le module et un argument du complexe $\zeta^k - 1$.
2. On pose $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \left|\zeta^k - 1\right|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan\frac{\pi}{2n}}$.

▸ Équations dans C

Exercice 7.23 Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbf{C}$: F

1. $z^2 - 3z + 3 - i = 0$
2. $z^2 + (1-2i)z - 2i = 0$
3. $z^4 - z^2 + (1-i) = 0$

Exercice 7.24 PD

1. Résoudre les systèmes $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=5 \end{cases}$ et $\begin{cases} x+y=3-2i \\ xy=5-i \end{cases}$, d'inconnues $(x,y) \in \mathbf{C}^2$.
2. Pour quelles valeurs de $\lambda > 0$ existe-t-il des rectangles pour lesquels l'aire a et le périmètre p sont reliés par la relation $p = \lambda\sqrt{a}$?

Exercice 7.25 Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbf{C}$: PD

1. $z^2 = \bar{z}$
2. $z^2 = -\bar{z}^2$
3. $z^2 = 2\bar{z}$
4. $z^2 = \frac{1}{\bar{z}^2}$

Exercice 7.26 Résoudre l'équation $z^2 + 2|z| - 3 = 0$, d'inconnue $z \in \mathbf{C}$. AD

▸ Application des complexes à la géométrie

Exercice 7.27 Caractériser géométriquement l'ensemble des complexes z de $\mathbf{C} \setminus \{i\}$ tels que $\dfrac{z+2}{1+iz} \in \mathbf{R}$. PD

Exercice 7.28 Soient $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}$ les sommets d'un polygone convexe régulier direct à n côtés, et pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, soit z_k l'affixe de M_k. Donner l'expression des z_k en fonction de z_0 et z_1. PD

Exercice 7.29 Que peut-on dire de la composée de deux rotations ? De la composée de deux homothéties ? F

Exercice 7.30 **Similitudes directes** PD

1. Caractériser géométriquement la similitude associée à $z \mapsto \left(1+i\sqrt{3}\right)z - i\sqrt{3}$.
2. Soit t la translation de vecteur $\vec{u}(-1,0)$ et soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   Caractériser géométriquement $t \circ r \circ t$ et $r \circ t \circ r$.
3. Montrer qu'une similitude directe f réalise une bijection de $\mathbf{C}$ sur $\mathbf{C}$, c'est-à-dire que tout complexe possède un unique antécédent par f. Prouver que f^{-1} est encore une similitude directe, et déterminer sa nature et ses éléments caractéristiques en fonction de ceux de f.

EXERCICE 7.31 Soit $z \in \mathbf{C}$. À quelle condition nécessaire et suffisante sur z : AD

1. les points d'affixes $1, z$ et z^2 sont-il alignés ?
2. les points d'affixes z, z^2 et z^3 sont-ils les sommets d'un triangle rectangle en le point d'affixe z^2 ?

EXERCICE 7.32 Soient A, B, C trois points d'affixes respectives a, b et c. On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. D

1. Calculer j^2 et en déduire une expression de $e^{i\frac{\pi}{3}}$ en fonction de j.
2. Montrer que ABC est équilatéral direct (c'est-à-dire avec $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ si et seulement $a + bj + cj^2 = 0$.
3. Montrer que ABC est équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

EXERCICE 7.33 Soit $a \in \mathbf{U}$, soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soient $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ les n racines $n^{\text{èmes}}$ de a. D
Montrer que les points d'affixes $(1 + z_k)^n$, $0 \leqslant k \leqslant n - 1$ sont alignés.

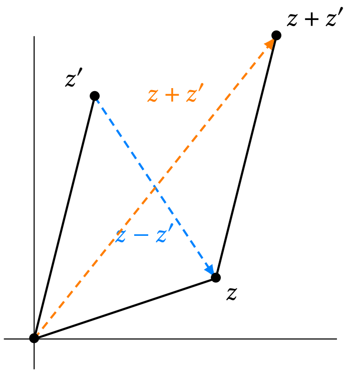
CORRECTION DES EXERCICES DU TD 7

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.1

Soient z, z' deux complexes. Alors

$$\begin{aligned}|z+z'|^2+|z-z'|^2 &= (z+z')\left(\overline{z}+\overline{z'}\right)+(z-z')\left(\overline{z}-\overline{z'}\right)\\ &= |z|^2+|z'|^2+z\overline{z'}+\overline{z}z'+|z|^2+|z'|^2-z\overline{z'}-\overline{z}z'\\ &= 2\left(|z|^2+|z'|^2\right).\end{aligned}$$

Cette formule traduit le fait que dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs de deux côtés consécutifs est égale à la somme des carrés des longueurs des diagonales.



Méthode
Pour travailler avec un quotient, mieux vaut travailler dès le départ avec les formes exponentielles du numérateur et du dénominateur plutôt que d'essayer d'obtenir la forme algébrique du quotient. En effet, la forme exponentielle est bien plus adaptée à la manipulation de quotients que la forme algébrique.

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.2

On a $|\sqrt{3}+i| = \sqrt{3+1} = 2$. Et donc $\sqrt{3}+i = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

De même, on a $|1-i| = \sqrt{2}$ et donc $1-i = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

On en déduit que

$$z = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}+i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}.$$

Et par conséquent,

$$z^{2019} = \left(\sqrt{2}\right)^{2019}e^{i\frac{5\times 2019}{12}} = \left(\sqrt{2}\right)^{2019}e^{i\frac{10095\pi}{12}} = \left(\sqrt{2}\right)^{2019}e^{i\frac{3365\pi}{4}} = \left(\sqrt{2}\right)^{2019}e^{i\left(\frac{5\pi}{4}+840\times 2\pi\right)} = \left(\sqrt{2}\right)^{2019}e^{i\frac{5\pi}{4}}.$$

Soit encore

$$z^{2019} = \left(\sqrt{2}\right)^{2019}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2}2^{1009}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2^{1009}(1+i).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.3

On a $|z|^2 = 2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2} = 4$, donc $|z| = 2$.
Notons θ l'argument principal de z, qui est donc dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, puisque $\mathrm{Im}(z)$ et $\mathrm{Re}(z)$ sont positifs.

On a alors $\cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, et donc

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}-1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Et donc $2\theta = \frac{\pi}{4}$, si bien que $\theta = \frac{\pi}{8}$.

Remarque
Notons au passage qu'on en déduit facilement les valeurs de $\sin\frac{\pi}{8}$ et $\cos\frac{\pi}{8}$.

Solution de l'exercice 7.4

On a
$$1+e^{i\theta}=e^0+e^{i\theta}=e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2}+e^{i\theta/2}\right)=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\theta/2}.$$
Puisque $\frac{\theta}{2}\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, son cosinus est positif, et donc $2\cos\frac{\theta}{2}=\left|1+e^{i\theta}\right|$.
Autrement dit, nous avons déjà sous les yeux la forme exponentielle de $1+e^{i\theta}$, de sorte qu'un argument en est $\frac{\theta}{2}$.
Sur le même principe, on a
$$1-e^{i\theta}=e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2}\right)=-2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\theta/2}.$$
En notant que $-i=e^{-i\frac{\pi}{2}}$, on a donc
$$1-e^{i\theta}=2\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta-\pi}{2}}.$$
Si $\theta\in[0,\pi]$, alors $\sin\frac{\theta}{2}\geqslant 0$, et donc $|1-e^{i\theta}|=2\sin\frac{\theta}{2}$ et un argument en est $\frac{\theta-\pi}{2}$.
En revanche, pour $\theta\in]-\pi,0[$, alors $\sin\frac{\theta}{2}<0$, et donc
$$1-e^{i\theta}=-2\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta-\pi}{2}}e^{i\pi}=\underbrace{-2\sin\frac{\theta}{2}}_{\in\mathbf{R}_+}e^{i\frac{\theta+\pi}{2}}.$$
Et donc $|1-e^{i\theta}|=-2\sin\frac{\theta}{2}$ et un argument en est $\frac{\theta+\pi}{2}$.

Pour le quotient, le principe est le même, et on peut même utiliser les calculs déjà effectués. Notons tout de même que ce quotient n'est défini que pour $\theta\neq\pi$. Dans ce cas il vient
$$\frac{e^{i\theta}-1}{1+e^{i\theta}}=\frac{2i\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}}=i\tan\frac{\theta}{2}.$$
Si $\theta\in]0,\pi[$, alors $\tan\frac{\theta}{2}\geqslant 0$, et donc $\left|\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}\right|=\tan\frac{\theta}{2}$ et un argument en est $\frac{\pi}{2}$ (car c'est un argument de π).
Et si jamais $\theta\in]-\pi,0[$, alors $\tan\frac{\theta}{2}<0$, de sorte que $\left|\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}\right|=-\tan\frac{\theta}{2}$ et un argument en est $-\frac{\pi}{2}$ (qui est un argument de $-i$).

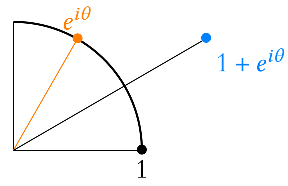
Enfin, le module de $1+i\theta$ est $\sqrt{1+\theta^2}$.
Puisque $1+i\theta$ a une partie réelle positive, son argument principal α, est dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.
Et donc[1] $\tan\alpha=\frac{\theta}{1}=\theta$. On en déduit que $\alpha=\operatorname{Arctan}\theta$.

Solution de l'exercice 7.5

Puisque $\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$, on a $|z|=\left|\frac{1}{z}\right|$ si et seulement si $|z|=1$.
Et pour $z\in\mathbf{U}$, on a alors
$$|z+1|=1\Leftrightarrow(z+1)(\overline{z}+1)=1\Leftrightarrow\underbrace{|z|^2}_{=1}+z+\overline{z}+1=1\Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(z)=-1\Leftrightarrow\operatorname{Re}(z)=-\frac{1}{2}.$$
Et donc les deux seules solutions sont $z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=j$ et $z=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\overline{j}$.
Solution plus géométrique : les complexes vérifiant $|z|=|z+1|$ sont les affixes des points équidistants des points O et A, d'affixes respectives 0 et -1.
Autrement dit, ce sont ceux sur la médiatrice du segment $[OA]$, qui est la droite d'équation

Signe

Notons qu'un tel raisonnement ne serait plus valable pour $\theta\in[\pi,2\pi]$, puisque le module serait alors $-2\cos\frac{\theta}{2}$ (un module est toujours positif).



[1] Puisque $\operatorname{Re}(1+i\theta)\neq 0$, $\cos\alpha\neq 0$.

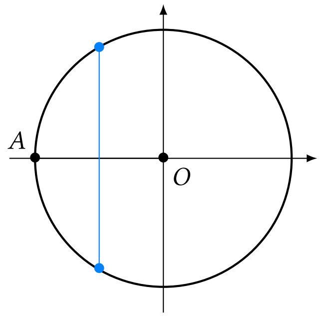
Remarque

À ce stade, nous avons prouvé que l'ensemble des solutions est **inclus** dans $\mathbf{U}$.

Détails

Connaissant la partie réelle et le module, il y a au plus deux choix pour la partie imaginaire. D'ailleurs, saurez-vous dire à quelle(s) condition(s) sur $(r,a)\in\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}$ il n'existe qu'un complexe z vérifiant $|z|=r$ et $\operatorname{Re}(z)=a$?

$x = -\frac{1}{2}$.
Si de plus on sait que $|z| = 1$, et donc que z est l'affixe d'un point du cercle unité, le problème se ramène à la détermination de l'intersection du cercle unité avec la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$.



SOLUTION DE L'EXERCICE 7.6

Puisque a est de module 1, on a $\overline{a} = \dfrac{1}{a}$ et donc $a = \dfrac{1}{\overline{a}}$.

Et de même $b = \dfrac{1}{\overline{b}}$ et $c = \dfrac{1}{\overline{c}}$.

Et donc
$$a+b+c = \frac{1}{\overline{a}} + \frac{1}{\overline{b}} + \frac{1}{\overline{c}} = \frac{\overline{bc}+\overline{ac}+\overline{ab}}{\overline{abc}} = \frac{\overline{ab+ac+bc}}{\overline{abc}}.$$

On en déduit que
$$|a+b+c| = \frac{|\overline{ab+ac+bc}|}{|\overline{abc}|} = \frac{|ab+ac+bc|}{|a|\cdot|b|\cdot|c|} = |ab+ac+bc|.$$

Rappel
Un complexe et son conjugué ont même module.

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.8

Commençons par noter que z n'étant pas un réel négatif, on n'a pas à la fois $b = 0$ et $a \leqslant 0$.
Si $b \neq 0$, alors $\sqrt{a^2+b^2} > \sqrt{a^2} = |a| \geqslant -a$, si bien que $a + \sqrt{a^2+b^2} \neq 0$.
Et dans le cas où $b = 0$, alors $a > 0$, et donc $a + \sqrt{a^2+b^2} > 0$, et donc est non nul.
Donc déjà, θ est bien défini.

Il s'agit donc de prouver que $\sqrt{a^2+b^2}e^{i\theta} = z$, soit encore que $\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta = a$ et $\sqrt{a^2+b^2}\sin\theta = b$.
Utilisons pour cela les formules de l'angle moitié : si $t = \tan(\theta/2)$, alors
$$\cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Or ici, $\tan(\theta/2) = \tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{b}{a+\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right) = \dfrac{b}{a+\sqrt{a^2+b^2}}$.
Et donc
$$\begin{aligned}
\cos(\theta) &= \frac{1 - \frac{b^2}{(a+\sqrt{a^2+b^2})^2}}{1 + \frac{b^2}{(a+\sqrt{a^2+b^2})^2}} = \frac{1 - \frac{b^2}{a^2+2a\sqrt{a^2+b^2}+a^2+b^2}}{1 + \frac{b^2}{a^2+2a\sqrt{a^2+b^2}+a^2+b^2}} \\
&= \frac{2a^2+2a\sqrt{a^2+b^2}}{2a^2+2b^2+2a\sqrt{a^2+b^2}} = a\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2+a\sqrt{a^2+b^2}} \\
&= \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{a+\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.
\end{aligned}$$

Et donc on a bien $\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta = a$.

Et de même,
$$\begin{aligned}
\sin(\theta) &= \frac{2\frac{b}{a+\sqrt{a^2+b^2}}}{1+\frac{b^2}{(a+\sqrt{a^2+b^2})^2}} = \frac{2b}{\frac{2a^2+2b^2+2a\sqrt{a^2+b^2}}{a+\sqrt{a^2+b^2}}} \\
&= b\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2+a\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}+a} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.
\end{aligned}$$

Et donc on a bien $\sqrt{a^2+b^2}\sin\theta = b$.
Et donc enfin, $\sqrt{a^2+b^2}e^{i\theta} = a + ib = z$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.9

1. Puisque $z^3 + 2iz = z\left(z^2+2i\right)$, on a
$$|z^3+2iz| = |z||z^2+2i| \leqslant |z|\left(|z^2| + |2i|\right) \leqslant |z|\,(1+2) \leqslant 3.$$

2. On a égalité ci-dessus si et seulement si chacune des inégalités employées est en réalité une égalité.

Soit si et seulement si $\begin{cases} |z| = 1 \\ |z|^2 = 1 \\ |z^2 + 2i| = |z^2| + |2i| \end{cases}$

Notons que ces deux premières conditions sont équivalentes.
D'autre part, nous savons qu'il y a égalité dans l'inégalité triangulaire si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbf{R}_+$ tel que $z^2 = \lambda 2i$.

Mais ceci n'est compatible avec $|z| = 1$ que si $\lambda = \dfrac{1}{2}$, soit si et seulement si $z^2 = i$.
Et donc si et seulement si $z = e^{i\frac{\pi}{4}}$ ou $z = -e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Solution de l'exercice 7.10

D'après la formule du binôme de Newton, on a $(1+i)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} i^k \binom{n}{k}$.

Mais i^k ne peut prendre que 4 valeurs : $i, -1, -i$ et 1.

Plus précisément : si $k = 2p$ est pair, alors $i^k = \begin{cases} -1 & \text{si } p \text{ est impair} \\ 1 & \text{si } p \text{ est pair} \end{cases} = (-1)^p = (-1)^{k/2}$.

Et dans le cas où $k = 2p+1$ est impair, alors $i^k = \begin{cases} i & \text{si } p \text{ est pair} \\ -i & \text{si } p \text{ est impair} \end{cases} = (-1)^p i$.

Et donc, il vient

$$\begin{aligned}(1+i)^n &= \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ pair}}} (-1)^{k/2}\binom{n}{k} + i \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ impair}}} (-1)^{(k-1)/2}\binom{n}{k} \\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} + i \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p+1} \\ &= S_1 + iS_2.\end{aligned}$$

Bornes
Un nombre pair $k = 2p$ est inférieur ou égal à n si et seulement si $2p \leqslant n \Leftrightarrow p \leqslant \frac{n}{2}$.
Mais p étant entier, ceci équivaut à $p \leqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
On raisonne de même pour les bornes de la seconde somme.

Mais d'autre part, nous savons que $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
Et par conséquent,

$$(1+i)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{in\frac{\pi}{4}} = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right).$$

On en déduit donc que

$$S_1 = \left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \quad \text{et} \quad S_2 = (\sqrt{2})^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

Quelques commentaires : ► *nous pourrions aller plus loin, et distinguer différents cas suivant les valeurs de n, par exemple en remarquant que lorsque n est multiple de 4, alors $\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 0$, et donc $S_2 = 0$. Il y aurait alors probablement au moins 4 cas à distinguer.*
► *Un des inconvénients de cette formule est qu'on n'y voit pas directement que S_1 et S_2 sont des entiers*[2].
Toutefois, notons que si n est pair, alors $(\sqrt{2})^n$ est une puissance de 2 (et donc un entier), et $\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)$ sont entiers[3].
Et si n est impair, alors $(\sqrt{2})^n$ est de la forme $2^k\sqrt{2}$ et $\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, de sorte que S_1 est bien un entier.

[2] Ce sont des sommes d'entiers.

[3] Ils valent 0, 1 ou −1.

Solution de l'exercice 7.11

Souvenons-nous que $\mathbf{U} = \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbf{R}\}$.
Or, pour $\theta \in \mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z}$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 - e^{i\theta}} &= e^{-i\frac{\theta}{2}} \frac{1}{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}} \\ &= e^{-i\frac{\theta}{2}} \frac{i}{2\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}.\end{aligned}$$

Donc déjà, tous les $\dfrac{1}{1-z}, z \in \mathbf{U}$ sont de partie réelle égale à $\frac{1}{2}$.

Il est facile de vérifier que la fonction $\theta \mapsto \dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$ réalise une bijection strictement décroissante de $]0, 2\pi[$ sur $\mathbf{R}$, et donc que pour tout complexe z de partie réelle $\frac{1}{2}$, il existe $\theta \in]0, 2\pi[$ tel que $z = \dfrac{1}{1-e^{i\theta}}$.
Et donc $\left\{\dfrac{1}{1-z}, z \in \mathbf{U}\right\} = \left\{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}\right\}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.12

1. En utilisant les formules d'Euler, on a pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}
\sin^5(x) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^5 = \frac{1}{2^5 i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^5 \\
&= \frac{e^{i5x} - 5e^{i3x} + 10e^{ix} - 10e^{-ix} + 5e^{i3x} - e^{-5ix}}{i2^5} \\
&= \frac{1}{16}\left(\sin(5x) - 5\sin(3x) + 10\sin(x)\right).
\end{aligned}$$

$i^5 = i$.

On en déduit qu'une primitive de $x \mapsto \sin^5(x)$ est

$$x \mapsto \frac{1}{16}\left(\frac{-1}{5}\cos(5x) + \frac{5}{3}\cos(3x) - 10\cos(x)\right).$$

Et donc que

$$\int_0^\pi \sin^5(x)\,dx = \frac{1}{16}\left(\frac{2}{5} - \frac{10}{3} + 20\right) = \frac{1}{16}\frac{256}{15} = \frac{16}{15}.$$

2. Toujours à l'aide des formules d'Euler, on a

$$\begin{aligned}
\cos^2(2x)\sin^3(3x) &= \left(\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}\right)^3 \\
&= \frac{1}{-2^5 i}\left(e^{4ix} + 2 + e^{-4ix}\right)\left(e^{9ix} - 3e^{3ix} + 3e^{-3ix} - e^{-9ix}\right) \\
&= \frac{1}{-2^5 i}\left(e^{13ix} - 3e^{i7x} + 3e^{ix} - e^{-5ix} + 2e^{9ix} - 6e^{-3ix} + 6e^{3ix} - 2e^{-9ix} + e^{5ix} - 3e^{-ix} + 3e^{-7ix} - e^{-13ix}\right) \\
&= \frac{-1}{2^4}\left(\frac{e^{13ix}-e^{-13ix}}{2i} + 2\frac{e^{9ix}-e^{-9ix}}{2i} - 3\frac{e^{i7x}-e^{-7ix}}{2i} + \frac{e^{5ix}-e^{-5ix}}{2} + 6\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i} + 3\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(-\sin(13x) - 2\sin(9x) + 3\sin(7x) - \sin(5x) + 6\sin(3x) - 3\sin(x)\right).
\end{aligned}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.13

Calculons directement $C_n + iS_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n (\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)) = \sum_{k=1}^n e^{ik\theta}$.

En effet, on a alors

$$\begin{aligned}
C_n + iS_n &= \sum_{k=1}^n \left(e^{i\theta}\right)^k \\
&= e^{i\theta}\frac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}} \\
&= e^{i\theta}\frac{e^{i\frac{n\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{n\theta}{2}} - e^{i\frac{n\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)} \\
&= e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}\frac{-2i\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Remarque
L'hypothèse faite sur θ est importante ici, car elle garantit que $e^{i\theta} \neq 1$, et donc que l'on peut appliquer une formule bien connue.

$$= \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left(\cos\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)\right).$$

Il ne reste alors plus qu'à remarquer que

$$C_n = \mathrm{Re}(C_n+iS_n) = \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cos\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) \text{ et } S_n = \mathrm{Im}(C_n+iS_n) = \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right).$$

Solution de l'exercice 7.14

D'après la formule du binôme de Newton, on a

$$C_n + iS_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{i\theta}\right)^k = \left(1+e^{i\theta}\right)^n.$$

Or $1 + e^{i\theta} = e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}\right) = 2\cos\frac{\theta}{2} e^{i\theta/2}$.

On en déduit que $\left(1+e^{i\theta}\right)^n = 2^n \cos^n \dfrac{\theta}{2} e^{in\theta/2}$.

Et donc $C_n = \mathrm{Re}\left(\left(1+e^{i\theta}\right)^n\right) = 2^n \cos^n \dfrac{\theta}{2} \cos\left(n\dfrac{\theta}{2}\right)$ et de même, $S_n = \mathrm{Im}\left(\left(1+e^{i\theta}\right)^n\right) = 2^n\cos^n\dfrac{\theta}{2}\sin\left(n\dfrac{\theta}{2}\right)$.

Solution de l'exercice 7.15

1. On a, pour tout $\theta \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}
\cos(n\theta) &= \mathrm{Re}\left(e^{in\theta}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^n\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(i\sin\theta)^k\cos^{n-k}\theta\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\mathrm{Re}\left(\binom{n}{k} i^k \sin^k\theta\cos^{n-k}\theta\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin^k\theta\cos^{n-k}\theta\,\mathrm{Re}(i^k) \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}\binom{n}{k}\cos^{n-k}\theta\sin^k\theta i^k \\
&= \sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2p}\cos^{n-2p}\theta\sin^{2p}\theta(-1)^p \\
&= \sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2p}(-1)^p\cos^{n-2p}\theta\left(1-\cos^2\theta\right)^p \\
&= \sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^p\binom{n}{2p}\cos^{n-2p}\theta\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}(-1)^k\cos^{2k}\theta \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\sum_{p=k}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^{p+k}\binom{n}{2p}\binom{p}{k}\cos^{n-2p+2k}\theta
\end{aligned}$$

Binôme de Newton.

Multiplier un complexe par $\lambda \in \mathbf{R}$ multiplie sa partie réelle par λ.

i^k est réel si k est pair, imaginaire pur sinon.

Remarque

On pourrait probablement s'arrêter ici en notant que

$$\sum_{p=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(-1)^p\binom{n}{2p}X^{n-2p}(1-X^2)^p$$

est un polynôme à coefficients entiers. C'est ce que nous allons prouver rigoureusement dans la suite.

Plutôt que de nous lancer dans d'interminables changements d'indice, notons

$$I = \left\{(p,k) \in \left[\!\left[0, \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right]\!\right]^2 \mid k \leqslant p\right\}.$$

Pour $(p,k) \in I$, on a $n - 2p + 2k = n - 2(p-k) \in [\![0,n]\!]$.

Et donc en notant pour tout $j \in [\![0,n]\!]$, $I_j = \{(p,k) \in I \mid n - 2(p-k) = j\}$, on a $I = \bigcup_{j=0}^{n} I_j$

et les I_j sont deux à deux disjoints.
Et donc le théorème de sommation par paquets affirme que

$$\cos(n\theta) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{(p,q)\in I_j} (-1)^{p+k}\binom{n}{2p}\binom{p}{k}\cos^j\theta.$$

Donc en notant pour $j \in [\![0,n]\!]$, $a_j = \sum_{(p,k)\in I_j} (-1)^{p+k}\binom{n}{2p}\binom{p}{k} \in \mathbf{Z}$, on a bien

$$\cos(n\theta) = \sum_{j=0}^{n} a_j \cos^j\theta.$$

2. On a donc

$$a_n = \sum_{p-k=0} (-1)^{p+k}\binom{n}{2p}\binom{p}{k} = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}(-1)^{p-p}\binom{n}{2p}\binom{p}{p} = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2p}.$$

Cette somme a déjà été calculée dans un TD précédent, et elle vaut 2^{n-1}.

3. On a bien $|w|^2 = \frac{3^2+4^2}{5^2} = 1$, donc $w \in \mathbf{U}$.
Supposons par l'absurde qu'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $w \in \mathbf{U}_n$.
Si on note θ un argument de w, on a donc $\cos(\theta) = \dfrac{3}{5}$, et donc $\cos(n\theta) = 1$.
Soit encore

$$2^{n-1}\left(\frac{3}{5}\right)^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\left(\frac{3}{5}\right)^k = 1.$$

Donc $2^{n-1}3^n = 5^n - \sum_{k=1}^{n-1} a_k 3^k 5^{n-k} = 5\left(5^{n-1} - \sum_{k=1}^{n} a_k 3^k 5^{n-1-k}\right)$.
Or le membre de droite est un entier multiple de 5, alors que celui de gauche ne l'est pas, d'où une contradiciton.
Ainsi, w n'est pas une racine de l'unité.

Solution de l'exercice 7.16

Notons que l'irrationnalité de α signifie qu'il n'existe pas d'angle multiple rationnel de π dont le cosinus vaut $\frac{1}{3}$.
C'est un cas particulier d'un théorème du à Ivan Niven, qui a prouvé que les seuls angles multiples rationnels de π dont le cosinus est rationnel sont ceux que vous connaissez déjà, c'est-à-dire ceux dont le cosinus vaut $0, \pm\frac{1}{2}$ ou ± 1.

> **Remarque**
> Notons que les angles multiples rationnels de π sont ceux dont la mesure en degrés est rationnelle.

1. On a $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha = \dfrac{1}{3} + i\sin\left(\mathrm{Arccos}\,\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3} + i\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \dfrac{1+2i\sqrt{2}}{3}$.

2. On $\left(1+2i\sqrt{2}\right)^n = 3^n \Leftrightarrow \left(e^{i\pi\alpha}\right)^n = 1$.
Autrement dit, il s'agit de prouver que $\alpha \in \mathbf{Q}$ si et seulement si $e^{i\pi\alpha}$ est une racine de l'unité.
D'une part, si $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$, alors

$$\left(e^{i\pi\frac{p}{q}}\right)^{2q} = e^{2ip\pi} = 1.$$

> **Remarque**
> Ce critère n'est pas spécifique au nombre α que l'on considère ici, et reste valable pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$.

Et inversement, si $e^{i\pi\alpha}$ est une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité, alors il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $e^{i\pi\alpha} = e^{i\frac{\pi k}{n}}$.
Et donc $\pi\alpha \equiv \dfrac{\pi k}{n} \quad [2\pi] \Leftrightarrow \alpha \equiv \dfrac{k}{n} \quad [1]$.
Et par conséquent, α est rationnel[4].
Bref, nous avons bien prouvé que $\alpha \in \mathbf{Q}$ si et seulement si $e^{i\pi\alpha}$ est une racine de l'unité, soit si et seulement si il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $(1+2i\sqrt{2})^n = 3^n$.

[4] Nous avons même prouvé un peu mieux : α est rationnel et peut s'écrire sous forme d'une fraction dont le dénominateur est vaut n.

3. Montrons par récurrence qu'il existe deux entiers a_n et b_n tels que $(1+2i\sqrt{2})^n = a_n + ib_n\sqrt{2}$, avec $a_n - b_n$ non divisible par 3.
Pour $n = 1$, c'est évident : on prend $a_n = 1$ et $b_n = 2$, de sorte que $a_n - b_n = -1$ n'est pas

divisible par 3.
Supposons donc acquise l'existence de a_n et b_n vérifiant ces conditions. Alors

$$\begin{aligned}(1+2i\sqrt{2})^{n+1} &= (1+2i\sqrt{2})^n(1+2i\sqrt{2}) = (a_n+ib_n\sqrt{2})(1+2i\sqrt{2})\\ &= (a_n-4b_n)+(2a_n+b_n)i\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Posons alors $a_{n+1} = a_n - 4b_n$ et $b_{n+1} = 2a_n + b_n$, qui sont bien des entiers.
Et alors $a_{n+1} - b_{n+1} = -a_n - 5b_n = -6b_n + (b_n - a_n)$.
Si $a_{n+1} - b_{n+1}$ était divisible par 3, il existerait alors un entier k tel que

$$a_{n+1} - b_{n+1} = 3k \Leftrightarrow -6b_n + b_n - a_n = 3k \Leftrightarrow a_n - b_n = 3(-k-2b_n)$$

contredisant le fait que $a_n - b_n$ n'est pas divisible par 3.
Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe donc deux entiers a_n et b_n tels que $(1+2i\sqrt{2})^n = a_n + ib_n\sqrt{2}$ avec $a_n - b_n$ non divisible par 3.

Supposons donc à présent que α soit rationnel. Il existe alors n tel que $(1+2i\sqrt{2})^n = 3^n$.
Mais alors $a_n + b_n i\sqrt{2} = 3^n$ est réel, et donc $b_n = 0$, et $a_n = 3^n$. Ceci vient contredire le fait que $a_n - b_n$ n'est pas divisible par 3.
Et donc α ne peut pas être rationnel.

Solution de l'exercice 7.17

On a $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Donc les racines 5èmes de j sont les $e^{i\left(\frac{2\pi}{15}+k\frac{2\pi}{5}\right)}$, $k \in [\![0,4]\!]$.
D'autre part, on a $\dfrac{i-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{3\pi}{4}}$, et donc

$$\frac{2\sqrt{2}}{i-1} = 2e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$

de sorte que ses racines 5èmes sont les $\sqrt[5]{2}e^{-\left(-\frac{3\pi}{20}+\frac{2k\pi}{5}\right)}$, $k \in [\![0,4]\!]$.

Solution de l'exercice 7.18

Il s'agit donc de trouver les solutions à $(1+z)^n = e^{2ina}$.
Un complexe z est solution de cette équation si et seulement si $1+z$ est une racine $n^{\text{ème}}$ de e^{2ina}, soit si et seulement si il existe $k \in [\![0,n-1]\!]$ tel que

$$1+z = e^{i\left(2a+\frac{2k\pi}{n}\right)} \Leftrightarrow z = e^{i\left(2a+\frac{2k\pi}{n}\right)} - 1.$$

Soit si et seulement si il existe $k \in [\![0,n-1]\!]$ tel que

$$z = e^{i\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)}\left(e^{i\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)} - e^{-i\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)}\right) = 2ie^{i\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)}\sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right).$$

Méthode
$1+e^{i\theta}$ se factorise bien par $e^{i\theta/2}$.

Remarquons que ces n solutions sont bien deux à deux distinctes, puisque les racines $n^{\text{èmes}}$ de e^{2ina} le sont.

Solution de l'exercice 7.19

Nous savons que $\mathbf{U}_n = \left\{e^{i2\frac{k\pi}{n}},\ k \in [\![0,n-1]\!]\right\}$
Et donc $P = \displaystyle\prod_{\omega\in\mathbf{U}_n}\omega = \prod_{k=0}^{n-1} e^{2i\frac{k\pi}{n}}$. Soit encore

$$P = \prod_{k=0}^{n-1}\left(e^{2i\frac{\pi}{n}}\right)^k = \exp\left(2i\frac{\pi}{n}\sum_{i=0}^{n-1}k\right).$$

Le produit des exponentielles est l'exponentielle de la somme.

Or, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}k = \frac{n(n-1)}{2}$. Et donc

$$P = e^{i\frac{2\pi}{n}\frac{n(n-1)}{2}} = e^{i\pi(n-1)} = (-1)^{n-1} = \begin{cases}1 & \text{si } n \text{ est impair}\\ -1 & \text{si } n \text{ est pair}\end{cases}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.20

Il est clair que $z = i$ n'est pas solution, donc pour $z \neq i$, on peut réécrire cette équation sous la forme

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1.$$

Par conséquent, z est solution si et seulement si il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\dfrac{z+i}{z-i} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.

- **Si $k = 0$**, alors cette équation se réécrit $\dfrac{z+i}{z-i} = 1$, et n'a donc pas de solution.
- **Pour $k \neq 0$**, alors

$$\frac{z+i}{z-i} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \Leftrightarrow z = i\frac{1+e^{i\frac{2k\pi}{n}}}{e^{i\frac{2k\pi}{n}}-1}.$$

Donc déjà, l'équation de départ possède au plus $n-1$ solutions, qui sont les $i\dfrac{1+e^{i\frac{2k\pi}{n}}}{e^{i\frac{2k\pi}{n}}-1}$, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.

> ⚠ **Attention !** Pour l'instant, il n'est pas clair que ces solutions soient toutes distinctes !

D'autre part, on a

$$i\frac{e^{i\frac{k\pi}{n}}}{e^{i\frac{k\pi}{n}}}\frac{e^{i\frac{k\pi}{n}}+e^{-i\frac{k\pi}{n}}}{e^{i\frac{k\pi}{n}}-e^{-i\frac{k\pi}{n}}} = i\frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Donc toutes nos solutions sont réelles. Puisque cotan est strictement décroissante sur $]0;\pi[$, intervalle auquel appartiennent les $\frac{k\pi}{n}$, ces nombres sont tous différents deux à deux.
Donc l'équation possède bien $n-1$ solutions, qui sont toutes réelles.

Commentaire *: pour $x \notin \left\{2\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \{k\pi, , k \in \mathbf{Z}\}$, on a* $\operatorname{cotan} x = \dfrac{1}{\tan x}$.
Mais si n est pair, pour $k = \dfrac{n}{2}$, $\tan\dfrac{k\pi}{n} = 0$ *et son inverse n'est pas défini, ce qui justifie le recours à la cotangente.*
Si on souhaite l'éviter, on peut dire que si n est impair, les solutions sont les $\dfrac{1}{\tan\frac{k\pi}{n}}$, $k \in [\![1, n-1]\!]$, et si n est pair, les solutions sont les $\dfrac{1}{\tan\frac{k\pi}{n}}$, $k \in [\![1, n-1]\!] \setminus \{n/2\}$ et 0 (qui correspond à $k = \dfrac{n}{2}$.)

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.21

1. Remarquons que 1 n'est pas solution de l'équation, et que pour $Z \in \mathbf{C} \setminus \{1\}$, on a $Z^3+Z^2+Z+1 = \dfrac{1-Z^4}{1-Z}$.
Et donc, toujours pour $Z \neq 1$, $Z^3+Z^2+Z+1 = 0 \Leftrightarrow 1-Z^4 = 0 \Leftrightarrow Z \in \mathbf{U}_4$.
Mais $\mathbf{U}_4 = \{1, -1, i, -i\}$, et donc, 1 n'étant pas solution, l'ensemble des solutions de l'équation est $\{-1, i, -i\}$.

2. D'après ce qui précède, z est solution si et seulement si $\dfrac{z+i}{z-i} \in \{-1, i, -i\}$.
   - On a $\dfrac{z+i}{z-i} = -1 \Leftrightarrow z+i = i-z \Leftrightarrow z = 0$.
   - On a $\dfrac{z+i}{z-i} = i \Leftrightarrow (1-i)z = 1-i \Leftrightarrow z = 1$.
   - Enfin, $\dfrac{z+i}{z-i} = -i \Leftrightarrow (1+i)z = -1-i \Leftrightarrow z = -1$.

   Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est $\{0, 1, -1\}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.22

1. Déterminer module et argument de $\zeta^k - 1$, c'est déterminer sa forme exponentielle. Et pour cela, notre meilleur allié est la factorisation par l'angle moitié.
On a $\zeta^k - 1 = e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 = e^{\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{i\frac{k\pi}{n}} - e^{-i\frac{k}{\pi}n}\right) = 2i\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)e^{\frac{ik\pi}{n}}$.
Soit encore

$$\zeta^k - 1 = 2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\left(\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Puisque $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \geqslant 0$, c'est donc bien le module de $\zeta^k - 1$: $\left|\zeta^k - 1\right| = 2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ et un argument de $\zeta^k - 1$ est $\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2}$.

2. Notons que pour $k = 0$, $\zeta^k - 1 = 1 - 1 = 0$, et donc

$$S = \sum_{k=1}^{n-1} \left|\zeta^k - 1\right| = 2\sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Donc S est la partie imaginaire de

$$A = 2\sum_{k=1}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}} = 2\sum_{k=1}^{n-1}\left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^k = 2e^{i\frac{\pi}{n}}\frac{1-e^{i\frac{(n-1)\pi}{n}}}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}} = 2\frac{e^{i\frac{\pi}{n}} - e^{i\frac{n\pi}{n}}}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}} = 2\frac{e^{i\frac{\pi}{n}}+1}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}.$$

Or, comme à la question 1, on prouve que $1 - e^{i\frac{\pi}{n}} = -2i\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)e^{i\frac{\pi}{2n}}$.
Et $1 + e^{i\frac{\pi}{n}} = e^{i\frac{\pi}{2n}}\left(e^{i\frac{\pi}{2n}} + e^{-i\frac{\pi}{2n}}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)e^{i\frac{\pi}{2n}}$.
Donc après simplification,

$$A = 2i\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} = i\frac{2}{\tan\frac{\pi}{2n}}.$$

Et alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left|\zeta^k - 1\right| = \frac{2}{\tan\frac{\pi}{2n}}$.

> **Signe**
> Il est important de regarder le signe, car si
> $$z = re^{i\theta}$$
> avec $r < 0$, alors $|z| = -r$ et un argument de z est $\theta + \pi$!

Solution de l'exercice 7.23

À l'exception de la dernière équation, il n'y a pas grand chose à dire : il suffit d'appliquer la méthode...

1. Le discriminant vaut $\Delta = -3 + 4i$.

Un complexe $a + ib$ est alors une racine carrée de Δ si et seulement si $\begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = 4 \\ a^2 + b^2 = |\Delta| = 5 \end{cases}$.

Par exemple, $\delta = 1 + 2i$ est une telle racine carrée de Δ, et alors les solutions de l'équation initiale sont $\frac{3+\delta}{2} = 2 + i$ et $\frac{3-\delta}{2} = 1 - i$.

2. $\Delta = -3 + 4i$. On a alors $(a + ib)^2 = \Delta$ si et seulement si

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = |\Delta|^2 = 5 \\ 2ab = 4 \\ a^2 - b^2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4 \\ ab = 2 \end{cases}$$

Les deux racines carrées de Δ sont donc $1 + 2i$ et $-1 - 2i$, de sorte que les solutions de l'équation sont $2i$ et -1.

> **Astuce**
> Si l'on remarquait que -1 est racine «évidente», et en notant que $-2i$ doit être le produit des racines, on arrive directement à $2i$ comme seconde racine.

3. Commençons par résoudre $Z^2 - Z + (1 - i) = 0$. Les deux solutions de cette équation sont $Z_1 = -i$ et $Z_2 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
Les solutions de l'équation de départ sont donc les racines carrées de Z_1 et de Z_2, qui sont au nombre de 4 et sont

$$e^{-i\frac{\pi}{4}},\ -e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{3\pi}{4}},\ \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}} \text{ et } \sqrt[4]{2}e^{i\frac{7\pi}{8}}.$$

Solution de l'exercice 7.24

1. Rappelons un résultat traité dans un exemple du cours : les couples de solutions du système $\begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases}$ sont les couples formés des deux racines de $X^2 - sX + p$.
Donc ici, il s'agit de déterminer les racines de $X^2 - 4X + 5$.
Le discriminant de ce polynôme vaut $-4 = (2i)^2$, et donc les deux racines sont $2 \pm i$, de sorte que les deux couples de solutions du système $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 5 \end{cases}$ sont $(2+i, 2-i)$ et $(2-i, 2+i)$.

> **Remarque**
> Sauf en cas de racine double, il y a deux tels couples, obtenus en échangeant les racines.

De même, pour le second système, il s'agit de déterminer les racines de $X^2-(3-2i)X+5-i$.
Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = (3-2i)^2 - 4(5-i) = -15-8i$.
Cherchons alors $\delta = a+ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$.
On a alors

$$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2 = \mathrm{Re}(\Delta) \\ 2ab = \mathrm{Im}(\Delta) \\ a^2+b^2 = \sqrt{|\Delta|} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2 = -15 \\ ab = -4 \\ a^2+b^2 = \sqrt{289} = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 16 \\ ab = -4 \end{cases}$$

On a donc $a = \pm 1$, $b = \pm 4$, et puisque a et b sont de signes opposés, les deux racines carrées complexes de Δ sont $\delta = 1-4i$ et $\delta_2 = -\delta_1 = -1+4i$.

On en déduit que les racines de $X^2-(3-2i)X+5-i$ sont $\dfrac{3-2i+1-4i}{2} = 2-3i$ et $\dfrac{3-2i-1+4i}{2} = 1+i$.

Et donc les couples solutions au système initial sont $(1+i, 2-3i)$ et $(2-3i, 1+i)$.

2. Notons que si x et y sont les deux côtés d'un rectangle, alors son aire est $a = xy$ et son périmètre est $p = 2(x+y) \Leftrightarrow x+y = \dfrac{p}{2}$.

Et donc on a $p = \lambda\sqrt{a} \Leftrightarrow x+y = \dfrac{\lambda\sqrt{a}}{2}$.

Si l'aire $a > 0$ est fixée, il s'agit donc de trouver les valeurs de λ pour lesquelles le système $\begin{cases} xy = a \\ x+y = \dfrac{\lambda\sqrt{a}}{2} \end{cases}$.

C'est-à-dire les valeurs pour lesquelles l'équation $x^2 - \dfrac{\lambda\sqrt{a}}{2}x + a = 0$ possède des solutions réelles.

Or le discriminant de cette équation vaut $\dfrac{\lambda^2 a}{4} - 4a = \dfrac{a}{4}\left(\lambda^2-16\right)$.

Il est donc positif ou nul si et seulement si $\lambda \geqslant 4$.

Quelques commentaires *: nous venons de prouver que le rapport entre le périmètre d'un rectangle et son aire[5] ne peut pas être aussi petit que l'on veut.*

Autrement dit, à périmètre p fixé, l'aire d'un rectangle ne peut pas dépasser $\dfrac{p^2}{16}$*. C'est assez intuitif : on ne peut avoir une aire très grande pour un rectangle de petit périmètre (mais on peut avoir une aire très petite pour un rectangle de grand périmètre.)*

On pourrait d'ailleurs prouver que cette borne $\dfrac{p^2}{16}$ *est atteinte uniquement pour les carrés.*

De manière générale, à périmètre fixé, la «figure»[6] avec la plus grande aire est le disque, pour laquelle on a $a = \dfrac{p^2}{4\pi}$.

[5] Notons que ces grandeurs sont homogènes, comme disent les physiciens.

[6] Le terme est vague, mais donner une définition précise nous emmènerait trop loin.

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.25

1. Il est clair que 0 est solution. Cherchons donc les solutions non nulles sous forme exponentielle : $z = re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$.

Alors $z^2 = r^2e^{2i\theta}$ et $\overline{z} = re^{-i\theta}$.

On a donc $z^2 = \overline{z} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = r \\ e^{2i\theta} = e^{-i\theta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ e^{3i\theta} = 1 \end{cases}$

Or, $e^{3i\theta} = 1$ si et seulement si $z = e^{i\theta}$ est une racine cubique de l'unité, donc si et seulement si $z \in \left\{1, j, j^2\right\}$.

Et donc l'ensemble des solutions de l'équation de départ est $\left\{0, 1, j, j^2\right\}$.

2. De nouveau, remarquons que 0 est solution, et cherchons les solutions non nulles sous la forme $z = re^{i\theta}$, avec $r > 0$.

Alors $z^2 = r^2e^{2i\theta}$ et $-\overline{z}^2 = -r^2e^{-2i\theta} = r^2e^{i(\pi-2\theta)}$.

Et donc $z^2 = -\overline{z}^2$ si et seulement si $e^{2i\theta} = e^{i(\pi-2\theta)}$, soit si et seulement si

$$2\theta = \pi - 2\theta \quad [2\pi] \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \quad \left[\frac{\pi}{2}\right].$$

Donc l'ensemble des solutions est l'ensemble des complexes qui ont pour argument $\pm\dfrac{\pi}{4}$ ou $\pm\dfrac{3\pi}{4}$.

Autrement dit

Les solutions sont les complexes dont l'image est sur l'une des deux bissectrices d'équations $y = \pm x$.

3. Une fois de plus, 0 est solution, et nous cherchons les solutions non nulles sous forme exponentielle $z = re^{i\theta}$. Alors $z^2 = 2\overline{z} \Leftrightarrow r^2e^{2i\theta} = 2re^{-i\theta}$.
Donc z est solution de $z^2 = 2\overline{z}$ si et seulement si

$$r^2 = 2r \Leftrightarrow r = 2 \text{ et } e^{2i\theta} = e^{-i\theta} \Leftrightarrow e^{3i\theta} = 1 \Leftrightarrow e^{i\theta} \in \left\{1, j, j^2\right\}.$$

Et donc les solutions de l'équation sont $0, 2, 2j, 2j^2$.

4. Un complexe z est solution si et seulement si $z^2\overline{z}^2 = 1 \Leftrightarrow |z|^4 = 1$.
Et donc si et seulement si $|z| = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbf{U}$.

Rappel
$z\overline{z} = |z|^2$.

Solution de l'exercice 7.26

Cherchons z sous forme trigonométrique : $z = re^{i\theta}$, avec $r \geqslant 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$.
On a alors

$$z^2 + 2|z| - 3 = 0 \Leftrightarrow r^2e^{i2\theta} + 2r - 3 = 0.$$

En particulier, si z est solution, alors $r^2e^{2i\theta} = 3 - 2r$.
Ces deux complexes, doivent donc avoir le même module.
Le module de $r^2e^{2i\theta}$ est r^2. En revanche, le module de $3 - 2r$ est $|3 - 2r|$.

▶ **Si** $3 - 2r \geqslant 0 \Leftrightarrow r \leqslant \dfrac{3}{2}$: alors $|3 - 2r| = 3 - 2r$.
Et donc on a $r^2 = 3 - 2r \Leftrightarrow r^2 + 2r - 3 = 0$.
Les solutions de cette équation sont 1 et -3. Et donc la seule solution positive[7] est $r = 1$.
Reste donc alors $e^{2i\theta} = 3 - 2 = 1$, de sorte que $2\theta \equiv 0 \quad [2\pi]$ et donc $\theta \equiv 0 \quad [\pi]$.
Ainsi, $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, de sorte que $z = e^{i0} = 1$ ou $z = e^{i\pi} = -1$.

[7] Rappelons qu'on a supposé $r > 0$.

▶ **Si** $3 - 2r < 0 \Leftrightarrow r > \dfrac{3}{2}$: alors $|3 - 2r| = 2r - 3$.
On a alors $r^2 = 2r - 3 \Leftrightarrow r^2 - 2r + 3 = 0$.
Mais ce polynôme de degré 2 possède un discriminant égal à $-8 < 0$, et donc ne possède pas de solution réelle.

Ainsi, les seules solutions possibles de l'équation sont 1 et -1.
Il est aisé de vérifier que ce sont bien des solutions, et donc que l'ensemble des solutions de l'équation est $\{-1, 1\}$.
Quelques commentaires : *il est assez facile de voir que -1 et 1 sont solutions. Une erreur à ne pas commettre serait de dire qu'on a là deux solutions, et qu'il s'agit d'une équation de degré deux qui ne possède donc au plus que deux solutions, ce qui prouverait donc sans calculs qu'on a toutes les solutions.*
*En effet, notre équation de départ **n'est pas une équation polynomiale de degré** 2 en raison de la présence du module de z. Une équation polynomiale serait de la forme $az^2 + bz + c = 0$.*

Vérification ?
Notons que nous n'avons pas procédé par équivalences, mais par implications. Autrement dit, nous avons effectué un raisonnement par analyse-synthèse, l'analyse nous disant que si z est solution alors $z = \pm 1$.
La synthèse consiste donc à vérifier que ce sont bien des solutions.

Solution de l'exercice 7.27

Écrivons $z = a + ib$ sous forme algébrique. Alors

$$\frac{z+2}{1+iz} = \frac{(z+2)(1-i\overline{z})}{|1+iz|^2} = \frac{z+2-i|z|^2-2i\overline{z}}{|1+iz|^2}.$$

Et donc

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z+2}{1+iz}\right) = \frac{1}{|1+iz|^2}\left(b - |z|^2 - 2a\right) = \frac{1}{|1+iz|^2}\left(b - a^2 - b^2 - 2a\right).$$

On en déduit que $\dfrac{z+2}{1+iz} \in \mathbf{R}$ si et seulement si $b - a^2 - b^2 - 2a = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2a - b = 0$.
Mais $a^2 + 2a + b^2 - b = (a+1)^2 - 1 + b^2 - b = (a+1)^2 + \left(b - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{5}{4}$, de sorte que

$$\frac{z+2}{1+iz} \in \mathbf{R} \Leftrightarrow (a+1)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

On reconnaît là l'équation d'un cercle de centre $\left(-1, \dfrac{1}{2}\right)$, et de rayon $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.
Notons que ceci se retrouve directement à l'aide des complexes, en notant que la condition obtenue n'est autre que

$$\left|z - \left(-1 + i\frac{1}{2}\right)\right|^2 = \frac{5}{4}.$$

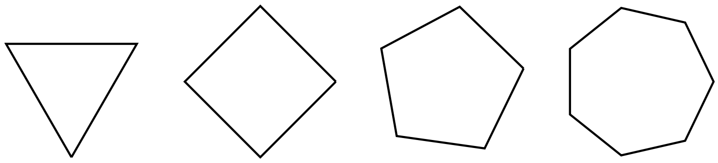
Et donc l'ensemble cherché est le cercle centré en le point d'affixe $-1+i\frac{1}{2}$, et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$, privé de i.

Remarque

Il est facile de vérifier que i appartient à ce cercle.

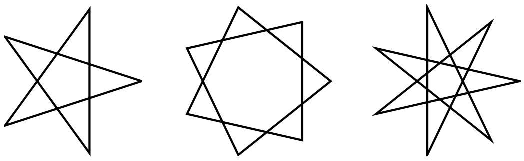
Solution de l'exercice 7.28

Nous ne donnons pas de définition de polygone convexe régulier, mais il s'agit bien de ceux auxquels vous pensez :



Il existe tout de même des polygones réguliers[8] qui ne sont pas convexes (on parle alors de polygones étoilés). Par exemple ceux qui se trouvent ci-dessous :

[8] Dont tous les côtés sont de même longueur.



Enfin, direct signifie que les sommets sont parcourus dans le sens trigonométrique.

Si Ω est le centre[9] du polygone, alors pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$, M_{k+1} est l'image de M_k par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{2\pi}{n}$.

[9] L'intersection des médiatrices des segments joignant deux sommets distincts.

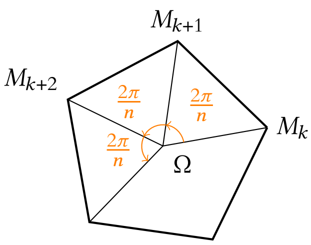


Figure 7.1 – Chaque sommet se déduit du précédent par une rotation de centre Ω et d'angle $\frac{2\pi}{n}$.

Soit encore, en notant ω l'affixe de Ω,

$$z_{k+1}-\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}(z_k-\omega).$$

Notons alors $\zeta = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, de sorte que la relation précédente nous donne

$$z_{k+1}-\omega = \zeta(z_k-\omega).$$

Une récurrence rapide[10] prouve qu'alors

[10] Ou plus simplement le fait que M_k est l'image de M_0 par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{2k\pi}{n}$.

$$z_k-\omega = \zeta^k(z_0-\omega).$$

Ceci est en particulier vrai pour $k=1$, ce qui nous donne une relation entre ω, z_0 et z_1 :

$$z_1-\omega = \zeta(z_0-\omega) \Leftrightarrow \omega(\zeta-1) = \zeta z_0 - z_1 \Leftrightarrow \omega = \frac{\zeta z_0 - z_1}{\zeta - 1}.$$

Et donc pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$z_k = \omega + \zeta^k(z_0-\omega) = \frac{\zeta z_0 - z_1}{\zeta-1} + \frac{\zeta^k(z_1-z_0)}{\zeta-1}.$$

Solution de l'exercice 7.29

Considérons deux rotations r_1 et r_2 de centres respectifs (Ω_1) et (Ω_2) et d'angles θ_1 et θ_2. Alors la fonction complexe associée à $r_1 \circ r_2$ est

$$z \mapsto \omega_1 + e^{i\theta_1}\left(e^{i\theta_2}(z-\omega_2)+\omega_2-\omega_1\right) = e^{i(\theta_1+\theta_2)}z - e^{i(\theta_1+\theta_2)}\omega_2 + e^{i\theta_1}(\omega_2-\omega_1)+\omega_1.$$

Étant de la forme $z \mapsto az+b$, avec $a = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$, c'est une similitude, de rapport 1 et d'angle $\theta_1+\theta_2$, c'est donc une rotation d'angle $\theta_1+\theta_2$.
Sauf dans le cas où $\theta_1+\theta_2 \equiv 0 \ [2\pi]$, auquel cas $a = 1$, et nous sommes en présence d'une translation[11].

On prouve de même que la composée de deux homothéties de rapports λ_1 et λ_2 est une homothétie de rapport $\lambda_1\lambda_2$, sauf si $\lambda_1\lambda_2 = 1$, auquel cas nous sommes en présence d'une translation.

Rappel
Si on souhaite l'affixe du centre de rotation, il s'agit de l'unique point fixe de $r_1 \circ r_2$.

[11] Mais une translation est une similitude directe, qui possède 1 comme rapport et 0 comme angle.

Solution de l'exercice 7.30

1. Puisque nous avons reconnu une fonction affine de z, il s'agit bien d'une similitude directe.
   Puisque $1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, son rapport vaut 2 et son angle vaut $\dfrac{\pi}{3}$.
   Enfin, son centre est son unique point fixe. Mais $\left(1+i\sqrt{3}\right)z - i\sqrt{3} = z \Leftrightarrow z = 1$.
   Et donc la similitude en question possède pour centre $(1,0)$ (le point d'affixe 1).
2. Travaillons plutôt avec les fonctions complexes associées à ces transformations, que nous appellerons encore r et t pour alléger les notations.
   On a $t : z \mapsto z+(-1)$ et $r : z \mapsto e^{i\frac{\pi}{2}}(z-0)+0 = iz$.
   Et donc pour $z \in \mathbf{C}$,
   $$(t\circ r\circ t)(z) = i(z-1)-1 = iz-(1+i).$$
   Puisque $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, il s'agit d'une similitude de rapport 1 (donc d'une rotation !) et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   De plus, on a $iz-(1+i) = z \Leftrightarrow z = \dfrac{1+i}{i-1} = -i$.
   Donc $t\circ r\circ t$ est la rotation de centre $(0,-1)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   De même, pour $z \in \mathbf{C}$, on a
   $$(r\circ t\circ r)(z) = i(iz-1) = -z-i.$$
   Puisque $-1 = e^{i\pi}$, il s'agit d'une rotation d'angle π (qui est une symétrie centrale).
   Son centre est alors le point d'affixe $-\dfrac{i}{2}$, c'est-à-dire $\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$.
3. Soit $f : z \mapsto az+b$ une similitude directe.
   Soit $y \in \mathbf{C}$ fixé. Prouvons que y possède un unique antécédent par f.
   Pour $z \in \mathbf{C}$, on a $f(z) = y \Leftrightarrow az+b = y \Leftrightarrow z = \dfrac{y-b}{a}$.
   Et donc non seulement y possède un unique antécédent, mais en plus nous connaissons cet antécédent. Donc f réalise une bijection de $\mathbf{C}$ sur $\mathbf{C}$ et $f^{-1} : z \mapsto \dfrac{z-b}{a}$.
   Si f est une translation (si $a = 1$), alors f^{-1} est encore une translation, de vecteur opposé à celui de f.
   Si f possède un point fixe ω, alors $f(\omega) = \omega \Leftrightarrow f^{-1}(\omega) = \omega$.
   Donc ω est également le centre de f^{-1}. Le rapport de f^{-1} est $\left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|}$, qui est donc l'inverse de celui de f, et son angle est $\arg\left(\frac{1}{a}\right) = -\arg(a)$, qui est donc l'opposé de l'angle de f.
   Ainsi, si f est la similitude directe de centre Ω, de rapport λ et d'angle θ, alors f^{-1} est la similitude directe de centre Ω, de rapport $\frac{1}{\lambda}$ et d'angle $-\theta$.
   Notons en particulier que la bijection réciproque d'une rotation est une rotation de même centre, et de même la bijection réciproque d'une homothétie est une homothétie de même centre.

Méthode
L'angle θ et le rapport r de la similitude associée à $z \mapsto az+b$ sont donnés par la forme exponentielle de $a = re^{i\theta}$.
Et son centre en est l'unique point fixe.

Intuition
Le résultat est assez peu surprenant : pour « inverser f » une similitude, il suffit de tourner, par rapport au même centre, d'un angle opposé si f multipliait les longueurs par λ, il faut les diviser par λ.

Solution de l'exercice 7.31

1. Il est évident que $z = 1$ convient. Nous supposons dans la suite que $z \neq 1$.
Notons A, B, C les points d'affixes respectives $1, z, z^2$.
Alors A, B et C sont alignés si et seulement si il existe un réel λ tel que
$\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow (z-1) = \lambda(z^2-1)$.
Soit encore si et seulement si $\dfrac{z^2-1}{z-1} \in \mathbf{R}$.
Soit si et seulement si $z+1 \in \mathbf{R} \Leftrightarrow z \in \mathbf{R}$.
Et donc la condition nécessaire et suffisante cherchée est $z \in \mathbf{R}$.

2. Laissons de côté les cas où $z = 0$ ou $z = 1$, puisqu'alors les trois sommets du triangle sont confondus.
Notons alors A, B, C les points d'affixes respectives z, z^2, z^3. Alors ABC est rectangle en B si et seulement si $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) \equiv \dfrac{\pi}{2} \quad [\pi]$.
Donc si et seulement si $\dfrac{z^3-z^2}{z-z^2} \in i\mathbf{R} \Leftrightarrow \dfrac{z^2(z-1)}{z(1-z)} \in i\mathbf{R} \Leftrightarrow -z \in i\mathbf{R} \Leftrightarrow z \in i\mathbf{R}$.

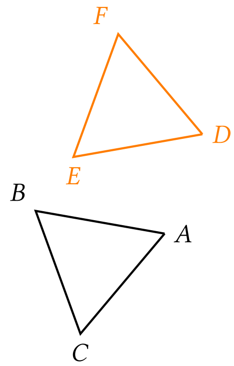


Figure 7.2– ABC est direct. DEF est indirect (donc DFE est direct).

Solution de l'exercice 7.32

1. On a $j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}+i\pi} = -e^{i\frac{\pi}{3}}$. Et donc $e^{i\frac{\pi}{3}} = -j^2$.

2. Le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $\begin{cases} AB = AC \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$.
Soit si et seulement si C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
Traduisons ceci en termes d'affixes : ABC est équilatéral direct si et seulement si
$$c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a) \Leftrightarrow c - a = -j^2(b-a) \Leftrightarrow c + bj^2 - a(1+j^2) = 0.$$
Or, nous savons que $1 + j + j^2 = 0$ et donc $1 + j^2 = -j$.
Donc ABC est équilatéral direct si et seulement si $c + bj^2 + aj = 0$, ce qui, après multiplication par j^2 est équivalent à $a + bj + cj^2 = 0$.

3. Le triangle ABC est équilatéral si et seulement si il est équilatéral direct, ou si il est équilatéral indirect[12].
Mais il est équilatéral indirect si et seulement si ACB est équilatéral direct, soit si et seulement si $a + cj + bj^2 = 0$.
Et donc ABC est équilatéral si et seulement si
$$a + bj + cj^2 = 0 \text{ ou } a + cj + bj^2 = 0 \Leftrightarrow (a + bj + cj^2)(a + cj + bj^2) = 0.$$
Mais on a
$$\left(a + bj + cj^2\right)\left(a + cj + bj^2\right) = a^2 + bj^3 + cj^3 + ab\left(j + j^2\right) + ac\left(j + j^2\right) + bc\left(j + j^2\right).$$
Or $j^3 = 1$, et comme précédemment, $1 + j + j^2 = 0 \Leftrightarrow j + j^2 = -1$.
Et donc on a toujours[13] $(a + bj + cj^2)(a + cj + bj^2) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$.
Et par conséquent, ABC est équilatéral si et seulement si
$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc.$$

[12] On dit parfois aussi rétrograde.

Astuce
Un produit de deux nombres est nul si et seulement si l'un de ces deux nombres est nul !

[13] C'est-à-dire quels que soient les complexes a, b et c.

Solution de l'exercice 7.33

Notons θ un argument de a, de sorte que $a = e^{i\theta}$.
On peut alors supposer[14] que pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $z_k = e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$.
Si M_k désigne le point d'affixe $(1+z_k)^n$, il s'agit donc de prouver que quels que soient $(k, \ell, p) \in [\![0, n-1]\!]^3$ deux à deux distincts[15] alors $\overrightarrow{M_k M_\ell}$ et $\overrightarrow{M_k M_p}$ sont colinéaires.
Ou encore que $\left(\overrightarrow{M_k M_\ell}, \overrightarrow{M_k M_p}\right) \equiv 0 \quad [\pi]$.
Mais plus simplement, en termes d'affixes, cela revient à prouver que $\dfrac{(1+z_k)^n - (1+z_\ell)^n}{(1+z_k)^n - (1+z_p)^n}$ est réel.
Ce qui signifie que les arguments de $(1+z_k)^n - (1+z_\ell)^n$ et $(1+z_k)^n - (1+z_p)^n$ sont égaux ou opposés[16] modulo 2π. Donc égaux modulo π.

[14] Quitte à renuméroter les z_k, ce qui ne change rien pour la suite.

[15] Cette hypothèse n'est pas indispensable, mais montrer que trois points, dont deux confondus sont alignés n'a pas grand intérêt : c'est toujours vrai !

[16] Deux vecteurs colinéaires peuvent avoir des sens opposés !

Essayons donc de calculer un argument de $(1+z_k)^n - (1+z_\ell)^n = (1+z_k)^n \left(1 - \left(\dfrac{1+z_\ell}{1+z_k}\right)^n\right)$.
Commençons par un argument de $(1+z_k)^n$.

$$1+z_k = 1+e^{i\frac{\theta+k\pi}{n}} = e^{i\frac{\theta+2k\pi}{2n}}\left(e^{i\frac{\theta+2k\pi}{2n}} + e^{-i\frac{\theta+2k\pi}{2n}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{2n}\right)e^{i\frac{\theta+2k\pi}{2n}}.$$

Et donc, suivant le signe du cosinus, un argument de $1+z_k$ est $\dfrac{\theta+2k\pi}{2n}$ ou $\dfrac{\theta+2k\pi}{2n}+\pi$.
Donc un argument de $(1+z_k)^n$ est $\dfrac{\theta}{2}+k\pi$ ou $\dfrac{\theta}{2}+(k+n)\pi$.
Ces deux nombres sont congrus à $\dfrac{\theta}{2}$ modulo π.
Poursuivons donc notre calcul, ... WAIT A MINUTE ! Nous venons de prouver que les $(1+z_k)^n$ ont tous même argument modulo π.
Autrement dit que $\dfrac{(1+z_k)^n}{(1+z_\ell)^n} \in \mathbf{R}$.
Soit encore $\dfrac{(1+z_k)^n - 0}{(1+z_\ell)^n - 0} \in \mathbf{R}$.
Ainsi, les points O, M_k et M_ℓ sont alignés.
De même, O, M_k et M_p sont alignés, et donc M_k, M_ℓ et M_p sont alignés. Ainsi, les M_k sont alignés, et sont situés sur la droite passant par O et le point d'affixe $\dfrac{\theta}{2}$.
Quelques commentaires *: en réalité, tout le début de cette correction est inutile, le seul calcul important étant celui de l'argument de* $(1+z_k)^n$.
Toutefois, au vu de la formulation de la question, rien ne laissait présager que la droite passant par tous les M_k *passait aussi par l'origine, et donc il est assez peu probable*[17] *de penser directement à chercher l'argument de* $(1+z_k)^n$.
Aussi, j'ai tenu à laisser le début de cette correction, certes inutile, mais qui montre une des nombreuses[18] *manières de démarrer la résolution d'un tel exercice.*

[17] En tous cas je ne vois pas de raison «évidente» de le faire.

[18] Et je ne prétends d'ailleurs pas que ce soit la plus intelligente qui soit !