TD 6 : Ensembles

Exercice 6.1 PD

1. Montrer que les ensembles $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 4x - y = 1\}$ et $B = \{(t+1, 4t+3),\ t \in \mathbf{R}\}$ sont égaux.
2. Même question pour $A = \{(\lambda, 2\mu - \lambda, 2\lambda + \mu),\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2\}$ et $B = \{(2x, 2y, 5x + y), (x, y) \in \mathbf{R}^2\}$.

Exercice 6.2 Soient A et B deux ensembles. F

1. Si $A \subset B$, déterminer $A \cup B$ et $A \cap B$. (*On attend une preuve, et pas juste une affirmation*).
2. Montrer que $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

Exercice 6.3 Soit E un ensemble. Est-il vrai que PD

$$\forall A, B, C \in \mathscr{P}(E),\ C \subset (A \cup B) \Rightarrow (C \subset A) \textbf{ ou } (C \subset B).$$

Exercice 6.4 Soit E un ensemble et soit $(A, B, C) \in \mathscr{P}(E)^3$. PD

1. Montrer que $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$.
2. Montrer que $(A \cap B = A \cap C \textbf{ et } A \cup B = A \cup C) \Leftrightarrow (B = C)$.

Exercice 6.5 Soient A et B deux ensembles. Est-il vrai que $\mathscr{P}(A \cup B) = \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$? AD
Que $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$?

Exercice 6.6 Soient E et F deux ensembles. Montrer que $\mathscr{P}(E) \subset \mathscr{P}(F)$ si et seulement si $E \subset F$. PD

Exercice 6.7 Soient A, B, C trois parties d'un même ensemble E. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes : PD

1. $A \setminus B \subset C$
2. $A \setminus C \subset B$
3. $A \subset B \cup C$.

Exercice 6.8 Que valent les ensembles suivants : $\mathscr{P}(\{1\}), \mathscr{P}(\mathscr{P}(\{1\})), \mathscr{P}(\{1,2,3,4\}), \mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset))))$ $(\star)$? PD

Exercice 6.9 Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E. Montrer que AD

1. $A \cup B = B \cap C \Leftrightarrow (A \subset B \subset C)$
2. $\overline{\overline{A}} = A$
3. $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$
4. $A \setminus B = A \Leftrightarrow B \setminus A = B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$
5. $\overline{A} \setminus \overline{B} = B \setminus A$.
6. $A \setminus B = \complement_A^{A \cap B}$.

Exercice 6.10 Soit E un ensemble, et soient A et B deux parties de E. AD

1. Montrer l'équivalence : $A \subset B \Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{P}(E),\ A \cap X \subset B \cap X$.
2. Montrer l'équivalence : $A \cup B = E \Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{P}(E),\ (X \cap A = \emptyset \Rightarrow X \subset B)$.

Exercice 6.11 Montrer que $\mathscr{C} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ n'est pas le produit cartésien de deux ensembles de $\mathbf{R}$. AD

Exercice 6.12 On considère A et B deux parties de E. Résoudre l'équation $A \cap X = B$, d'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$. D

Exercice 6.13 Soit E un ensemble et soient $E_1, \dots, E_n$ $(n \geqslant 2)$ des parties deux à deux distinctes de E. Montrer que l'un au moins de ces ensembles n'en contient aucun autre. D

Exercice 6.14 Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{N}^2 & \longrightarrow & \mathbf{N}^* \\ (p, q) & \longmapsto & 2^p(2q+1) \end{array} \right.$. Prouver que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\exists!(p, q) \in \mathbf{N}^2$, $n = f(p, q)$. D
Quelle intuition en tirez-vous ?

Exercice 6.15 Soient E, F, G trois ensembles, et soient $f : F \to E$ et $g : G \to E$ deux applications. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $h : G \to F$ telle que $g = f \circ h$. TD
À quelle condition un tel h est-il unique ?

Exercice 6.16 **Axiomes de Peano et construction des entiers de Von Neumann** TD
Dans le cadre de la théorie axiomatique des ensembles (assez différente de la théorie «naïve» des ensembles que nous manipulerons en prépa) on considère que tout objet mathématique est un ensemble, et les règles de manipulation de ces ensembles sont constituée de 8 axiomes qu'il est hors de question d'énoncer ici.
L'un des axiomes les plus difficiles à appréhender, l'axiome de fondation, dit que si x est un ensemble non vide, alors il existe $y \in x$ tel que $y \cap x = \emptyset$.

1. Montrer qu'il n'existe pas deux ensembles a et b tels que $a \in b$ et $b \in a$.
   Considérer $x = \{a, b\}$ et utiliser l'axiome de fondation.

Pour tout ensemble a, on notera $s(a) = a \cup \{a\}$, ensemble que l'on appelera le successeur de a.
Un ensemble A est dit clos par successeur si $\forall a \in A,\ s(a) \in A$.
L'axiome de l'infini, qui comme son nom l'indique, a pour but de garantir l'existence d'un ensemble infini, s'énonce comme suit : il existe un ensemble X tel que $\emptyset \in X$ et $\forall x \in X,\ s(x) \in X$.
Autrement dit, il existe un ensemble X contenant le vide et clos par successeur.
On souhaite alors mettre en évidence l'existence d'un ensemble qui serait «une copie de $\mathbf{N}$», c'est-à-dire vérifiant l'intuition qu'on se fait des entiers.

Dans la suite, notons X un ensemble contenant $\emptyset$ et clos par successeur (dont l'existence est garantie par l'axiome de l'infini), notons Y l'ensemble des parties de X qui contiennent 0 et sont closes par successeur, et enfin notons $N = \bigcap_{A \in Y} A$.

Dans la suite, on note 0 l'ensemble vide.

2. Montrer que N possède les propriétés suivantes :
   (a) $0 \in N$ et $\forall n \in N,\ s(n) \in N$
   (b) $\forall n \in N,\ s(n) \neq 0$ (0 n'est successeur d'aucun élément de N)
   (c) $\forall m, n \in N,\ s(m) = s(n) \Rightarrow m = n$
   (d) $\forall A \in \mathscr{P}(N),\ (0 \in A \textbf{ et } \forall n \in A, s(n) \in A) \Rightarrow A = N$

   Ces propriétés réunies (appelées les axiomes de Peano) nous semblent caractéristiques de $\mathbf{N}$ (ou d'une copie de $\mathbf{N}$), dans lequel l'application successeur serait $s : n \mapsto n + 1$.

CORRECTION DES EXERCICES DU TD 6

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.2

Il semble plutôt intuitif[1] que $A \cup B = B$, mais il faut le prouver, ce qui peut se faire par double inclusion.
On a toujours $B \subset A \cup B$.
Inversement, soit $x \in A \cup B$. Alors, par définition d'une union, $x \in A$ ou $x \in B$. Or, si $x \in A$, puisque $A \subset B$, alors $x \in B$.
Donc nous avons prouvé que dans tous les cas, si $x \in A \cup B$, alors $x \in B$, c'est-à-dire que $A \cup B \subset B$.
Et donc on a bien l'égalité annoncée : $A \cup B = B$.

[1] Faire des dessins pour s'en convaincre !

De même, il semble plutôt clair que $A \cap B = A$.
On a toujours $A \cap B \subset A$.
Soit $x \in A$. Alors, puisque $A \subset B$, $x \in B$.
Et donc x est à la fois dans A et dans B : il est dans $A \cap B$.
Nous venons donc de prouver que $\forall x \in A$, $x \in A \cap B$, c'est-à-dire que $A \subset A \cap B$, et donc par double inclusion $A = A \cap B$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.3

Il est clair que l'implication n'est pas vraie quel que soit l'ensemble E, puisque si $E = \{1, 2\}$, alors $C = \{1, 2\}$, $A = \{1\}$ et $B = \{2\}$ vérifient $C \subset A \cup B$, mais pas $C \subset A$ **ou** $C \subset B$.

Plus généralement, si E contient au moins deux éléments distincts a et b, alors en posant $C = \{a, b\}$, $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$, l'implication est fausse.

En revanche, si $E = \emptyset$, pour toutes parties A, B, C de E, on a $A = B = C = \emptyset$, et donc $C \subset A \cup B$, $C \subset A$ et $C \subset B$ sont toutes vraies.
Et si $E = \{x\}$ est un singleton, soient A, B, C trois parties de E telles que $C \subset A \cup B$.
► Si $C = \emptyset$, alors $C \subset A$ **ou** $C \subset B$ est évidemment vraie.
► Si $C = \{x\}$, alors $\{x\} \subset A \cup B$, si bien que $x \in A \cup B$.
Donc soit $x \in A$, et alors $C \subset A$, soit $x \in B$, et alors $C \subset B$.
Donc dans tous les cas, $C \subset A$ **ou** $C \subset B$.

Ainsi, l'implication $\forall A, B, C \in \mathscr{P}(E), C \subset A \cup B \Rightarrow C \subset A$ **ou** $C \subset B$ est vraie si et seulement si E est vide ou est un singleton.

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.4

1. Procédons par double implication.
► Si $A = B$, il est évident que $A \cup B = A \cup A = A$ et $A \cap B = A \cap A = A$.
Donc ceci prouve l'implication $A = B \Rightarrow A \cup B = A \cap B$.

► Supposons donc à l'inverse que $A \cap B = A \cup B$.
Nous souhaitons prouver que $A = B$, et pour cela, nous pouvons procéder par double inclusion.
Soit $x \in A$. Alors $x \in A \cup B$ (car $A \subset A \cup B$), et donc $x \in A \cap B$ (car $A \cup B = A \cap B$).
On en déduit que $x \in B$ (puisque $A \cap B \subset B$).
Ainsi, nous avons prouvé que pour tout $x \in A$, $x \in B$, donc que $A \subset B$.
En échangeant les rôles de A et B, on prouve exactement de la même manière que $B \subset A$.
Et donc par double inclusion, $A = B$, si bien que $A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B$.

Échange ?
Dans l'hypothèse, A et B jouent des rôles totalement symétriques, et donc si on les échange, le même raisonnement reste valable mot pour mot afin de prouver $B \subset A$.
Lorsque deux raisonnements sont identiques, vous pouvez le dire ainsi pour ne pas tout réécrire, mais n'en abusez pas, si les arguments sont différents, vous devez bien tenir deux raisonnements.

Par double implication, nous avons donc prouvé que $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$.

Alternative : pour l'implication $A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$, proposons une autre solution.
Supposons donc que $A \cap B = A \cup B$.
On a alors $A \cap B \subset A \subset A \cup B$, ce qui s'écrit encore, au vu des hypothèses faites, $A \cap B \subset A \subset A \cap B$.
Par double inclusion, on a donc $A \cap B = A$.
Et sur le même principe, $A \cap B = B$, si bien que $A = B$.

2. Il est évident que si $B = C$, alors $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$.
Supposons donc $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$.
Prouvons alors que $B \subset C$. Soit $x \in B$.
▶ **Si** $x \in A$, alors $x \in A \cap B$ et donc $x \in A \cap C$, de sorte que $x \in C$.
▶ **Si** $x \notin A$, alors $x \in A \cup B$ et donc $x \in A \cup C$.
Mais puisque $x \notin A$, s'il est dans $A \cup C$, c'est qu'il est dans C.

Ainsi, nous venons de prouver que $\forall x \in B, x \in C$, de sorte que $B \subset C$.
En échangeant les rôles de B et Con prouve que $C \subset B$, et donc par double inclusion, $B = C$.

Solution de l'exercice 6.5

1. On n'a pas en général $\mathscr{P}(A \cup B) = \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$.
En effet, si $A = \{1\}$ et $B = \{2\}$, alors $A \cup B = \{1, 2\} \in \mathscr{P}(A \cup B)$, mais pourtant $A \cup B \notin \mathscr{P}(A)$ et $A \cup B \notin \mathscr{P}(B)$.

> **Pour aller plus loin**
> À quelle(s) condition(s) a-t-on
> $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) = \mathscr{P}(A \cup B)$?

2. On a bien $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$.
En effet, si E est un ensemble, alors on a

$$\begin{aligned} E \in \mathscr{P}(A \cap B) &\Leftrightarrow E \subset A \cap B \\ &\Leftrightarrow (E \subset A) \text{ **et** } (E \subset B) \\ &\Leftrightarrow E \in \mathscr{P}(A) \textbf{ et } E \in \mathscr{P}(B) \\ &\Leftrightarrow E \in \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B). \end{aligned}$$

> **Détails**
> Si cette équivalence vous semble douteuse, elle est détaillée ci-dessous !

Et donc ceci prouve bien que $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$.

Détaillons tout de même l'équivalence $\big((E \subset A) \textbf{ et } (E \subset B)\big) \Leftrightarrow E \subset A \cap B$.
Supposons que $(E \subset A)$ et que $(E \subset B)$.
Alors pour $x \in E$, on a $x \in A$ et $x \in B$, et donc $x \in A \cap B$. Ceci prouve donc que $E \subset A \cap B$.

Inversement, si $E \subset A \cap B$, puisque $A \cap B \subset A$, alors $E \subset A$. Et on prouve de même que $E \subset B$, de sorte qu'on a bien $(E \subset A)$ et $(E \subset B)$.

Solution de l'exercice 6.6

Procédons par double implication.
$\boxed{\Rightarrow}$ Si $\mathscr{P}(E) \subset \mathscr{P}(F)$, alors toute partie de F est une partie de F. Mais E lui même est une partie de E, et donc $E \subset F$.
Si vous préférez une rédaction plus formelle : $E \in \mathscr{P}(E)$, et donc $E \in \mathscr{P}(F)$. Et par conséquent, $E \subset F$.

> **Rappel**
> L'équivalence
> $$E \in \mathscr{P}(F) \Leftrightarrow E \subset F$$
> est la **définition** de $\mathscr{P}(F)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Inversement, supposons que $E \subset F$, et soit $A \in \mathscr{P}(E)$.
Alors $A \subset E$, et donc $A \subset F$. Donc $A \in \mathscr{P}(F)$.
Nous venons donc de prouver que tout élément de $\mathscr{P}(E)$ est un élément de $\mathscr{P}(F)$, donc $\mathscr{P}(E) \subset \mathscr{P}(F)$.

Solution de l'exercice 6.8

Puisque $\{1\}$ est un singleton, on a $\mathscr{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$.
On en déduit que $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{1\})) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{1\}, \{\emptyset, \{1\}\}\}$.
De même, en se rappelant qu'une partie de $\{1, 2, 3, 4\}$ peut contenir $0, 1, 2, 3$ ou 4 éléments, et en listant toutes les parties à un élément, puis celles à deux éléments, etc, on obtient

$$\mathscr{P}(\{1,2,3,4\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{2,3,4\}, \{1,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}.$$

On a $\mathscr{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.
Et donc $\mathscr{P}(\emptyset)$ est un singleton, de sorte que $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.
Une étape supplémentaire donne

$$\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}.$$

> **☠ Danger !**
> $\emptyset$ est l'ensemble vide.
> $\{\emptyset\}$ est un ensemble qui ne contient qu'un élément (lui même un ensemble) : l'ensemble vide.
> $\{\{\emptyset\}\}$ est un ensemble, qui ne contient qu'un élément : l'ensemble $\{\emptyset\}$.

Cet ensemble a donc quatre éléments, de sorte qu'on est dans un cas similaire à $\mathscr{P}(\{1,2,3,4\})$: il suffit de remplacer 1 par $\emptyset$, 2 par $\{\emptyset\}$, 3 par $\{\{\emptyset\}\}$ et 4 par $\{\{\{\emptyset\}\}\}$.
Il vient donc

$$\begin{aligned} \mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset)))) = \big\{&\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}, \\ &\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}, \\ &\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}\big\}. \end{aligned}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.10

1. Supposons que $A \subset B$, et soit $X \in \mathscr{P}(E)$.
On souhaite alors prouver que $A \cap X \subset B \cap X$.
Soit donc $x \in A \cap X$. Alors $x \in A$ et $x \in X$.
Or $A \subset B$, donc $x \in B$, et donc $x \in B \cap X$.
Ainsi, on a prouvé que $\forall x \in A \cap X$, $x \in B \cap X$, si bien que $A \cap X \subset B \cap X$. Et ceci est vrai pour toute partie X de E.
Nous avons donc prouvé l'implication $A \subset B \Rightarrow \forall X \in \mathscr{P}(E),\ A \cap X \subset B \cap X$.

Inversement, supposons que $\forall X \in \mathscr{P}(E), A \cap X \subset B \cap X$.
Alors en particulier, pour $X = E$, on a $A \cap E \subset B \cap E \Leftrightarrow A \subset B$.
Et donc $\forall X \in \mathscr{P}(E),\ A \cap X \subset B \cap X \Rightarrow A \subset B$.

2. Supposons que $A \cup B = E$, et soit $X \in \mathscr{P}(E)$ vérifiant $X \cap A = \emptyset$.
Alors $X = X \cap E = X \cap (A \cup B) = \underbrace{(X \cap A)}_{=\emptyset} \cup (X \cap B) = X \cap B \subset B$.
Et donc on a bien prouvé que $\forall X \in \mathscr{P}(E), X \cap A = \emptyset \Rightarrow X \subset B$.

Inversement, supposons que $\forall X \in \mathscr{P}(E),\ X \cap A = \emptyset \Rightarrow X \subset B$.
Prenons alors en particulier, $X = \overline{A}$. On a alors $A \cap \overline{A} = \emptyset$, et donc $\overline{A} \subset B$.
Et alors $E = A \cup \overline{A} \subset A \cup B$.
Puisque A et B sont deux parties de E, on a évidemment $A \cup B \subset E$, et donc par double inclusion, $E = A \cup B$.
Nous avons donc prouvé que $(\forall X \in \mathscr{P}(E),\ X \cap A = \emptyset \Rightarrow X \subset B) \Rightarrow A \cup B = E$.

Donc par double implication,

$$A \cup B = E \Leftrightarrow (\forall X \in \mathscr{P}(E),\ X \cap A = \emptyset \Rightarrow X \subset B)\,.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.13

Juste pour le plaisir, et bien que ceci ne nous soit pas vraiment utile dans la suite, reformulons l'énoncé : il s'agit de prouver que

$$\exists i \in [\![1,n]\!],\ \forall j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\},\ E_j \not\subset E_i.$$

Nous allons prouver le résultat par récurrence sur n, le nombre d'ensembles.
Autrement dit, nous prouvons la propriété $\mathscr{P}(n)$ suivante : «quelles que soient $E_1, \dots, E_n$ des parties deux à deux distinctes de E, il en existe une qui ne contienne aucune des autres.»
Notons que là encore, il peut être instructif[2] d'essayer d'écrire $\mathscr{P}(n)$ à l'aide de quantificateurs :

[2] Oserais-je dire «amusant» ?

$$\mathscr{P}(n) : \forall (E_1, \dots E_n) \in \mathscr{P}(E)^n,\ (\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow E_i \neq E_j) \Rightarrow (\exists i \in [\![1,n]\!],\ \forall j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\},\ E_j \not\subset E_i).$$

Pour $n = 2$, donnons nous deux parties E_1, E_2 de E distinctes.
Alors on ne peut avoir à la fois $E_1 \subset E_2$ et $E_2 \subset E_1$, car alors on aurait $E_1 = E_2$, contredisant le fait que $E_1 \neq E_2$.
Donc on a toujours soit[3] E_1 qui ne contient pas E_2, soit E_2 qui ne contient pas E_1.
Soit $n \geqslant 2$ tel que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie, et considérons $E_1, \dots, E_{n+1}$ des parties distinctes de E.
Par hypothèse de récurrence, l'un des $E_1, \dots, E_n$, appelons-le E_i, ne contient aucun des autres.
Il y a alors deux cas possibles :

[3] Et peut-être même les deux à la fois !

- Si $E_{n+1} \not\subset E_i$, alors aucun des $E_1, \dots, E_{i-1}, E_{i+1}, \dots, E_{n+1}$ n'est contenu dans E_i.
- Si $E_{n+1} \subset E_i$, alors E_{n+1} ne contient aucun des E_k, $k \in [\![1,n]\!]$.
  En effet, pour $k \neq i$, si on avait $E_k \subset E_{n+1}$, comme $E_{n+1} \subset E_i$, on aurait également $E_k \subset E_i$, ce qui contredit la définition de i.
  Et pour $k = i$, on ne peut avoir $E_i \subset E_{n+1}$ car on a déjà $E_{n+1} \subset E_i$, et par hypothèse $E_i \neq E_{n+1}$ car $E_1, \dots, E_{n+1}$ sont deux à deux distincts..
  Et donc E_{n+1} ne contient aucun des ensembles $E_1, \dots, E_n$.

Ainsi, dans tous les cas, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 2$.
Et donc, pour toute famille finie de parties deux à deux distinctes de E, l'une[4] de ces parties n'en contient aucune autre.

[4] Au moins.

Solution de l'exercice 6.14

Procédons par récurrence forte sur n pour prouver l'existence.
Pour $n = 1$, il est clair que $2^p(2q+1) = 1 \Leftrightarrow p = q = 0$.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et supposons que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\exists (p,q) \in \mathbf{N}^2$, $n = 2^p(2q+1)$.
Si $n+1$ est pair, notons $k = \dfrac{n+1}{2} \in \mathbf{N}^*$.
Alors par hypothèse de récurrence, il existe $(p,q) \in \mathbf{N}^2$ tel que $k = 2^p(2q+1)$, et donc $n+1 = 2^{p+1}(2q+1)$.
Et si $n+1$ est impair, alors il existe $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $n+1 = 2k+1 = 2^0(2k+1)$.
Dans tous les cas, il existe $(p,q) \in \mathbf{N}^2$ tels que $n+1 = 2^p(2q+1)$.
Par le principe de récurrence forte, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ il existe $(p,q) \in \mathbf{N}^2$ tels que $n = 2^p(2q+1)$.
Pour l'unicité, supposons que $(p_1,q_1), (p_2,q_2)$ soient deux couples d'entiers tels que $2^{p_1}(2q_1+1) = 2^{p_2}(2q_2+1)$.
Quitte à les échanger, supposons que $p_1 \leqslant p_2$.
Alors $(2q_1+1) = 2^{p_2-p_1}(2q_2+1)$.
Si $p_1 \neq p_2$, alors $2q_1+1$ est impair, alors que $2q_2+1$ est pair, ce qui est absurde.
Donc $p_1 = p_2$, si bien que $q_1 = q_2$.
Et donc $(p_1,q_1) = (p_2,q_2)$.

Ainsi, nous venons de prouver qu'à tout élément de $\mathbf{N}^*$ correspond un et un seul couple $(p,q) \in \mathbf{N}^2$.
Autrement dit, on peut «numéroter» les éléments de $\mathbf{N}^2$ à l'aide de ceux de $\mathbf{N}^*$: il y a autant d'éléments dans $\mathbf{N}^2$ que dans $\mathbf{N}^*$.
Cela peut paraître paradoxal puisque pour tout $p \in \mathbf{N}$, $\{(p,q), q \in \mathbf{N}^*\}$ est une «copie» de $\mathbf{N}^*$ qui est incluse dans $\mathbf{N}^2$, et donc que celui-ci contient une infinité de copies de $\mathbf{N}^*$, donc devrait contenir «plus» d'éléments que $\mathbf{N}^*$.
On peut aussi se dire que cela n'a rien de surprenant puisque ces deux ensembles sont infinis, mais tout de même, il semblerait que des infinis soient bien plus gros que d'autres, par exemple il y a beaucoup plus de réels que d'entiers.
Ces notions seront précisées plus tard dans l'année, et surtout en seconde année.

> **«Beaucoup plus»**
> On peut en fait prouver qu'on ne peut pas «numéroter» les réels à l'aide des entiers.

Solution de l'exercice 6.15

Supposons qu'il existe $h : G \to F$ telle que $g = f \circ h$.
Alors pour tout $x \in G$, $g(x) = f(h(x))$, donc $g(x) \in \operatorname{Im} f$.
Donc $h(x)$ est un antécédent de $g(x)$ par f.
En particulier, si $y \in \operatorname{Im} g$, alors il existe $x \in G$ tel que $y = g(x) = f(h(x)) \in \operatorname{Im} f$.
Donc déjà $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f$.
Inversement, si $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f$, alors pour tout $x \in G$, $g(x) \in \operatorname{Im} f$. Donc il existe $t \in F$ tel que $g(x) = f(t)$. Considérons alors un tel t.
Posons alors $h(x) = t$. On a alors $g(x) = f(h(x))$, et ceci étant vrai pour tout $x \in G$, on a bien $g = c \circ h$.

> **Remarque**
> Il existe peut-être plusieurs tels t, ce que nous disons c'est que nous en choisissons un.

Prouvons qu'il y a unicité si et seulement si tout élément de $\operatorname{Im} g$ possède un unique antécédent par f.
► Si tout élément de $\operatorname{Im} g$ possède un unique antécédent par f, et que $g = f \circ h$, nous avons déjà dit que pour tout $x \in G$, $h(x)$ est un antécédent de $g(x)$ par f. Et donc nécessairement, $h(x)$ est l'unique antécédent de $g(x)$ par f.
► Inversement, supposons qu'il existe un élément $y_0 \in \operatorname{Im} g$ qui possède deux antécédents distincts par f.
Soit également $h_1 : G \to F$ telle que $g = f \circ h_1$, l'existence d'un tel h_1 ayant été justifiée plus tôt.
Soit $x_0 \in E$ un antécédent de y_0 par g, de sorte que $y_0 = g(x_0)$.
Alors $t_1 = h_1(x_0)$ est un antécédent de $g(x_0)$ par f, mais par hypothèse, il existe $t_2 \in G$, avec $t_2 \neq t_1$ tel que $f(t_2) = f(t_1) = g(x_0)$.

Soit alors $h_2 : \left| \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \begin{cases} h_1(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ t_2 & \text{si } x = x_0 \end{cases} \end{array} \right.$.

Alors pour tout $x \in G$, on a

$$(f \circ h_2)(x) = f(h_2(x)) = \begin{cases} f(h_1(x)) & \text{si } x \neq x_0 \\ f(t_2) & \text{si } z = x_0 \end{cases} = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ g(x_0) & \text{si } x = x_0 \end{cases} = g(x).$$

Donc on a bien $g = f \circ h_2$, mais puisque $h_2(x_0) \neq h_1(x_0)$, $h_1 \neq h_2$.
Et donc il n'y a pas unicité d'une application h telle que $g = f \circ h$.
Nous venons donc de prouver[5] que s'il y a unicité d'un tel h, alors tout élément de $\operatorname{Im} g$ possède un unique antécédent par f.

[5] Par contraposée.

Remarque

Ceci ne signifie pas que f ne peut pas prendre deux fois la même valeur, seulement qu'elle ne peut pas prendre deux fois une valeur dans $\operatorname{Im} g$.

Par double implication, il existe un unique $h \in \mathcal{F}(G, F)$ tel que $g = f \circ h$ si et seulement si tout élément de $\operatorname{Im} g$ possède un unique antécédent par f.

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.16

1. Supposons donc par l'absurde que deux tels ensembles a et b existent, et considérons $x = \{a, b\}$.

Mais si $y = a$, alors $b \in x \cap a = x \cap y$, et donc $x \cap y \neq \emptyset$.
Et de même, si $y = b$, alors $a \in x \cap b = x \cap y$, si bien que $x \cap y \neq \emptyset$.
Autrement dit, nous venons de prouver que $\forall y \in x, y \cap x \neq \emptyset$, contredisant l'axiome de fondation.
Donc il n'existe pas d'ensembles a, b tels que $a \in b$ et $b \in a$.

2. ▸ Puisque $0 = \emptyset$ appartient par définition à tous les $A \in Y$, $0 \in N$.
Et par ailleurs, si $n \in N$, alors pour tout $A \in Y$, puisque A est clos par successeur[6], $s(n) \in A$.
Et donc $s(n) \in \bigcup\limits_{A \in Y}$, si bien que $s(n) \in N$. Ceci prouve donc a).

[6] Par définition de Y.

▸ Pour tout $n \in N$, $s(n) = n \cup \{n\}$. Mais puisque $n \in \{n\}$, $n \in s(n)$, si bien que $s(n) \neq \emptyset$.
Et donc pour tout $n \in N$, $s(n) \neq 0$.

▸ Soient $m, n \in N$ tels que $s(m) = s(n)$. Alors $n \cup \{n\} = m \cup \{m\}$.
Puisque $n \in s(n)$, on a donc $n \in s(m)$, et donc soit $n \in \{m\}$ (auquel cas $m = n$), soit $n \in m$.
De même, $m \in s(m)$, et donc $m \in s(n)$, si bien que $m \in \{n\}$ ou $m \in n$.
Si on suppose de plus que $m \neq n$, on a donc $m \in n$ et $n \in m$, ce qui n'est pas possible par la question 1).
Donc nécessairement $m = n$, si bien que $s(m) = s(n) \Rightarrow m = n$.

▸ Soit A une partie de N telle que $0 \in N$ et pour tout $n \in A$, $s(n) \in A$. Autrement dit, A est une partie de N contenant 0 et close par successeur, et donc $A \in Y$.
Et donc $N \subset A$. Puisque par définition $A \subset N$, on a donc $N = A$.