TD 5 : Fonctions usuelles

▶ Logarithme, exponentielle, fonction circulaires hyperboliques

Exercice 5.1 PD

1. Soit $a \in \mathbf{R}_+^*$. Étudier les variations de $x \mapsto a^x$.
2. Résoudre l'équation $2^x + 3^x = 5$, d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

Exercice 5.2 Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbf{R}$: PD

1. $x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x$
2. $3^{x^2} = 11^{x^5}$
3. $(\star)$ $\pi^{\sin^2(x)} = \cos(\pi x)$

Exercice 5.3 Soient $x, y \in \mathbf{R}$. Montrer que F

1. $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$
2. $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y)$
3. $\operatorname{ch}(x) = \sqrt{\dfrac{\operatorname{ch}(2x)+1}{2}}$
4. $(\star)$ $\operatorname{sh}(x) = \dfrac{2\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$.

Exercice 5.4 Soit $x, y \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$. Simplifier les sommes $C_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(x+ky)$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(x+ky)$. AD

Exercice 5.5 Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, $x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \dfrac{1}{2}$. PD

Exercice 5.6 Nombre de chiffres de l'écriture décimale d'un entier PD

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que le nombre de chiffres nécessaires pour écrire n en base 10 est égal à $\lfloor \log_{10}(n) \rfloor + 1$.

Exercice 5.7 Soient a, b, c trois réels strictement positifs. D

Discuter, suivant les valeurs de a et b, le nombre de solutions de l'équation $a\operatorname{ch}(x) + b\operatorname{sh}(x) = c$, et déterminer ces solutions.

▶ Fonctions circulaires

Exercice 5.8 F

1. En notant que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$, calculer $\cos\dfrac{\pi}{12}$, $\sin\dfrac{\pi}{12}$ et $\tan\dfrac{\pi}{12}$.
2. Calculer $\cos\dfrac{\pi}{8}$, $\sin\dfrac{\pi}{8}$ et $\tan\dfrac{\pi}{8}$.

Exercice 5.9 PD

1. Écrire $\sin(5x)$ sous forme d'un polynôme en $\sin(x)$.
2. En déduire que $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

Exercice 5.10 Étudier le signe sur $[0, 2\pi]$ de la fonction $x \mapsto \cos(2x) - \cos(3x)$. PD

Exercice 5.11 Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $x^3 \leqslant x^2$, et déterminer les valeurs de x pour lesquelles cette inégalité est une égalité. En déduire l'ensemble des solutions de $\cos^3 x + \sin^3 x = 1$. PD

Exercice 5.12 Équations et inéquations F

Résoudre les équations et inéquations suivantes. *Autant que possible, on s'aidera d'un cercle trigonométrique.*

1. $\cos x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
2. $|\tan(x)| \leqslant 1$
3. $\cos^2(x) \geqslant \dfrac{1}{4}$
4. $2\sin^2(x) + \sin^2(2x) = 2$
5. $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) > 1$.

Exercice 5.13 Soit $x \in \mathbf{R}$. Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$, puis $\sin(4x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$. Retrouver alors les valeurs de $\cos\frac{\pi}{6}$ et $\cos\frac{\pi}{3}$. F

Exercice 5.14 Résoudre les équations suivantes : AD

1. $\tan(2x) = 3\tan(x)$
2. $\cos(2x) - \cos(3x) = 0$
3. $1+\cos(x)+\cos(2x)+\cos(3x) = 0$

Exercice 5.15 Résoudre l'inéquation $\sqrt{1+2\cos(x)} \leqslant \sin x$.

Exercice 5.16 Résoudre l'inéquation $\cos^2(x) - \cos(x)\sin(x) \geqslant 1$. *On pourra commencer, lorsque c'est possible, par se ramener à une inéquation en* $\tan x$. PD

Exercice 5.17 Montrer que pour $n \geqslant 2$, on a $2\cos\frac{\pi}{2^n} = \sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$ (où il y a $n-1$ racines carrées). PD

Exercice 5.18 AD

1. Démontrer que pour tout α dans un ensemble à préciser, on a $\tan^2\alpha\tan(2\alpha) = \tan(2\alpha) - 2\tan\alpha$.
2. En déduire la valeur de $S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\tan^2\frac{x}{2^k}\tan\frac{x}{2^{k-1}}$ où $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $n \in \mathbf{N}^*$.
3. Donner la limite de S_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 5.19 Un produit infini AD

1. Montrer que pour $x \in \mathbf{R}\setminus 2\pi\mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}^*$, $\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}}$.
2. Déterminer $\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t}$.
3. En déduire que $\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{x}$.

Exercice 5.20 Pour $x \in \mathbf{R}$, comparer $\cos(\sin(x))$ et $\sin(\cos(x))$. TD

▶ Fonctions circulaires réciproques

Exercice 5.21 Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $\frac{x}{x^2+1} \leqslant \operatorname{Arctan}(x) \leqslant x$. F

Exercice 5.22 Calculer les nombres suivants : F

1. $\operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{13}\right)\right)$
2. $\operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right)$
3. $\operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$
4. $\operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\frac{22\pi}{7}\right)\right)$
5. $\operatorname{Arccos}\left(\sin\left(\frac{19\pi}{3}\right)\right)$
6. $\operatorname{Arctan}\left(\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$

Exercice 5.23 Calculer $\operatorname{Arctan}(2) + \operatorname{Arctan}(3)$. PD

Exercice 5.24 Simplifier les expressions suivantes, en précisant les valeurs de x pour lesquelles elles ont un sens : AD

1. $\sin(2\operatorname{Arcsin} x)$
2. $(\star)$ $\sin(\operatorname{Arctan} x)$
3. $\cos^2\left(\frac{1}{2}\operatorname{Arccos} x\right)$
4. $\tan(\operatorname{Arccos} x)$
5. $\cos(3\operatorname{Arccos} x)$

Exercice 5.25 Tracer le graphe de la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arccos}(\cos(x)) - \frac{1}{2}\operatorname{Arccos}(\cos(2x))$. PD

Exercice 5.26 Montrer les identités suivantes : PD

1. $\operatorname{Arccos}\frac{5}{13} = 2\operatorname{Arctan}\frac{2}{3}$
2. $2\operatorname{Arccos}\frac{3}{4} = \operatorname{Arccos}\frac{1}{8}$
3. $2\operatorname{Arcsin}\frac{3}{5} = \operatorname{Arccos}\frac{7}{25}$

Exercice 5.27 AD

1. Pour $k \in \mathbf{N}$, simplifier $\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan}(k)$.
2. En déduire l'existence et la valeur de $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\operatorname{Arctan}\frac{1}{k^2+k+1}$.

Exercice 5.28 À l'aide de calculs de dérivées, prouver les formules suivantes : AD

1. $\forall x \in]-1,1[$, $\operatorname{Arcsin}(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

2. $\forall x \in [0,1]$, $\operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\operatorname{Arcsin}(2x-1)$

Exercice 5.29 Pour $x \geqslant 0$, on pose $f(x) = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1-x}{x+1}\right)$. PD

1. Vérifier que f est bien définie.
2. Justifier que tout réel positif x peut s'écrire de manière unique sous la forme $x = \tan^2(\theta/2)$, avec $0 \leqslant \theta < \pi$.
3. Montrer alors que pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = 2\operatorname{Arctan}(\sqrt{x})$.

Exercice 5.30 Soit $f : x \mapsto \operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arcsin}(2x)$. AD

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f.
2. Calculer la valeur de $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{\pi}{2}$ possède une unique solution.
4. Déterminer cette solution.

Exercice 5.31 Résoudre l'équation $\operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(x+1) = \dfrac{\pi}{2}$. D

Exercice 5.32 AD

1. Simplifier $\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x)) + \operatorname{Arccos}(\operatorname{th}(x))$ pour $x \in \mathbf{R}$.
2. Résoudre l'équation $\operatorname{th}(x) = \dfrac{5}{13}$
3. En déduire que $\operatorname{Arctan}\dfrac{5}{12} + \operatorname{Arccos}\dfrac{5}{13} = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 5.33 (Oral Polytechnique) TD

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = x \geqslant 0$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + (u_0 + \cdots + u_n)^2}$.
Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{u_n}$. *On pourra noter* $\theta_n = \operatorname{Arcsin}\dfrac{1}{u_n}$.

CORRECTION DES EXERCICES DU TD 5

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.1

1. Notons $f_a : x \mapsto a^x$. Alors f_a est dérivable sur $\mathbf{R}$ et

$$f_a'(x) = \ln(a)e^{x\ln a} = \ln(a)a^x.$$

En particulier, f_a' est du signe de $\ln(a)$.
Donc si $a = 1$, f_a est constante, si $a > 1$, f_a est strictement croissante et si $a < 1$, alors f_a est strictement décroissante.

2. Il est évident que $x = 1$ est une solution de l'équation.
La fonction $f : x \mapsto 2^x + 3^x$ est strictement croissante car somme de deux fonctions strictement croissantes.
Et donc si $x > 1$, $f(x) > f(1) = 5$, et donc x n'est pas solution de l'équation de départ.
De même, si $x < 1$, alors $f(x) < 5$, et donc x n'est pas solution.
On en déduit que l'équation $2^x + 3^x = 5$ possède une unique solution, qui vaut 1.

Alternative
Une fonction strictement monotone ne peut prendre deux fois la même valeur. Or f prend la valeur 5 en 1, elle ne peut donc la prendre nulle part ailleurs.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.2

1. Notons que l'équation n'a de sens que pour $x \geqslant 0$, et que 0 et 1 sont clairement solutions.
Pour $x \neq 0$, et $x \neq 1$, on a

$$\begin{aligned} x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x &\Leftrightarrow e^{\sqrt{x}\ln(x)} = e^{x\ln(\sqrt{x})} \Leftrightarrow \sqrt{x}\ln(x) = x\ln\left(x^{1/2}\right)\\ &\Leftrightarrow \sqrt{x}\ln(x) = \frac{x}{2}\ln(x) \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{x}{2}\\ &\Leftrightarrow 4x = x^2 \Leftrightarrow x = 4. \end{aligned}$$

Donc 0, 1 et 4 sont les seules solutions de l'équation.

Rappel
$0^0 = 1$.

⚠ Attention !
Bien que l'équation ait un sens pour $x = 0$, l'expression avec des ln n'est valable que pour $x > 0$.

2. L'équation s'écrit encore $e^{x^2\ln(3)} = e^{x^5\ln(11)} \Leftrightarrow x^2\ln(3) = x^5\ \ln(11)$.
Il est clair que 0 est solution, et pour $x \neq 0$, cette équation équivaut à

$$x^3 = \frac{\ln(3)}{\ln(11)} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{\ln(3)}{\ln(11)}}.$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{0, \sqrt[3]{\frac{\ln(3)}{\ln(11)}}\right\}$.

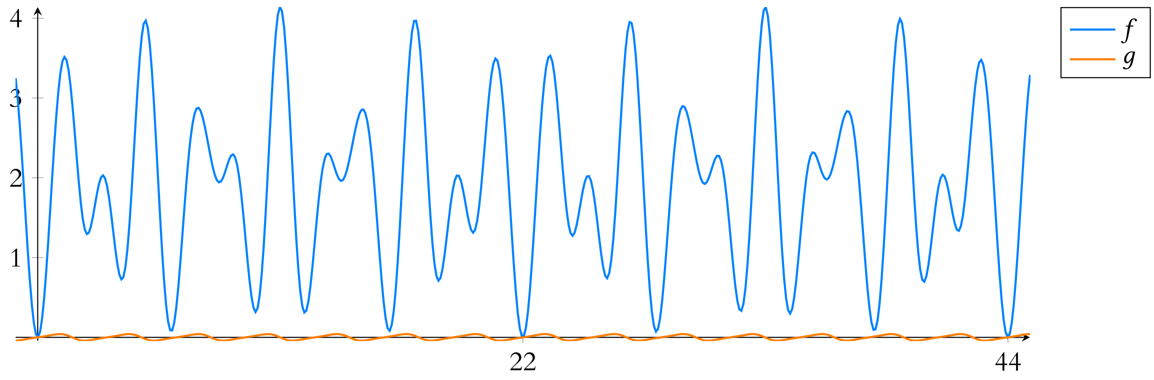
3. On a $\pi^{\sin^2(x)} = e^{\sin^2(x)\ln(\pi)} \geqslant e^0 = 1$.
D'autre part, $\cos(\pi x) \leqslant 1$.

Donc l'équation est satisfaite si et seulement si $\begin{cases}\cos(\pi x) = 1\\ \pi \sin^2(x) = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos(\pi x) = 1\\ \sin^2(x) = 0\end{cases}$

Or $\cos(\pi x) = 1$ si et seulement si il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $\pi x = 2k\pi \Leftrightarrow x = 2k$.
Mais d'autre part, $\sin(x) = 0$ si et seulement si il existe $\ell \in \mathbf{Z}$ tel que $x = \ell\pi$.
Il est clair que 0 est solution, et si $x \neq 0$ est une solution, avec $x = 2k = \ell\pi$, alors $\pi = \frac{2k}{\ell} \in \mathbf{Q}$.
Puisque π est irrationnel , ceci est impossible, et donc 0 est l'unique solution de l'équation.
J'en profite pour signaler un fait amusant, pour lequel je n'ai pas d'explication : en observant le graphique de $f : x \mapsto \pi^{\sin^2(x)} - \cos(\pi x)$, on a de prime abord l'impression qu'il s'agit d'une fonction 22-périodique.
Et de fait, si l'on essaie de superposer le graphique de f à celui de $x \mapsto f(x+22)$, ils ont l'air de se superposer... jusqu'à ce qu'on zoome un peu.
Nous avons tracé ci-dessous le graphique de la fonction[1] $g : x \mapsto f(x+22) - f(x)$, et s'il est clair que celle-ci n'est pas nulle (et donc que f n'est pas 22-périodique), il est quand même troublant de constater que son amplitude ne dépasse pas le centième de celle de f.

Irrationnel
L'irrationalité de π a été mentionnée pour l'instant, mais n'a pas été prouvée (ce qui sera peut-être fait en devoir en cours d'année).
Une «bonne» raison pour que π soit irrationnel est tout simplement que si π était égal à une fraction, on vous aurait déjà fait apprendre cette fraction !

[1] Qui elle-même a presque l'air d'être 3-périodique...



Solution de l'exercice 5.3

1. Partons plutôt du membre de droite :

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y)+\operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y) &\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right)+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right)\\ &=\frac{1}{4}\left(e^{x+y}+e^{x-y}+e^{-x+y}+e^{-x-y}+e^{x+y}-e^{x-y}-e^{-x+y}+e^{-x-y}\right)\\ &=\frac{1}{4}\left(2e^{x+y}+2e^{-(x+y)}\right)\\ &=\operatorname{ch}(x+y).\end{aligned}$$

2. De même, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y)+\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y) &\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right)+\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right)\\ &=\frac{1}{4}\left(e^{x+y}+e^{x-y}-e^{-x+y}-e^{-x-y}+e^{x+y}-e^{x-y}+e^{-x+y}-e^{-x-y}\right)\\ &=\frac{1}{4}\left(2e^{x+y}-2e^{-x-y}\right)\\ &=\operatorname{sh}(x+y).\end{aligned}$$

Alternative : soit $y\in\mathbf{R}$ fixé. Alors la dérivée de $x\mapsto\operatorname{ch}(x+y)$ est $x\mapsto\operatorname{sh}(x+y)$.
Mais par la question précédente, pour tout $x\in\mathbf{R}$, $\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y)+\operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$, et donc la dérivée de $x\mapsto\operatorname{ch}(x+y)$ est aussi $x\mapsto\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y)+\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y)$.
Et donc pour tout $x\in\mathbf{R}$, $\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y)+\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y)$.

> ⚠ Attention !
> On dérive par rapport à x, et donc $\operatorname{ch}(y)$, $\operatorname{sh}(y)$ sont des constantes.

3. Par la question 1,

$$\operatorname{ch}(2x)=\operatorname{ch}^2(x)+\operatorname{sh}^2(x)=\operatorname{ch}^2(x)+\operatorname{ch}^2(x)-1=2\operatorname{ch}^2(x)-1.$$

Et donc

$$\sqrt{\frac{\operatorname{ch}(2x)+1}{2}}=\sqrt{\frac{2\operatorname{ch}^2(x)}{2}}=\sqrt{\operatorname{ch}^2(x)}=\operatorname{ch}(x).$$

> Remarque
> La dernière égalité ne vaut que parce que $\operatorname{ch}(x)\geqslant 0$.

4. On a, pour $x\in\mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}\frac{2\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2}\right)}&=\frac{2\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\frac{\operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right)}}\\ &=\frac{2\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right)-\operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right)}}\\ &=\frac{2\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right)}}\\ &=2\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)\\ &=\operatorname{sh}\left(2\frac{x}{2}\right)=\operatorname{sh}(x).\end{aligned}$$

C'est la formule de la question 2, dans le cas particulier où $x=y$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.4

Il est clair que si $y = 0$, alors

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(x) = (n+1)\operatorname{ch}(x) \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(x) = (n+1)\operatorname{sh}(x).$$

En revanche, si $y \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}
C_n &= \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(x+ky) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{x+ky}+e^{-x-ky}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(e^{x+ky}+e^{-x-ky}\right) \\
&= \frac{e^x}{2}\sum_{k=0}^{n}(e^y)^k + \frac{e^{-x}}{2}\sum_{k=0}^{n}(e^{-y})^k \\
&= \frac{e^x}{2}\frac{1-(e^y)^{n+1}}{1-e^y} + \frac{e^{-x}}{2}\frac{1-(e^{-y})^{n+1}}{1-e^{-y}} \\
&= \frac{e^x}{2}\frac{1-e^{(n+1)y}}{1-e^y} + \frac{e^{-x}}{2}\frac{1-e^{-(n+1)y}}{1-e^{-y}} \\
&= \frac{e^x}{2}\frac{e^{\frac{n+1}{2}y}}{e^{y/2}}\frac{e^{-\frac{n+1}{2}y}-e^{\frac{n+1}{2}y}}{e^{-y/2}-e^{y/2}} + \frac{e^{-x}}{2}\frac{e^{-\frac{n+1}{2}y}}{e^{-y/2}}\frac{e^{\frac{n+1}{2}y}-e^{-\frac{n+1}{2}y}}{e^{y/2}-e^{-y/2}} \\
&= \frac{\exp\left(x+\frac{n}{2}y\right)}{2}\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}y\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{y}{2}\right)} + \frac{\exp\left(-x-\frac{n}{2}y\right)}{2}\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}y\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{y}{2}\right)} \\
&= \operatorname{ch}\left(x+\frac{n}{2}y\right)\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}y\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{y}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Détails
Il était ici important d'avoir $e^y \neq 1$ et $e^{-y} \neq 1$ afin d'appliquer une formule bien connue sur la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

Astuce
On factorise $e^a - e^b$ par $e^{\frac{a+b}{2}}$. En particulier lorsque $a = 0$, $1 - e^b$ peut se factoriser par $e^{b/2}$.

De la même manière, il vient

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(x+ky) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{x+ky}-e^{-x-ky}}{2} \\
&= \frac{e^x}{2}\sum_{k=0}^{n}(e^y)^k - \frac{e^{-x}}{2}\sum_{k=0}^{n}(e^{-y})^k \\
&= \frac{\exp\left(x+\frac{n}{2}y\right)}{2}\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}y\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{y}{2}\right)} - \frac{\exp\left(-x-\frac{n}{2}y\right)}{2}\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}y\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{y}{2}\right)} \\
&= \operatorname{sh}\left(x+\frac{n}{2}y\right)\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}y\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{y}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Les deux sommes ci-dessus ont déjà été calculées et simplifiées ci-dessus, aucun besoin de refaire le calcul !

Alternative : une méthode légèrement différente consiste à noter que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x) = e^x$ et $\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) = e^{-x}$.
On a donc

$$C_n + S_n = \sum_{k=0}^{n} e^{x+ky} = e^x \sum_{k=0}^{n}(e^y)^k = e^x\frac{1-e^{(n+1)y}}{1-e^y}.$$

Et de même,

$$C_n - S_n = \sum_{k=0}^{n} e^{-x-ky} = e^{-x}\sum_{k=0}^{n}(e^{-y})^k = e^{-x}\frac{1-e^{-(n+1)y}}{1-e^{-y}}.$$

Et donc en sommant ces deux relations,

$$C_n = \frac{1}{2}\left(\frac{e^x - e^{x+(n+1)y}}{1-e^x} + \frac{e^{-x}-e^{-x-(n+1)y}}{1-e^{-y}}\right).$$

Et de même, en soustrayant les deux égalités précédemment établies,

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{e^x - e^{x+(n+1)y}}{1-e^x} - \frac{e^{-x}-e^{-x-(n+1)y}}{1-e^{-y}}\right).$$

La suite du calcul est inchangée.

Alternative plus astucieuse : une fois établie la formule $C_n = \operatorname{ch}\left(x + \frac{n}{2}y\right)\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}y\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{y}{2}\right)}$, on peut, comme dans l'exercice précédent, fixer y et dériver par rapport à x, ce qui nous donne immédiatement

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(x+ky) = \operatorname{sh}\left(x + \frac{n}{2}y\right)\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}y\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{y}{2}\right)}.$$

Solution de l'exercice 5.5

L'inégalité proposée est équivalente, en appliquant le logarithme des deux côtés, à

$$x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x) \geqslant -\ln(2).$$

Notons donc f la fonction définie sur $]0,1[$ par $f(x) = x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x)$. Alors f est dérivable sur $]0,1[$ car somme de produit de fonctions dérivables, et

$$\forall x \in]0,1[,\ f'(x) = \ln(x) + x\frac{1}{x} - (1-x)\frac{1}{1-x} - \ln(1-x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

On a donc $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{1-x} \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 1-x \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Par conséquent, le tableau de variations de f est donné par :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
$f(x)$	‖ 0	↘	$-\ln(2)$	↗	0 ‖

Signes

La seconde équivalence n'en est une que parce que $1-x>0$.

Donc la fonction f admet un minimum en $\dfrac{1}{2}$, et ce minimum vaut $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln(2)$.

Ainsi, pour tout $x \in]0,1[$, on a bien $x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x) \geqslant -\ln(2)$ et donc

$$x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \frac{1}{2}.$$

De plus, il y a égalité si et seulement si $x = \dfrac{1}{2}$, car le minimum de f n'est atteint qu'en $x = \dfrac{1}{2}$.

Solution de l'exercice 5.6

Notons k le nombre de chiffres nécessaires pour écrire n en base 10. Alors

$$10^{k-1} \leqslant n < 10^k.$$

Par stricte croissance de la fonction $\log_{10}$, on a donc

$$\log_{10}\left(10^{k-1}\right) \leqslant \log_{10}(n) < \log_{10}\left(10^k\right)$$

soit encore $k-1 \leqslant \log_{10}(n) < k$.

Et donc $\lfloor \log_{10}(n) \rfloor = k-1$ si bien que $k = \lfloor \log_{10}(n) \rfloor + 1$.

Solution de l'exercice 5.7

On a

$$\begin{aligned} a\operatorname{ch}(x) + b\operatorname{sh}(x) = c &\Leftrightarrow a\left(e^x + e^{-x}\right) + b\left(e^x - e^{-x}\right) = 2c \\ &\Leftrightarrow (a+b)e^x + (a-b)e^{-x} = 2c \\ &\Leftrightarrow (a+b)e^{2x} - 2ce^x + (a-b) = 0. \end{aligned}$$

Détails

On a multiplié l'égalité par $e^x \neq 0$.

Posons donc $X = e^x$, de sorte que $(a+b)X^2 - 2cX + (a-b) = 0$.

Il s'agit d'un polynôme de degré 2 en X, dont le discriminant est

$$\Delta = 4c^2 - 4(a+b)(a-b) = 4\left(c^2 - (a^2 - b^2)\right).$$

▶ **Si $\Delta < 0 \Leftrightarrow c^2 < a^2 - b^2$**, alors l'équation ne possède pas de solution.
▶ **Si $\Delta = 0 \Leftrightarrow c^2 = a^2 - b^2$**, alors le polynôme possède une unique racine $X = \dfrac{c}{a+b}$.
Or, $X = \dfrac{c}{a+b} \Leftrightarrow e^x = \dfrac{c}{a+b} \Leftrightarrow x = \ln\left(\dfrac{c}{a+b}\right)$.
Donc l'équation de départ possède $\ln\left(\dfrac{c}{a+b}\right)$ comme unique solution.
▶ **Si $\Delta > 0 \Leftrightarrow c^2 > a^2 - b^2$.**
Alors le polynôme possède deux racines, qui sont

$$X_1 = \frac{2c + \sqrt{\Delta}}{2(a+b)} = \frac{c + \sqrt{c^2 - (a^2 - b^2)}}{a+b} \text{ et } X_2 = \frac{c - \sqrt{c^2 - (a^2 - b^2)}}{a+b}.$$

Il est évident que X_1 est strictement positif[2], et que $e^x = X_1 \Leftrightarrow x = \ln(X_1)$.
En revanche le signe de X_2 est moins évident.
Plus précisément, X_2 est du signe de $c - \sqrt{c^2 - (a^2 - b^2)}$. Mais

[2] Car a, b et c le sont.

$$\begin{aligned} c - \sqrt{c^2 - (a^2 - b^2)} > 0 &\Leftrightarrow c > \sqrt{c^2 - (a^2 - b^2)} \\ &\Leftrightarrow c^2 > c^2 - (a^2 - b^2) \\ &\Leftrightarrow a^2 > b^2 \Leftrightarrow a > b. \end{aligned}$$

Le passage au carré est bien une équivalence puisque c est positif.

Donc si $a > b$, l'équation de départ possède deux solutions qui sont $\ln(X_1)$ et $\ln(X_2)$, et si $a \leqslant b$ (et que $c^2 > a^2 - b^2$), alors l'équation ne possède qu'une solution, qui est $\ln(X_1)$.

Solution de l'exercice 5.8

1. On a

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

Et de même,

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

2. On a

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2\frac{\pi}{8}\right) = 2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1.$$

Et donc $\cos^2\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$.
Puisque $0 \leqslant \dfrac{\pi}{8} \leqslant 1$, $\cos\dfrac{\pi}{8} \geqslant 0$ et donc on en déduit que

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\cos^2\frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

⚠ Attention !
Si on ne prend pas garde de vérifier la positivité de $\cos\frac{\pi}{8}$, on peut seulement affirmer que

$$\left|\cos\frac{\pi}{8}\right| = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}.$$

On en déduit donc que $\sin^2\dfrac{\pi}{8} = 1 - \cos^2\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$.

Et de même, puisque $\sin\dfrac{\pi}{8} \geqslant 0$, il vient donc $\sin\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.
Enfin, on a

$$\tan\frac{\pi}{8} = \frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}} = \sqrt{3-2\sqrt{2}}.$$

Alternative
On aurait aussi pu utiliser la formule

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

et utiliser la valeur de $\cos^2\frac{\pi}{8}$ calculée plus tôt, en justifiant là encore que $\tan\frac{\pi}{8} \geqslant 0$.

Notons qu'on pourrait aussi utiliser

$$\tan^2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{8}} - 1 = \frac{4}{2+\sqrt{2}} - 1 = \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$$

ce qui, en notant que $\tan\frac{\pi}{8} \geqslant 0$ conduit au même résultat, à savoir $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$.
En effet, on a $\left(\sqrt{2}-1\right)^2 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 3 - 2\sqrt{2}$, si bien que $\sqrt{2} - 1 = \sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

Solution de l'exercice 5.9

1. On a $\sin(5x) = \sin(4x + x) = \sin(x)\cos(4x) + \cos(x)\sin(4x)$.
Mais

$$\cos(4x) = 1-2\sin^2(2x) = 1-2(2\cos(x)\sin(x))^2 = 1-8\cos^2(x)\sin^2(x) = 1-8(1-\sin^2(x))\sin^2(x) = 1-8\sin^2(x)+8\sin^4(x).$$

Et de même, $\sin(4x) = 2\cos(2x)\sin(2x) = 2(1-2\sin^2(x))2\cos(x)\sin(x)$.
Et donc

$$\begin{aligned}\sin(5x) &= \sin(x) - 8\sin^3(x) + 8\sin^5(x) + 4(1-\sin^2(x))\cos^2(x)\sin(x)\\ &= \sin(x) - 8\sin^3(x) + 8\sin^5(x) + 4(1-2\sin^2(x))\cos^2(x)\sin(x)\\ &= \sin(x) - 8\sin^3(x) + 8\sin^5(x) + 4((\sin(x) - 2\sin^3(x))(1-\sin^2(x))\\ &= \sin(x) - 8\sin^3(x) + 8\sin^5(x) + 8\sin^5(x) - 12\sin^3(x) + 4\sin(x)\\ &= 16\sin^5(x) - 20\sin^3(x) + 5\sin(x).\end{aligned}$$

2. Notons $s = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$. Puisque $\sin\left(5\frac{\pi}{5}\right) = \sin(\pi) = 0$, d'après la question précédente, il vient

$$16s^4 - 20s^3 + 5s = 0 \Leftrightarrow s\left(16s^4 - 20s^2 + 5\right) = 0.$$

Il est clair[3] que $s \neq 0$, et donc $16s^4 - 20s^2 + 5 = 0$.
Posons alors $S = s^2$, de sorte que S est racine de $16S^2 - 20S + 5$.
Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = 80$, de sorte que les deux racines en sont

$$S_1 = \frac{20-\sqrt{80}}{32} = \frac{5-\sqrt{5}}{8} \text{ et } S_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{8}.$$

Ces deux racines sont positives, et donc $s = \sqrt{S_1}$ ou $S = \sqrt{S_2}$.

[3] Car $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$.

Puisque $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{4}$, on a $0 < s < \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Or $S_2 > \frac{1}{2}$, si bien que $\sqrt{S_2} > \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Et donc nécessairement, $s = \sqrt{S_1} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

Remarque
Il ne coûte pas beaucoup plus cher de prouver que

$$\sin(2\pi/5) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$$

puisqu'il s'agit aussi d'une racine positive de $16X^5 - 20X^3 + 5X$, et qu'elle est strictement plus grande que $\sin(\pi/5)$.

Solution de l'exercice 5.10

Notons $f : x \mapsto \cos(2x) - \cos(3x)$.
Puisque la fonction f est continue, sur un intervalle où elle ne s'annule pas, elle est de signe constant. C'est en effet une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires : si I est un intervalle sur lequel f change de signe, alors il existe $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) > 0$ et $\beta \in I$ tel que $f(\beta) < 0$.
Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe θ, compris entre α et β, et donc dans I, tel que $f(\theta) = 0$.
Et donc par contraposée, si f ne s'annule pas sur I, alors elle y est de signe constant.

Commençons par chercher les points en lesquels f s'annule : pour $x \in [0, 2\pi]$, on a

$$\begin{aligned}f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos(3x) \Leftrightarrow 2x \equiv 3x \quad [2\pi] \textbf{ ou } 2x \equiv -3x \quad [2\pi]\\ \Leftrightarrow x \equiv 0 \quad [2\pi] \textbf{ ou } 5x \equiv 0 \quad [2\pi] \Leftrightarrow x \equiv 0 \quad [2\pi] \textbf{ ou } x \equiv 0 \quad \left[\frac{2\pi}{5}\right].\end{aligned}$$

Donc sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, f s'annule en 0, en $\frac{2\pi}{5}$, en $\frac{4\pi}{5}$, en $\frac{6\pi}{5}$, en $\frac{8\pi}{5}$ et en 2π.
Et alors sur chacun des intervalles, $\left]0, \frac{2\pi}{5}\right[$, $\left]\frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}\right[$, $\left]\frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}\right[$, $\left]\frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}\right[$, $\left]\frac{8\pi}{5}, 2\pi\right[$, f est de signe constant.
On peut alors calculer une valeur à l'intérieur de chacun de ces intervalles.
Par exemple, en $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ et $\frac{7\pi}{4}$.
Et alors on obtient le tableau suivant :

x	0		$\frac{2\pi}{5}$		$\frac{4\pi}{5}$		$\frac{6\pi}{5}$		$\frac{8\pi}{5}$		2π
sin $f(x)$	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	0

⚠ Attention !
Il n'y a pas de raison que f change de signe en chaque point où elle s'annule. Il est tout à fait possible qu'elle soit positive sur deux ou trois intervalles consécutifs.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.11

Pour $-1 \leqslant x < 0$, c'est évident car $x^3 < 0$ et $x^2 > 0$. Et on ne peut alors pas avoir égalité.
Pour $x \in [0,1]$, on a $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$ qui est négatif, et s'annule uniquement pour $x = 0$ ou $x = 1$.
Donc $x^3 \leqslant x^2$, avec égalité si et seulement si $x \in \{0,1\}$.
Puisque pour tout réel x, $\cos x \in [-1,1]$ et $\sin(x) \in [-1,1]$, alors ce qui précède s'applique, et donc $\cos^3 x + \sin^3 x \leqslant \cos^2 x + \sin^2 \leqslant 1$.
Et on a égalité si et seulement si on a simultanément $\cos x \in \{0,1\}$ et $\sin x \in \{0,1\}$.
Soit si et seulement si $x \in \{2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$.

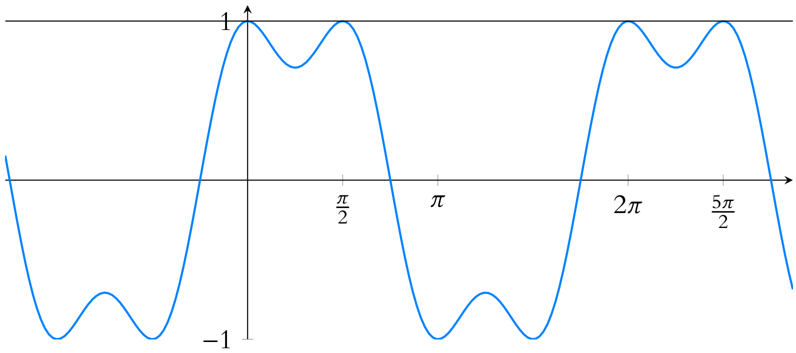


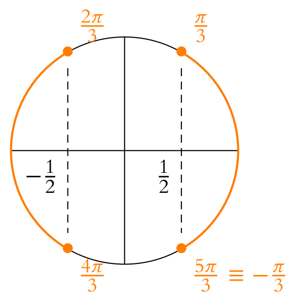
FIGURE 5.1 – La fonction $x \mapsto \cos(x)^3 + \sin(x)^3$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.12

1. Rappelons que $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
   Et donc pour $x \in [-\pi, \pi]$, on a $\cos(x) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$.
   Par 2π-périodicité du cosinus, l'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right]$.

2. Nous savons que tan est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, avec $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ et $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.
   Et donc pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $|\tan(x)| \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant \tan(x) \leqslant 1 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$.
   Par π-périodicité de tan, l'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$.

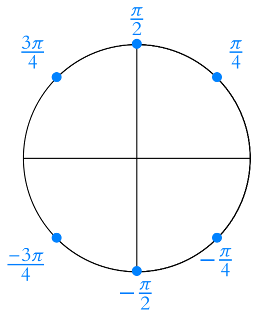
3. On a $\cos^2(x) \geqslant \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos x \geqslant \frac{1}{2}$ **ou** $\cos(x) \leqslant -\frac{1}{2}$.
   Sur $[0, 2\pi]$, l'ensemble des solutions est donc $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$.
   Une manière peut-être un peu plus élégante de le dire est que dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, l'ensemble des solutions est $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$.
   Et donc l'ensemble des solutions dans $\mathbf{R}$ est
   $$\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left(\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right] \cup \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]\right).$$



4. Nous savons que $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$ et donc
   $$\begin{aligned} 2\sin^2 x + \sin^2(2x) &= 2\sin^2(x) + 4\cos^2(x)\sin^2(x) = 2\sin^2(x)\left(1 + 2\cos^2(x)\right) \\ &= 2\sin^2(x)\left(1 + 2\left(1 - \sin^2(x)\right)\right) \\ &= 2\sin^2(x)\left(3 - 2\sin^2(x)\right). \end{aligned}$$

Posons alors $X = \sin^2(x)$, de sorte que l'équation de départ s'écrit encore

$$X(3-2X) = 1 \Leftrightarrow 2X^2 - 3X + 1 = 0.$$



Les solutions en sont alors $X_1 = 1$ et $X_2 = \frac{1}{2}$.

Donc x est solution de l'équation de départ si et seulement si $\sin(x) = \pm 1$ ou $\sin(x) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Et donc l'ensemble des solutions est $\left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$.

5. Pour $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x)\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x - \sin(x)\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

Méthode

Pour simplifier une expression de la forme

$$A\cos x + B\sin x$$

factoriser par $\sqrt{A^2+B^2}$.

Et donc on a

$$\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) > 1 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) > \frac{1}{2}.$$

Pour $x + \frac{\pi}{6} \in [-\pi, \pi]$, ceci est équivalent à $x + \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$.
Ainsi, l'ensemble des solutions est

$$\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left]-\frac{\pi}{3} + 2k\pi - \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} + 2k\pi - \frac{\pi}{6}\right[= \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right[.$$

Solution de l'exercice 5.13

On a

$$\begin{aligned}
\cos(3x) = \cos(x+2x) &= \cos(x)\cos(2x) - \sin(x)\sin(2x)\\
&= \cos(x)\left(2\cos^2(x) - 1\right) - 2\sin^2(x)\cos(x)\\
&= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2(1-\cos^2(x))\cos(x)\\
&= 4\cos^3(x) - 3\cos(x).
\end{aligned}$$

Notons qu'en particulier, pour $x = \frac{\pi}{3}$, on obtient $-1 = \cos(\pi) = 4\cos^3\frac{\pi}{3} - 3\cos\frac{\pi}{3}$.
Et donc $\cos\frac{\pi}{3}$ est racine du polynôme $P(X) = 4X^3 - 3X + 1$.
Or, -1 est racine évidente de P, qui se factorise donc en $P(X) = (X+1)(4X^2 - 4X + 1)$, dont les racines sont -1, $\frac{1}{2}$ et $\frac{-1}{2}$.
Puisque $\cos\frac{\pi}{3} \neq -1$ et $\cos\frac{\pi}{3} > 0$, on en déduit que $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.
De là, il vient[4] $\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Puis en notant que $\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$, on obtient $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

[4] Car $\sin\frac{\pi}{3} \geqslant 0$.

De même, on a

$$\begin{aligned}
\sin(4x) = \sin(2\times 2x) &= 2\sin(2x)\cos(2x)\\
&= 4\sin(x)\cos(x)\left(2\cos^2(x) - 1\right)\\
&= 8\cos^3(x)\sin(x) - 4\sin(x)\cos(x).
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 5.14

1. Notons que l'équation n'a de sens que si x et $2x$ ne sont pas congrus à $\frac{\pi}{2}$ modulo π c'est-à-dire si et seulement $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ et $x \not\equiv \frac{\pi}{4}\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$.
Pour un x satisfaisant ces conditions, on a

$$\tan(2x) = \tan(x+x) = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

et donc

$$\tan(2x) = 3\tan(x) \Leftrightarrow \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = 3\tan(x) \Leftrightarrow 2\tan(x) = 3\tan(x)(1-\tan^2(x)) \Leftrightarrow \tan(x)\left(3\tan^2(x)-1\right) = 0.$$

Et donc si et seulement si $\tan x = 0$ ou $\tan(x) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
C'est le cas si et seulement si $x \equiv 0 \quad [\pi]$ ou $x \equiv \dfrac{\pi}{6} \quad [\pi]$ ou $x \equiv -\dfrac{\pi}{6} \quad [\pi]$.
Donc l'ensemble des solutions est

$$\left\{x \in \mathbf{R} \mid x \equiv 0 \quad [\pi] \textbf{ ou } x \equiv \frac{\pi}{6} \quad [\pi] \textbf{ ou } \quad -\frac{\pi}{6} \quad [\pi]\right\} = \{k\pi, k \in \mathbf{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

2. On a $\cos(2x) - \cos(3x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos(3x)$, ce qui est le cas si et seulement si

$$2x \equiv 3x \quad [2\pi] \textbf{ ou } 2x \equiv -3x \quad [2\pi] \Leftrightarrow x \equiv 0 \quad [2\pi] \textbf{ ou } 5x \equiv 0 \quad [2\pi] \Leftrightarrow x \equiv 0 \quad [2\pi] \textbf{ ou } x \equiv 0 \quad \left[\frac{2\pi}{5}\right].$$

Notons que si $x \equiv 0 \quad [2\pi]$, alors $x \equiv 0 \quad \left[\frac{2\pi}{5}\right]$, et donc l'ensemble des solutions est

$$\left\{x \in \mathbf{R} \mid x \equiv 0 \quad \left[\frac{2\pi}{5}\right]\right\} = \left\{\frac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

3. On a $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ et $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$. Donc

$$\begin{aligned}1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) &= 4\cos^3(x) + 2\cos^2(x) - 2\cos(x)\\ &= \cos(x)\left(4\cos^2(x) + 2\cos(x) - 2\right)\\ &= \cos(x)\left(\cos(x)+1\right)\left(4\cos(x)-2\right).\end{aligned}$$

Méthode
-1 est une racine évidente de $4x^2+2x-2$, donc on factorise par $x+1$.

Et donc $1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0$ **ou** $\cos(x) = -1$ **ou** $\cos(x) = \frac{1}{2}$.
C'est donc le cas si et seulement si

$$x \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi] \textbf{ ou } x \equiv \pi \quad [2\pi] \textbf{ ou } x \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \textbf{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{3} \quad [2\pi].$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.15

Les fonctions sin et cos étant 2π-périodiques, il suffit de chercher les solutions dans $]-\pi, \pi]$, les autres s'obtiendront par translation de $2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
Nous supposons donc dans la suite que $x \in]-\pi, \pi]$.
Commençons par noter que le membre de gauche n'a de sens que si

$$1 + 2\cos(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \cos(x) \geqslant -\frac{1}{2}.$$

Soit encore si et seulement si $-\dfrac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \dfrac{2\pi}{3}$.
Puisqu'une racine est toujours positive, pour $x \in \left]-\dfrac{2\pi}{3}, 0\right[$, on a $\sin(x) < 0$, et donc x n'est évidemment pas solution de l'équation.
Enfin, pour $x \in \left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right]$, alors

$$\sqrt{1+2\cos(x)} \leqslant \sin(x) \Leftrightarrow 1+2\cos(x) \leqslant \sin^2(x) \Leftrightarrow \cos^2(x)+2\cos(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow \cos(x)(2+\cos(x)) \leqslant 0.$$

Puisque $2 + \cos(x)$ est évidemment positif, cette dernière inégalité n'est vérifiée que pour $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$.
Et donc l'ensemble des solutions de l'équation de départ dans $]-\pi, \pi]$ est $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{2\pi}{3}\right]$.
Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'équation est $\displaystyle\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$.

Solution de l'exercice 5.16

Notons que par 2π-périodicité de sin et cos, il suffit de chercher les solutions dans $[-\pi, \pi]$.
Mieux : $\cos^2$ et $x \mapsto \cos(x)\sin(x)$ sont π-périodiques, et il suffit donc de chercher les solutions dans $[0, \pi]$.
On suppose donc dans la suite que $x \in [0, \pi]$.
Constatons que $\frac{\pi}{2}$ n'est pas solution, et que pour $n \neq \frac{\pi}{2}$ (c'est-à-dire lorsque $\tan x$ existe), on a $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$ et

$$\cos(x)\sin(x) = \cos^2(x)\tan(x) = \frac{\tan(x)}{1+\tan^2(x)}.$$

Et donc il s'agit de résoudre l'inéquation :

$$\frac{1-\tan(x)}{1+\tan^2(x)} \geqslant 1.$$

Posons alors $X = \tan x$. On a

$$\frac{1-X}{1+X^2} \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{1-X}{1+X^2} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{-X^2-X}{1+X^2} \geqslant 0 \Leftrightarrow X(X+1) \leqslant 0.$$

Ce qui est le cas si et seulement si $X \in [-1, 0]$. Soit encore si et seulement si $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$.
Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation de départ est $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, k\pi\right]$.

Solution de l'exercice 5.17

Prouvons le résultat par récurrence sur $n \geqslant 2$.
Pour $n = 2$, on a $2\cos\dfrac{\pi}{2^2} = 2\cos\dfrac{\pi}{4} = \sqrt{2}$, donc la récurrence est initialisée.
Soit $n \geqslant 2$ tel que la formule soit vraie. Alors $2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}} = 2\cos\left(\dfrac{\frac{\pi}{2^n}}{2}\right)$.
Or, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $\cos(x) = \cos\left(2\dfrac{x}{2}\right) = 2\cos^2\dfrac{x}{2} - 1$.
Soit encore $\cos^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1+\cos x}{2}$. En particulier, pour $x = \frac{\pi}{2^n}$, $2\cos^2\dfrac{\pi}{2^{n+1}} = 1 + \cos\dfrac{\pi}{2^n}$ et donc

$$4\cos^2\frac{\pi}{2^{n+1}} = 2 + 2\cos\frac{\pi}{2^n} = 2 + \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{(n-1)\text{ racines}}.$$

Puisque $\dfrac{\pi}{2^{n+1}} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, son cosinus est positif, et donc

$$2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{ racines}}.$$

Donc par le principe de récurrence, la formule est valable pour tout $n \geqslant 2$.

Solution de l'exercice 5.18

1. Pour que $\tan\alpha$ et $\tan(2\alpha)$ aient un sens, il faut que $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ et $2\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow \alpha \neq \dfrac{\pi}{4}\ [\frac{\pi}{2}]$.
Pour un tel α, on a $\tan(2\alpha) = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ et donc

$$\tan(2\alpha) - 2\tan\alpha = \frac{2\tan\alpha - 2\tan\alpha(1-\tan^2\alpha)}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\tan^3\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \tan^2\alpha\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \tan^2\alpha\tan(2\alpha).$$

2. En utilisant la formule de la question précédente[5], il vient

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\tan^2\frac{x}{2^k}\tan\frac{x}{2^{k-1}} &= \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\left(\tan\frac{x}{2^{k-1}} - 2\tan\frac{x}{2^k}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\tan\frac{x}{2^{k-1}} - \sum_{k=1}^{n} 2^k\tan\frac{x}{2^k}\\ &= \tan x - 2^n\tan\frac{x}{2^n}.\end{aligned}$$

[5] Qui est valable car pour $k \geqslant 1$,
$$-\frac{\pi}{4} \leqslant \frac{x}{2k} \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

3. Il nous faut donc déterminer la limite de $2^n \tan \dfrac{x}{2^n}$ lorsque $n \to +\infty$.
Or,

$$2^n \tan \frac{x}{2^n} = x \frac{\tan \frac{x}{2^n} - \tan(0)}{\frac{x}{2^n} - 0} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \tan'(0) = x(1+\tan^2(0)) = x.$$

Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \tan(x) - x$.

Solution de l'exercice 5.19

Notons que si x n'est pas un multiple entier de 2π, aucun des $\frac{x}{2^k}$, $k \geqslant 1$ n'est multiple de π, et donc les $\sin \frac{x}{2^k}$ sont tous non nuls.

1. La formule étant donnée dans l'énoncé, prouvons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$.
Pour $n = 1$, on a $\cos \dfrac{x}{2} = \dfrac{\sin x}{2 \sin \frac{x}{2}}$ car $2 \cos \dfrac{x}{2} \sin \dfrac{x}{2} = \sin(x)$.
Supposons donc la formule vraie au rang n.
Alors

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n+1} \cos \frac{x}{2^k} &= \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{x}{2^k} \cos \frac{x}{2^{n+1}}\\ &= \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} \cos \frac{x}{2^{n+1}}\\ &= \frac{\sin x}{2^n \sin\left(2\frac{x}{2^{n+1}}\right)} \cos \frac{x}{2^{n+1}}\\ &= \frac{\sin x}{2^n 2 \sin \frac{x}{2^{n+1}} \cos \frac{x}{2^{n+1}}} \cos \frac{x}{2^{n+1}}\\ &= \frac{\sin x}{2^{n+1} \sin \frac{x}{2^{n+1}}}.\end{aligned}$$

Et donc la formule est encore vraie au rang $n+1$, de sorte que par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$.
Alternative sans récurrence : on peut faire le même calcul sans récurrence, en notant que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\sin \dfrac{x}{2^{k-1}} = \sin\left(2\dfrac{x}{2^k}\right) = 2 \sin \dfrac{x}{2^k} \cos \dfrac{x}{2^k}$ et donc $\cos \dfrac{x}{2^k} = \dfrac{\sin \frac{x}{2^{k-1}}}{\cos \frac{x}{2^k}}$.
Et donc

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n} \cos \frac{x}{2^k} &= \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin \frac{x}{2^{k-1}}}{2 \sin \frac{x}{2^k}}\\ &= \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} \sin \dfrac{x}{2^{k-1}}}{2^n \prod\limits_{k=1}^{n} \sin \dfrac{x}{2^k}}\\ &= \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}.\end{aligned}$$

Produit télescopique.

2. Il s'agit de remarquer que

$$\frac{\sin t}{t} = \frac{\sin t - \sin 0}{t - 0} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \sin'(0) = \cos(0) = 1.$$

3. Lorsque $n \to +\infty$, $\dfrac{x}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc par la question précédente, $\dfrac{\sin \frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
On en déduit que $2^n \sin \dfrac{x}{2^n} = x \dfrac{\sin \frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.
Et donc $\prod\limits_{k=1}^{n} \cos \dfrac{x}{2^k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\sin x}{x}$.

Solution de l'exercice 5.20

Posons $f(x) = \sin(\cos(x)) - \cos(\sin(x))$. Il s'agit donc de déterminer le signe de $f(x)$.
On a alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(\cos(x)) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \sin(x)\right) \\ &= 2\sin\left(\frac{\cos(x)+\sin(x)}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\cos(x)-\sin(x)}{2}\right) \end{aligned}$$

Rappel
On a $\sin(p) - \sin(q)$
$= 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$.

Mais nous savons également que

$$\sin(x)+\cos(x) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin(x) + \sin\frac{\pi}{4}\cos(x)\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Et de même,

$$\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Donc

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \frac{\sin(x)+\cos(x)}{2} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$$

et de même,

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \frac{\cos(x)-\sin(x)}{2} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Par conséquent

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\sin(x)+\cos(x)}{2} - \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}$$

et de même,

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\cos(x)-\sin(x)}{2} + \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

Mais puisque[6] $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\pi}{4}$, alors $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4} < \pi$ et $\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$.
On en déduit donc que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$-\pi \leqslant \frac{\sin x + \cos x}{2} - \frac{\pi}{4} < 0$$

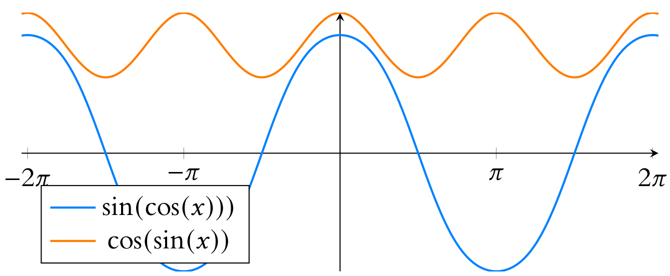
et

$$0 < \frac{\cos x - \sin x}{2} + \frac{\pi}{4} < \pi.$$

Donc les deux fonctions $x \mapsto \sin\left(\frac{\cos(x)+\sin(x)}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ et $x \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\cos(x)-\sin(x)}{2}\right)$ ne s'annulent pas sur $\mathbf{R}$.
Il en est donc de même de f. Étant continue, elle de signe constant[7].
Or, $f(0) = \sin(1) - \cos(0) = \sin(1) - 1 < 0$.
On en déduit que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow \cos(\sin(x)) > \sin(\cos(x))$.

[6] Le plus simple pour s'en convaincre est probablement d'élever au carré et de garder en tête que $\pi^2 > 9$.

[7] Sinon, par le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annulerait entre un point où elle positive et un point où elle est négative.



Solution de l'exercice 5.21

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $f(x) = \operatorname{Arctan}(x) - x$. Alors f est dérivable et

$$\forall x \in \mathbf{R}_+,\ f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = \frac{-x^2}{1+x^2} \leqslant 0.$$

Et donc f est décroissante sur $\mathbf{R}_+$. Puisqu'on a $f(0) = \text{Arctan}(0) = 0$, on en déduit que

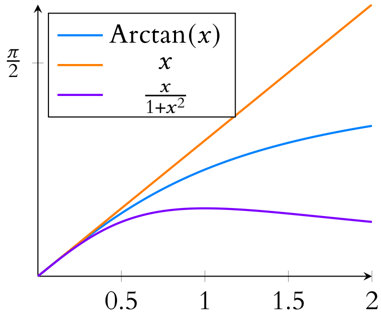
$$\forall x \in \mathbf{R}_+,\ f(x) \leqslant 0 \text{ et donc } \text{Arctan}(x) \leqslant x.$$

De même, soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $g(x) = \text{Arctan}(x) - \dfrac{x}{1+x^2}$.
Alors g est dérivable et

$$\forall x \in \mathbf{R}_+,\ g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \geqslant 0.$$

Donc g est croissante sur $\mathbf{R}_+$. Puisque $g(0) = 0$, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+,\ g(x) \geqslant 0 \text{ et donc } \text{Arctan}(x) \geqslant \frac{x}{1+x^2}.$$



SOLUTION DE L'EXERCICE 5.22

1. Puisque $\dfrac{5\pi}{13} \in [0,\pi]$, $\text{Arccos} \cos \dfrac{5\pi}{13} = \dfrac{5\pi}{13}$.

Danger !
L'égalité $\text{Arccos} \cos x = x$ ne vaut que pour $x \in [0,\pi]$.

2. On ne peut s'en tirer comme à la question précédente puisque $\dfrac{7\pi}{8} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
En revanche, $\sin \dfrac{7\pi}{8} = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{8}\right)$, et donc puisque $\frac{\pi}{8} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\text{Arcsin} \sin \frac{7\pi}{8} = \text{Arcsin} \sin \left(\pi - \frac{7\pi}{8}\right) = \text{Arcsin}\left(\sin \frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{8}.$$

Méthode
Il s'agit de déterminer l'unique nombre de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ qui a même sinus que $\frac{7\pi}{8}$.
Nous savons que ces nombres sont nécessairement congrus à $\frac{7\pi}{8}$ ou à $\pi - \frac{7\pi}{8}$ modulo 2π.

3. Exactement sur le même principe, $\text{Arcsin} \sin \dfrac{5\pi}{6} = \text{Arcsin} \sin\left(\pi - \dfrac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{\pi}{6}$.

4. On $\cos \dfrac{22\pi}{7} \cos\left(\dfrac{22\pi}{7} - 4\pi\right) = \cos\left(-\dfrac{6\pi}{7}\right) = \cos \dfrac{6\pi}{7}$.
Et puisque $\dfrac{6\pi}{7} \in [0,\pi]$, on en déduit que $\text{Arccos} \cos \dfrac{22\pi}{7} = \dfrac{6\pi}{7}$.

5. On a $\sin \dfrac{19\pi}{3} = \sin \dfrac{\pi}{3} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos \dfrac{\pi}{6}$.
Et puisque $0 \leqslant \frac{\pi}{6} \leqslant \pi$, $\text{Arccos} \sin \dfrac{19\pi}{3} = \text{Arccos} \cos \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6}$.

6. Par π-périodicité de la tangente, $\tan \dfrac{5\pi}{4} = \tan \dfrac{\pi}{4}$.
Et donc $\text{Arctan} \tan \dfrac{5\pi}{4} = \text{Arctan} \tan \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$ car $\dfrac{\pi}{4} \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.23

Notons $\theta = \text{Arctan}(2) + \text{Arctan}(3)$.
Puisque $2 > 1$, $\text{Arctan}(2) > \text{Arctan}(1) = \dfrac{\pi}{4}$. Et de même pour $\text{Arctan}(3)$.
Et donc[8], on a

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

[8] Une arctangente est toujours strictement inférieure à $\dfrac{\pi}{2}$.

Ainsi, $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, et donc $\tan(\theta)$ est bien défini. On a alors

$$\tan(\theta) = \frac{\tan(\text{Arctan}(2)) + \tan(\text{Arctan}(3))}{1 - \tan(\text{Arctan}(2))\tan(\text{Arctan}(3))} = \frac{5}{1-6} = -1.$$

Ainsi, $\tan(\theta) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, si bien que $\theta \equiv -\frac{\pi}{4}\ [\pi]$.
Or nous savons déjà que $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, et le seul nombre de cet intervalle à être congru à $-\frac{\pi}{4}$ modulo π est égal à $\frac{3\pi}{4}$, si bien que $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

Attention !
Deux nombres de même tangente ne sont pas nécessairement égaux, on peut juste affirmer qu'ils sont congrus modulo π.

Alternative : on a $\tan(\theta - \pi) = \tan(\theta) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.
Or $-\frac{\pi}{2} < \theta - \pi < \frac{\pi}{2}$, et sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, la tangente ne prend qu'une seule fois chaque valeur, si bien que

$$\theta - \pi = -\frac{\pi}{4} \text{ et donc } \theta = \frac{3\pi}{4}.$$

Solution de l'exercice 5.24

1. On a, pour $x \in [-1,1]$,
$$\sin(2\operatorname{Arcsin} x) = 2\sin(\operatorname{Arcsin} x)\cos(\operatorname{Arcsin} x).$$
Mais $\cos^2(\operatorname{Arcsin}(x)) + \sin^2(\operatorname{Arcsin}(x)) = 1$ et donc $\cos^2(\operatorname{Arcsin}(x)) = 1 - x^2$.
Puisque $\operatorname{Arcsin}(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, son cosinus est positif, et donc
$$\cos(\operatorname{Arcsin}(x)) = \sqrt{\cos^2(\operatorname{Arcsin}(x))} = \sqrt{1-x^2}.$$
Ainsi, $\sin(2\operatorname{Arcsin}(x)) = 2x\sqrt{1-x^2}$.

⚠ Attention !
Sans l'argument de signe, on peut juste affirmer que
$$\cos(\operatorname{Arcsin}(x)) = \pm\sqrt{1-x^2}.$$

2. L'expression donnée à un sens pour tout $x \in \mathbf{R}$.
Pour $x \in \mathbf{R}$, puisque $\operatorname{Arctan}(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(\operatorname{Arctan}(x)) > 0$, et en particulier est non nul.
Et donc $\dfrac{1}{\cos^2(\operatorname{Arctan}(x))} = 1 + \tan^2(\operatorname{Arctan}(x)) = 1 + x^2$, si bien que
$$\cos^2(\operatorname{Arctan}(x)) = \frac{1}{1+x^2}.$$
On a alors $\sin^2(\operatorname{Arctan}(x)) = 1 - \cos^2(\operatorname{Arctan}(x)) = 1 - \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{x^2}{1+x^2}$.
Et donc $|\sin(\operatorname{Arctan}(x))| = \sqrt{\dfrac{x^2}{1+x^2}} = \dfrac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$.
Reste à remarquer que si $x \geqslant 0$, alors $\operatorname{Arctan}(x) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc $\sin(\operatorname{Arctan}(x)) \geqslant 0$, si bien que
$$\sin(\operatorname{Arctan}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$
Et si $x \leqslant 0$, alors $\operatorname{Arctan}(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, et donc $\sin(\operatorname{Arctan}(x)) \leqslant 0$, de sorte que $\sin(\operatorname{Arctan}(x)) = \dfrac{-|x|}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Rappel
Pour tout $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$,
$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

3. Utilisons une formule de linéarisation : pour tout $x \in [-1,1]$,
$$\cos^2\left(\frac{1}{2}\operatorname{Arccos} x\right) = \frac{\cos(\operatorname{Arccos} x) + 1}{2} = \frac{x+1}{2}.$$
4. Notons que pour $x = 0$, $\operatorname{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}$, et donc $\tan(\operatorname{Arccos}(x))$ n'est pas défini.
Pour $x \in [-1, 0[\cup]0, 1]$, on a[9] $\sin(\operatorname{Arccos} x) = \sqrt{1-x^2}$ et $\cos(\operatorname{Arccos} x) = x$.
Et donc $\tan(\operatorname{Arccos} x) = \dfrac{\sin(\operatorname{Arccos} x)}{\cos(\operatorname{Arccos} x)} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

[9] C'est le même raisonnement que celui de la question 1, basé sur le fait que
$$\cos^2 + \sin^2 = 1.$$

5. On a, pour $u \in \mathbf{R}$,
$$\begin{aligned}\cos(3u) = \cos(u+2u) = \cos(u)\cos(2u) - \sin(u)\sin(2u) &= \cos(u)\left(2\cos^2(u) - 1\right) - 2\sin^2(u)\cos(u)\\ &= 2\cos^3(u) - \cos(u) - 2\left(1 - \cos^2(u)\right)\cos(u) = 4\cos^3(u) - 3\cos(u).\end{aligned}$$
Et donc pour $x \in [-1,1]$,
$$\cos(3\operatorname{Arccos} x) = 4\cos^3(\operatorname{Arccos} x) - 3\cos(\operatorname{Arccos} x) = 4x^3 - 3x.$$

Plus généralement
On peut prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\cos(n\operatorname{Arccos}(x))$ est une fonction polynomiale de degré n.
Les polynômes en question sont appelés polynômes de Tchebychev.

Solution de l'exercice 5.25

Il est clair que f est 2π-périodique, donc il suffit de tracer son graphe sur $[-\pi, \pi]$, puis d'effectuer des translations de vecteur $2k\pi\vec{\imath}$, $k \in \mathbf{Z}$.
De plus, f est paire, car la fonction cos l'est, et donc il suffit de tracer son graphe sur $[0, \pi]$, puis d'effectuer une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

Pour $x \in [0, \pi]$, on a $\operatorname{Arccos}(\cos(x)) = x$.
Si $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, alors $2x \in [0, \pi]$, et donc $\operatorname{Arccos}(\cos(2x)) = 2x$, et donc $f(x) = x - \dfrac{1}{2}2x = 0$.
En revanche, si $x \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$, alors $\pi \leqslant 2x \leqslant 2\pi$, et donc $\cos(2x) = \cos(-2x) = \cos(2\pi - 2x)$ avec $2\pi - 2x \in [0, \pi]$.
Et donc $\operatorname{Arccos}(\cos 2x) = \operatorname{Arccos}(\cos(2\pi - 2x)) = 2\pi - 2x$.
Et donc $f(x) = x - \dfrac{1}{2}(2\pi - 2x) = 2x - \pi$.

Remarque
Cette formule n'est rien d'autre que la définition de l'arc cosinus, qui est la bijection réciproque de $\cos_{|[0,\pi]}$.

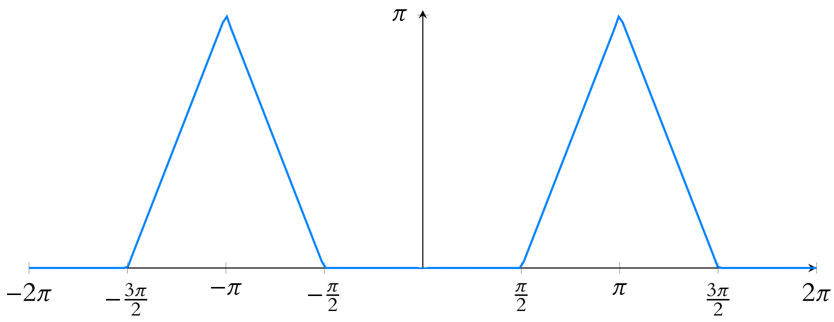


FIGURE 5.2 – $f : x \mapsto \text{Arccos}(\cos(x)) - \frac{1}{2}\text{Arccos}(\cos(2x))$

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.26

1. Notons $\theta = 2\,\text{Arctan}\,\frac{2}{3}$.
Puisque $\text{Arccos}\,\frac{5}{13}$ est l'unique nombre de $[0,\pi]$ dont le cosinus vaut $\frac{5}{13}$, il s'agit de prouver que $\theta \in [0,\pi]$ et que $\cos(\theta) = \frac{5}{13}$.

Puisque $\frac{2}{3} \geqslant 0$, $0 \leqslant \text{Arctan}\,\frac{2}{3} < \frac{\pi}{2}$ et donc $0 \leqslant \theta < \pi$.

De plus,

$$\cos(\theta) = 2\cos^2\left(\text{Arctan}\,\frac{2}{3}\right) - 1 = \frac{2}{1+\tan^2(\text{Arctan}\,\frac{2}{3})} - 1 = \frac{2}{1+\frac{4}{9}} - 1 = \frac{18}{13} - 1 = \frac{5}{13}.$$

Et donc on a à la fois $\begin{cases} \theta \in [0,\pi] \\ \cos(\theta) = \frac{5}{13} \end{cases}$ si bien que $\theta = \text{Arccos}\,\frac{5}{13}$.

2. Posons $\theta = 2\,\text{Arccos}\,\frac{3}{4}$.
Puisque $0 \leqslant \frac{3}{4} \leqslant 1$, par décroissance de Arccos, on a $0 = \text{Arccos}(1) \leqslant \text{Arccos}\,\frac{3}{4} \leqslant \text{Arccos}(0) = \frac{\pi}{2}$ et donc $2\,\text{Arccos}\,\dfrac{3}{4} \in [0,\pi]$.
Mais $\cos\left(2\,\text{Arccos}\,\dfrac{3}{4}\right) = 2\cos^2\left(\text{Arccos}\,\dfrac{3}{4}\right) - 1 = 2\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 - 1 = \dfrac{9}{8} - 1 = \dfrac{1}{8}$.
Et donc on a bien $\begin{cases} 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \\ \cos\theta = \frac{1}{8} \end{cases}$ et donc $2\,\text{Arccos}\,\dfrac{3}{4} = \text{Arccos}\,\dfrac{1}{8}$.

3. Posons $\theta = 2\,\text{Arcsin}\,\frac{3}{5}$.
Puisque $0 \leqslant \text{Arcsin}\,\frac{3}{5} \leqslant \frac{\pi}{2}$, alors $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. De plus,

$$\cos(\theta) = \cos\left(2\,\text{Arcsin}\,\frac{3}{5}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\text{Arcsin}\,\frac{3}{5}\right) = 1 - 2\frac{9}{25} = \frac{7}{25}.$$

Et donc on a $\begin{cases} 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \\ \cos(\theta) = \frac{7}{25} \end{cases}$ et donc $\theta = \text{Arccos}\,\dfrac{7}{25}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.27

1. Soit $k \in \mathbf{N}$. Alors par stricte croissance de l'arctangente,

$$0 \leqslant \text{Arctan}(k) < \text{Arctan}(k+1) < \frac{\pi}{2}.$$

Et donc $0 < \text{Arctan}(k+1) - \text{Arctan}(k) < \frac{\pi}{2}$.
En particulier, $\text{Arctan}(k+1) - \text{Arctan}(k) \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, et donc sa tangente est bien définie.
Alors

$$\begin{aligned} \tan\left(\text{Arctan}(k+1) - \text{Arctan}(k)\right) &= \frac{\tan(\text{Arctan}(k+1)) - \tan(\text{Arctan}(k))}{1 + \tan(\text{Arctan}(k+1))\tan(\text{Arctan}(k))} \\ &= \frac{k+1-k}{1+k(k+1)} = \frac{1}{k^2+k+1}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\operatorname{Arctan}(k+1)-\operatorname{Arctan}(k)$ est un réel de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut $\frac{1}{k^2+k+1}$: il est égal à $\operatorname{Arctan}\frac{1}{k^2+k+1}$.

2. D'après la question précédente, on a, pour $n\in\mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\operatorname{Arctan}\frac{1}{k^2+k+1} &= \sum_{k=0}^{n}(\operatorname{Arctan}(k+1)-\operatorname{Arctan}(k))\\ &= \operatorname{Arctan}(n+1)-\operatorname{Arctan}(0)=\operatorname{Arctan}(n+1).\end{aligned}$$

Et donc en passant à la limite, il vient

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\operatorname{Arctan}\frac{1}{k^2+k+1}=\lim_{n\to+\infty}\operatorname{Arctan}(n+1)=\frac{\pi}{2}.$$

Détails
On aura reconnu une somme télescopique.

Solution de l'exercice 5.28

1. Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par $f(x)=\operatorname{Arcsin}(x)-\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$. Alors f est dérivable car somme de composées de fonctions dérivables, et

$$\begin{aligned}\forall x\in]-1,1[,\ f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}\frac{1}{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\left(1-x^2\right)\\ &=0.\end{aligned}$$

Donc f est constante.
Or on a $f(0)=\operatorname{Arcsin}(0)-\operatorname{Arctan}(0)=0-0=0$.
Et donc pour tout $x\in]-1,1[$, $f(x)=0$ si bien que $\operatorname{Arcsin}(x)=\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

Méthode
Puisque f est constante, il suffit de trouver sa valeur en un point pour connaître sa valeur sur $\mathbf{R}$ tout entier.

2. Considérons la fonction g définie sur $[0,1]$ par $g(x)=\operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{x}\right)-\frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}(2x-1)$.
Justifions soigneusement que g est dérivable sur $]0,1[$.

Sur $]0,1[$, $x\mapsto\sqrt{x}$ est dérivable, à valeurs dans $]0,1[$. Or Arcsin est dérivable sur $]0,1[$, si bien que par composition, $x\mapsto\operatorname{Arcsin}(\sqrt{x})$ est dérivable sur $]0,1[$.
De même, $x\mapsto 2x-1$ est dérivable sur $]0,1[$, à valeurs dans $]-1,1[$. Puisque Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$, par composition, $x\mapsto\operatorname{Arcsin}(2x-1)$ est dérivable sur $]-1,1[$.
Et donc par somme de fonctions dérivables, g est dérivable sur $]-1,1[$.
Et alors pour tout $x\in]0,1[$,

$$\begin{aligned}\forall x\in]0,1[,\ g'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}-\frac{1}{\sqrt{4x-4x^2}}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}-\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}=0.\end{aligned}$$

⚠ Attention !
La fonction racine n'est pas dérivable en 0 et la fonction Arcsin n'est pas dérivable en 1, donc on prendra bien soin d'exclure ces deux nombres du domaine de dérivabilité de g.

Ainsi la fonction g est constante sur $]0,1[$. De plus, pour $x=\frac{1}{2}$, on obtient

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=\operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)-\frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}(0)=\operatorname{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

Et donc pour tout $x\in]0,1[$, $g(x)=\frac{\pi}{4}$ et donc $\operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{x}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}\left(2x-1\right)$.
Notons que pour $x=0$, ce résultat est encore valable car $\operatorname{Arcsin}(0)=0$ et $\operatorname{Arcsin}(-1)=-\frac{\pi}{2}$.
Et de même pour $x=1$, car $\operatorname{Arcsin}(1)=\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}(2-1)$.

☠ Danger !
Il n'est pas question de faire le calcul sans prendre de précaution, de constater que l'expression n'a pas de sens pour $x=0$ ou pour $x=1$, puis d'en déduire que g n'est pas dérivable en ces points.
La formule que nous avons utilisée pour la dérivée d'une composée ne vaut que lorsqu'on sait qu'on est en présence de fonctions dérivables.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.29

1. La fonction Arccos n'étant définie que sur $[-1,1]$, il s'agit de s'assurer que pour tout $x \geqslant 0$, $\dfrac{1-x}{x+1} \in [-1,1]$.
Or pour $x \geqslant 0$, on a
$$-1 \leqslant \frac{1-x}{1+x} \leqslant 1 \Leftrightarrow -1-x \leqslant 1-x \leqslant 1+x.$$
Puisque ces inégalités sont clairement vraies, on a bien $\frac{1-x}{1+x} \in [-1,1]$.
Et donc $f(x)$ est bien défini.

2. La fonction $g : \theta \mapsto \tan^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ est continue sur $[0,\pi[$, strictement croissante[10], et on a $g(0)=0$ et $\lim\limits_{\theta\to\pi} g(\theta) = +\infty$.
Par le théorème de la bijection g réalise une bijection de $[0,\pi[$ sur $\mathbf{R}_+$ et donc tout réel positif possède un unique antécédent par g.

3. Soit $x \in \mathbf{R}_+$ et soit θ comme dans la question précédente.
Alors
$$\frac{1-x}{x+1} = \frac{1-\tan^2(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)} = \cos^2(\theta/2)\left(1-\tan^2(\theta/2)\right) = \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) = \cos(2\theta/2) = \cos(\theta).$$
Et par conséquent,
$$f(x) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1-x}{x+1}\right) = \operatorname{Arccos}\left(\cos(\theta)\right).$$
Puisque $\theta \in [0,\pi]$, $f(x) = \theta$.
Reste à donner l'expression de θ en fonction de x : pour $x \geqslant 0$ et $\theta \in [0,\pi]$, on a
$$x = \tan^2(\theta/2) \Leftrightarrow \sqrt{x} = \tan(\theta/2) \Leftrightarrow \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{\theta}{2} \Leftrightarrow \theta = 2\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{x}\right).$$
Et donc on a bien $f(x) = 2\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{x}\right)$.

[10] Car composée de deux fonctions qui le sont.

Remarque
Il aurait aussi été possible de constater que f et $x \mapsto 2\operatorname{Arctan}(\sqrt{x})$ ont même dérivée, et coïncident en un point (par exemples en 1), et donc sont égales.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.30

1. Puisque Arcsin n'est définie que sur $[-1,1]$, pour que $f(x)$ soit défini, il faut que x et $2x$ soient dans $[-1,1]$, ce qui est le cas si et seulement si $-\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}$.
Donc $\mathscr{D} = \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

2. On a $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{1}{2}\right) + \operatorname{Arcsin}(1) = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{2\pi}{3}$.

3. La fonction f est strictement croissante sur $\mathscr{D}$ car somme de deux fonctions strictement croissantes.
On a $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{2\pi}{3}$ et $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$.
Puisque f est continue[11], par le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathscr{D}$ sur $\left[-\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right]$.
Et donc $f(x) = \dfrac{\pi}{2}$ possède une unique solution puisque $\dfrac{\pi}{2} \in \left[-\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right]$.

4. Soit α l'unique solution de l'équation.
Alors $\operatorname{Arcsin}(2\alpha) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(\alpha)$.
Et donc $\sin(\operatorname{Arcsin}(2\alpha)) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(\alpha)\right) = \cos(\operatorname{Arcsin}(\alpha)) = \sqrt{1-\alpha^2}$.
Soit encore $2\alpha = \sqrt{1-\alpha^2}$.
On en déduit que $4\alpha^2 = 1-\alpha^2$ et donc $\alpha = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.
Mais $\alpha \geqslant 0$, et donc $\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

[11] On pourra admettre pour l'instant que Arcsin est continue sur son ensemble de définition, à savoir $[-1,1]$, bien qu'elle ne soit dérivable que sur $]-1,1[$.

Remarque : une question se pose : puisque nous avons procédé par implications (notamment en élevant au carré), est-il nécessaire de procéder à une vérification ?
En effet, nous venons de prouver que **si** α est une solution de l'équation, **alors** $\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.
Ceci pourrait encore signifier que l'équation ne possède pas de solution.
Mais puisque l'existence d'une telle solution a été garantie à la question précédente, nous avons la certitude que l'unique solution est celle que nous venons d'obtenir.

Solution de l'exercice 5.31

Notons que la fonction $f : x \mapsto \text{Arctan}(x-1) + \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x+1)$ est strictement croissante sur $\mathbf{R}$ car somme de fonctions strictement croissantes.
Puisqu'elle est continue (car dérivable), et que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\dfrac{3\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{3\pi}{2}$, elle réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\left]-\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$.
Et donc il existe une et une seule solution α à l'équation de l'énoncé.
Puisque de plus $f(0) = 0$, nous pouvons d'ores et déjà affirmer que cette solution est positive strictement.
De même, puisque $g(1) = \text{Arctan}(1) + \text{Arctan}(2) > 2\,\text{Arctan}(1) = \dfrac{\pi}{2}$, alors $\alpha < 1$.

On a alors $\text{Arctan}(\alpha-1) + \text{Arctan}(\alpha+1) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(\alpha) = \text{Arctan}\,\frac{1}{\alpha}$.
Et donc en particulier, $\text{Arctan}(\alpha-1) + \text{Arctan}(\alpha+1)$ n'est pas congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π, et donc il est légitime de s'intéresser à la tangente des deux membres de l'égalité ci-dessus. Il vient alors

$$\begin{aligned}\tan\left(\text{Arctan}(\alpha-1) + \text{Arctan}(\alpha+1)\right) &= \frac{\tan \text{Arctan}(\alpha-1) + \tan \text{Arctan}(\alpha+1)}{1 - \tan\left(\text{Arctan}(\alpha-1)\right)\tan\left(\text{Arctan}(\alpha+1)\right)}\\ &= \frac{\alpha-1+\alpha+1}{1-(\alpha-1)(\alpha+1)} = \frac{2\alpha}{2-\alpha^2}.\end{aligned}$$

Puisque par ailleurs $\tan\left(\text{Arctan}\,\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}$, il vient donc $\dfrac{2\alpha}{1-\alpha^2} = \dfrac{1}{\alpha}$. Mais

$$\frac{2\alpha}{2-\alpha^2} = \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow 2\alpha^2 = 2-\alpha^2 \Leftrightarrow 3\alpha^2 = 2 \Leftrightarrow \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Et donc $\sqrt{\frac{2}{3}}$ est l'unique solution de l'équation.

Solution de l'exercice 5.32

1. Posons $f : x \mapsto \text{Arctan}(\text{sh}(x)) + \text{Arccos}(\text{th}(x))$.
Puisque th est à valeurs dans $]-1,1[$, et que Arccos est dérivable sur $]-1,1[$, par somme et composition de fonctions dérivables, f est dérivable sur $\mathbf{R}$.
Sa dérivée est alors donnée par

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = \frac{\text{ch}(x)}{1+\text{sh}^2(x)} - \frac{1-\text{th}^2(x)}{\sqrt{1-\text{th}^2(x)}} = \frac{\text{ch}(x)}{\text{ch}^2(x)} - \sqrt{1-\text{th}^2(x)} = \frac{1}{\text{ch}(x)} - \sqrt{\frac{1}{\text{ch}^2(x)}} = 0.$$

> **Rappel**
> Pour tout x réel,
> $$\frac{1}{\text{ch}^2(x)} = 1 - \text{th}^2(x).$$

Et par conséquent, f est constante sur $\mathbf{R}$. Mais $f(0) = \text{Arctan}(0) + \text{Arccos}(0) = \dfrac{\pi}{2}$.
Et donc $\forall x \in \mathbf{R}$, $\text{Arctan}(\text{sh}(x)) = \dfrac{\pi}{2} - \text{Arccos}(\text{th}(x))$.

Remarque : sans passer par les dérivées, une option était de calculer directement $\cos\left(\text{Arctan}(\text{sh}(x)) + \text{Arccos}(\text{th}(x))\right)$ à l'aide des formules d'addition.
En effet, on sait calculer $\cos^2(\text{Arctan}(u)) = \dfrac{1}{1+\tan^2(\text{Arctan}(u))}$ et s'en servir pour déterminer les valeurs de $\cos(\text{Arctan}(u))$ et $\sin(\text{Arctan}(u))$.
Et de même, on sait calculer $\cos(\text{Arccos}\,u) = u$ et $\sin(\text{Arccos}(u)) = \sqrt{1-u^2}$.
Ici, on trouve que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\cos\left(\text{Arctan}(\text{sh}(x)) + \text{Arccos}(\text{th}(x))\right) = 0$.
Puisque par ailleurs, $\text{Arctan}(\text{sh}(x)) + \text{Arccos}(\text{th}(x)) \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$, et que sur cet intervalle, cos ne s'annule qu'en $\frac{\pi}{2}$ on en déduit que $\text{Arctan}(\text{sh}(x)) + \text{Arccos}(\text{th}(x)) = \dfrac{\pi}{2}$.

2. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\operatorname{th}(x) = \frac{5}{13} \Leftrightarrow \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{5}{13} &\\ \Leftrightarrow 13e^{2x} - 13 = 5e^{2x}+5 &\\ \Leftrightarrow 8e^{2x} = 18 \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{3}{2}\right).\end{aligned}$$

3. On a $\operatorname{sh}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{12}$.

Et donc on en déduit, en appliquant la question 1 à $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ que

$$\operatorname{Arctan}\frac{5}{12} + \operatorname{Arccos}\frac{5}{13} = \frac{\pi}{2}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.33

Il est aisé de constater que (u_n) est strictement croissante, et donc en particulier à valeurs positives.

Comme indiqué, soit $\theta_n = \operatorname{Arcsin}\frac{1}{u_n} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Alors

$$(u_0+u_1+\cdots+u_n)^2 = u_{n+1}^2 - 1 = \frac{1}{\sin^2\theta_{n+1}} - 1 = \frac{1-\sin^2\theta_{n+1}}{\sin^2\theta_{n+1}} = \frac{\cos^2\theta_{n+1}}{\sin^2\theta_{n+1}} = \frac{1}{\tan^2\theta_{n+1}}.$$

Soit encore[12] $\tan\theta_{n+1} = \frac{1}{u_0+\cdots+u_n}$. Alors

$$\tan\theta_{n+1} = \frac{1}{u_0+\cdots+u_n} = \frac{1}{\frac{1}{\tan\theta_n}+u_n} = \frac{1}{\frac{1}{\tan\theta_n}+\frac{1}{\sin\theta_n}} = \frac{\sin\theta_n}{\cos\theta_n+1}.$$

[12] Ces deux quantités sont positives, donc on peut enlever les carrés.

Mais, pour $t \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, on a

$$\frac{\sin(2t)}{\cos(2t)+1} = \frac{2\sin t\cos t}{2\cos^2 t - 1 + 1} = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t.$$

Et en particulier, $\frac{\sin\theta_n}{\cos\theta_n+1} = \tan\frac{\theta_n}{2}$.

Et alors, en passant à l'arctangente, $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$ et donc $\theta_n = \frac{\theta_1}{2^{n-1}}$.

On en déduit que $\frac{2^n}{u_n} = 2^n \sin\frac{\theta_1}{2^{n-1}}$.

Mais la fonction sin étant dérivable en 0, avec $\sin'(0) = \cos(0) = 1$, on a $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$.

Et par conséquent,

$$\frac{2^n}{u_n} = 2^n \frac{\sin\frac{\theta_1}{2^{n-1}}}{\frac{\theta_1}{2^{n-1}}}\frac{\theta_1}{2^{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\theta_1.$$

Mais $\theta_1 = \operatorname{Arcsin}\frac{1}{u_1} = \operatorname{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

On en déduit que $\frac{2^n}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\operatorname{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Remarque

On peut même aller un peu plus loin, et prouver que ceci est égal à $\pi - 2\operatorname{Arctan}(x)$ (je vous laisse vous inspirer par exemple des exercices précédents si vous souhaitez prouver cette formule).