TD 5 : Fonctions circulaires

► Fonctions circulaires

Exercice 5.1 F

1. En notant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$.
2. Calculer $\cos\frac{\pi}{8}$, $\sin\frac{\pi}{8}$ et $\tan\frac{\pi}{8}$.

Exercice 5.2 PD

1. Écrire $\sin(5x)$ sous forme d'un polynôme en $\sin(x)$.
2. En déduire que $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

Exercice 5.3 Soient p, q deux réels tels que $\sin p + \sin q \neq 0$. Simplifier $\frac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q}$. En déduire la valeur de $\tan\frac{\pi}{24}$ sans déterminer $\cos\frac{\pi}{24}$, ni $\sin\frac{\pi}{24}$. AD

Exercice 5.4 Étudier le signe sur $[0, 2\pi]$ de la fonction $x \mapsto \cos(2x) - \cos(3x)$. PD

Exercice 5.5 Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $x^3 \leqslant x^2$, et déterminer les valeurs de x pour lesquelles cette inégalité est une égalité. En déduire l'ensemble des solutions de $\cos^3 x + \sin^3 x = 1$. PD

Exercice 5.6 Équations et inéquations F

Résoudre les équations et inéquations suivantes. *Autant que possible, on s'aidera d'un cercle trigonométrique.*

1. $\cos x \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$ 2. $|\tan(x)| \leqslant 1$ 3. $\cos^2(x) \geqslant \frac{1}{4}$ 4. $2\sin^2(x) + \sin^2(2x) = 2$ 5. $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) > 1$.

Exercice 5.7 Formules de la tangente de l'arc moitié PD

Soit $x \notin \pi + 2\pi\mathbf{Z}$. On pose $t = \tan\frac{x}{2}$. Montrer que $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, et $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$.

Exercice 5.8 Soit $x \in \mathbf{R}$. Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$, puis $\sin(4x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$. Retrouver alors les valeurs de $\cos\frac{\pi}{6}$ et $\cos\frac{\pi}{3}$. F

Exercice 5.9 Résoudre les équations suivantes : AD

1. $\tan(2x) = 3\tan(x)$ 2. $\cos(2x) - \cos(3x) = 0$ 3. $1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$

Exercice 5.10 Résoudre l'inéquation $\sqrt{1 + 2\cos(x)} \leqslant \sin x$.

Exercice 5.11 Résoudre l'inéquation $\cos^2(x) - \cos(x)\sin(x) \geqslant 1$. *On pourra commencer, lorsque c'est possible, par se ramener à une inéquation en* $\tan x$. PD

Exercice 5.12 Montrer que pour $n \geqslant 2$, on a $2\cos\frac{\pi}{2^n} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}$ (où il y a $n-1$ racines carrées). PD

Exercice 5.13 AD

1. Démontrer que pour tout α dans un ensemble à préciser, on a $\tan^2\alpha\tan(2\alpha) = \tan(2\alpha) - 2\tan\alpha$.
2. En déduire la valeur de $S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\tan^2\frac{x}{2^k}\tan\frac{x}{2^{k-1}}$ où $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $n \in \mathbf{N}^*$.
3. Donner la limite de S_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 5.14 Un produit infini AD

1. Montrer que pour $x \in \mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}^*$, $\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}}$.
2. Déterminer $\lim_{t \to 0^+}\frac{\sin t}{t}$.
3. En déduire que $\lim_{n \to +\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{x}$.

Exercice 5.15 Pour $x \in \mathbf{R}$, comparer $\cos(\sin(x))$ et $\sin(\cos(x))$. TD

▶ Fonctions circulaires réciproques

Exercice 5.16 Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $\dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \operatorname{Arctan}(x) \leqslant x$. **F**

Exercice 5.17 Calculer les nombres suivants : **F**

1. $\operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{13}\right)\right)$
2. $\operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(\dfrac{7\pi}{8}\right)\right)$
3. $\operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right)$
4. $\operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\dfrac{22\pi}{7}\right)\right)$
5. $\operatorname{Arccos}\left(\sin\left(\dfrac{19\pi}{3}\right)\right)$
6. $\operatorname{Arctan}\left(\tan\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)\right)$

Exercice 5.18 Calculer $\operatorname{Arctan}(2) + \operatorname{Arctan}(3)$. **PD**

Exercice 5.19 Simplifier les expressions suivantes, en précisant les valeurs de x pour lesquelles elles ont un sens : **AD**

1. $\sin(2\operatorname{Arcsin} x)$
2. $(\star)\,\sin(\operatorname{Arctan} x)$
3. $\cos^2\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{Arccos} x\right)$
4. $\tan(\operatorname{Arccos} x)$
5. $\cos(3\operatorname{Arccos} x)$

Exercice 5.20 Tracer le graphe de la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arccos}(\cos(x)) - \dfrac{1}{2}\operatorname{Arccos}(\cos(2x))$. **PD**

Exercice 5.21 Montrer les identités suivantes : **PD**

1. $\operatorname{Arccos}\dfrac{5}{13} = 2\operatorname{Arctan}\dfrac{2}{3}$
2. $2\operatorname{Arccos}\dfrac{3}{4} = \operatorname{Arccos}\dfrac{1}{8}$
3. $2\operatorname{Arcsin}\dfrac{3}{5} = \operatorname{Arccos}\dfrac{7}{25}$

Exercice 5.22 **AD**

1. Pour $k \in \mathbf{N}$, simplifier $\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan}(k)$.
2. En déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\operatorname{Arctan}\frac{1}{k^2+k+1}$.

Exercice 5.23 À l'aide de calculs de dérivées, prouver les formules suivantes : **AD**

1. $\forall x \in]-1,1[$, $\operatorname{Arcsin}(x) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$
2. $\forall x \in [0,1]$, $\operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\operatorname{Arcsin}(2x-1)$

Exercice 5.24 Pour $x \geqslant 0$, on pose $f(x) = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1-x}{x+1}\right)$. **PD**

1. Vérifier que f est bien définie.
2. Justifier que tout réel positif x peut s'écrire de manière unique sous la forme $x = \tan^2(\theta/2)$, avec $0 \leqslant \theta < \pi$.
3. Montrer alors que $f(x) = 2\operatorname{Arctan}(\sqrt{x})$.

Exercice 5.25 Soit $f : x \mapsto \operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arcsin}(2x)$. **AD**

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f.
2. Calculer la valeur de $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{\pi}{2}$ possède une unique solution.
4. Déterminer cette solution.

Exercice 5.26 Résoudre l'équation $\operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(x+1) = \dfrac{\pi}{2}$. **D**

Exercice 5.27 **AD**

1. Simplifier $\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x)) + \operatorname{Arccos}(\operatorname{th}(x))$ pour $x \in \mathbf{R}$.
2. Résoudre l'équation $\operatorname{th}(x) = \dfrac{5}{13}$
3. En déduire que $\operatorname{Arctan}\dfrac{5}{12} + \operatorname{Arccos}\dfrac{5}{13} = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 5.28 (Oral Polytechnique) **TD**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = x \geqslant 0$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + (u_0 + \cdots + u_n)^2}$.

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n}{u_n}$. *On pourra noter* $\theta_n = \operatorname{Arcsin}\dfrac{1}{u_n}$.

Correction des exercices du TD 5

Solution de l'exercice 5.1

1. On a

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

Et de même,

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

2. On a

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2\frac{\pi}{8}\right) = 2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1.$$

Et donc $\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$.
Puisque $0 \leqslant \frac{\pi}{8} \leqslant 1$, $\cos\frac{\pi}{8} \geqslant 0$ et donc on en déduit que

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\cos^2\frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

On en déduit donc que $\sin^2\frac{\pi}{8} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$.

Et de même, puisque $\sin\frac{\pi}{8} \geqslant 0$, il vient donc $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.
Enfin, on a

$$\tan\frac{\pi}{8} = \frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}} = \sqrt{3-2\sqrt{2}}.$$

Notons qu'on pourrait aussi utiliser

$$\tan^2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{8}} - 1 = \frac{4}{2+\sqrt{2}} - 1 = \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$$

ce qui, en notant que $\tan\frac{\pi}{8} \geqslant 0$ conduit au même résultat, à savoir $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$.

> **⚠ Attention !**
> Si on ne prend pas garde de vérifier la positivité de $\cos\frac{\pi}{8}$, on peut seulement affirmer que
> $$\left|\cos\frac{\pi}{8}\right| = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}.$$

> **Alternative**
> On aurait aussi pu utiliser la formule
> $$\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$$
> et utiliser la valeur de $\cos^2\frac{\pi}{8}$ calculée plus tôt, en justifiant là encore que $\tan\frac{\pi}{8} \geqslant 0$.

Solution de l'exercice 5.2

1. On a $\sin(5x) = \sin(4x+x) = \sin(x)\cos(4x) + \cos(x)\sin(4x)$.
Mais

$$\cos(4x) = 1-2\sin^2(2x) = 1-2(2\cos(x)\sin(x))^2 = 1-8\cos^2(x)\sin^2(x) = 1-8(1-\sin^2(x))\sin^2(x) = 1-8\sin^2(x)+8\sin^4(x).$$

Et de même, $\sin(4x) = 2\cos(2x)\sin(2x) = 2(1-2\sin^2(x))2\cos(x)\sin(x)$.
Et donc

$$\begin{aligned}
\sin(5x) &= \sin(x) - 8\sin^3(x) + 8\sin^5(x) + 4(1-\sin^2(x))\cos^2(x)\sin(x)\\
&= \sin(x) - 8\sin^3(x) + 8\sin^5(x) + 4(1-2\sin^2(x))\cos^2(x)\sin(x)\\
&= \sin(x) - 8\sin^3(x) + 8\sin^5(x) + 4((\sin(x)-2\sin^3(x))(1-\sin^2(x))\\
&= \sin(x) - 8\sin^3(x) + 8\sin^5(x) + 8\sin^5(x) - 12\sin^3(x) + 4\sin(x)\\
&= 16\sin^5(x) - 20\sin^3(x) + 5\sin(x).
\end{aligned}$$

2. Notons $s = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$. Puisque $\sin\left(5\frac{\pi}{5}\right) = \sin(\pi) = 0$, d'après la question précédente, il vient

$$16s^4 - 20s^3 + 5s = 0 \Leftrightarrow s\left(16s^4 - 20s^2 + 5\right) = 0.$$

Il est clair[1] que $s \neq 0$, et donc $16s^4 - 20s^2 + 5 = 0$.
Posons alors $S = s^2$, de sorte que S est racine de $16S^2 - 20S + 5$.
Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = 80$, de sorte que les deux racines en sont

$$S_1 = \frac{20 - \sqrt{80}}{32} = \frac{5 - \sqrt{5}}{8} \text{ et } S_2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}.$$

Ces deux racines sont positives, et donc $s = \sqrt{S_1}$ ou $S = \sqrt{S_2}$.

Puisque $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{4}$, on a $0 < s < \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Or $S_2 > \frac{1}{2}$, si bien que $\sqrt{S_2} > \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Et donc nécessairement, $s = \sqrt{S_1} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$.

[1] Car $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$.

Remarque
Il ne coûte pas beaucoup plus cher de prouver que

$$\sin(2\pi/5) = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$$

puisqu'il s'agit aussi d'une racine positive de $16X^5 - 20X^3 + 5X$, et qu'elle est strictement plus grande que $\sin(\pi/5)$.

Solution de l'exercice 5.3

On applique nos formules :

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \text{ et } \cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}.$$

Donc en passant au quotient, $\frac{\cos q - \cos p}{\sin p + \sin q} = \tan \frac{p-q}{2}$.
Comme dans l'exercice 1, on a $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, et donc pour $p = \frac{\pi}{3}$ et $q = \frac{\pi}{4}$, il vient

$$\tan \frac{\pi}{24} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} - 1\right) = \sqrt{6} - \sqrt{3} - 2 + \sqrt{2}.$$

Solution de l'exercice 5.4

Rappelons qu'on a $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$, de sorte que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\cos(2x) - \cos(3x) = 2 \sin \frac{5x}{2} \sin \frac{x}{2}.$$

Sur $[0, 2\pi]$, $\sin \frac{x}{2} \geqslant 0$, et donc le signe de $\cos(2x) - \cos(3x)$ est entièrement déterminé par celui de $\sin \frac{5x}{2}$.

x	0		$\frac{2\pi}{5}$		$\frac{4\pi}{5}$		$\frac{6\pi}{5}$		$\frac{8\pi}{5}$		2π
$\sin \frac{5x}{2}$	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	0

Solution de l'exercice 5.5

Pour $-1 \leqslant x < 0$, c'est évident car $x^3 < 0$ et $x^2 > 0$. Et on ne peut alors pas avoir égalité.
Pour $x \in [0, 1]$, on a $x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$ qui est négatif, et s'annule uniquement pour $x = 0$ ou $x = 1$.
Donc $x^3 \leqslant x^2$, avec égalité si et seulement si $x \in \{0, 1\}$.
Puisque pour tout réel x, $\cos x \in [-1, 1]$ et $\sin(x) \in [-1, 1]$, alors ce qui précède s'applique, et donc $\cos^3 x + \sin^3 x \leqslant \cos^2 x + \sin^2 \leqslant 1$.
Et on a égalité si et seulement si on a simultanément $\cos x \in \{0, 1\}$ et $\sin x \in \{0, 1\}$.
Soit si et seulement si $x \in \{2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$.

Solution de l'exercice 5.6

1. Rappelons que $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Et donc pour $x \in [-\pi, \pi]$, on a $\cos(x) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$.
Par 2π-périodicité du cosinus, l'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right]$.

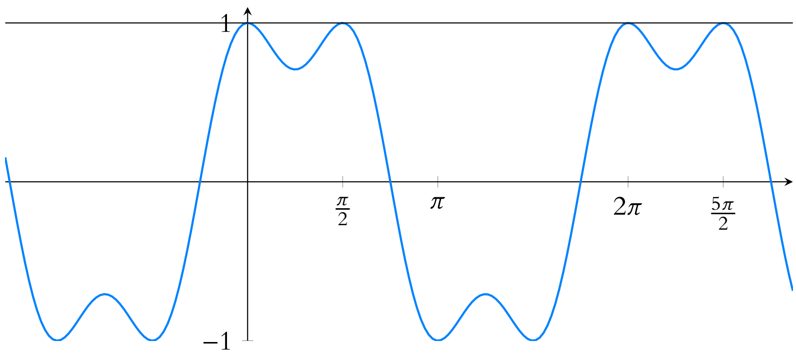


Figure 5.1 – La fonction $x \mapsto \cos(x)^3 + \sin(x)^3$.

2. Nous savons que tan est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, avec $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ et $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

Et donc pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $|\tan(x)| \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant \tan(x) \leqslant 1 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$.

Par π-périodicité de tan, l'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$.

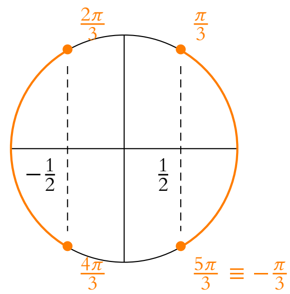
3. On a $\cos^2(x) \geqslant \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos x \geqslant \frac{1}{2}$ **ou** $\cos(x) \leqslant -\frac{1}{2}$.

Sur $[0, 2\pi]$, l'ensemble des solutions est donc $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$.

Une manière peut-être un peu plus élégante de le dire est que dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, l'ensemble des solutions est $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$.

Et donc l'ensemble des solutions dans $\mathbf{R}$ est

$$\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left(\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right] \cup \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]\right).$$



4. Nous savons que $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$ et donc

$$\begin{aligned} 2\sin^2 x + \sin^2(2x) &= 2\sin^2(x) + 4\cos^2(x)\sin^2(x) = 2\sin^2(x)\left(1 + 2\cos^2(x)\right) \\ &= 2\sin^2(x)\left(1 + 2\left(1 - \sin^2(x)\right)\right) \\ &= 2\sin^2(x)\left(3 - 2\sin^2(x)\right). \end{aligned}$$

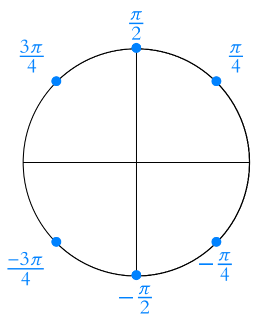
Posons alors $X = \sin^2(x)$, de sorte que l'équation de départ s'écrit encore

$$X(3 - 2X) = 1 \Leftrightarrow 2X^2 - 3X + 1 = 0.$$

Les solutions en sont alors $X_1 = 1$ et $X_2 = \frac{1}{2}$.

Donc x est solution de l'équation de départ si et seulement si $\sin(x) = \pm 1$ ou $\sin(x) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Et donc l'ensemble des solutions est $\left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$.



5. Pour $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x)\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x - \sin(x)\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

Méthode
Pour simplifier une expression de la forme

$$A\cos x + B\sin x$$

factoriser par $\sqrt{A^2 + B^2}$.

Et donc on a

$$\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) > 1 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) > \frac{1}{2}.$$

Pour $x+\frac{\pi}{6} \in [-\pi,\pi]$, ceci est équivalent à $x+\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$.
Ainsi, l'ensemble des solutions est

$$\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left]-\frac{\pi}{3}+2k\pi-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}+2k\pi-\frac{\pi}{6}\right[= \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{6}+2k\pi\right[.$$

Solution de l'exercice 5.7

Commençons par noter que l'hypothèse faite sur x est équivalente à $\frac{x}{2} \notin \frac{\pi}{2}+\pi\mathbf{Z}$, ce qui garantit l'existence de t.
On a alors $\cos x = \cos\left(2\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$.
Mais puisque $\frac{x}{2} \notin \frac{\pi}{2}+\pi\mathbf{Z}$, $\cos\frac{x}{2} \neq 0$ et donc

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{1}{1+t^2}.$$

> **Rappel**
> Pour tout $\theta \in \mathbf{R}$,
> $$1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}.$$

Et donc $\cos x = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{2-(1+t^2)}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

De même, on a

$$\sin(x) = \sin\left(2\frac{x}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2} = \frac{2}{1+t^2}t = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Enfin, la dernière formule est immédiate en se souvenant que

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Solution de l'exercice 5.8

On a

$$\begin{aligned}\cos(3x) = \cos(x+2x) &= \cos(x)\cos(2x) - \sin(x)\sin(2x)\\ &= \cos(x)\left(2\cos^2(x)-1\right) - 2\sin^2(x)\cos(x)\\ &= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2(1-\cos^2(x))\cos(x)\\ &= 4\cos^3(x) - 3\cos(x).\end{aligned}$$

Notons qu'en particulier, pour $x=\frac{\pi}{3}$, on obtient $-1 = \cos(\pi) = 4\cos^3\frac{\pi}{3} - 3\cos\frac{\pi}{3}$.
Et donc $\cos\frac{\pi}{3}$ est racine du polynôme $P(X) = 4X^3-3X+1$.
Or, -1 est racine évidente de P, qui se factorise donc en $P(X) = (X+1)(4X^2-4X+1)$, dont les racines sont -1, $\frac{1}{2}$ et $\frac{-1}{2}$.
Puisque $\cos\frac{\pi}{3} \neq -1$ et $\cos\frac{\pi}{3} > 0$, on en déduit que $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.
De là, il vient[2] $\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

[2] Car $\sin\frac{\pi}{3} \geqslant 0$.

Puis en notant que $\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$, on obtient $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

De même, on a

$$\begin{aligned}\sin(4x) = \sin(2\times 2x) &= 2\sin(2x)\cos(2x)\\ &= 4\sin(x)\cos(x)\left(2\cos^2(x)-1\right)\\ &= 8\cos^3(x)\sin(x) - 4\sin(x)\cos(x).\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 5.9

1. Notons que l'équation n'a de sens que si x et $2x$ ne sont pas congrus à $\frac{\pi}{2}$ modulo π c'est-à-dire si et seulement $x \notin \left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$.
Nous savons que

$$\tan(2x) = \tan(x+x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

et donc

$$\tan(2x) = 3\tan(x) \Leftrightarrow \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = 3\tan(x) \Leftrightarrow 2\tan(x) = 3\tan(x)(1-\tan^2(x)) \Leftrightarrow \tan(x)\left(3\tan^2(x)-1\right) = 0.$$

Et donc si et seulement si $\tan x = 0$ ou $\tan(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.
C'est le cas si et seulement si $x \equiv 0 \quad [\pi]$ ou $x \equiv \frac{\pi}{6} \quad [\pi]$ ou $x \equiv -\frac{\pi}{6} \quad [\pi]$.

2. On a $\cos(2x) - \cos(3x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos(3x)$, ce qui est le cas si et seulement si

$$2x \equiv 3x \quad [2\pi] \text{ ou } 2x \equiv -3x \quad [2\pi].$$

Soit encore si et seulement si il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que

$$2x = 3x + 2k\pi \text{ ou } 2x = -3x + 2k\pi \Leftrightarrow x = -2k\pi \text{ ou } x = k\frac{2\pi}{5}.$$

Donc l'ensemble des solutions est $\{2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\} \cup \left\{\frac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbf{Z}\right\}$.

> **Remarque**
> Ceci pourrait aussi s'écrire entièrement avec des congruences si on est à l'aise. Par exemple,
> $$2x \equiv -3x \quad [2\pi] \Leftrightarrow 5x \equiv 0 \quad [2\pi]$$
> $$\Leftrightarrow x \equiv 0 \quad [\tfrac{2\pi}{5}]$$

3. Par les formules de Simpson, on a

$$\cos x + \cos(3x) = 2\cos\left(\frac{3x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-x}{2}\right) = 2\cos(2x)\cos(x).$$

D'autre part, $1 + \cos(2x) = 2\cos^2(x)$, et donc

$$1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos(x)\left(\cos(2x) + \cos(x)\right) = 0.$$

Donc l'équation est satisfaite si et seulement si $\cos(x) = 0$ ou

$$\cos(2x) = -\cos(x) \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos(\pi - x).$$

Soit encore si et seulement si $x \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$ ou $2x \equiv \pi - x \quad [2\pi]$ ou $2x \equiv x - \pi \quad [2\pi]$.
Mais $2x \equiv \pi - x \quad [2\pi] \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{3} \quad [\frac{2\pi}{3}]$ et $2x \equiv x - \pi \quad [2\pi] \Leftrightarrow x \equiv -\pi \quad [2\pi]$.
Donc au final l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3},\ k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \{(2k+1)\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}.$$

Et puisque $(2k+1)\pi = \frac{\pi}{3} + 3k\frac{2\pi}{3}$, on peut donc écrire plus simplement que l'ensemble des solutions est

$$\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3},\ k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.10

Les fonctions sin et cos étant 2π-périodiques, il suffit de chercher les solutions dans $]-\pi, \pi]$, les autres s'obtiendront par translation de $2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
Nous supposons donc dans la suite que $x \in]-\pi, \pi]$.
Commençons par noter que le membre de gauche n'a de sens que si

$$1 + 2\cos(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \cos(x) \geqslant -\frac{1}{2}.$$

Soit encore si et seulement si $-\frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3}$.
Puisqu'une racine est toujours positive, pour $x \in \left]-\frac{2\pi}{3}, 0\right[$, on a $\sin(x) < 0$, et donc x n'est évidemment pas solution de l'équation.
Enfin, pour $x \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$, alors

$$\sqrt{1+2\cos(x)} \leqslant \sin(x) \Leftrightarrow 1+2\cos(x) \leqslant \sin^2(x) \Leftrightarrow \cos^2(x)+2\cos(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow \cos(x)(2+\cos(x)) \leqslant 0.$$

Puisque $2+\cos(x)$ est évidemment positif, cette dernière inégalité n'est vérifiée que pour $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Et donc l'ensemble des solutions de l'équation de départ dans $]-\pi,\pi]$ est $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'équation est $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{2\pi}{3}+2k\pi\right]$.

Solution de l'exercice 5.11

Notons que par 2π-périodicité de sin et cos, il suffit de chercher les solutions dans $[-\pi,\pi]$.
Mieux : $\cos^2$ et $x \mapsto \cos(x)\sin(x)$ sont π-périodiques, et il suffit donc de chercher les solutions dans $[0,\pi]$.
On suppose donc dans la suite que $x \in [0,\pi]$.
Constatons que $\frac{\pi}{2}$ n'est pas solution, et que pour $n \neq \frac{\pi}{2}$ (c'est-à-dire lorsque $\tan x$ existe), on a $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$ et

$$\cos(x)\sin(x) = \cos^2(x)\tan(x) = \frac{\tan(x)}{1+\tan^2(x)}.$$

Et donc il s'agit de résoudre l'inéquation :

$$\frac{1-\tan(x)}{1+\tan^2(x)} \geqslant 1.$$

Posons alors $X = \tan x$. On a

$$\frac{1-X}{1+X^2} \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{1-X}{1+X^2} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{-X^2-X}{1+X^2} \geqslant 0 \Leftrightarrow X(X+1) \leqslant 0.$$

Ce qui est le cas si et seulement si $X \in [-1,0]$. Soit encore si et seulement si $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$.
Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation de départ est $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left[-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\pi\right]$.

Solution de l'exercice 5.12

Prouvons le résultat par récurrence sur $n \geqslant 2$.
Pour $n=2$, on a $2\cos\frac{\pi}{2^2} = 2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$, donc la récurrence est initialisée.

Supposons la formule vraie à un rang $n \geqslant 2$. Alors $2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = 2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2^n}}{2}\right)$.

Or, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $\cos(x) = \cos\left(2\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$.

Soit encore $\cos^2\frac{x}{2} = \dfrac{1+\cos x}{2}$. En particulier, pour $x = \frac{\pi}{2^n}$, $2\cos^2\frac{\pi}{2^{n+1}} = 1+\cos\frac{\pi}{2^n}$ et donc

$$4\cos^2\frac{\pi}{2^{n+1}} = 2+2\cos\frac{\pi}{2^n} = 2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{(n-1)\text{ racines}}.$$

Puisque $\frac{\pi}{2^{n+1}} \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, son cosinus est positif, et donc

$$2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{ racines}}.$$

Donc par le principe de récurrence, la formule est valable pour tout $n \geqslant 2$.

Solution de l'exercice 5.13

1. Pour que $\tan\alpha$ et $\tan(2\alpha)$ aient un sens, il faut que $\alpha \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ et $2\alpha \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{4}\ [\frac{\pi}{2}]$.

   Pour un tel α, on a $\tan(2\alpha) = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ et donc

$$\tan(2\alpha) - 2\tan\alpha = \frac{2\tan\alpha - 2\tan\alpha(1-\tan^2\alpha)}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\tan^3\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \tan^2\alpha\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \tan^2\alpha\tan(2\alpha).$$

2. En utilisant la formule de la question précédente[3], il vient

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\tan^2\frac{x}{2^k}\tan\frac{x}{2^{k-1}} &= \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\left(\tan\frac{x}{2^{k-1}} - 2\tan\frac{x}{2^k}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\tan\frac{x}{2^{k-1}} - \sum_{k=1}^{n} 2^k\tan\frac{x}{2^k}\\ &= \tan x - 2^n\tan\frac{x}{2^n}.\end{aligned}$$

[3] Qui est valable car pour $k \geqslant 1$,
$$-\frac{\pi}{4} \leqslant \frac{x}{2k} \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

3. Il nous faut donc déterminer la limite de $2^n\tan\frac{x}{2^n}$ lorsque $n \to +\infty$.
Or,
$$2^n\tan\frac{x}{2^n} = x\frac{\tan\frac{x}{2^n} - \tan(0)}{\frac{x}{2^n} - 0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x\tan'(0) = x(1+\tan^2(0)) = x.$$
Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \tan(x) - x$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.14

Notons que si x n'est pas un multiple entier de 2π, aucun des $\frac{x}{2^k}$, $k \geqslant 1$ n'est multiple de π, et donc les $\sin\frac{x}{2^k}$ sont tous non nuls.

1. La formule étant donnée dans l'énoncé, prouvons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$.
Pour $n = 1$, on a $\cos\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}$ car $2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = \sin(x)$.
Supposons donc la formule vraie au rang n.
Alors

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n+1}\cos\frac{x}{2^k} &= \prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}\cos\frac{x}{2^{n+1}}\\ &= \frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\cos\frac{x}{2^{n+1}}\\ &= \frac{\sin x}{2^n\sin\left(2\frac{x}{2^{n+1}}\right)}\cos\frac{x}{2^{n+1}}\\ &= \frac{\sin x}{2^n 2\sin\frac{x}{2^{n+1}}\cos\frac{x}{2^{n+1}}}\cos\frac{x}{2^{n+1}}\\ &= \frac{\sin x}{2^{n+1}\sin\frac{x}{2^{n+1}}}.\end{aligned}$$

Et donc la formule est encore vraie au rang $n+1$, de sorte que par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$.
Alternative sans récurrence : on peut faire le même calcul sans récurrence, en notant que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\sin\frac{x}{2^{k-1}} = 2\sin\frac{x}{2^k}\cos\frac{x}{2^k}$ et donc $\cos\frac{x}{2^k} = \frac{\sin\frac{x}{2^{k-1}}}{\cos\frac{x}{2^{k-1}}}$. Et donc

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k} &= \prod_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{x}{2^{k-1}}}{2\sin\frac{x}{2^k}}\\ &= \frac{\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{x}{2^{k-1}}}{2^n\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{x}{2^k}}\\ &= \frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}.\end{aligned}$$

Produit télescopique.

2. Il s'agit de remarquer que

$$\frac{\sin t}{t} = \frac{\sin t - \sin 0}{t - 0} \xrightarrow[t\to 0]{} \sin'(0) = \cos(0) = 1.$$

3. Lorsque $n \to +\infty$, $\dfrac{x}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc par la question précédente, $\dfrac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

On en déduit que $2^n \sin\dfrac{x}{2^n} = x\dfrac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.

Et donc $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\frac{x}{2^k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\sin x}{x}$.

Solution de l'exercice 5.15

Posons $f(x) = \sin(\cos(x)) - \cos(\sin(x))$. Il s'agit donc de déterminer le signe de $f(x)$.
On a alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(\cos(x)) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \sin(x)\right) \\ &= 2\sin\left(\frac{\cos(x)+\sin(x)}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\cos(x)-\sin(x)}{2}\right) \end{aligned}$$

Rappel
On a $\sin(p) - \sin(q)$
$= 2\cos\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$.

Mais nous savons également que

$$\sin(x)+\cos(x) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin(x) + \sin\frac{\pi}{4}\cos(x)\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Et de même,

$$\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Donc

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \frac{\sin(x)+\cos(x)}{2} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$$

et de même,

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \frac{\cos(x)-\sin(x)}{2} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Par conséquent

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\sin(x)+\cos(x)}{2} - \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}$$

et de même,

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\cos(x)-\sin(x)}{2} + \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

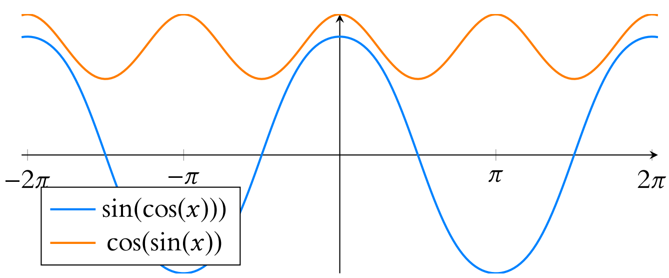
Mais puisque[4] $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < \dfrac{\pi}{4}$, alors $0 < \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\pi}{4} < \pi$ et $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} > 0$.
On en déduit donc que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$-\pi \leqslant \frac{\sin x + \cos x}{2} - \frac{\pi}{4} < 0$$

et

$$0 < \frac{\cos x - \sin x}{2} + \frac{\pi}{4} < \pi.$$

Donc les deux fonctions $x \mapsto \sin\left(\dfrac{\cos(x)+\sin(x)}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$ et $x \mapsto \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\cos(x)-\sin(x)}{2}\right)$ ne s'annulent pas sur $\mathbf{R}$.
Il en est donc de même de f. Étant continue, elle de signe constant[5].
Or, $f(0) = \sin(1) - \cos(0) = \sin(1) - 1 < 0$.
On en déduit que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow \cos(\sin(x)) > \sin(\cos(x))$.



[4] Le plus simple pour s'en convaincre est probablement d'élever au carré et de garder en tête que $\pi^2 > 9$.

[5] Sinon, par le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annulerait entre un point où elle positive et un point où elle est négative.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.16

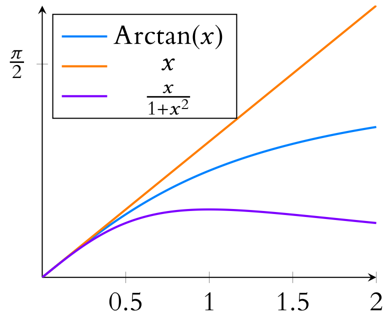
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $f(x) = \operatorname{Arctan}(x) - x$. Alors f est dérivable et

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = \frac{-x^2}{1+x^2} \leqslant 0.$$

Et donc f est décroissante sur $\mathbf{R}_+$. Puisqu'on a $f(0) = \operatorname{Arctan}(0) = 0$, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+,\ f(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow \operatorname{Arctan}(x) \leqslant x.$$

De même, soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $g(x) = \operatorname{Arctan}(x) - \dfrac{x}{1+x^2}$.
Alors g est dérivable et



$$\forall x \in \mathbf{R}_+,\ g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \geqslant 0.$$

Donc g est croissante sur $\mathbf{R}_+$. Puisque $g(0) = 0$, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+,\ g(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \operatorname{Arctan}(x) \geqslant \frac{x}{1+x^2}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.17

Danger ! L'égalité $\operatorname{Arccos}\cos x = x$ ne vaut que pour $x \in [0, \pi]$.

1. Puisque $\dfrac{5\pi}{13} \in [0, \pi]$, $\operatorname{Arccos}\cos\dfrac{5\pi}{13} = \dfrac{5\pi}{13}$.
2. On ne peut s'en tirer comme à la question précédente puisque $\dfrac{7\pi}{8} \notin \left[-\dfrac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
   En revanche, $\sin\dfrac{7\pi}{8} = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{8}\right)$, et donc puisque $\frac{\pi}{8} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,
   $$\operatorname{Arcsin}\sin\frac{7\pi}{8} = \operatorname{Arcsin}\sin\left(\pi - \frac{7\pi}{8}\right) = \operatorname{Arcsin}\left(\sin\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{8}.$$
3. Exactement sur le même principe, $\operatorname{Arcsin}\sin\dfrac{5\pi}{6} = \operatorname{Arcsin}\sin\left(\pi - \dfrac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{\pi}{6}$.
4. On $\cos\dfrac{22\pi}{7} = \cos\left(-\dfrac{6\pi}{7}\right) = \cos\dfrac{6\pi}{7}$.
   Et puisque $\dfrac{6\pi}{7} \in [0, \pi]$, on en déduit que $\operatorname{Arccos}\cos\dfrac{22\pi}{7} = \dfrac{6\pi}{7}$.
5. On a $\sin\dfrac{19\pi}{3} = \sin\dfrac{\pi}{3} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\dfrac{\pi}{6}$.
   Et donc $\operatorname{Arccos}\sin\dfrac{19\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6}$.
6. Par π-périodicité de la tangente, $\tan\dfrac{5\pi}{4} = \tan\dfrac{\pi}{4}$.
   Et donc $\operatorname{Arctan}\tan\dfrac{5\pi}{4} = \operatorname{Arctan}\tan\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$ car $\dfrac{\pi}{4} \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.18

Puisque $2 > 1$, $\operatorname{Arctan}(2) > \operatorname{Arctan}(1) = \dfrac{\pi}{4}$. Et de même pour $\operatorname{Arctan}(3)$.
Et donc[6], on a

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} < \operatorname{Arctan}(2) + \operatorname{Arctan}(3) < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

[6] Une arctangente est toujours strictement inférieure à $\dfrac{\pi}{2}$.

D'autre part, on a

$$\tan(\operatorname{Arctan}(2) + \operatorname{Arctan}(3)) = \frac{\tan(\operatorname{Arctan}(2)) + \tan(\operatorname{Arctan}(3))}{1 - \tan(\operatorname{Arctan}(2))\tan(\operatorname{Arctan}(3))} = \frac{5}{1-6} = -1.$$

Unicité L'unicité est garantie par le fait que tan réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbf{R}$.

Et donc, $\operatorname{Arctan}(2) + \operatorname{Arctan}(3) - \pi$ est l'unique nombre de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut -1 : c'est $-\dfrac{\pi}{4}$.
Et donc $\operatorname{Arctan}(2) + \operatorname{Arctan}(3) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Solution de l'exercice 5.19

1. On a, pour $x \in [-1, 1]$,

$$\sin(2\operatorname{Arcsin} x) = 2\sin(\operatorname{Arcsin} x)\cos(\operatorname{Arcsin} x) = 2x\sqrt{1-x^2}.$$

2. L'expression donnée à un sens pour tout $x \in \mathbf{R}$.
Pour $x \in \mathbf{R}$, puisque $\operatorname{Arctan}(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(\operatorname{Arctan}(x)) > 0$, et en particulier est non nul.
Et donc $\dfrac{1}{\cos^2(\operatorname{Arctan}(x))} = 1 + \tan^2(\operatorname{Arctan}(x)) = 1 + x^2$, si bien que $\cos^2(\operatorname{Arctan}(x)) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
On a alors $\sin^2(\operatorname{Arctan}(x)) = 1 - \cos^2(\operatorname{Arctan}(x)) = 1 - \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{x^2}{1+x^2}$.
Et donc $|\sin(\operatorname{Arctan}(x))| = \sqrt{\dfrac{x^2}{1+x^2}} = \dfrac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$.
Reste à remarquer que si $x \geqslant 0$, alors $\operatorname{Arctan}(x) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc $\sin(\operatorname{Arctan}(x)) \geqslant 0$, si bien que $\sin(\operatorname{Arctan}(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
Et si $x \leqslant 0$, alors $\operatorname{Arctan}(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, et donc $\sin(\operatorname{Arctan}(x)) \leqslant 0$, si bien que $\sin(\operatorname{Arctan}(x)) = \dfrac{-|x|}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

3. Utilisons une formule de linéarisation : pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$\cos^2\left(\frac{1}{2}\operatorname{Arccos} x\right) = \frac{\cos(\operatorname{Arccos} x) + 1}{2} = \frac{x+1}{2}.$$

4. Pour $x \in [-1, 1]$, on a $\sin(\operatorname{Arccos} x) = \sqrt{1-x^2}$ et $\cos(\operatorname{Arccos} x) = x$.
Et donc $\tan(\operatorname{Arccos} x) = \dfrac{\sin(\operatorname{Arccos} x)}{\cos(\operatorname{Arccos} x)} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

5. On a, pour $u \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}\cos(3u) = \cos(u+2u) &= \cos(u)\cos(2u) - \sin(u)\sin(2u) = \cos(u)\left(2\cos^2(u) - 1\right) - 2\sin^2(u)\cos(u)\\ &= 2\cos^3(u) - \cos(u) - 2\left(1 - \cos^2(u)\right)\cos(u) = 4\cos^3(u) - 3\cos(u).\end{aligned}$$

Et donc pour $x \in [-1, 1]$,

$$\cos(3\operatorname{Arccos} x) = 4\cos^3(\operatorname{Arccos} x) - 3\cos(\operatorname{Arccos} x) = 4x^3 - 3x.$$

Plus généralement

On peut prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\cos(n\operatorname{Arccos}(x))$ est une fonction polynomiale de degré n.
Ces polynômes sont appelés polynômes de Tchebychev.

Solution de l'exercice 5.20

Il est clair que f est 2π-périodique, donc il suffit de tracer son graphe sur $[-\pi, \pi]$, puis d'effectuer des translations de vecteur $2k\pi\vec{\imath}$, $k \in \mathbf{Z}$.
De plus, f est paire, car la fonction cos l'est, et donc il suffit de tracer son graphe sur $[0, \pi]$, puis d'effectuer une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

Pour $x \in [0, \pi]$, on a $\operatorname{Arccos}(\cos(x)) = x$.
Si $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, alors $2x \in [0, \pi]$, et donc $\operatorname{Arccos}(\cos(2x)) = 2x$, et donc $f(x) = x - \dfrac{1}{2}2x = 0$.
En revanche, si $x \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$, alors $\pi \leqslant 2x \leqslant 2\pi$, et donc $\cos(2x) = \cos(-2x) = \cos(2\pi - 2x)$ avec $2\pi - 2x \in [0, \pi]$.
Et donc $\operatorname{Arccos}(\cos 2x) = \operatorname{Arccos}(\cos(2\pi - 2x)) = 2\pi - 2x$.
Et donc $f(x) = x - \dfrac{1}{2}(2\pi - 2x) = 2x - \pi$.

Remarque

Cette formule n'est rien d'autre que la définition de l'arc cosinus, qui est la bijection réciproque de $\cos_{|[0,\pi]}$.

Solution de l'exercice 5.21

1. Notons $\theta = \operatorname{Arccos}\dfrac{5}{13}$ et $\varphi = \operatorname{Arctan}\dfrac{2}{3}$.
On a alors $\cos\theta = \dfrac{5}{13}$ et $\tan\varphi = \dfrac{2}{3}$.
Nous savons de plus que $\sin\theta = \sqrt{1 - \left(\dfrac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{144}{169}} = \dfrac{12}{13}$.

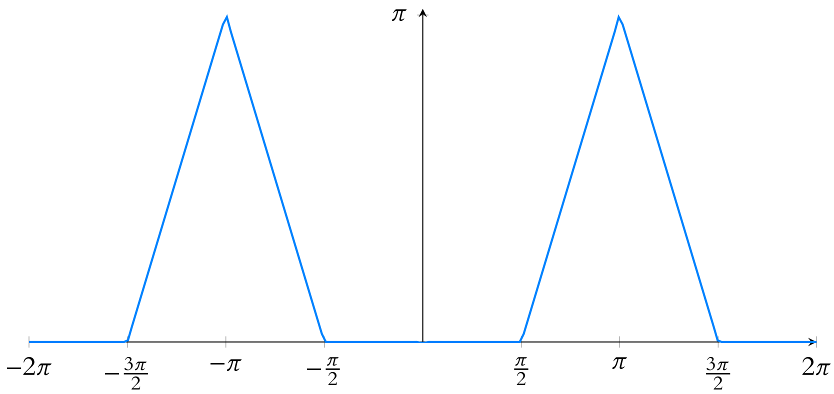


FIGURE 5.2 – $f : x \mapsto \operatorname{Arccos}(\cos(x)) - \frac{1}{2}\operatorname{Arccos}(\cos(2x))$

Et donc $\tan\theta = \dfrac{12}{5}$.
D'autre part, on a

$$\tan(2\varphi) = \frac{2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi} = \frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{12}{5}.$$

D'autre part, puisque $\dfrac{5}{13} \geqslant 0$, on a $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.
De même, puisque $0 < \dfrac{2}{3} < 1$, alors $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{4}$ et donc $0 < 2\varphi < \dfrac{\pi}{2}$.
Et donc $\begin{cases} \tan(\theta) = \tan(2\varphi) \\ \theta, 2\varphi \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Rightarrow \theta = 2\varphi.$

Danger !
Il est indispensable de s'assurer que θ et 2π sont dans le même intervalle de longueur π, faute de quoi ils pourraient avoir la même tangente sans être égaux.

Alternative : notons $\theta = 2\operatorname{Arctan}\frac{2}{3}$.
Puisque $\frac{2}{3} \geqslant 0$, $0 \leqslant \operatorname{Arctan}\frac{2}{3} < \frac{\pi}{2}$ et donc $0 \leqslant \theta < \pi$.

Alors $\cos(\theta) = 2\cos^2\left(\operatorname{Arctan}\frac{2}{3}\right) - 1 = \dfrac{2}{1+\tan^2(\operatorname{Arctan}\frac{2}{3})} - 1 = \dfrac{2}{1+\frac{4}{9}} - 1 = \dfrac{18}{13} - 1 = \dfrac{5}{13}$.

Et donc on a à la fois $\begin{cases} \theta \in [0, \pi] \\ \cos(\theta) = \frac{5}{13} \end{cases}$ donc $\theta = \operatorname{Arccos}\frac{5}{13}$.

2. Commençons par noter que $\operatorname{Arccos}\dfrac{3}{4} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et donc $2\operatorname{Arccos}\dfrac{3}{4} \in [0, \pi]$.
Mais $\cos\left(2\operatorname{Arccos}\dfrac{3}{4}\right) = 2\cos^2\left(\operatorname{Arccos}\dfrac{3}{4}\right) - 1 = 2\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 - 1 = \dfrac{9}{8} - 1 = \dfrac{1}{8}$.
Et donc on a bien $2\operatorname{Arccos}\dfrac{3}{4} = \operatorname{Arccos}\dfrac{1}{8}$.

Méthode
Un réel θ n'est égal à $\operatorname{Arccos} x$ que s'il vérifie les deux conditions
$$\begin{cases} \theta \in [0, \pi] \\ \cos\theta = x \end{cases}$$

3. On a $\cos\left(2\operatorname{Arcsin}\dfrac{3}{5}\right) = 2\cos^2\left(\operatorname{Arcsin}\dfrac{3}{5}\right) - 1 = 2\left(1 - \sin^2\left(\operatorname{Arcsin}\dfrac{3}{5}\right)\right) - 1 = \dfrac{7}{25}$.
Et puisque $\operatorname{Arcsin}\dfrac{3}{5} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, alors $2\operatorname{Arcsin}\dfrac{3}{5} \in [0, \pi]$, de sorte que

$$\cos\left(2\operatorname{Arcsin}\frac{3}{5}\right) = \frac{7}{25} \Leftrightarrow 2\operatorname{Arcsin}\frac{3}{5} = \operatorname{Arccos}\frac{7}{25}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.22

1. On a

$$\begin{aligned}\tan\left(\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan}(k)\right) &= \frac{\tan(\operatorname{Arctan}(k+1)) - \tan(\operatorname{Arctan}(k))}{1 + \tan(\operatorname{Arctan}(k+1))\tan(\operatorname{Arctan}(k))} \\ &= \frac{k+1-k}{1+k(k+1)} = \frac{1}{k^2+k+1}.\end{aligned}$$

Mais par croissance de la fonction arctangente, on a $\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan}(k) \geqslant 0$, et $\operatorname{Arctan}(k+1) - \underbrace{\operatorname{Arctan}(k)}_{\geqslant 0} \leqslant \operatorname{Arctan}(k+1) < \dfrac{\pi}{2}$.

Et donc $\mathrm{Arctan}(k+1)-\mathrm{Arctan}(k)$ est un réel de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut $\frac{1}{k^2+k+1}$: il est égal à $\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{k^2+k+1}$.

2. D'après la question précédente, on a, pour $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{k^2+k+1} &= \sum_{k=0}^{n} (\mathrm{Arctan}(k+1) - \mathrm{Arctan}(k)) \\ &= \mathrm{Arctan}(n+1) - \mathrm{Arctan}(0) = \mathrm{Arctan}(n+1).\end{aligned}$$

Et donc en passant à la limite, il vient

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{k^2+k+1} = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{Arctan}(n+1) = \frac{\pi}{2}.$$

Détails
On aura reconnu une somme télescopique.

Solution de l'exercice 5.23

1. Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = \mathrm{Arcsin}(x) - \mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$. Alors f est dérivable car somme de composées de fonctions dérivables, et

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1,1[,\ f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}\,\frac{1}{1+\frac{x^2}{1-x^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\left(1-x^2\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc f est constante.
Or on a $f(0) = \mathrm{Arcsin}(0) - \mathrm{Arctan}(0) = 0 - 0 = 0$.
Et donc pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Arcsin}(x) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

Méthode
Puisque f est constante, il suffit de trouver sa valeur en un point pour connaître sa valeur sur $\mathbf{R}$ tout entier.

2. Considérons la fonction g définie sur $[0,1]$ par $g(x) = \mathrm{Arcsin}\left(\sqrt{x}\right) - \frac{1}{2}\mathrm{Arcsin}(2x-1)$.
Alors g est dérivable sur $]0,1[$ et

$$\begin{aligned}\forall x \in]0,1[,\ g'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}} - \frac{1}{\sqrt{4x-4x^2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}} - \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}} = 0.\end{aligned}$$

⚠ Attention !
La fonction racine n'est pas dérivable en 0 et la fonction Arcsin n'est pas dérivable en 1, donc on prendra bien soin d'exclure ces deux nombres du domaine de dérivabilité de g.

Et donc la fonction g est constante sur $]0,1[$. De plus, pour $x = \frac{1}{2}$, on obtient

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \mathrm{Arcsin}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{2}\mathrm{Arcsin}(0) = \mathrm{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Et donc pour tout $x \in]0,1[$, $g(x) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \mathrm{Arcsin}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\mathrm{Arcsin}\left(2x-1\right)$.
Notons que pour $x = 0$, ce résultat est encore valable car $\mathrm{Arcsin}(0) = 0$ et $\mathrm{Arcsin}(-1) = -\frac{\pi}{2}$.
Et de même pour $x = 1$, car $\mathrm{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\mathrm{Arcsin}(2-1)$.

Solution de l'exercice 5.24

1. La fonction Arccos n'étant définie que sur $[-1,1]$, il s'agit de s'assurer que pour tout $x \geqslant 0$, $\frac{1-x}{x+1} \in [-1,1]$.
Mais une rapide étude des variations de $x \mapsto \frac{1-x}{x+1}$ prouve que cette fonction est croissante sur $\mathbf{R}$, vaut 1 en 0 et tend vers -1 en $+\infty$.
Donc pour tout $x \geqslant 0$, $-1 \leqslant \frac{1-x}{x+1} \leqslant 1$, et donc $f(x)$ est bien défini.

2. La fonction $g : \theta \mapsto \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est continue sur $[0,\pi[$, strictement croissante[7], et on a $g(0) = 0$ et $\lim\limits_{\theta\to\pi} g(\theta) = +\infty$.
Par le théorème de la bijection g réalise une bijection de $[0,\pi[$ sur $\mathbf{R}_+$ et donc tout réel positif possède un unique antécédent par g.

[7] Car composée de deux fonctions qui le sont.

3. Soit $x \in \mathbf{R}_+$ et soit θ comme dans la question précédente.
Alors

$$\frac{1-x}{x+1} = \frac{1-\tan^2(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)} = \cos^2(\theta/2)\left(1-\tan^2(\theta/2)\right) = \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) = \cos(2\theta/2) = \cos(\theta).$$

Et par conséquent,

$$f(x) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1-x}{x+1}\right) = \operatorname{Arccos}(\cos(\theta)).$$

Puisque $\theta \in [0,\pi]$, $f(x) = \theta$.
Reste à donner l'expression de θ en fonction de x : pour $x \geqslant 0$ et $\theta \in [0,\pi]$, on a

$$x = \tan^2(\theta/2) \Leftrightarrow \sqrt{x} = \tan(\theta/2) \Leftrightarrow \operatorname{Arctan}(\sqrt{x}) = \frac{\theta}{2} \Leftrightarrow \theta = 2\operatorname{Arctan}(\sqrt{x}).$$

Et donc on a bien $f(x) = 2\operatorname{Arctan}(\sqrt{x})$.

Remarque
Il aurait aussi été possible de constater que f et $x \mapsto 2\operatorname{Arctan}(\sqrt{x})$ ont même dérivée, et coïncident en un point (par exemples en 1), et donc sont égales.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.25

1. Puisque Arcsin n'est définie que sur $[-1,1]$, pour que $f(x)$ soit défini, il faut que x et $2x$ soient dans $[-1,1]$, ce qui est le cas si et seulement si $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$.
Donc $\mathscr{D} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

2. On a $f\left(\frac{1}{2}\right) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}$.

3. La fonction f est strictement croissante sur $\mathscr{D}$ car somme de deux fonctions strictement croissantes.
On a $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2\pi}{3}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$.
Puisque f est continue, par le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathscr{D}$ sur $\left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$.
Et donc $f(x) = \frac{\pi}{2}$ possède une unique solution puisque $\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

4. Soit α l'unique solution de l'équation.
Alors $\operatorname{Arcsin}(2\alpha) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(\alpha)$.
Et donc $\sin(\operatorname{Arcsin}(2\alpha)) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(\alpha)\right) = \cos(\operatorname{Arcsin}(\alpha)) = \sqrt{1-\alpha^2}$.
Soit encore $2\alpha = \sqrt{1-\alpha^2} \Leftrightarrow 4\alpha^2 = 1-\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$.
Mais $\alpha \geqslant 0$, et donc $\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.26

Notons que la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(x+1)$ est strictement croissante sur $\mathbf{R}$ car somme de fonctions strictement croissantes.
Puisqu'elle est continue (car dérivable), et que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{3\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{3\pi}{2}$, elle réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\left]-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.
Et donc il existe une et une seule solution α à l'équation de l'énoncé.
Puisque de plus $f(0) = 0$, nous pouvons d'ores et déjà affirmer que cette solution est positive strictement.
De même, puisque $g(1) = \operatorname{Arctan}(1) + \operatorname{Arctan}(2) > 2\operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{2}$, alors $\alpha < 1$.

Ensuite, pour $x > 0$, $\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$.

D'autre part, pour $x \in]0, \alpha]$, on a $0 < \text{Arctan}(x-1) + \text{Arctan}(x+1) < \frac{\pi}{2}$ et

$$\begin{aligned}\tan\left(\text{Arctan}(x-1)+\text{Arctan}(x+1)\right) &= \frac{\tan \text{Arctan}(x-1) + \tan \text{Arctan}(x+1)}{1 - \tan\left(\text{Arctan}(x-1)\right)\tan\left(\text{Arctan}(x+1)\right)}\\ &= \frac{x-1+x+1}{1-(x-1)(x+1)} = \frac{2x}{2-x^2}.\end{aligned}$$

Par conséquent[8], $\text{Arctan}(x-1) + \text{Arctan}(x+1) = \text{Arctan}\left(\frac{2x}{2-x^2}\right)$.

Et donc pour $x \in]0, \alpha]$ on a

$$\begin{aligned}\text{Arctan}\,(x-1) + \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x+1) = \frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow \text{Arctan}\,(x-1) + \text{Arctan}(x+1) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\\ &\Leftrightarrow \text{Arctan}\left(\frac{2x}{2-x^2}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\\ &\Leftrightarrow \frac{2x}{2-x^2} = \frac{1}{x}\\ &\Leftrightarrow 2x^2 = 2 - x^2 \Leftrightarrow 3x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{2}{3}}.\end{aligned}$$

[8] Il s'agit de deux nombres de $[0, \frac{\pi}{2}[$ de même tangente.

Détails
La fonction arctangente est bijective, et donc si deux réels ont la même image, ils sont égaux.

Solution de l'exercice 5.27

1. Posons $f : x \mapsto \text{Arctan}(\text{sh}(x)) + \text{Arccos}(\text{th}(x))$.
Puisque th est à valeurs dans $]-1, 1[$, et que Arccos est dérivable sur $]-1, 1[$, par somme et composition de fonctions dérivables, f est dérivable sur $\mathbf{R}$.
Sa dérivée est alors donnée par

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = \frac{\text{ch}(x)}{1+\text{sh}^2(x)} - \frac{1-\text{th}^2(x)}{\sqrt{1-\text{th}^2(x)}} = \frac{\text{ch}(x)}{\text{ch}^2(x)} - \sqrt{1-\text{th}^2(x)} = \frac{1}{\text{ch}(x)} - \sqrt{\frac{1}{\text{ch}^2(x)}} = 0.$$

Rappel
Pour tout x réel,
$$\frac{1}{\text{ch}^2(x)} = 1 - \text{th}^2(x).$$

Et par conséquent, f est constante sur $\mathbf{R}$. Mais $f(0) = \text{Arctan}(0) + \text{Arccos}(0) = \frac{\pi}{2}$.

Et donc $\forall x \in \mathbf{R}$, $\text{Arctan}(\text{sh}(x)) = \frac{\pi}{2} - \text{Arccos}(\text{th}(x))$.

Remarque : sans passer par les dérivées, une option était de calculer directement $\cos\left(\text{Arctan}(\text{sh}(x)) + \text{Arccos}(\text{th}(x))\right)$ à l'aide des formules d'addition.
En effet, on sait calculer $\cos^2(\text{Arctan}(u)) = \frac{1}{1+\tan^2(\text{Arctan}(u))}$ et s'en servir pour déterminer les valeurs de $\cos(\text{Arctan}(u))$ et $\sin(\text{Arctan}(u))$.
Et de même, on sait calculer $\cos(\text{Arccos}\, u) = u$ et $\sin(\text{Arccos}(u)) = \sqrt{1-u^2}$.
Ici, on trouve que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\cos\left(\text{Arctan}(\text{sh}(x)) + \text{Arccos}(\text{th}(x))\right) = 0$.
Puisque par ailleurs, $\text{Arctan}(\text{sh}(x)) + \text{Arccos}(\text{th}(x)) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, et que sur cet intervalle, cos ne s'annule qu'en $\frac{\pi}{2}$ on en déduit que $\text{Arctan}(\text{sh}(x)) + \text{Arccos}(\text{th}(x)) = \frac{\pi}{2}$.

2. On a

$$\begin{aligned}\text{th}(x) = \frac{5}{13} &\Leftrightarrow \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{5}{13}\\ &\Leftrightarrow 13e^{2x} - 13 = 5e^{2x} + 5\\ &\Leftrightarrow 8e^{2x} = 18 \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{3}{2}\right).\end{aligned}$$

3. On a $\text{sh}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{12}$.

Et donc on en déduit, en appliquant la question 1 à $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ que

$$\text{Arctan}\,\frac{5}{12} + \text{Arccos}\,\frac{5}{13} = \frac{\pi}{2}.$$

Solution de l'exercice 5.28

Il est aisé de constater que (u_n) est strictement croissante, et donc en particulier à valeurs positives.

Comme indiqué, soit $\theta_n = \operatorname{Arcsin} \dfrac{1}{u_n} \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Alors

$$(u_0 + u_1 + \cdots + u_n)^2 = u_{n+1}^2 - 1 = \frac{1}{\sin^2\theta_{n+1}} - 1 = \frac{1-\sin^2\theta_{n+1}}{\sin^2\theta_{n+1}} = \frac{\cos^2\theta_{n+1}}{\sin^2\theta_{n+1}} = \frac{1}{\tan^2\theta_{n+1}}.$$

Soit encore[9] $\tan\theta_{n+1} = \dfrac{1}{u_0 + \cdots + u_n}$. Alors

$$\tan\theta_{n+1} = \frac{1}{u_0 + \cdots + u_n} = \frac{1}{\frac{1}{\tan\theta_n} + u_n} = \frac{1}{\frac{1}{\tan\theta_n} + \frac{1}{\sin\theta_n}} = \frac{\sin\theta_n}{\cos\theta_n + 1}.$$

[9] Ces deux quantités sont positives, donc on peut enlever les carrés.

Mais, pour $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\frac{\sin(2t)}{\cos(2t)+1} = \frac{2\sin t\cos t}{2\cos^2 t - 1 + 1} = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t.$$

Et en particulier, $\dfrac{\sin\theta_n}{\cos\theta_n + 1} = \tan\dfrac{\theta_n}{2}$.

Et alors, en passant à l'arctangente, $\theta_{n+1} = \dfrac{\theta_n}{2}$ et donc $\theta_n = \dfrac{\theta_1}{2^{n-1}}$.

On en déduit que $\dfrac{2^n}{u_n} = 2^n \sin\dfrac{\theta_1}{2^{n-1}}$.

Mais la fonction sin étant dérivable en 0, avec $\sin'(0) = \cos(0) = 1$, on a $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$.

Et par conséquent,

$$\frac{2^n}{u_n} = 2^n \frac{\sin\frac{\theta_1}{2^{n-1}}}{\frac{\theta_1}{2^{n-1}}} \frac{\theta_1}{2^{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\theta_1.$$

Mais $\theta_1 = \operatorname{Arcsin}\dfrac{1}{u_1} = \operatorname{Arcsin}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

On en déduit que $\dfrac{2^n}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\operatorname{Arcsin}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Remarque

On peut même aller un peu plus loin, et prouver que ceci est égal à $\pi - 2\operatorname{Arctan}(x)$ (je vous laisse vous inspirer par exemple des exercices précédents si vous souhaitez prouver cette formule).