TD 5 : Fonctions usuelles

► Logarithme, exponentielle, fonction circulaires hyperboliques

Exercice 5.1 PD

1. Soit $a \in \mathbf{R}_+^*$. Étudier les variations de $x \mapsto a^x$.
2. Résoudre l'équation $2^x + 3^x = 5$, d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

Exercice 5.2 Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbf{R}$: PD

1. $x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x$
2. $3^{x^2} = 11^{x^5}$
3. ($\star$) $\pi^{\sin^2(x)} = \cos(\pi x)$

Exercice 5.3 Soient $x, y \in \mathbf{R}$. Montrer que F

1. $\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(y)$
2. $\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(y)$
3. $\mathrm{ch}\,(x) = \sqrt{\dfrac{\mathrm{ch}(2x)+1}{2}}$
4. ($\star$) $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{2\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\mathrm{th}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$.

Exercice 5.4 Soit $x, y \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$. Simplifier les sommes $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(x+ky)$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{sh}(x+ky)$. AD

Exercice 5.5 Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, $x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \dfrac{1}{2}$. PD

Exercice 5.6 Nombre de chiffres de l'écriture décimale d'un entier PD
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que le nombre de chiffres nécessaires pour écrire n en base 10 est égal à $\lfloor \log_{10}(n) \rfloor + 1$.

Exercice 5.7 Soient a, b, c trois réels strictement positifs. D
Discuter, suivant les valeurs de a et b, le nombre de solutions de l'équation $a\,\mathrm{ch}(x) + b\,\mathrm{sh}(x) = c$, et déterminer ces solutions.

► Fonctions circulaires

Exercice 5.8 F

1. En notant que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$, calculer $\cos\dfrac{\pi}{12}$, $\sin\dfrac{\pi}{12}$ et $\tan\dfrac{\pi}{12}$.
2. Calculer $\cos\dfrac{\pi}{8}$, $\sin\dfrac{\pi}{8}$ et $\tan\dfrac{\pi}{8}$.

Exercice 5.9 PD

1. Écrire $\sin(5x)$ sous forme d'un polynôme en $\sin(x)$.
2. En déduire que $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

Exercice 5.10 Étudier le signe sur $[0, 2\pi]$ de la fonction $x \mapsto \cos(2x) - \cos(3x)$. PD

Exercice 5.11 Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, $x^3 \leqslant x^2$, et déterminer les valeurs de x pour lesquelles cette inégalité est une égalité. En déduire l'ensemble des solutions de $\cos^3 x + \sin^3 x = 1$. PD

Exercice 5.12 Équations et inéquations F
Résoudre les équations et inéquations suivantes. *Autant que possible, on s'aidera d'un cercle trigonométrique.*

1. $\cos x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
2. $|\tan(x)| \leqslant 1$
3. $\cos^2(x) \geqslant \dfrac{1}{4}$
4. $2\sin^2(x) + \sin^2(2x) = 2$
5. $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) > 1$.

Exercice 5.13 Soit $x \in \mathbf{R}$. Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$, puis $\sin(4x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$. F
Retrouver alors les valeurs de $\cos\frac{\pi}{6}$ et $\cos\frac{\pi}{3}$.

Exercice 5.14 Résoudre les équations suivantes : AD

1. $\tan(2x) = 3\tan(x)$
2. $\cos(2x) - \cos(3x) = 0$
3. $1+\cos(x)+\cos(2x)+\cos(3x) = 0$

Exercice 5.15 Résoudre l'inéquation $\sqrt{1+2\cos(x)} \leqslant \sin x$.

Exercice 5.16 Résoudre l'inéquation $\cos^2(x) - \cos(x)\sin(x) \geqslant 1$. *On pourra commencer, lorsque c'est possible, par se ramener à une inéquation en* $\tan x$. PD

Exercice 5.17 Montrer que pour $n \geqslant 2$, on a $2\cos\frac{\pi}{2^n} = \sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$ (où il y a $n-1$ racines carrées). PD

Exercice 5.18 AD

1. Démontrer que pour tout α dans un ensemble à préciser, on a $\tan^2\alpha\tan(2\alpha) = \tan(2\alpha) - 2\tan\alpha$.
2. En déduire la valeur de $S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\tan^2\frac{x}{2^k}\tan\frac{x}{2^{k-1}}$ où $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $n \in \mathbf{N}^*$.
3. Donner la limite de S_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 5.19 Un produit infini AD

1. Montrer que pour $x \in \mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}^*$, $\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}}$.
2. Déterminer $\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t}$.
3. En déduire que $\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{x}$.

Exercice 5.20 Pour $x \in \mathbf{R}$, comparer $\cos(\sin(x))$ et $\sin(\cos(x))$. TD

▶ Fonctions circulaires réciproques

Exercice 5.21 Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $\frac{x}{x^2+1} \leqslant \operatorname{Arctan}(x) \leqslant x$. F

Exercice 5.22 Calculer les nombres suivants : F

1. $\operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{13}\right)\right)$
2. $\operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right)$
3. $\operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$
4. $\operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\frac{22\pi}{7}\right)\right)$
5. $\operatorname{Arccos}\left(\sin\left(\frac{19\pi}{3}\right)\right)$
6. $\operatorname{Arctan}\left(\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$

Exercice 5.23 Calculer $\operatorname{Arctan}(2) + \operatorname{Arctan}(3)$. PD

Exercice 5.24 Simplifier les expressions suivantes, en précisant les valeurs de x pour lesquelles elles ont un sens : AD

1. $\sin(2\operatorname{Arcsin} x)$
2. (★) $\sin(\operatorname{Arctan} x)$
3. $\cos^2\left(\frac{1}{2}\operatorname{Arccos} x\right)$
4. $\tan(\operatorname{Arccos} x)$
5. $\cos(3\operatorname{Arccos} x)$

Exercice 5.25 Tracer le graphe de la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arccos}(\cos(x)) - \frac{1}{2}\operatorname{Arccos}(\cos(2x))$. PD

Exercice 5.26 Montrer les identités suivantes : PD

1. $\operatorname{Arccos}\frac{5}{13} = 2\operatorname{Arctan}\frac{2}{3}$
2. $2\operatorname{Arccos}\frac{3}{4} = \operatorname{Arccos}\frac{1}{8}$
3. $2\operatorname{Arcsin}\frac{3}{5} = \operatorname{Arccos}\frac{7}{25}$

Exercice 5.27 AD

1. Pour $k \in \mathbf{N}$, simplifier $\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan}(k)$.
2. En déduire l'existence et la valeur de $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\operatorname{Arctan}\frac{1}{k^2+k+1}$.

Exercice 5.28 À l'aide de calculs de dérivées, prouver les formules suivantes : AD

1. $\forall x \in]-1,1[$, $\operatorname{Arcsin}(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

2. $\forall x \in [0,1]$, $\operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\operatorname{Arcsin}(2x-1)$

Exercice 5.29 Pour $x \geqslant 0$, on pose $f(x) = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1-x}{x+1}\right)$. PD

1. Vérifier que f est bien définie.
2. Justifier que tout réel positif x peut s'écrire de manière unique sous la forme $x = \tan^2(\theta/2)$, avec $0 \leqslant \theta < \pi$.
3. Montrer alors que pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = 2\operatorname{Arctan}(\sqrt{x})$.

Exercice 5.30 Soit $f : x \mapsto \operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arcsin}(2x)$. AD

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.
2. Calculer la valeur de $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{\pi}{2}$ possède une unique solution.
4. Déterminer cette solution.

Exercice 5.31 Résoudre l'équation $\operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(x+1) = \dfrac{\pi}{2}$. D

Exercice 5.32 AD

1. Simplifier $\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x)) + \operatorname{Arccos}(\operatorname{th}(x))$ pour $x \in \mathbf{R}$.
2. Résoudre l'équation $\operatorname{th}(x) = \dfrac{5}{13}$
3. En déduire que $\operatorname{Arctan}\dfrac{5}{12} + \operatorname{Arccos}\dfrac{5}{13} = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 5.33 (Oral Polytechnique) TD

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = x \geqslant 0$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + (u_0 + \cdots + u_n)^2}$.
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n}{u_n}$. *On pourra noter* $\theta_n = \operatorname{Arcsin}\dfrac{1}{u_n}$.

CORRECTION DES EXERCICES DU TD 5

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.1

1. Notons $f_a : x \mapsto a^x$. Alors f_a est dérivable sur $\mathbf{R}$ et
$$f_a'(x) = \ln(a)e^{x\ln a} = \ln(a)a^x.$$
En particulier, f_a' est du signe de $\ln(a)$.
Donc si $a = 1$, f_a est constante, si $a > 1$, f_a est strictement croissante et si $a < 1$, alors f_a est strictement décroissante.

2. Il est évident que $x = 1$ est une solution de l'équation.
La fonction $f : x \mapsto 2^x + 3^x$ est strictement croissante car somme de deux fonctions strictement croissantes.
Et donc si $x > 1$, $f(x) > f(1) = 5$, et donc x n'est pas solution de l'équation de départ.
De même, si $x < 1$, alors $f(x) < 5$, et donc x n'est pas solution.
On en déduit que l'équation $2^x + 3^x = 5$ possède une unique solution, qui vaut 1.

Alternative
Une fonction strictement monotone ne peut prendre deux fois la même valeur. Or f prend la valeur 5 en 1, elle ne peut donc la prendre nulle part ailleurs.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.2

1. Notons que l'équation n'a de sens que pour $x \geqslant 0$, et que 0 et 1 sont clairement solutions.
Pour $x \neq 0$, et $x \neq 1$, on a
$$\begin{aligned} x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x &\Leftrightarrow e^{\sqrt{x}\ln(x)} = e^{x\ln(\sqrt{x})} \Leftrightarrow \sqrt{x}\ln(x) = x\ln\left(x^{1/2}\right) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x}\ln(x) = \frac{x}{2}\ln(x) \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{x}{2} \\ &\Leftrightarrow 4x = x^2 \Leftrightarrow x = 4. \end{aligned}$$
Donc 0, 1 et 4 sont les seules solutions de l'équation.

Rappel
$0^0 = 1$.

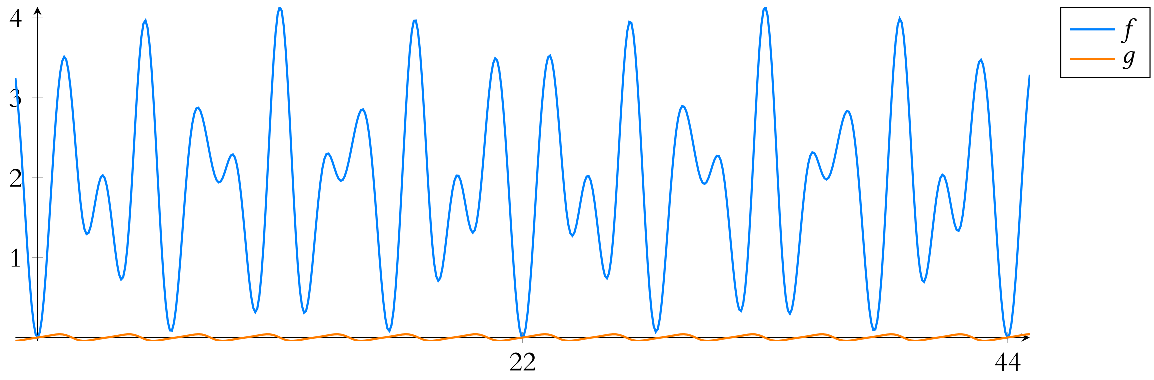
⚠ Attention !
Bien que l'équation ait un sens pour $x = 0$, l'expression avec des ln n'est valable que pour $x > 0$.

2. L'équation s'écrit encore $e^{x^2\ln(3)} = e^{x^5\ln(11)} \Leftrightarrow x^2\ln(3) = x^5\,\ln(11)$.
Il est clair que 0 est solution, et pour $x \neq 0$, cette équation équivaut à
$$x^3 = \frac{\ln(3)}{\ln(11)} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{\ln(3)}{\ln(11)}}.$$
Donc l'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{0, \sqrt[3]{\dfrac{\ln(3)}{\ln(11)}}\right\}$.

3. On a $\pi^{\sin^2(x)} = e^{\sin^2(x)\ln(\pi)} \geqslant e^0 = 1$.
D'autre part, $\cos(\pi x) \leqslant 1$.
Donc l'équation est satisfaite si et seulement si $\begin{cases} \cos(\pi x) = 1 \\ \pi^{\sin^2(x)} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\pi x) = 1 \\ \sin^2(x) = 0 \end{cases}$
Or $\cos(\pi x) = 1$ si et seulement si il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $\pi x = 2k\pi \Leftrightarrow x = 2k$.
Mais d'autre part, $\sin(x) = 0$ si et seulement si il existe $\ell \in \mathbf{Z}$ tel que $x = \ell\pi$.
Il est clair que 0 est solution, et si $x \neq 0$ est une solution, avec $x = 2k = \ell\pi$, alors $\pi = \dfrac{2k}{\ell} \in \mathbf{Q}$.
Puisque π est irrationnel , ceci est impossible, et donc 0 est l'unique solution de l'équation.
J'en profite pour signaler un fait amusant, pour lequel je n'ai pas d'explication : en observant le graphique de $f : x \mapsto \pi^{\sin^2(x)} - \cos(\pi x)$, on a de prime abord l'impression qu'il s'agit d'une fonction 22-périodique.
Et de fait, si l'on essaie de superposer le graphique de f à celui de $x \mapsto f(x + 22)$, ils ont l'air de se superposer... jusqu'à ce qu'on zoome un peu.
Nous avons tracé ci-dessous le graphique de la fonction[1] $g : x \mapsto f(x+22) - f(x)$, et s'il est clair que celle-ci n'est pas nulle (et donc que f n'est pas 22-périodique), il est quand même troublant de constater que son amplitude ne dépasse pas le centième de celle de f.

Irrationnel
L'irrationalité de π a été mentionnée pour l'instant, mais n'a pas été prouvée (ce qui sera peut-être fait en devoir en cours d'année).
Une «bonne» raison pour que π soit irrationnel est tout simplement que si π était égal à une fraction, on vous aurait déjà fait apprendre cette fraction !

[1] Qui elle-même a presque l'air d'être 3-périodique...



Solution de l'exercice 5.3

1. Partons plutôt du membre de droite :

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y)+\operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y) &\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right)+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right)\\ &=\frac{1}{4}\left(e^{x+y}+e^{x-y}+e^{-x+y}+e^{-x-y}+e^{x+y}-e^{x-y}-e^{-x+y}+e^{-x-y}\right)\\ &=\frac{1}{4}\left(2e^{x+y}+2e^{-(x+y)}\right)\\ &=\operatorname{ch}(x+y).\end{aligned}$$

2. De même, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y)+\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y) &\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right)+\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right)\\ &=\frac{1}{4}\left(e^{x+y}+e^{x-y}-e^{-x+y}-e^{-x-y}+e^{x+y}-e^{x-y}+e^{-x+y}-e^{-x-y}\right)\\ &=\frac{1}{4}\left(2e^{x+y}-2e^{-x-y}\right)\\ &=\operatorname{sh}(x+y).\end{aligned}$$

Alternative : soit $y \in \mathbf{R}$ fixé. Alors la dérivée de $x \mapsto \operatorname{ch}(x+y)$ est $x \mapsto \operatorname{sh}(x+y)$.
Mais par la question précédente, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y)+\operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$, et donc la dérivée de $x \mapsto \operatorname{ch}(x+y)$ est aussi $x \mapsto \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y)+\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y)$.
Et donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y)+\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y)$..

> ⚠ Attention !
> On dérive par rapport à x, et donc $\operatorname{ch}(y)$, $\operatorname{sh}(y)$ sont des constantes.

3. On a

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{ch}(2x)+1}{2} &= \frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{4}\\ &=\frac{1}{4}\left((e^x)^2+(e^{-x})^2+2e^xe^{-x}\right)\\ &=\frac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2=\operatorname{ch}^2(x).\end{aligned}$$

Et donc puisque $\operatorname{ch}(x)\geqslant 0$, il vient $\operatorname{ch}(x)=\sqrt{\operatorname{ch}^2(x)}=\sqrt{\frac{\operatorname{ch}(2x)+1}{2}}$.

> Signe !
> Il faut bien s'assurer de la positivité avant de passer à la racine carrée, sans cela nous pourrions juste affirmer que
> $$|\operatorname{ch}(x)|=\sqrt{\frac{\operatorname{ch}(2x)+1}{2}}.$$

4. On a, pour $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}\frac{2\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2}\right)} &= \frac{2\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\frac{\operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right)}}\\ &=\frac{2\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right)-\operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right)}}\\ &=\frac{2\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right)}}\end{aligned}$$

$$= 2\,\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$= \mathrm{sh}\left(2\frac{x}{2}\right) = \mathrm{sh}(x).$$

C'est la formule de la question 2, dans le cas particulier où $x = y$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.4

Il est clair que si $y = 0$, alors

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(x) = (n+1)\,\mathrm{ch}(x) \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{sh}(x) = (n+1)\,\mathrm{sh}(x).$$

En revanche, si $y \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}
C_n &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(x+ky) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{x+ky}+e^{-x-ky}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(e^{x+ky}+e^{-x-ky}\right) \\
&= \frac{e^x}{2}\sum_{k=0}^{n}(e^y)^k + \frac{e^{-x}}{2}\sum_{k=0}^{n}(e^{-y})^k \\
&= \frac{e^x}{2}\frac{1-(e^y)^{n+1}}{1-e^y} + \frac{e^{-x}}{2}\frac{1-(e^{-y})^{n+1}}{1-e^{-y}} \\
&= \frac{e^x}{2}\frac{1-e^{(n+1)y}}{1-e^y} + \frac{e^{-x}}{2}\frac{1-e^{-(n+1)y}}{1-e^{-y}} \\
&= \frac{e^x}{2}\frac{e^{\frac{n+1}{2}y}}{e^{y/2}}\frac{e^{-\frac{n+1}{2}y}-e^{\frac{n+1}{2}y}}{e^{-y/2}-e^{y/2}} + \frac{e^{-x}}{2}\frac{e^{-\frac{n+1}{2}y}}{e^{-y/2}}\frac{e^{\frac{n+1}{2}y}-e^{-\frac{n+1}{2}y}}{e^{y/2}-e^{-y/2}} \\
&= \frac{\exp\left(x+\frac{n}{2}y\right)}{2}\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{n+1}{2}y\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{y}{2}\right)} + \frac{\exp\left(-x-\frac{n}{2}y\right)}{2}\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{n+1}{2}y\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{y}{2}\right)} \\
&= \mathrm{ch}\left(x+\frac{n}{2}y\right)\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{n+1}{2}y\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{y}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Détails
Il était ici important d'avoir $e^y \neq 1$ et $e^{-y} \neq 1$ afin d'appliquer une formule bien connue sur la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

Astuce
On factorise $e^a - e^b$ par $e^{\frac{a+b}{2}}$. En particulier lorsque $a = 0$, $1 - e^b$ peut se factoriser par $e^{b/2}$.

De la même manière, il vient

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{sh}(x+ky) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{x+ky}-e^{-x-ky}}{2} \\
&= \frac{e^x}{2}\sum_{k=0}^{n}(e^y)^k - \frac{e^{-x}}{2}\sum_{k=0}^{n}(e^{-y})^k \\
&= \frac{\exp\left(x+\frac{n}{2}y\right)}{2}\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{n+1}{2}y\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{y}{2}\right)} - \frac{\exp\left(-x-\frac{n}{2}y\right)}{2}\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{n+1}{2}y\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{y}{2}\right)} \\
&= \mathrm{sh}\left(x+\frac{n}{2}y\right)\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{n+1}{2}y\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{y}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Les deux sommes ci-dessus ont déjà été calculées et simplifiées ci-dessus, aucun besoin de refaire le calcul !

Alternative : une méthode légèrement différente consiste à noter que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = e^x$ et $\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) = e^{-x}$.
On a donc

$$C_n + S_n = \sum_{k=0}^{n} e^{x+ky} = e^x \sum_{k=0}^{n}(e^y)^k = e^x\frac{1-e^{(n+1)y}}{1-e^y}.$$

Et de même,

$$C_n - S_n = \sum_{k=0}^{n} e^{-x-ky} = e^{-x}\sum_{k=0}^{n}(e^{-y})^k = e^{-x}\frac{1-e^{-(n+1)y}}{1-e^{-y}}.$$

Et donc en sommant ces deux relations,

$$C_n = \frac{1}{2}\left(\frac{e^x - e^{x+(n+1)y}}{1-e^x} + \frac{e^{-x}-e^{-x-(n+1)y}}{1-e^{-y}}\right).$$

Et de même, en soustrayant les deux égalités précédemment établies,

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{e^x - e^{x+(n+1)y}}{1-e^x} - \frac{e^{-x} - e^{-x-(n+1)y}}{1-e^{-y}}\right).$$

La suite du calcul est inchangée.

Alternative plus astucieuse : une fois la formule $C_n = \mathrm{ch}\left(x+\frac{n}{2}y\right)\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{n+1}{2}y\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{y}{2}\right)}$, on peut, comme dans l'exercice précédent, fixer y et dériver par rapport à x, ce qui nous donne immédiatement

$$\S_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{sh}(x+ky) = \mathrm{sh}\left(x+\frac{n}{2}y\right)\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{n+1}{2}y\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{y}{2}\right)}.$$

Solution de l'exercice 5.5

L'inégalité proposée est équivalente, en appliquant le logarithme des deux côtés, à

$$x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x) \geqslant -\ln(2).$$

Notons donc f la fonction définie sur $]0,1[$ par $f(x) = x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x)$. Alors f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ car somme de produit de fonctions dérivables, et

$$f'(x) = \ln(x) + x\frac{1}{x} - (1-x)\frac{1}{1-x} - \ln(1-x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

On a donc $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{1-x} \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 1-x \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Par conséquent, le tableau de variations de f est donné par :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
$f(x)$	‖ 0	$\searrow$	$-\ln(2)$	$\nearrow$	0 ‖

Signes
La seconde équivalence n'en est une que parce que $1-x>0$.

Donc la fonction f admet un minimum en $\frac{1}{2}$, et ce minimum vaut $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$.

Ainsi, pour tout $x \in]0,1[$, on a bien $x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x) \geqslant -\ln(2)$ et donc

$$x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \frac{1}{2}.$$

De plus, il y a égalité si et seulement si $x = \frac{1}{2}$, car le minimum de f n'est atteint qu'en $x = \frac{1}{2}$.

Solution de l'exercice 5.6

Notons k le nombre de chiffres nécessaires pour écrire n en base 10. Alors

$$10^{k-1} \leqslant n < 10^k.$$

Et donc en passant au logarithme[2],

$$(k-1)\ln(10) \leqslant \ln n < k\ln(10) \Leftrightarrow k-1 \leqslant \log_{10}(n) < k.$$

Et donc $\lfloor \log_{10}(n) \rfloor = k-1 \Leftrightarrow k = \lfloor \log_{10}(n) \rfloor + 1$.

[2] Ce qui préserve le sens des inégalités puisque le ln est strictement croissant.

Solution de l'exercice 5.7

On a

$$\begin{aligned} a\,\mathrm{ch}(x) + b\,\mathrm{sh}(x) = c &\Leftrightarrow a\left(e^x + e^{-x}\right) + b\left(e^x - e^{-x}\right) = 2c \\ &\Leftrightarrow (a+b)e^x + (a-b)e^{-x} = 2c \\ &\Leftrightarrow (a+b)e^{2x} - 2ce^x + (a-b) = 0. \end{aligned}$$

Détails
On a multiplié l'égalité par $e^x \neq 0$.

Posons donc $X = e^x$, de sorte que $(a+b)X^2 - 2cX + (a-b) = 0$.
Il s'agit d'un polynôme de degré 2 en X, dont le discriminant est $\Delta = 4c^2 - 4(a+b)(a-b) = 4\left(c^2 - (a^2 - b^2)\right)$.
▶ **Si** $\Delta < 0 \Leftrightarrow c^2 < a^2 - b^2$, alors l'équation ne possède pas de solution.
▶ **Si** $\Delta = 0 \Leftrightarrow c^2 = a^2 - b^2$, alors le polynôme possède une unique racine $X = \dfrac{c}{a+b}$.
Or, $X = \dfrac{c}{a+b} \Leftrightarrow e^x = \dfrac{c}{a+b} \Leftrightarrow x = \ln\left(\dfrac{c}{a+b}\right)$.
Donc l'équation de départ possède $\ln\left(\dfrac{c}{a+b}\right)$ comme unique solution.
▶ **Si** $\Delta > 0 \Leftrightarrow c^2 > a^2 - b^2$.
Alors le polynôme possède deux racines, qui sont

$$X_1 = \frac{2c + \sqrt{\Delta}}{2(a+b)} = \frac{c + \sqrt{c^2 - (a^2 - b^2)}}{a+b} \text{ et } X_2 = \frac{c - \sqrt{c^2 - (a^2 - b^2)}}{a+b}.$$

Il est évident que X_1 est strictement positif, et que $e^x = X_1 \Leftrightarrow x = \ln(X_1)$.
En revanche le signe de X_2 est moins évident.
Plus précisément, X_2 est du signe de $c - \sqrt{c^2 - (a^2 - b^2)}$. Mais

$$\begin{aligned} c - \sqrt{c^2 - (a^2 - b^2)} > 0 &\Leftrightarrow c > \sqrt{c^2 - (a^2 - b^2)} \\ &\Leftrightarrow c^2 > c^2 - (a^2 - b^2) \\ &\Leftrightarrow a^2 > a^2 \Leftrightarrow a > b. \end{aligned}$$

Le passage au carré est bien une équivalence puisque c est positif.

Donc si $a > b$, l'équation de départ possède deux solutions qui sont $\ln(X_1)$ et $\ln(X_2)$, et si $a \leqslant b$ (tout en gardant $\Delta > 0$), alors l'équation ne possède qu'une solution, qui est $\ln(X_1)$.

Solution de l'exercice 5.8

1. On a

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

Et de même,

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

2. On a

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2\frac{\pi}{8}\right) = 2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1.$$

Et donc $\cos^2\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$.
Puisque $0 \leqslant \dfrac{\pi}{8} \leqslant 1$, $\cos\dfrac{\pi}{8} \geqslant 0$ et donc on en déduit que

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\cos^2\frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Attention !
Si on ne prend pas garde de vérifier la positivité de $\cos\frac{\pi}{8}$, on peut seulement affirmer que

$$\left|\cos\frac{\pi}{8}\right| = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}.$$

On en déduit donc que $\sin^2\dfrac{\pi}{8} = 1 - \cos^2\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$.

Et de même, puisque $\sin\dfrac{\pi}{8} \geqslant 0$, il vient donc $\sin\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.
Enfin, on a

$$\tan\frac{\pi}{8} = \frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}} = \sqrt{3-2\sqrt{2}}.$$

Alternative
On aurait aussi pu utiliser la formule

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

et utiliser la valeur de $\cos^2\frac{\pi}{8}$ calculée plus tôt, en justifiant là encore que $\tan\frac{\pi}{8} \geqslant 0$.

Notons qu'on pourrait aussi utiliser

$$\tan^2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{8}} - 1 = \frac{4}{2+\sqrt{2}} - 1 = \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$$

ce qui, en notant que $\tan\frac{\pi}{8} \geqslant 0$ conduit au même résultat, à savoir $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$.
En effet, on a $\left(\sqrt{2}-1\right)^2 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 3 - 2\sqrt{2}$, si bien que $\sqrt{2} - 1 = \sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

Solution de l'exercice 5.9

1. On a $\sin(5x) = \sin(4x+x) = \sin(x)\cos(4x) + \cos(x)\sin(4x)$.
Mais

$$\cos(4x) = 1-2\sin^2(2x) = 1-2(2\cos(x)\sin(x))^2 = 1-8\cos^2(x)\sin^2(x) = 1-8(1-\sin^2(x))\sin^2(x) = 1-8\sin^2(x)+8\sin^4(x).$$

Et de même, $\sin(4x) = 2\cos(2x)\sin(2x) = 2(1-2\sin^2(x))2\cos(x)\sin(x)$.
Et donc

$$\begin{aligned}\sin(5x) &= \sin(x) - 8\sin^3(x) + 8\sin^5(x) + 4(1-\sin^2(x))\cos^2(x)\sin(x)\\ &= \sin(x) - 8\sin^3(x) + 8\sin^5(x) + 4(1-2\sin^2(x))\cos^2(x)\sin(x)\\ &= \sin(x) - 8\sin^3(x) + 8\sin^5(x) + 4((\sin(x) - 2\sin^3(x))(1-\sin^2(x))\\ &= \sin(x) - 8\sin^3(x) + 8\sin^5(x) + 8\sin^5(x) - 12\sin^3(x) + 4\sin(x)\\ &= 16\sin^5(x) - 20\sin^3(x) + 5\sin(x).\end{aligned}$$

2. Notons $s = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$. Puisque $\sin\left(5\frac{\pi}{5}\right) = \sin(\pi) = 0$, d'après la question précédente, il vient

$$16s^4 - 20s^3 + 5s = 0 \Leftrightarrow s\left(16s^4 - 20s^2 + 5\right) = 0.$$

Il est clair[3] que $s \neq 0$, et donc $16s^4 - 20s^2 + 5 = 0$.
Posons alors $S = s^2$, de sorte que S est racine de $16S^2 - 20S + 5$.
Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = 80$, de sorte que les deux racines en sont

$$S_1 = \frac{20-\sqrt{80}}{32} = \frac{5-\sqrt{5}}{8} \text{ et } S_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{8}.$$

Ces deux racines sont positives, et donc $s = \sqrt{S_1}$ ou $S = \sqrt{S_2}$.

Puisque $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{4}$, on a $0 < s < \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Or $S_2 > \frac{1}{2}$, si bien que $\sqrt{S_2} > \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Et donc nécessairement, $s = \sqrt{S_1} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

[3] Car $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$.

Remarque
Il ne coûte pas beaucoup plus cher de prouver que

$$\sin(2\pi/5) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$$

puisqu'il s'agit aussi d'une racine positive de $16X^5 - 20X^3 + 5X$, et qu'elle est strictement plus grande que $\sin(\pi/5)$.

Solution de l'exercice 5.10

Rappelons qu'on a $\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$, de sorte que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\cos(2x) - \cos(3x) = 2\sin\frac{5x}{2}\sin\frac{x}{2}.$$

Sur $[0, 2\pi]$, $\sin\frac{x}{2} \geqslant 0$, et donc le signe de $\cos(2x) - \cos(3x)$ est entièrement déterminé par celui de $\sin\frac{5x}{2}$.

x	0		$\frac{2\pi}{5}$		$\frac{4\pi}{5}$		$\frac{6\pi}{5}$		$\frac{8\pi}{5}$		2π
$\sin\frac{5x}{2}$	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	0

Solution de l'exercice 5.11

Pour $-1 \leqslant x < 0$, c'est évident car $x^3 < 0$ et $x^2 > 0$. Et on ne peut alors pas avoir égalité.
Pour $x \in [0,1]$, on a $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$ qui est négatif, et s'annule uniquement pour $x = 0$ ou $x = 1$.
Donc $x^3 \leqslant x^2$, avec égalité si et seulement si $x \in \{0,1\}$.
Puisque pour tout réel x, $\cos x \in [-1,1]$ et $\sin(x) \in [-1,1]$, alors ce qui précède s'applique, et donc $\cos^3 x + \sin^3 x \leqslant \cos^2 x + \sin^2 \leqslant 1$.
Et on a égalité si et seulement si on a simultanément $\cos x \in \{0,1\}$ et $\sin x \in \{0,1\}$.
Soit si et seulement si $x \in \{2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$.

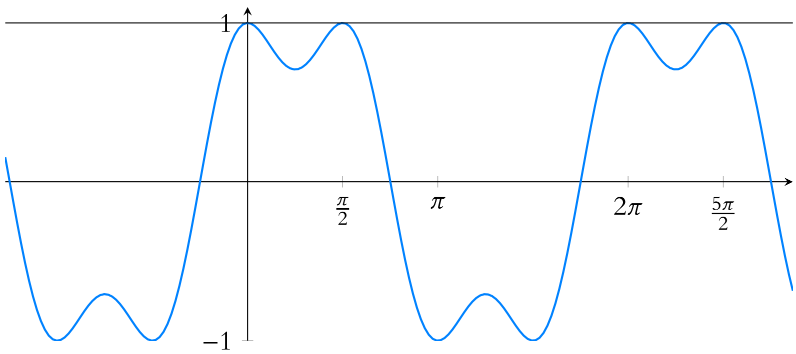


FIGURE 5.1 – La fonction $x \mapsto \cos(x)^3 + \sin(x)^3$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.12

1. Rappelons que $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Et donc pour $x \in [-\pi, \pi]$, on a $\cos(x) \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$.

Par 2π-périodicité du cosinus, l'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right]$.

2. Nous savons que tan est strictement croissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, avec $\tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -1$ et $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.

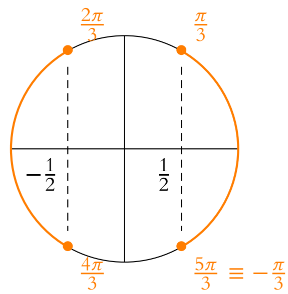
Et donc pour $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $|\tan(x)| \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant \tan(x) \leqslant 1 \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$.

Par π-périodicité de tan, l'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$.

3. On a $\cos^2(x) \geqslant \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \cos x \geqslant \dfrac{1}{2}$ **ou** $\cos(x) \leqslant -\dfrac{1}{2}$.

Sur $[0, 2\pi]$, l'ensemble des solutions est donc $\left[\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right] \cup \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$.

Une manière peut-être un peu plus élégante de le dire est que dans $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, l'ensemble des solutions est $\left[-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right]$.



Et donc l'ensemble des solutions dans $\mathbf{R}$ est

$$\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left(\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right] \cup \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right] \right).$$

4. Nous savons que $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$ et donc

$$\begin{aligned} 2\sin^2 x + \sin^2(2x) = 2\sin^2(x) + 4\cos^2(x)\sin^2(x) &= 2\sin^2(x)\left(1 + 2\cos^2(x)\right) \\ &= 2\sin^2(x)\left(1 + 2\left(1 - \sin^2(x)\right)\right) \\ &= 2\sin^2(x)\left(3 - 2\sin^2(x)\right). \end{aligned}$$

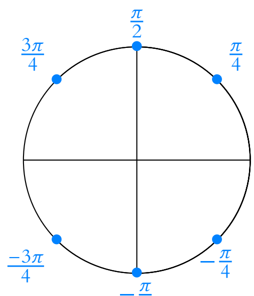
Posons alors $X = \sin^2(x)$, de sorte que l'équation de départ s'écrit encore

$$X(3 - 2X) = 1 \Leftrightarrow 2X^2 - 3X + 1 = 0.$$

Les solutions en sont alors $X_1 = 1$ et $X_2 = \dfrac{1}{2}$.

Donc x est solution de l'équation de départ si et seulement si $\sin(x) = \pm 1$ ou $\sin(x) = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Et donc l'ensemble des solutions est $\left\{\dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$.



5. Pour $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x)\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x - \sin(x)\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right).$$

Méthode
Pour simplifier une expression de la forme

$$A\cos x + B\sin x$$

factoriser par $\sqrt{A^2+B^2}$.

Et donc on a

$$\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) > 1 \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) > \frac{1}{2}.$$

Pour $x + \frac{\pi}{6} \in [-\pi, \pi]$, ceci est équivalent à $x + \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$.
Ainsi, l'ensemble des solutions est

$$\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left]-\frac{\pi}{3} + 2k\pi - \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} + 2k\pi - \frac{\pi}{6}\right[= \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right[.$$

Solution de l'exercice 5.13

On a

$$\begin{aligned}
\cos(3x) = \cos(x+2x) &= \cos(x)\cos(2x) - \sin(x)\sin(2x)\\
&= \cos(x)\left(2\cos^2(x) - 1\right) - 2\sin^2(x)\cos(x)\\
&= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2(1-\cos^2(x))\cos(x)\\
&= 4\cos^3(x) - 3\cos(x).
\end{aligned}$$

Notons qu'en particulier, pour $x = \frac{\pi}{3}$, on obtient $-1 = \cos(\pi) = 4\cos^3\frac{\pi}{3} - 3\cos\frac{\pi}{3}$.
Et donc $\cos\frac{\pi}{3}$ est racine du polynôme $P(X) = 4X^3 - 3X + 1$.
Or, -1 est racine évidente de P, qui se factorise donc en $P(X) = (X+1)(4X^2 - 4X + 1)$, dont les racines sont -1, $\frac{1}{2}$ et $\frac{-1}{2}$.
Puisque $\cos\frac{\pi}{3} \neq -1$ et $\cos\frac{\pi}{3} > 0$, on en déduit que $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.
De là, il vient[4] $\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

[4] Car $\sin\frac{\pi}{3} \geqslant 0$.

Puis en notant que $\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$, on obtient $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

De même, on a

$$\begin{aligned}
\sin(4x) = \sin(2\times 2x) &= 2\sin(2x)\cos(2x)\\
&= 4\sin(x)\cos(x)\left(2\cos^2(x) - 1\right)\\
&= 8\cos^3(x)\sin(x) - 4\sin(x)\cos(x).
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 5.14

1. Notons que l'équation n'a de sens que si x et $2x$ ne sont pas congrus à $\frac{\pi}{2}$ modulo π c'est-à-dire si et seulement $x \notin \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$.
Nous savons que

$$\tan(2x) = \tan(x+x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

et donc

$$\tan(2x) = 3\tan(x) \Leftrightarrow \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = 3\tan(x) \Leftrightarrow 2\tan(x) = 3\tan(x)(1-\tan^2(x)) \Leftrightarrow \tan(x)\left(3\tan^2(x) - 1\right) = 0.$$

Et donc si et seulement si $\tan x = 0$ ou $\tan(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.
C'est le cas si et seulement si $x \equiv 0 \quad [\pi]$ ou $x \equiv \frac{\pi}{6} \quad [\pi]$ ou $x \equiv -\frac{\pi}{6} \quad [\pi]$.
Donc l'ensemble des solutions est

$$\left\{x \in \mathbf{R} \mid x \equiv 0 \quad [\pi] \textbf{ ou } x \equiv \frac{\pi}{6} \quad [\pi] \textbf{ ou } \quad -\frac{\pi}{6} \quad [\pi]\right\} = \{k\pi, k\in\mathbf{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

2. On a $\cos(2x) - \cos(3x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos(3x)$, ce qui est le cas si et seulement si

$$2x \equiv 3x \quad [2\pi] \text{ **ou** } 2x \equiv -3x \quad [2\pi] \Leftrightarrow x \equiv 0 \quad [2\pi] \text{ **ou** } 5x \equiv 0 \quad [2\pi] \Leftrightarrow x \equiv 0 \quad [2\pi] \text{ **ou** } x \equiv 0 \quad \left[\frac{2\pi}{5}\right].$$

Notons que si $x \equiv 0 \quad [2\pi]$, alors $x \equiv 0 \quad \left[\frac{2\pi}{5}\right]$, et donc l'ensemble des solutions est

$$\left\{x \in \mathbf{R} \mid x \equiv 0 \quad \left[\frac{2\pi}{5}\right]\right\} = \left\{\frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

3. On a $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ et $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$. Donc

$$\begin{aligned} 1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) &= 4\cos^3(x) + 2\cos^2(x) - 2\cos(x) \\ &= \cos(x)\left(4\cos^2(x) + 2\cos(x) - 2\right) \\ &= \cos(x)\left(\cos(x) + 1\right)\left(4\cos(x) - 2\right). \end{aligned}$$

Méthode
-1 est une racine évidente de $4x^2+2x-2$, donc on factorise par $x+1$.

Et donc $1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0$ **ou** $\cos(x) = -1$ **ou** $\cos(x) = \frac{1}{2}$.
C'est donc le cas si et seulement si

$$x \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi] \text{ **ou** } x \equiv \pi \quad [2\pi] \text{ **ou** } x \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \text{ **ou** } x \equiv -\frac{\pi}{3} \quad [2\pi].$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.15

Les fonctions sin et cos étant 2π-périodiques, il suffit de chercher les solutions dans $]-\pi, \pi]$, les autres s'obtiendront par translation de $2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
Nous supposons donc dans la suite que $x \in]-\pi, \pi]$.
Commençons par noter que le membre de gauche n'a de sens que si

$$1 + 2\cos(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \cos(x) \geqslant -\frac{1}{2}.$$

Soit encore si et seulement si $-\frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3}$.
Puisqu'une racine est toujours positive, pour $x \in \left]-\frac{2\pi}{3}, 0\right[$, on a $\sin(x) < 0$, et donc x n'est évidemment pas solution de l'équation.
Enfin, pour $x \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$, alors

$$\sqrt{1 + 2\cos(x)} \leqslant \sin(x) \Leftrightarrow 1+2\cos(x) \leqslant \sin^2(x) \Leftrightarrow \cos^2(x)+2\cos(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow \cos(x)(2+\cos(x)) \leqslant 0.$$

Puisque $2 + \cos(x)$ est évidemment positif, cette dernière inégalité n'est vérifiée que pour $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.
Et donc l'ensemble des solutions de l'équation de départ dans $]-\pi, \pi]$ est $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$.
Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'équation est $\displaystyle\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.16

Notons que par 2π-périodicité de sin et cos, il suffit de chercher les solutions dans $[-\pi, \pi]$.
Mieux : $\cos^2$ et $x \mapsto \cos(x)\sin(x)$ sont π-périodiques, et il suffit donc de chercher les solutions dans $[0, \pi]$.
On suppose donc dans la suite que $x \in [0, \pi]$.
Constatons que $\frac{\pi}{2}$ n'est pas solution, et que pour $n \neq \frac{\pi}{2}$ (c'est-à-dire lorsque $\tan x$ existe), on a $\cos^2 x = \dfrac{1}{1 + \tan^2 x}$ et

$$\cos(x)\sin(x) = \cos^2(x)\tan(x) = \frac{\tan(x)}{1 + \tan^2(x)}.$$

Et donc il s'agit de résoudre l'inéquation :

$$\frac{1 - \tan(x)}{1 + \tan^2(x)} \geqslant 1.$$

Posons alors $X = \tan x$. On a

$$\frac{1-X}{1+X^2} \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{1-X}{1+X^2} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{-X^2-X}{1+X^2} \geqslant 0 \Leftrightarrow X(X+1) \leqslant 0.$$

Ce qui est le cas si et seulement si $X \in [-1,0]$. Soit encore si et seulement si $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$.
Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation de départ est $\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, k\pi\right]$.

Solution de l'exercice 5.17

Prouvons le résultat par récurrence sur $n \geqslant 2$.
Pour $n = 2$, on a $2\cos\frac{\pi}{2^2} = 2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$, donc la récurrence est initialisée.
Supposons la formule vraie à un rang $n \geqslant 2$. Alors $2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = 2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2^n}}{2}\right)$.
Or, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $\cos(x) = \cos\left(2\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$.
Soit encore $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$. En particulier, pour $x = \frac{\pi}{2^n}$, $2\cos^2\frac{\pi}{2^{n+1}} = 1 + \cos\frac{\pi}{2^n}$ et donc

$$4\cos^2\frac{\pi}{2^{n+1}} = 2 + 2\cos\frac{\pi}{2^n} = 2 + \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{(n-1)\text{ racines}}.$$

Puisque $\frac{\pi}{2^{n+1}} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, son cosinus est positif, et donc

$$2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{ racines}}.$$

Donc par le principe de récurrence, la formule est valable pour tout $n \geqslant 2$.

Solution de l'exercice 5.18

1. Pour que $\tan\alpha$ et $\tan(2\alpha)$ aient un sens, il faut que $\alpha \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ et $2\alpha \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{4}\ [\frac{\pi}{2}]$.
Pour un tel α, on a $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ et donc

$$\tan(2\alpha) - 2\tan\alpha = \frac{2\tan\alpha - 2\tan\alpha(1-\tan^2\alpha)}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\tan^3\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \tan^2\alpha\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \tan^2\alpha\tan(2\alpha).$$

2. En utilisant la formule de la question précédente[5], il vient

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n 2^{k-1}\tan^2\frac{x}{2^k}\tan\frac{x}{2^{k-1}} &= \sum_{k=1}^n 2^{k-1}\left(\tan\frac{x}{2^{k-1}} - 2\tan\frac{x}{2^k}\right)\\ &= \sum_{k=1}^n 2^{k-1}\tan\frac{x}{2^{k-1}} - \sum_{k=1}^n 2^k\tan\frac{x}{2^k}\\ &= \tan x - 2^n\tan\frac{x}{2^n}.\end{aligned}$$

[5] Qui est valable car pour $k \geqslant 1$,
$$-\frac{\pi}{4} \leqslant \frac{x}{2k} \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

3. Il nous faut donc déterminer la limite de $2^n\tan\frac{x}{2^n}$ lorsque $n \to +\infty$.
Or,

$$2^n\tan\frac{x}{2^n} = x\frac{\tan\frac{x}{2^n} - \tan(0)}{\frac{x}{2^n} - 0} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x\tan'(0) = x(1+\tan^2(0)) = x.$$

Et donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = \tan(x) - x$.

Solution de l'exercice 5.19

Notons que si x n'est pas un multiple entier de 2π, aucun des $\frac{x}{2^k}$, $k \geqslant 1$ n'est multiple de π, et donc les $\sin\frac{x}{2^k}$ sont tous non nuls.

1. La formule étant donnée dans l'énoncé, prouvons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$.
Pour $n = 1$, on a $\cos\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}$ car $2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = \sin(x)$.
Supposons donc la formule vraie au rang n.
Alors

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n+1}\cos\frac{x}{2^k} &= \prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}\cos\frac{x}{2^{n+1}}\\ &= \frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\cos\frac{x}{2^{n+1}}\\ &= \frac{\sin x}{2^n\sin\left(2\frac{x}{2^{n+1}}\right)}\cos\frac{x}{2^{n+1}}\\ &= \frac{\sin x}{2^n 2\sin\frac{x}{2^{n+1}}\cos\frac{x}{2^{n+1}}}\cos\frac{x}{2^{n+1}}\\ &= \frac{\sin x}{2^{n+1}\sin\frac{x}{2^{n+1}}}.\end{aligned}$$

Et donc la formule est encore vraie au rang $n+1$, de sorte que par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$.
Alternative sans récurrence : on peut faire le même calcul sans récurrence, en notant que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\sin\frac{x}{2^{k-1}} = \sin\left(2\frac{x}{2^k}\right) = 2\sin\frac{x}{2^k}\cos\frac{x}{2^k}$ et donc $\cos\frac{x}{2^k} = \frac{\sin\frac{x}{2^{k-1}}}{\cos\frac{x}{2^k}}$.
Et donc

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k} &= \prod_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{x}{2^{k-1}}}{2\sin\frac{x}{2^k}}\\ &= \frac{\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{x}{2^{k-1}}}{2^n\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{x}{2^k}}\\ &= \frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}.\end{aligned}$$

Produit télescopique.

2. Il s'agit de remarquer que

$$\frac{\sin t}{t} = \frac{\sin t - \sin 0}{t-0} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \sin'(0) = \cos(0) = 1.$$

3. Lorsque $n \to +\infty$, $\frac{x}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc par la question précédente, $\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
On en déduit que $2^n\sin\frac{x}{2^n} = x\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.
Et donc $\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\sin x}{x}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.20

Posons $f(x) = \sin(\cos(x)) - \cos(\sin(x))$. Il s'agit donc de déterminer le signe de $f(x)$.
On a alors

$$\begin{aligned}f(x) &= \sin(\cos(x)) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \sin(x)\right)\\ &= 2\sin\left(\frac{\cos(x)+\sin(x)}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\cos(x)-\sin(x)}{2}\right)\end{aligned}$$

Rappel
On a $\sin(p) - \sin(q)$
$= 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$.

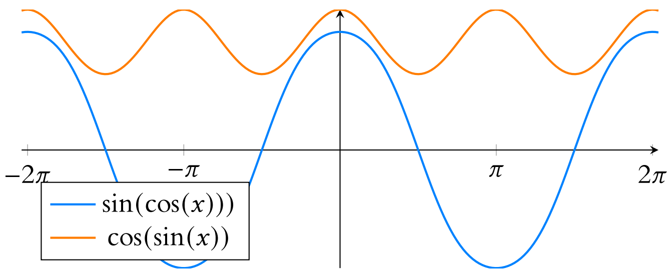
Mais nous savons également que

$$\sin(x)+\cos(x) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin(x) + \sin\frac{\pi}{4}\cos(x)\right) = \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

Et de même,
$$\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$
Donc
$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \frac{\sin(x)+\cos(x)}{2} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$$
et de même,
$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \frac{\cos(x)-\sin(x)}{2} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}.$$
Par conséquent
$$-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\sin(x)+\cos(x)}{2} - \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}$$
et de même,
$$-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\cos(x)-\sin(x)}{2} + \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4}.$$
Mais puisque[6] $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\pi}{4}$, alors $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4} < \pi$ et $\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$.
On en déduit donc que pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$$-\pi \leqslant \frac{\sin x + \cos x}{2} - \frac{\pi}{4} < 0$$
et
$$0 < \frac{\cos x - \sin x}{2} + \frac{\pi}{4} < \pi.$$
Donc les deux fonctions $x \mapsto \sin\left(\frac{\cos(x)+\sin(x)}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ et $x \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\cos(x)-\sin(x)}{2}\right)$ ne s'annulent pas sur $\mathbf{R}$.
Il en est donc de même de f. Étant continue, elle de signe constant[7].
Or, $f(0) = \sin(1) - \cos(0) = \sin(1) - 1 < 0$.
On en déduit que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow \cos(\sin(x)) > \sin(\cos(x))$.

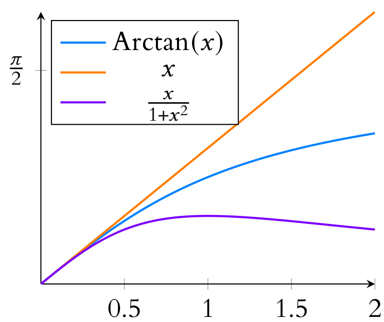
[6] Le plus simple pour s'en convaincre est probablement d'élever au carré et de garder en tête que $\pi^2 > 9$.

[7] Sinon, par le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annulerait entre un point où elle positive et un point où elle est négative.



Solution de l'exercice 5.21

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $f(x) = \operatorname{Arctan}(x) - x$. Alors f est dérivable et
$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = \frac{-x^2}{1+x^2} \leqslant 0.$$
Et donc f est décroissante sur $\mathbf{R}_+$. Puisqu'on a $f(0) = \operatorname{Arctan}(0) = 0$, on en déduit que
$$\forall x \in \mathbf{R}_+,\ f(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow \operatorname{Arctan}(x) \leqslant x.$$
De même, soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $g(x) = \operatorname{Arctan}(x) - \frac{x}{1+x^2}$.
Alors g est dérivable et
$$\forall x \in \mathbf{R}_+,\ g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \geqslant 0.$$
Donc g est croissante sur $\mathbf{R}_+$. Puisque $g(0) = 0$, on en déduit que
$$\forall x \in \mathbf{R}_+,\ g(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \operatorname{Arctan}(x) \geqslant \frac{x}{1+x^2}.$$



Solution de l'exercice 5.22

1. Puisque $\frac{5\pi}{13} \in [0, \pi]$, $\operatorname{Arccos}\cos\frac{5\pi}{13} = \frac{5\pi}{13}$.

2. On ne peut s'en tirer comme à la question précédente puisque $\frac{7\pi}{8} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
En revanche, $\sin\frac{7\pi}{8} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)$, et donc puisque $\frac{\pi}{8} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,
$$\operatorname{Arcsin}\sin\frac{7\pi}{8} = \operatorname{Arcsin}\sin\left(\pi - \frac{7\pi}{8}\right) = \operatorname{Arcsin}\left(\sin\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{8}.$$

3. Exactement sur le même principe, $\operatorname{Arcsin}\sin\frac{5\pi}{6} = \operatorname{Arcsin}\sin\left(\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$.

4. On $\cos\frac{22\pi}{7} = \cos\left(-\frac{6\pi}{7}\right) = \cos\frac{6\pi}{7}$.
Et puisque $\frac{6\pi}{7} \in [0, \pi]$, on en déduit que $\operatorname{Arccos}\cos\frac{22\pi}{7} = \frac{6\pi}{7}$.

5. On a $\sin\frac{19\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{6}$.
Et donc $\operatorname{Arccos}\sin\frac{19\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.

6. Par π-périodicité de la tangente, $\tan\frac{5\pi}{4} = \tan\frac{\pi}{4}$.
Et donc $\operatorname{Arctan}\tan\frac{5\pi}{4} = \operatorname{Arctan}\tan\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ car $\frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Danger !
L'égalité $\operatorname{Arccos}\cos x = x$ ne vaut que pour $x \in [0, \pi]$.

Solution de l'exercice 5.23

Puisque $2 > 1$, $\operatorname{Arctan}(2) > \operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$. Et de même pour $\operatorname{Arctan}(3)$.
Et donc[8], on a
$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} < \operatorname{Arctan}(2) + \operatorname{Arctan}(3) < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$
D'autre part, on a
$$\tan\left(\operatorname{Arctan}(2) + \operatorname{Arctan}(3)\right) = \frac{\tan\left(\operatorname{Arctan}(2)\right) + \tan\left(\operatorname{Arctan}(3)\right)}{1 - \tan\left(\operatorname{Arctan}(2)\right)\tan\left(\operatorname{Arctan}(3)\right)} = \frac{5}{1-6} = -1.$$
Et donc, $\operatorname{Arctan}(2) + \operatorname{Arctan}(3) - \pi$ est l'unique nombre de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut -1 : c'est $-\frac{\pi}{4}$.
Et donc $\operatorname{Arctan}(2) + \operatorname{Arctan}(3) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

[8] Une arctangente est toujours strictement inférieure à $\frac{\pi}{2}$.

Unicité
L'unicité est garantie par le fait que tan réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbf{R}$.

Solution de l'exercice 5.24

1. On a, pour $x \in [-1, 1]$,
$$\sin(2\operatorname{Arcsin} x) = 2\sin(\operatorname{Arcsin} x)\cos(\operatorname{Arcsin} x) = 2x\sqrt{1-x^2}.$$

2. L'expression donnée à un sens pour tout $x \in \mathbf{R}$.
Pour $x \in \mathbf{R}$, puisque $\operatorname{Arctan}(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(\operatorname{Arctan}(x)) > 0$, et en particulier est non nul.
Et donc $\frac{1}{\cos^2(\operatorname{Arctan}(x))} = 1 + \tan^2(\operatorname{Arctan}(x)) = 1 + x^2$, si bien que
$$\cos^2(\operatorname{Arctan}(x)) = \frac{1}{1+x^2}.$$
On a alors $\sin^2(\operatorname{Arctan}(x)) = 1 - \cos^2(\operatorname{Arctan}(x)) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$.
Et donc $|\sin(\operatorname{Arctan}(x))| = \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} = \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$.
Reste à remarquer que si $x \geqslant 0$, alors $\operatorname{Arctan}(x) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc $\sin(\operatorname{Arctan}(x)) \geqslant 0$, si bien que
$$\sin(\operatorname{Arctan}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Et si $x \leqslant 0$, alors $\text{Arctan}(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, et donc $\sin(\text{Arctan}(x)) \leqslant 0$, de sorte que $\sin(\text{Arctan}(x)) = \dfrac{-|x|}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

3. Utilisons une formule de linéarisation : pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$\cos^2\left(\frac{1}{2}\text{Arccos}\, x\right) = \frac{\cos(\text{Arccos}\, x) + 1}{2} = \frac{x+1}{2}.$$

4. Pour $x \in [-1, 1]$, on a $\sin(\text{Arccos}\, x) = \sqrt{1-x^2}$ et $\cos(\text{Arccos}\, x) = x$.
Et donc $\tan(\text{Arccos}\, x) = \dfrac{\sin(\text{Arccos}\, x)}{\cos(\text{Arccos}\, x)} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

5. On a, pour $u \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}\cos(3u) = \cos(u+2u) = \cos(u)\cos(2u) - \sin(u)\sin(2u) &= \cos(u)\left(2\cos^2(u) - 1\right) - 2\sin^2(u)\cos(u)\\ &= 2\cos^3(u) - \cos(u) - 2\left(1-\cos^2(u)\right)\cos(u) = 4\cos^3(u) - 3\cos(u).\end{aligned}$$

Et donc pour $x \in [-1, 1]$,

$$\cos(3\,\text{Arccos}\, x) = 4\cos^3(\text{Arccos}\, x) - 3\cos(\text{Arccos}\, x) = 4x^3 - 3x.$$

> **Plus généralement**
> On peut prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\cos(n\,\text{Arccos}(x))$ est une fonction polynomiale de degré n.
> Ces polynômes sont appelés polynômes de Tchebychev.

Solution de l'exercice 5.25

Il est clair que f est 2π-périodique, donc il suffit de tracer son graphe sur $[-\pi, \pi]$, puis d'effectuer des translations de vecteur $2k\pi\vec{i}$, $k \in \mathbf{Z}$.
De plus, f est paire, car la fonction cos l'est, et donc il suffit de tracer son graphe sur $[0, \pi]$, puis d'effectuer une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

Pour $x \in [0, \pi]$, on a $\text{Arccos}(\cos(x)) = x$.

> **Remarque**
> Cette formule n'est rien d'autre que la définition de l'arc cosinus, qui est la bijection réciproque de $\cos_{|[0,\pi]}$.

Si $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, alors $2x \in [0, \pi]$, et donc $\text{Arccos}(\cos(2x)) = 2x$, et donc $f(x) = x - \frac{1}{2}2x = 0$.
En revanche, si $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, alors $\pi \leqslant 2x \leqslant 2\pi$, et donc $\cos(2x) = \cos(-2x) = \cos(2\pi - 2x)$ avec $2\pi - 2x \in [0, \pi]$.
Et donc $\text{Arccos}(\cos 2x) = \text{Arccos}(\cos(2\pi - 2x)) = 2\pi - 2x$.
Et donc $f(x) = x - \frac{1}{2}(2\pi - 2x) = 2x - \pi$.

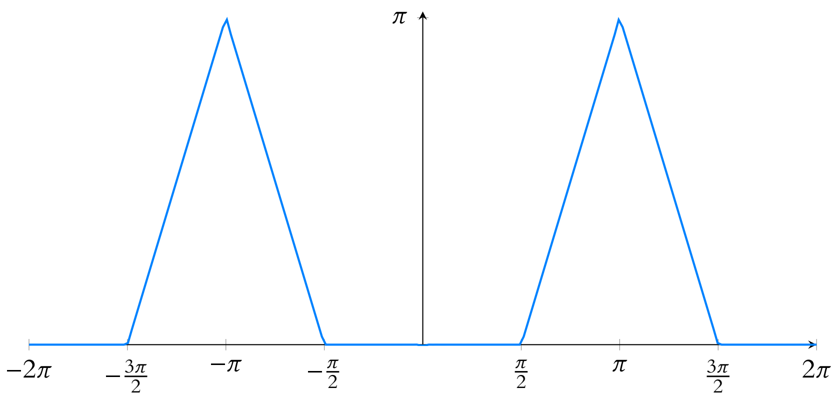


Figure 5.2 – $f : x \mapsto \text{Arccos}(\cos(x)) - \frac{1}{2}\text{Arccos}(\cos(2x))$

Solution de l'exercice 5.26

1. Notons $\theta = \text{Arccos}\, \dfrac{5}{13}$ et $\varphi = \text{Arctan}\, \dfrac{2}{3}$.
On a alors $\cos\theta = \dfrac{5}{13}$ et $\tan\varphi = \dfrac{2}{3}$.
Nous savons de plus que $\sin\theta = \sqrt{1 - \left(\dfrac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{144}{169}} = \dfrac{12}{13}$.

Et donc $\tan\theta = \dfrac{12}{5}$.
D'autre part, on a

$$\tan(2\varphi) = \frac{2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi} = \frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{12}{5}.$$

D'autre part, puisque $\dfrac{5}{13} \geqslant 0$, on a $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.
De même, puisque $0 < \dfrac{2}{3} < 1$, alors $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{4}$ et donc $0 < 2\varphi < \dfrac{\pi}{2}$.
Et donc $\begin{cases} \tan(\theta) = \tan(2\varphi) \\ \theta, 2\varphi \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Rightarrow \theta = 2\varphi.$

> **Danger !**
> Il est indispensable de s'assurer que θ et 2π sont dans le même intervalle de longueur π, faute de quoi ils pourraient avoir la même tangente sans être égaux.

Alternative : notons $\theta = 2\operatorname{Arctan}\frac{2}{3}$.
Puisque $\frac{2}{3} \geqslant 0$, $0 \leqslant \operatorname{Arctan}\frac{2}{3} < \frac{\pi}{2}$ et donc $0 \leqslant \theta < \pi$.

Alors $\cos(\theta) = 2\cos^2\left(\operatorname{Arctan}\frac{2}{3}\right) - 1 = \dfrac{2}{1+\tan^2(\operatorname{Arctan}\frac{2}{3})} - 1 = \dfrac{2}{1+\frac{4}{9}} - 1 = \dfrac{18}{13} - 1 = \dfrac{5}{13}$.

Et donc on a à la fois $\begin{cases} \theta \in [0,\pi] \\ \cos(\theta) = \frac{5}{13} \end{cases}$ donc $\theta = \operatorname{Arccos}\frac{5}{13}$.

2. Commençons par noter que $\operatorname{Arccos}\dfrac{3}{4} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et donc $2\operatorname{Arccos}\dfrac{3}{4} \in [0,\pi]$.
Mais $\cos\left(2\operatorname{Arccos}\dfrac{3}{4}\right) = 2\cos^2\left(\operatorname{Arccos}\dfrac{3}{4}\right) - 1 = 2\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 - 1 = \dfrac{9}{8} - 1 = \dfrac{1}{8}$.
Et donc on a bien $2\operatorname{Arccos}\dfrac{3}{4} = \operatorname{Arccos}\dfrac{1}{8}$.

> **Méthode**
> Un réel θ n'est égal à $\operatorname{Arccos} x$ que s'il vérifie les deux conditions
> $$\begin{cases} \theta \in [0,\pi] \\ \cos\theta = x \end{cases}$$

3. On a $\cos\left(2\operatorname{Arcsin}\dfrac{3}{5}\right) = 2\cos^2\left(\operatorname{Arcsin}\dfrac{3}{5}\right) - 1 = 2\left(1 - \sin^2\left(\operatorname{Arcsin}\dfrac{3}{5}\right)\right) - 1 = \dfrac{7}{25}$.
Et puisque $\operatorname{Arcsin}\dfrac{3}{5} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, alors $2\operatorname{Arcsin}\dfrac{3}{5} \in [0,\pi]$, de sorte que

$$\cos\left(2\operatorname{Arcsin}\frac{3}{5}\right) = \frac{7}{25} \Leftrightarrow 2\operatorname{Arcsin}\frac{3}{5} = \operatorname{Arccos}\frac{7}{25}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.27

1. On a

$$\begin{aligned}\tan\left(\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan}(k)\right) &= \frac{\tan(\operatorname{Arctan}(k+1)) - \tan(\operatorname{Arctan}(k))}{1+\tan(\operatorname{Arctan}(k+1))\tan(\operatorname{Arctan}(k))} \\ &= \frac{k+1-k}{1+k(k+1)} = \frac{1}{k^2+k+1}.\end{aligned}$$

Mais par croissance de la fonction arctangente, on a $\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan}(k) \geqslant 0$, et $\operatorname{Arctan}(k+1) - \underbrace{\operatorname{Arctan}(k)}_{\geqslant 0} \leqslant \operatorname{Arctan}(k+1) < \dfrac{\pi}{2}$.

Et donc $\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan}(k)$ est un réel de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut $\dfrac{1}{k^2+k+1}$: il est égal à $\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{k^2+k+1}$.

2. D'après la question précédente, on a, pour $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan}\frac{1}{k^2+k+1} &= \sum_{k=0}^{n} \left(\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan}(k)\right) \\ &= \operatorname{Arctan}(n+1) - \operatorname{Arctan}(0) = \operatorname{Arctan}(n+1).\end{aligned}$$

> **Détails**
> On aura reconnu une somme télescopique.

Et donc en passant à la limite, il vient

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan}\frac{1}{k^2+k+1} = \lim_{n\to+\infty} \operatorname{Arctan}(n+1) = \frac{\pi}{2}.$$

Solution de l'exercice 5.28

1. Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = \text{Arcsin}(x) - \text{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$. Alors f est dérivable car somme de composées de fonctions dérivables, et

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1,1[,\ f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}\frac{1}{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\left(1-x^2\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc f est constante.
Or on a $f(0) = \text{Arcsin}(0) - \text{Arctan}(0) = 0 - 0 = 0$.
Et donc pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow \text{Arcsin}(x) = \text{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

Méthode
Puisque f est constante, il suffit de trouver sa valeur en un point pour connaître sa valeur sur $\mathbf{R}$ tout entier.

2. Considérons la fonction g définie sur $[0,1]$ par $g(x) = \text{Arcsin}\left(\sqrt{x}\right) - \frac{1}{2}\text{Arcsin}(2x-1)$.
Alors g est dérivable sur $]0,1[$ et

⚠ Attention !
La fonction racine n'est pas dérivable en 0 et la fonction Arcsin n'est pas dérivable en 1, donc on prendra bien soin d'exclure ces deux nombres du domaine de dérivabilité de g.

$$\begin{aligned}\forall x \in]0,1[,\ g'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}} - \frac{1}{\sqrt{4x-4x^2}}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}} - \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}} = 0.\end{aligned}$$

Et donc la fonction g est constante sur $]0,1[$. De plus, pour $x = \frac{1}{2}$, on obtient

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \text{Arcsin}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{2}\text{Arcsin}(0) = \text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Et donc pour tout $x \in]0,1[$, $g(x) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \text{Arcsin}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\text{Arcsin}(2x-1)$.
Notons que pour $x = 0$, ce résultat est encore valable car $\text{Arcsin}(0) = 0$ et $\text{Arcsin}(-1) = -\frac{\pi}{2}$.
Et de même pour $x = 1$, car $\text{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\text{Arcsin}(2-1)$.

Solution de l'exercice 5.29

1. La fonction Arccos n'étant définie que sur $[-1,1]$, il s'agit de s'assurer que pour tout $x \geqslant 0$, $\frac{1-x}{x+1} \in [-1,1]$.
Mais une rapide étude des variations de $x \mapsto \frac{1-x}{x+1}$ prouve que cette fonction est croissante sur $\mathbf{R}$, vaut 1 en 0 et tend vers -1 en $+\infty$.
Donc pour tout $x \geqslant 0$, $-1 \leqslant \frac{1-x}{x+1} \leqslant 1$, et donc $f(x)$ est bien défini.

2. La fonction $g : \theta \mapsto \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est continue sur $[0,\pi[$, strictement croissante[9], et on a $g(0) = 0$ et $\lim\limits_{\theta\to\pi} g(\theta) = +\infty$.
Par le théorème de la bijection g réalise une bijection de $[0,\pi[$ sur $\mathbf{R}_+$ et donc tout réel positif possède un unique antécédent par g.

[9] Car composée de deux fonctions qui le sont.

3. Soit $x \in \mathbf{R}_+$ et soit θ comme dans la question précédente.
Alors

$$\frac{1-x}{x+1} = \frac{1-\tan^2(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)} = \cos^2(\theta/2)\left(1-\tan^2(\theta/2)\right) = \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) = \cos(2\theta/2) = \cos(\theta).$$

Et par conséquent,

$$f(x) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1-x}{x+1}\right) = \operatorname{Arccos}\left(\cos(\theta)\right).$$

Puisque $\theta \in [0, \pi]$, $f(x) = \theta$.
Reste à donner l'expression de θ en fonction de x : pour $x \geqslant 0$ et $\theta \in [0, \pi]$, on a

$$x = \tan^2(\theta/2) \Leftrightarrow \sqrt{x} = \tan(\theta/2) \Leftrightarrow \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{\theta}{2} \Leftrightarrow \theta = 2\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{x}\right).$$

Et donc on a bien $f(x) = 2\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{x}\right)$.

Remarque : Il aurait aussi été possible de constater que f et $x \mapsto 2\operatorname{Arctan}(\sqrt{x})$ ont même dérivée, et coïncident en un point (par exemples en 1), et donc sont égales.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.30

1. Puisque Arcsin n'est définie que sur $[-1, 1]$, pour que $f(x)$ soit défini, il faut que x et $2x$ soient dans $[-1, 1]$, ce qui est le cas si et seulement si $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$.
Donc $\mathscr{D} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.
2. On a $f\left(\frac{1}{2}\right) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}$.
3. La fonction f est strictement croissante sur $\mathscr{D}$ car somme de deux fonctions strictement croissantes.
On a $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2\pi}{3}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$.
Puisque f est continue, par le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathscr{D}$ sur $\left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$.
Et donc $f(x) = \frac{\pi}{2}$ possède une unique solution puisque $\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$.
4. Soit α l'unique solution de l'équation.
Alors $\operatorname{Arcsin}(2\alpha) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(\alpha)$.
Et donc $\sin(\operatorname{Arcsin}(2\alpha)) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(\alpha)\right) = \cos(\operatorname{Arcsin}(\alpha)) = \sqrt{1-\alpha^2}$.
Soit encore $2\alpha = \sqrt{1-\alpha^2} \Leftrightarrow 4\alpha^2 = 1 - \alpha^2 \Leftrightarrow \alpha = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$.
Mais $\alpha \geqslant 0$, et donc $\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.31

Notons que la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(x+1)$ est strictement croissante sur $\mathbf{R}$ car somme de fonctions strictement croissantes.
Puisqu'elle est continue (car dérivable), et que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{3\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{3\pi}{2}$, elle réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\left]-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.
Et donc il existe une et une seule solution α à l'équation de l'énoncé.
Puisque de plus $f(0) = 0$, nous pouvons d'ores et déjà affirmer que cette solution est positive strictement.
De même, puisque $g(1) = \operatorname{Arctan}(1) + \operatorname{Arctan}(2) > 2\operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{2}$, alors $\alpha < 1$.

Ensuite, pour $x > 0$, $\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$.
D'autre part, pour $x \in]0, \alpha]$, on a $0 < \operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x+1) < \frac{\pi}{2}$ et

$$\begin{aligned}\tan\left(\operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x+1)\right) &= \frac{\tan \operatorname{Arctan}(x-1) + \tan \operatorname{Arctan}(x+1)}{1 - \tan\left(\operatorname{Arctan}(x-1)\right)\tan\left(\operatorname{Arctan}(x+1)\right)} \\ &= \frac{x-1+x+1}{1-(x-1)(x+1)} = \frac{2x}{2-x^2}.\end{aligned}$$

Par conséquent[10], $\operatorname{Arctan}(x-1)+\operatorname{Arctan}(x+1)=\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{2x}{2-x^2}\right)$.
Et donc pour $x\in]0,\alpha]$ on a

$$\begin{aligned}\operatorname{Arctan}(x-1)+\operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(x+1)=\frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow \operatorname{Arctan}(x-1)+\operatorname{Arctan}(x+1)=\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\\ &\Leftrightarrow \operatorname{Arctan}\left(\frac{2x}{2-x^2}\right)=\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\\ &\Leftrightarrow \frac{2x}{2-x^2}=\frac{1}{x}\\ &\Leftrightarrow 2x^2=2-x^2 \Leftrightarrow 3x^2=2\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{2}{3}}.\end{aligned}$$

[10] Il s'agit de deux nombres de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ de même tangente.

Détails
La fonction arctangente est bijective, et donc si deux réels ont la même image, ils sont égaux.

Solution de l'exercice 5.32

1. Posons $f : x\mapsto \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x))+\operatorname{Arccos}(\operatorname{th}(x))$.
Puisque th est à valeurs dans $]-1,1[$, et que Arccos est dérivable sur $]-1,1[$, par somme et composition de fonctions dérivables, f est dérivable sur $\mathbf{R}$.
Sa dérivée est alors donnée par

$$\forall x\in\mathbf{R},\ f'(x)=\frac{\operatorname{ch}(x)}{1+\operatorname{sh}^2(x)}-\frac{1-\operatorname{th}^2(x)}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2(x)}}=\frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)}-\sqrt{1-\operatorname{th}^2(x)}=\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}-\sqrt{\frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}}=0.$$

Rappel
Pour tout x réel,
$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}=1-\operatorname{th}^2(x).$$

Et par conséquent, f est constante sur $\mathbf{R}$. Mais $f(0)=\operatorname{Arctan}(0)+\operatorname{Arccos}(0)=\dfrac{\pi}{2}$.
Et donc $\forall x\in\mathbf{R}$, $\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x))=\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{Arccos}(\operatorname{th}(x))$.

Remarque : sans passer par les dérivées, une option était de calculer directement $\cos\left(\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x))+\operatorname{Arccos}(\operatorname{th}(x))\right)$ à l'aide des formules d'addition.
En effet, on sait calculer $\cos^2(\operatorname{Arctan}(u))=\dfrac{1}{1+\tan^2(\operatorname{Arctan}(u))}$ et s'en servir pour déterminer les valeurs de $\cos(\operatorname{Arctan}(u))$ et $\sin(\operatorname{Arctan}(u))$.
Et de même, on sait calculer $\cos(\operatorname{Arccos} u)=u$ et $\sin(\operatorname{Arccos}(u))=\sqrt{1-u^2}$.
Ici, on trouve que pour tout $x\in\mathbf{R}$, $\cos\left(\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x))+\operatorname{Arccos}(\operatorname{th}(x))\right)=0$.
Puisque par ailleurs, $\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x))+\operatorname{Arccos}(\operatorname{th}(x))\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right[$, et que sur cet intervalle, cos ne s'annule qu'en $\frac{\pi}{2}$ on en déduit que $\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x))+\operatorname{Arccos}(\operatorname{th}(x))=\dfrac{\pi}{2}$.

2. On a

$$\begin{aligned}\operatorname{th}(x)=\frac{5}{13}&\Leftrightarrow \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\frac{5}{13}\\ &\Leftrightarrow 13e^{2x}-13=5e^{2x}+5\\ &\Leftrightarrow 8e^{2x}=18\Leftrightarrow e^{2x}=\frac{9}{4}\Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{3}{2}\right).\end{aligned}$$

3. On a $\operatorname{sh}\left(\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{5}{12}$.
Et donc on en déduit, en appliquant la question 1 à $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$ que

$$\operatorname{Arctan}\frac{5}{12}+\operatorname{Arccos}\frac{5}{13}=\frac{\pi}{2}.$$

Solution de l'exercice 5.33

Il est aisé de constater que (u_n) est strictement croissante, et donc en particulier à valeurs positives.
Comme indiqué, soit $\theta_n=\operatorname{Arcsin}\dfrac{1}{u_n}\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
Alors

$$(u_0+u_1+\cdots+u_n)^2=u_{n+1}^2-1=\frac{1}{\sin^2\theta_{n+1}}-1=\frac{1-\sin^2\theta_{n+1}}{\sin^2\theta_{n+1}}=\frac{\cos^2\theta_{n+1}}{\sin^2\theta_{n+1}}=\frac{1}{\tan^2\theta_{n+1}}.$$

Soit encore[11] $\tan\theta_{n+1} = \dfrac{1}{u_0+\cdots+u_n}$. Alors

$$\tan\theta_{n+1} = \frac{1}{u_0+\cdots+u_n} = \frac{1}{\frac{1}{\tan\theta_n}+u_n} = \frac{1}{\frac{1}{\tan\theta_n}+\frac{1}{\sin\theta_n}} = \frac{\sin\theta_n}{\cos\theta_n+1}.$$

Mais, pour $t\in\mathbf{R}$, on a

$$\frac{\sin(2t)}{\cos(2t)+1} = \frac{2\sin t\cos t}{2\cos^2 t-1+1} = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t.$$

Et en particulier, $\dfrac{\sin\theta_n}{\cos\theta_n+1} = \tan\dfrac{\theta_n}{2}$.

Et alors, en passant à l'arctangente, $\theta_{n+1} = \dfrac{\theta_n}{2}$ et donc $\theta_n = \dfrac{\theta_1}{2^{n-1}}$.

On en déduit que $\dfrac{2^n}{u_n} = 2^n\sin\dfrac{\theta_1}{2^{n-1}}$.

Mais la fonction sin étant dérivable en 0, avec $\sin'(0)=\cos(0)=1$, on a $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$.
Et par conséquent,

$$\frac{2^n}{u_n} = 2^n\frac{\sin\frac{\theta_1}{2^{n-1}}}{\frac{\theta_1}{2^{n-1}}}\frac{\theta_1}{2^{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\theta_1.$$

Mais $\theta_1 = \operatorname{Arcsin}\dfrac{1}{u_1} = \operatorname{Arcsin}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

On en déduit que $\dfrac{2^n}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\operatorname{Arcsin}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

[11] Ces deux quantités sont positives, donc on peut enlever les carrés.

Remarque

On peut même aller un peu plus loin, et prouver que ceci est égal à $\pi - 2\operatorname{Arctan}(x)$ (je vous laisse vous inspirer par exemple des exercices précédents si vous souhaitez prouver cette formule).