# TD 4 : Calculs algébriques

## ► Sommes et produits

**Exercice 4.1** Calculer les sommes suivantes : F

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{2k+1}}{3^{2k-1}}$
2. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i(i-1)$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k+1)$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^{3k}$ où $x \in \mathbf{R}$

**Exercice 4.2** Montrer que pour $n \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$. F

**Exercice 4.3** Calculer les produits suivants : PD

1. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2k^2$
2. $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} (4i^2-1)$
3. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \exp\left(2^k\right)$
4. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ $(n \geqslant 2)$
5. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$
6. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (-3)^{k^2-k}$

**Exercice 4.4** Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \leqslant (n+1)!$. Pour quelle(s) valeur(s) de $n$ est-ce une inégalité stricte ? F

**Exercice 4.5** Soit $q$ un réel fixé. PD

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kq^k = \sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant n} q^k$.
2. En procédant à une interversion de sommes, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kq^k$.

**Exercice 4.6** **Sommes doubles** PD

Calculer les quantités suivantes :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}(i+j) \qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\max(i,j) \qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}|i-j| \qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|i-j| \qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i2^j \qquad \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq k}}^{n}\frac{k\ell}{n(n-1)}$$

**Exercice 4.7** Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Justifier que $\displaystyle\sum_{1\leqslant p,q\leqslant n}(p+q) = 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(i+j) + 2\sum_{k=1}^{n} k$. AD

En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(i+j)$.

**Exercice 4.8** En remarquant que $k = (k+1)-1$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kk!$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$. PD

**Exercice 4.9** PD

1. Montrer qu'il existe deux réels $a$ et $b$, que l'on déterminera, tels que $\forall x > 1$, $\frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}$.
2. En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-1}$, pour $n \in \mathbf{N}^*$.

**Exercice 4.10** **Des produits semblables, mais différents !** AD

On considère les produis suivants

$$A = \prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij,\ B = \prod_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}} ij,\ C = \prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij,\ D = \prod_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} ij,\ E = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij.$$

Calculer $A$. En déduire $B$. Exprimer $B$ en fonction de $C$ et $D$. En déduire $C$, puis $D$ et $E$.

**Exercice 4.11** Pour $n \in \mathbf{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{2n}(-1)^i i^3$. **AD**

En déduire une expression de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^i i^3$ en fonction de $n$. *On pourra distinguer deux cas suivant la parité de $n$.*

**Exercice 4.12** Prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{k} \geqslant \frac{n}{2}$. **AD**

**Exercice 4.13** Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et soient $f_1, \dots, f_n$ des fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$. **AD**

Montrer que $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} f_i$ est dérivable, et que $\displaystyle\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)' = \sum_{i=1}^{n}\left(f_i' \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} f_k\right)$.

**Exercice 4.14 Inégalité de Tchebychev (Oral Polytechnique)** **D**

Soient $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ deux suites monotones de réels. Comparer les réels $\displaystyle\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \times \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k\right)$ et $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.

## ► Coefficients binomiaux et formule du binôme

**Exercice 4.15** **AD**

1. En dérivant de deux manières la fonction $x \mapsto (1+x)^n$, déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.
2. Sur le même principe, calculer les valeurs de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

**Exercice 4.16** Pour $n \in \mathbf{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor}\binom{n}{2k+1}$. **AD**

**Exercice 4.17** Calculer $\displaystyle\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n}\binom{i}{j}$. **PD**

**Exercice 4.18** On souhaite montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. **AD**

1. Donner deux preuves de cette formule : l'une par récurrence, l'autre en calculant de deux manières $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^4 - k^4\right)$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} ij$.

**Exercice 4.19** On rappelle que la suite de Fibonacci est définie par $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et pour $n \in \mathbf{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. **AD**

Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\displaystyle F_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n-k}{k}$.

**Exercice 4.20** Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tous $(x,y) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$, $\displaystyle\left(1+\frac{x}{y}\right)^n + \left(1+\frac{y}{x}\right)^n \geqslant 2^{n+1}$. **D**

À quelle condition cette inégalité est-elle une égalité ?

**Exercice 4.21** Pour $n \geqslant 1$, on pose $\displaystyle u_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\binom{n}{k}}$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$. **D**

**Exercice 4.22** Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{k}\binom{n+1}{i}\right]$. **TD**

## ► Systèmes linéaires

**Exercice 4.23** Résoudre les systèmes suivants : **F**

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x \phantom{{}-y} + 2z = 1 \\ -y + z = 2 \\ x - 2y \phantom{{}+z} = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} -2x - y + 2z + 3t = -9 \\ -x + 2z = -5 \\ x - z - t = 4 \\ -x + z + 2t = -5 \end{cases}$$

**Exercice 4.24** Résoudre $\begin{cases} 3x - 6y - 6z + 8t = 2 \\ x - 2y - 3z + 4t = 0 \\ -2x + 4y + 4z - 5t = 3 \\ 6x - 12y - 12z + 16t = 4 \end{cases}$, $\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x - y + z - t = -1 \end{cases}$, $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 5y - 3z = 1 \\ 3x + 4y + 4z = 1 \\ x - 2y - 4z = 3 \end{cases}$ PD

**Exercice 4.25** Résoudre les systèmes suivants, d'inconnues complexes : F

$$\begin{cases} -5x + y + 2z = 2 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ 3x - y - 2z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x - (3+i)y - (9+3i)z = 5-3i \\ 2x - 2y - 6z = 2-2i \\ 4x - (2+2i)y - (6+6i)z = 6-2i \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \cdots + 2x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + 3x_n = 1 \\ \vdots \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n = 1 \end{cases}$$

**Exercice 4.26 Des systèmes à paramètres** AD

Soit $m \in \mathbf{R}$. Résoudre les systèmes suivants d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. On pourra si besoin distinguer plusieurs cas suivant la valeur de $m \in \mathbf{R}$.

$$\begin{cases} x - y + z = m \\ x + my - z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + y + mz = 1 \end{cases}$$

**Exercice 4.27** Discuter, suivant la valeur de $a \in \mathbf{R}$ le nombre de solutions du système suivant, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. AD

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 2z = 3 \end{cases}$$

# CORRECTION DES EXERCICES DU TD 4

## SOLUTION DE L'EXERCICE 4.1

**1.** Notons que $\dfrac{2^{2k+1}}{3^{2k-1}} = \dfrac{2 \cdot \left(2^2\right)^k}{3^{-1} \cdot \left(3^2\right)^k} = 6\left(\dfrac{4}{9}\right)^k$.

Et donc en utilisant la formule pour la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique[1]

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{2k+1}}{3^{2k-1}} = 6\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{4}{9}\right)^k = 6\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{54}{5}\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}\right).$$

[1] Ici de raison $\frac{4}{9} \neq 1$.

**2.** On a $i(i-1) = i^2 - i$ et donc

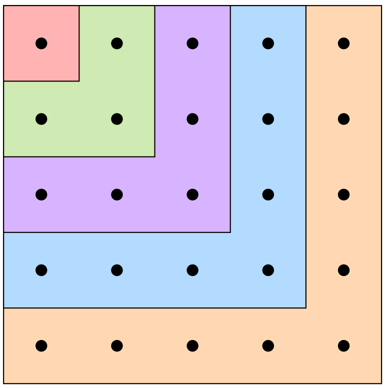
$$\sum_{i=0}^{n} i(i-1) = \sum_{i=0}^{n} i^2 - \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1-3)}{6} = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}.$$

**3.** Par linéarité de la somme, on a

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = n(n+1) + (n+1) = (n+1)^2.$$

> ⚠ Attention !
> Entre 0 et $n$, il y a $n+1$ nombres, et non $n$.
> Et donc $\sum_{k=0}^{n} 1 = (n+1)$.

***Interprétation géométrique*** *: notons que la somme calculée n'est autre que $1+3+5+\cdots+(2n+1)$, la somme des $(n+1)$ premiers entiers impairs.*
*Le dessin ci-dessous (dans le cas $n=4$) devrait vous convaincre du résultat.*



**4.** Il s'agit de noter que $\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) = \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k)$.

Et donc nous sommes en présence d'une somme télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1).$$

**5.** C'est directement la formule du binôme :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{3k} = \sum_{k=0}^{n}(-x^3)^k 1^{n-k} = \left(1-x^3\right)^n.$$

## SOLUTION DE L'EXERCICE 4.2

Notons $P = \prod_{k=0}^{n}(2k+1)$, et notons que $P$ est le produit de tous les entiers impairs de 1 à $2n+1$.

Or, nous savons que le produit de tous les entiers[2] de 1 à $2n+1$ vaut $(2n+1)!$.

[2] Pairs et impairs.

On a donc

$$P = \frac{(2n+1)!}{\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n+1} k} = \frac{(2n+1)!}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)} == \frac{(2n+1)!}{2^n\prod\limits_{k=1}^{n} k} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}.$$

## Solution de l'exercice 4.3

1. On a $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2k^2 = 2^n \left(\prod_{k=1}^{n} k\right)^2 = 2^n\,(n!)^2$.

2. Notons que $(4i^2-1) = (2i+1)(2i-1)$. Et donc

$$\prod_{i=1}^{n}(4i^2-1) = \prod_{i=1}^{n}(2i+1) \times \prod_{i=1}^{n}(2i-1).$$

Notons que nous avons reconnu le produit d'entiers impairs consécutifs.
On a alors

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}(2i+1) &= \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(2i+1)\prod_{i=1}^{n}(2i)}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(2i)} \\ &= \frac{3\times 5\times\cdots\times(2n-1)\times(2n+1)\times 2\times 4\times\cdots\times 2n}{2^n\displaystyle\prod_{i=1}^{n} i} \\ &= \frac{(2n+1)!}{2^n n!}.\end{aligned}$$

> **Méthode**
> On multiplie numérateur et dénominateur par le produit des entiers pairs afin de faire apparaître une factorielle.

Et de même, il vient $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(2i-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.

On en déduit donc que $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(4i^2-1) = \frac{(2n)!(2n+1)!}{4^n(n!)^2}$.

3. Puisque l'exponentielle transforme les sommes en produits, on a

$$\prod_{k=0}^{n}\exp\left(2^k\right) = \exp\left(\sum_{k=0}^{n}2^k\right) = \exp\left(2^{n+1}-1\right).$$

4. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on a $1 - \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{k^2-1}{k^2} = \dfrac{(k-1)(k+1)}{k^2}$.
Et donc

> **Astuce**
> C'est un archi-classique : $k^2-1 = k^2-1^2 = (k-1)(k+1)$.

$$\begin{aligned}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} &= \frac{\left(\displaystyle\prod_{k=2}^{n}(k-1)\right)\left(\displaystyle\prod_{k=2}^{n}(k+1)\right)}{\left(\displaystyle\prod_{k=2}^{n}k\right)^2} \\ &= \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1} i}{\displaystyle\prod_{k=2}^{n} k}\,\frac{\displaystyle\prod_{j=3}^{n+1} j}{\displaystyle\prod_{k=2}^{n} k} \\ &= \frac{1\times\cancel{\displaystyle\prod_{i=2}^{n-1} i}}{n\times\cancel{\displaystyle\prod_{i=2}^{n-1} i}} \times \frac{(n+1)\times\cancel{\displaystyle\prod_{j=3}^{n} j}}{2\times\cancel{\displaystyle\prod_{j=3}^{n} j}} \\ &= \frac{1}{n}\,\frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}.\end{aligned}$$

> **Chgts d'indices**
> Dans le premier produit, on a posé $i = k-1$ et dans le second, $j = k+1$.

> **Rédaction**
> Avec l'habitude, on peut se passer de détailler cette étape si on est certain d'avoir bien repéré les termes qui ne se simplifient pas.

5. On a

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1} = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}2k}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k+1)}$$

$$= \frac{\prod_{k=1}^{n} 2k \quad \prod_{k=1}^{n} 2k}{\prod_{k=1}^{n} 2k \prod_{k=1}^{n} (2k+1)}$$
$$= \frac{\left(\prod_{i=1}^{n} 2i\right)^2}{(2n+1)!}$$
$$= \frac{\left(2^n \prod_{i=1}^{n} i\right)^2}{(2n+1)!}$$
$$= \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

**Détails**

Nous avons reconnu que le dénominateur est le produit des entiers impairs de 3 à $2n+1$.
On choisit alors de multiplier (au numérateur et au dénominateur) par le produit des entiers pairs de 2 à $2n$ afin de faire apparaître une factorielle.

**6.** On a

$$\prod_{k=0}^{n} (-3)^{k^2-k} = \frac{\prod_{k=0}^{n} (-3)^{k^2}}{\prod_{k=0}^{n} (-3)^{k}} = \frac{(-3)^{\sum_{k=0}^{n} k^2}}{(-3)^{\sum_{k=0}^{n} k}}$$
$$= \frac{(-3)^{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}}{(-3)^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$
$$= (-3)^{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}}$$
$$= (-3)^{\frac{n(n+1)(2n-2)}{6}} = (-3)^{\frac{n(n+1)(n-1)}{3}}.$$

## SOLUTION DE L'EXERCICE 4.4

Notons que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $k! \leqslant n!$

Et donc en sommant ces inégalités, il vient $\sum_{k=0}^{n} k! \leqslant \sum_{k=0}^{n} n!$

Or dans cette dernière somme, le terme à l'intérieur de la somme ne dépend pas de $k$, donc

$$\sum_{k=0}^{n} n! = (n+1) \times n! = (n+1)!$$

**⚠ Attention !**

Le nombre de termes est bien $n+1$ (et non $n$) car on somme de 0 à $n$ et non de 1 à $n$.

Ceci prouve donc que $\sum_{k=0}^{n} k! \leqslant (n+1)!$

Si $n = 1$, on a $\sum_{k=0}^{n} k! = 0! + 1! = 2$ et $(n+1)! = 2! = 2$. Donc l'inégalité n'est pas stricte.

En revanche, dès que $n \geqslant 2$, on a $0! < n!$ et donc

$$\sum_{k=0}^{n} k! < \sum_{k=0}^{n} n! = (n+1)!$$

**Rappel**

Lorsqu'on somme des inégalités, dès que l'une des inégalités est stricte, l'inégalité obtenue par sommation est stricte.
Même si toutes les autres sont des égalités.

## SOLUTION DE L'EXERCICE 4.5

**1.** Commençons par noter que pour $k = 0$, on a $kq^k = 0$ et donc $\sum_{k=0}^{n} kq^k = \sum_{k=1}^{n} kq^k$.

On a alors

$$= \sum_{1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n} q^k = \sum_{k=1}^{n} q^k \sum_{i=1}^{k} 1 = \sum_{k=1}^{n} kq^k.$$

**2.** Si $q = 1$, alors $\sum_{k=1}^{n} kq^k = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Nous supposons donc à présent que $q \neq 1$. En intervertissant les deux sommes de l'égalité obtenue précédemment, il vient

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant n} q^k &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n} q^k \\
&= \sum_{i=1}^{n} q^i \frac{1-q^{n-i+1}}{1-q} \\
&= \frac{1}{1-q}\sum_{i=1}^{n}\left(q^i - q^{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{1-q}\left(\sum_{i=1}^{n} q^i - \sum_{i=1}^{n} q^{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{1-q}\left(q\frac{1-q^n}{1-q} - nq^{n+1}\right) \\
&= \frac{q-(n+1)q^{n+1}+nq^{n+2}}{(1-q)^2}.
\end{aligned}$$

C'est ici qu'il est important d'avoir $q \neq 1$.

## Solution de l'exercice 4.6

**1.** On a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}(i+j) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} i + \sum_{j=1}^{i} j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(i^2 + \sum_{j=1}^{i} j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(i^2 + \frac{i(i+1)}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(3i^2+i\right) \\
&= \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i \\
&= \frac{3}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{4} + \frac{n(n+1)}{4} = \frac{n(n+1)^2}{2}.
\end{aligned}$$

**Détails**
La première somme est une somme de constantes ($i$ ne dépend pas de $j$, et donc vaut $i$ fois le nombre de termes, qui ici est également $i$.

**2.** On a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\max(i,j) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}\max(i,j) + \sum_{j=i+1}^{n}\max(i,j)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} i + \sum_{j=i+1}^{n} j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(i^2 + \sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{i} j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(i^2 + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{n(n+1)}{2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{i(i-1)}{2} \\
&= \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i \\
&= \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} - \frac{n(n+1)}{4} \\
&= \frac{n(n+1)}{12}(6n+2n+1-3) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}.
\end{aligned}$$

Relation de Chasles.

**3.** Notons que pour $i \leqslant j$, on a $i - j \leqslant 0$ et donc $|i-j| = j - i$. Et donc

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}|i-j| = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(j-i) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}(j-i) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(j\sum_{i=1}^{j}1 - \sum_{i=1}^{j}i\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(j^2 - \frac{j(j+1)}{2}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{j^2-j}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}j^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}j \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} - \frac{n(n+1)}{4} = \frac{n(n+1)(2n+1-3)}{12} = \frac{n(n+1)(n-1)}{6}.
\end{aligned}$$

**Une alternative utilisant une sommation par paquets** : notons que si $I = \left\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \mid j \geqslant i\right\}$, alors

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}(j-i) = \sum_{(i,j)\in I}(j-i).$$

Mais pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, posons $I_k = \{(i,j) \in I \mid j - i = k\}$, de sorte que $I = \bigcup_{k=0}^{n-1} I_k$.

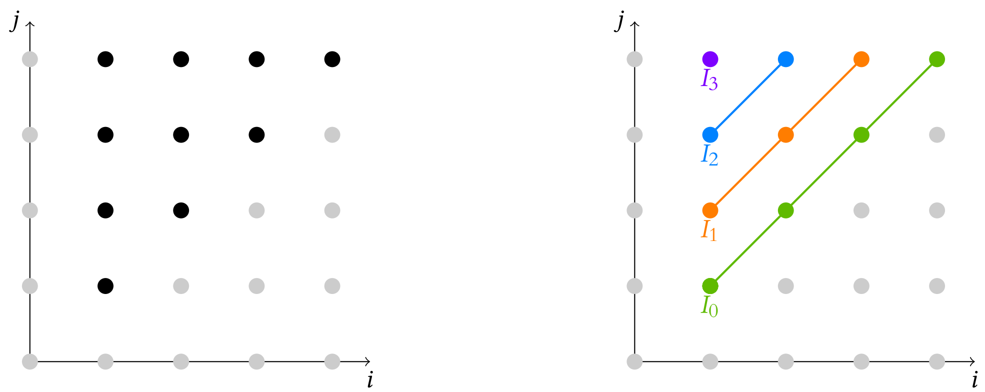



FIGURE 4.1 – Les points en noir de la figure de gauche représentent les couples $(i,j) \in I$. Sur la figure de droite, on a décomposé $I$ en «paquets».

Alors par sommation par paquets[3],

$$\sum_{(i,j)\in I}(j-i) = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{(i,j)\in I_k}(j-i) = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{(i,j)\in I_k}k.$$

[3] Les $I_k$ sont bien deux à deux disjoints.

Mais $I_k = \{(1,k),(2,k+1),\dots,(n-k,n)\}$, qui est de cardinal $n-k$.
Donc $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I_k} k = k \times \mathrm{Card}(I_k) = k(n-k)$.

Et alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{(i,j)\in I_k}k &= \sum_{k=0}^{n-1}k(n-k) \\
&= n\sum_{k=0}^{n-1}k - \sum_{k=0}^{n-1}k^2 \\
&= \frac{n^2(n-1)}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

**4.** Séparons en trois la seconde somme, suivant que $i-j$ soit strictement positif, strictement négatif, ou nul :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|i-j| &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i-1}|i-j| + \underbrace{|i-i|}_{=0} + \sum_{j=i+1}^{n}|i-j|\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}(i-j) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}(j-i)\\
&= \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}(i-j) + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)\\
&= 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)\\
&= \frac{n(n+1)(n-1)}{3}.
\end{aligned}$$

Ces deux sommes sont les mêmes !

**Détails**
On reconnaît la somme calculée à la question précédente.

**5.** Puisque $i2^j$ est le produit d'un terme ne dépendant que de $i$ et d'une terme ne dépendant que de $j$, un résultat du cours nous garantit directement que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i2^j = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} 2^j\right) = \frac{n(n+1)}{2}2\left(2^n-1\right) = n(n+1)\left(2^n-1\right).$$

**6.**

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq k}}^{n}\frac{k\ell}{n(n-1)} &= \frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}k\sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq k}}^{n}\ell\\
&= \frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}k\left(\sum_{\ell=1}^{n}\ell - k\right)\\
&= \frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{n(n+1)}{2} - k\right)\\
&= \frac{1}{n(n-1)}\left(\frac{n(n+1)}{2}\sum_{k=1}^{n}k - \sum_{k=1}^{n}k^2\right)\\
&= \frac{1}{n(n-1)}\left(\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\\
&= \frac{1}{n(n-1)}\frac{n(n+1)}{12}\left(3n(n+1) - 2(2n+1)\right)\\
&= \frac{1}{n(n-1)}\frac{n(n+1)}{12}\left(3n^2-n-2\right)\\
&= \frac{n+1}{12(n-1)}(n-1)(3n+2) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}.
\end{aligned}$$

## Solution de l'exercice 4.7

Il s'agit tout simplement d'une relation de Chasles, en notant qu'on peut couper en trois l'ensemble $I_n = [\![1,n]\!]^2$ en notant que

$$I_n = \{(p,q)\in[\![1,n]\!]^2 \mid p<q\}\cup\{(p,q)\in[\![1,n]\!]^2 \mid p>q\}\cup\{(k,k),\ k\in[\![1,n]\!]^2\}.$$

Ces trois ensembles sont clairement deux à deux disjoints.
Et alors

$$\sum_{1\leqslant p,q\leqslant n}(p+q) = \sum_{1\leqslant p<q\leqslant n}(p+q) + \sum_{k=1}^{n}(k+k) + \sum_{1\leqslant q<p\leqslant n}(p+q).$$

La somme du milieu est $2\sum_{k=1}^{n}k$.

Et la première et la dernière sont toutes deux égales à $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(i+j)$, si bien qu'on a bien

l'égalité annoncée :

$$\sum_{1\leqslant p,q\leqslant n}(p+q) = 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(i+j) + 2\sum_{k=1}^n k.$$

Il est facile de constater que

$$\sum_{1\leqslant p,q\leqslant n}(p+q) = \sum_{p=1}^n\sum_{q=1}^n(p+q) = \sum_{p=1}^n\left(np+\sum_{q=1}^n q\right) = \sum_{p=1}^n np + n\sum_{q=1}^n q = \frac{n^2(n+1)}{2}+\frac{n^2(n+1)}{2} = n^2(n+1).$$

Et donc

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(i+j) = \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant p,q\leqslant n}(p+q) - \sum_{k=1}^n k = \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n-1)n(n+1)}{2}.$$

## Solution de l'exercice 4.8

On a bien la relation $k=(k+1)-1$, et donc

$$\sum_{k=0}^n kk! = \sum_{k=0}^n k!\left((k+1)-1\right) = \sum_{k=0}^n \left((k+1)!-k!\right).$$

On reconnaît là une somme télescopique, qui vaut donc $(n+1)!-0! = (n+1)!-1$.
Sur le même principe, on a

$$\sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^n\left(\frac{k+1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+1)!}\right) = \sum_{k=0}^n\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right).$$

Là encore il s'agit d'une somme télescopique qui vaut : $\dfrac{1}{0!}-\dfrac{1}{(n+1)!} = 1-\dfrac{1}{(n+1)!}$.

## Solution de l'exercice 4.9

1. Pour $x>1$, on a $\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x-1} = \dfrac{a(x-1)+b(x+1)}{x^2-1} = \dfrac{(a+b)x+(b-a)}{x^2-1}$.

   On aura donc $\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x-1} = \dfrac{1}{x^2-1}$ si et seulement si pour tout $x>1$, $(a+b)x+(b-a)=1$.

   Par identification[4], cela revient à $\begin{cases} a+b=0 \\ b-a=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{2}\end{cases}$.

2. On en déduit que pour $n\in\mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^n\frac{1}{k^2-1} &= \sum_{k=2}^n\left(\frac{1}{2}\frac{1}{k-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{k+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^n\frac{1}{k-1}-\frac{1}{2}\sum_{k=2}^n\frac{1}{k+1}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}-\frac{1}{2}\sum_{j=3}^{n+1}\frac{1}{j}\\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}.\end{aligned}$$

[4] Ce qui est légitime pour les coefficients d'un polynôme : deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients.

**Danger !**
On a sûrement reconnu une somme «télescopique» en ce sens que la plupart des termes se simplifient deux à deux. Mais contraitement aux somes télescopiques usuelles, ici les deux premiers et les deux derniers termes ne vont pas se simplifier, et pas seulement le premier et le dernier.

## Solution de l'exercice 4.10

On a

$$\begin{aligned}A = \prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij &= \prod_{i=1}^n\prod_{j=1}^n ij = \prod_{i=1}^n i^n\prod_{j=1}^n j\\ &= \prod_{i=1}^n i^n n! = (n!)^n\prod_{i=1}^n i^n = \left(\prod_{i=1}^n i\right)^n (n!)^2\\ &= (n!)^n\times(n!)^n = (n!)^{2n}.\end{aligned}$$

**Danger !**
Le produit est traître : si vous «sortez» un $\lambda$ du produit (ici $i$), il sort à la puissance le nombre de termes !

Ensuite,

$$B = \frac{A}{\prod_{i=1}^n i^2} = \frac{A}{\left(\prod_{i=1}^n i\right)^2} = \frac{A}{(n!)^2} = (n!)^{2n-2}.$$

On a ensuite

$$C \times D = \prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij \times \prod_{i=1}^n i^2 = \prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n\\ i\neq j}} ij \times \left(\prod_{i=1}^n i^2\right)^2 = B(n!)^4.$$

Il est clair[5] que $C = D$.
Et donc $CD = C^2 = B(n!)^4$ donc $C^2 = (n!)^{2n+2}$ et alors $C = (n!)^{n+1}$.
Enfin, $C = E \times \prod_{i=1}^n i^2 = E(n!)^2$ et donc $E = \dfrac{C}{(n!)^2} = (n!)^{n-1}$.

[5] Les noms de variables sont muets !

## Solution de l'exercice 4.11

Effectuons une sommation par paquets, en notant que

$$[\![1, 2n]\!] = \{1, 2\} \cup \{3, 4\} \cup \cdots \cup \{2n-1, 2n\} = \bigcup_{k=1}^n \{2k-1, 2k\}.$$

Alors il vient

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2n} (-1)^i i^3 &= \sum_{k=1}^n \left((-1)^{2k-1}(2k-1)^3 + (-1)^{2k}(2k)^3\right)\\
&= \sum_{k=1}^n \left((2k)^3 - (2k-1)^3\right)\\
&= \sum_{k=1}^n \left(8k^3 - (8k^3 - 12k^2 + 6k - 1)\right)\\
&= 12\sum_{k=1}^n k^2 - 6\sum_{k=1}^n k + n\\
&= 2n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1) + n\\
&= n\left(2(n+1)(2n+1) - 3(n+1) + 1\right)\\
&= n\left(4n^2 + 6n + 2 - 3n - 3 + 1\right) = n\left(4n^2 + 3n\right)\\
&= n^2\left(4n+3\right).
\end{aligned}$$

Donc, si $n$ est pair, avec $n = 2p$, on a

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i i^3 = \sum_{i=1}^{2p} (-1)^i i^3 = p^2(4p+3) = \frac{n^2}{4}(2n+3).$$

Et si $n = 2p+1$ est impair, on a

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i i^3 = \sum_{i=1}^{2p} (-1)^i i^3 + (-1)^{2p+1}(2p+1)^3 = p^2(4p+3) - n^3.$$

Or, $p = \dfrac{n-1}{2}$, de sorte que $p^2(4p+3) = \dfrac{(n-1)^2}{4}(2n+1)$ et donc

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i i^3 = \frac{(n-1)^2(2n+1)}{4} - n^3.$$

## Solution de l'exercice 4.12

Prouvons cette inégalité par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$.

Pour $n = 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^2 \frac{1}{k} = \frac{3}{2} \geqslant \frac{1}{2}$.

Soit donc $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geqslant \frac{n}{2}$.

On a alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k}\\ &\geqslant \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2^{n+1}}\\ &\geqslant \frac{n}{2} + \left(2^{n+1} - 2^n\right) \frac{1}{2^{n+1}}\\ &\geqslant \frac{n}{2} + 1 - \frac{1}{2} \geqslant \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \geqslant \frac{n+1}{2}.\end{aligned}$$

Détails

La seconde somme comporte

$$2^{n+1} - (2^n + 1) + 1$$

termes, chacun étant supérieur ou égal au dernier, qui vaut $\frac{1}{2^{n+1}}$.

Donc par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geqslant \frac{n}{2}$.

## SOLUTION DE L'EXERCICE 4.13

Procédons par récurrence sur $n$ en prouvant $\mathscr{P}(n)$ : «quelles que soient les fonctions $f_1, \dots, f_n$ dérivables sur $\mathbf{R}$, $\displaystyle\prod_{i=1}^n f_i$ est dérivable avec $\displaystyle\left(\prod_{i=1}^n f_i\right)' = \sum_{i=1}^n f_i' \left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^n f_k\right)$».

Pour $n = 1$, c'est évident puisque $\displaystyle f_1' \left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq 1}}^1 f_k\right) = f_1' \times 1 = f_1'$.

Rappel

Un produit qui porte sur 0 termes est égal à 1 par convention.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, et soient $f_1, \dots, f_{n+1}$ des fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$. Alors par hypothèse de récurrence, $f_1 \times \cdots \times f_n$ est dérivable, si bien que par produit, $f_1 \times \cdots \times f_{n+1} = (f_1 \times \cdots \times f_n) f_{n+1}$ est dérivable. Et alors, par dérivation d'un produit, il vient

$$\begin{aligned}\left(\prod_{i=1}^{n+1} f_i\right)' &= \left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)' f_{n+1} + \left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right) f_{n+1}'\\ &= \sum_{i=1}^n \left(f_i' \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^n f_k\right) f_{n+1} + f_{n+1}' \prod_{k=1}^n f_k\\ &= \sum_{i=1}^n \left(f_i' \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n+1} f_k\right) + f_{n+1}' \prod_{\substack{k=1\\k\neq n+1}}^{n+1} f_k\\ &= \sum_{i=1}^{n+1} f_i' \left(\prod_{\substack{k1\\k\neq i}}^{n+1} f_k\right).\end{aligned}$$

Et donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, si bien que par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

## SOLUTION DE L'EXERCICE 4.14

Afin de comparer nos deux réels, essayons de calculer la différence des deux :

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n x_k \sum_{k=1}^n y_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k y_k = \frac{1}{n^2} \left( \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i y_j - n \sum_{k=1}^n x_k y_k \right).$$

Notons donc

$$\begin{aligned}\Delta &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i y_j - n \sum_{k=1}^n x_k y_k\\ &= \sum_{k=1}^n x_k \sum_{i=1}^n y_i - n \sum_{k=1}^n x_k y_k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} x_k\left(y_1+y_2+\cdots+y_n - ny_k\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i-y_k)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k-1}x_k(y_i-y_k) + \underbrace{x_k(y_k-y_k)}_{=0} - \sum_{i=k+1}^{n}x_k(y_k-y_i)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k-1}x_k(y_i-y_k) - \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k+1}^{n}x_k(y_k-y_i)\\
&= \sum_{1\leqslant i<k\leqslant n}x_k(y_i-y_k) - \sum_{1\leqslant k<i\leqslant n}x_k(y_k-y_i)\\
&= \sum_{1\leqslant i<k\leqslant n}x_k(y_i-y_k) - \sum_{1\leqslant i<k\leqslant n}x_i(y_i-y_k)\\
&= \sum_{1\leqslant i<k\leqslant n}(x_k-x_i)(y_i-y_k).
\end{aligned}$$

**Détails** Les variables sont muettes, on a renommé $i$ en $k$ et $k$ en $i$.

Et donc si les deux suites $(x_1,\dots,x_n)$ et $(y_1,\dots,y_n)$ sont de même monotonie, pour tout $(k,i)\in[\![1,n]\!]^2$ tel que $i<k$, $(x_k-x_i)$ et $(y_k-y_i)$ sont de signes opposés, si bien que leur produit est négatif.

Et donc $\Delta\leqslant 0$, de sorte que $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k\right)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_ky_k$.

En revanche, si elles sont de monotonies opposées[6], alors pour $i<k$, $(x_k-x_i)$ et $(y_i-y_k)$ sont de même signe.

Et donc $\Delta\geqslant 0$, si bien que $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k\right)\geqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_ky_k$.

[6] C'est-à-dire si l'une est croissante et l'autre décroissante.

## Solution de l'exercice 4.15

**1.** Notons $f_n : x\mapsto(1+x)^n$.
D'une part, on a pour tout $x\in\mathbf{R}$, $f_n'(x)=n(1+x)^{n-1}$.
Mais en utilisant la formule du binôme avant de dériver, on obtient, pour $x\in\mathbf{R}$,

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k.$$

Et donc en dérivant[7], $f_n'(x)=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}$. On notera que le terme constant, correspondant à $k=0$, a disparu lors de la dérivation.

En particulier, $f_n'(1)=n2^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k$.

On en déduit donc que $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=n2^{n-1}$.

[7] Ce qui est légitime car $f_n$ est polynomiale, donc dérivable.

**2.** En dérivant une seconde fois $f_n$, on obtient $f_n''(x)=n(n-1)(1+x)^{n-2}$ et par ailleurs, $f_n''(x)=\sum_{k=2}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}x^{k-2}$.

Donc en évaluant de nouveau en $x=1$, il vient $n(n-1)2^{n-2}=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}$.

Pour calculer la somme des $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$, plutôt que de dériver $f_n$, intégrons la.

Une primitive de $f_n$ est $F_n : x\mapsto\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}$.
D'autre part, une autre primitive de $f_n$ est

$$G_n : x\mapsto\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}x^{k+1}.$$

**Danger !** Attention, il n'existe pas qu'une seule primitive (alors qu'il n'y a qu'une seule dérivée). Donc a priori, nous avons là deux primitives différentes, il n'est pas dit que ce soient les mêmes !

Donc $F_n$ et $G_n$ diffèrent d'une constante : il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $G_n(x) = F_n(x) + \lambda$.
Or, $F_n(0) = \dfrac{1}{n+1}$ et $G_n(0) = 0$, donc $\lambda = -\dfrac{1}{n+1}$.
On en déduit donc que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = G_n(0) = F_n(0) - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1} - 1\right).$$

## SOLUTION DE L'EXERCICE 4.16

Les deux premières sont évidentes :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

et

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k 1^{n-k} = (-1+1)^n = 0^n = 0.$$

Pour les deux autres sommes, il faut comprendre que les $2k, 0 \leqslant k \leqslant \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$ sont les entiers pairs inférieurs ou égaux à $n$.

> **Détails**
> En effet, pour $k$ entier, on a $2k \leqslant n$ si et seulement si $k \leqslant \frac{n}{2}$.
> Mais nous savons alors (car $k$ est entier) que cela équivaut à $k \leqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Et donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}\binom{n}{2k} = \sum_{\substack{i=0\\ i \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{i}$.

Et de même, les $2k+1$, $0 \leqslant k \leqslant \left\lfloor \dfrac{n-1}{2} \right\rfloor$ sont les entiers impairs entre 0 et $n$.

Et donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}\binom{n}{2k+1} = \sum_{\substack{i=0\\ i \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{i}$.

Par conséquent

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}\binom{n}{2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}\binom{n}{2k+1} = \sum_{\substack{i=0\\ i \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{i} + \sum_{\substack{i=0\\ i \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = 2^n.$$

Et de même,

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}\binom{n}{2k} - \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}\binom{n}{2k+1} = \sum_{\substack{i=0\\ i \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{i} - \sum_{\substack{i=0\\ i \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i} = 0.$$

On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}\binom{n}{2k} = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}\binom{n}{2k+1}$.

Et donc leur somme valant $2^n$, ces deux quantités valent $\dfrac{2^n}{2} = 2^{n-1}$.

**Une alternative :** utilisons l'identité de Pascal, qui pour la seconde somme nous donne

$$\sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}\binom{n}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}\left(\binom{n-1}{2k} + \binom{n-1}{2k+1}\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i} = 2^{i-1}.$$

Sur le triangle de Pascal, cela revient à dire que chacun des $\dbinom{n}{k}$ avec $k$ impair est la somme de deux termes consécutifs de la ligne précédente. Et qu'en sommant tous les termes, on obtient ainsi la somme de tous les termes de la ligne précédente du triangle de Pascal, dont on connaît la somme. Une relation analogue est vraie pour les termes pairs, mais il faut être un peu plus soigneux pour l'écrire car le 1 en début de ligne n'est pas somme de deux termes de la ligne précédente.

## SOLUTION DE L'EXERCICE 4.17

Remarquons qu'il s'agit de calculer la somme de tous les termes figurant dans les $n$ premières lignes et $n$ premières colonnes du triangle de Pascal.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n=0$ | 1 | | | | | | |
| $n=1$ | 1 | 1 | | | | | |
| $n=2$ | $1 +$ | $2$ | $1 +$ | $0$ | | | |
| $n=3$ | 1 | 3 | 3 | 1 | | | |
| $n=4$ | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | |
| $n=5$ | $1 +$ | $5$ | $10 +$ | $10$ | $5 +$ | $1$ | |
| $n=6$ | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 |

FIGURE 4.2 – La somme des termes impairs (en vert) d'une ligne est la somme de tous les termes de la ligne précédente.

Puisque nous savons calculer la somme des lignes, il est judicieux de commencer par calculer la somme de chaque ligne (c'est-à-dire de sommer, à $i$ fixé, sur $j$).
Ainsi,

$$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n}\binom{i}{j} &= \sum_{0\leqslant j\leqslant i\leqslant n}\binom{i}{j} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{i}{j} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j} \\ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}1^j 1^{i-j} = \sum_{i=0}^{n}(1+1)^i \\ &= \sum_{i=0}^{n}2^i = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1}-1.\end{aligned}$$

Si $j > i$, $\binom{i}{j} = 0$.

Formule du binôme.

Somme des termes d'une suite géométrique.

**Alternative** : en réalité, il est aussi possible de commencer par calculer la somme d'une colonne, puis de faire la somme des colonnes, mais il faut être un peu plus astucieux.
Notons que par l'identité de Pascal, $\binom{i}{j} = \binom{i+1}{j+1} - \binom{i}{j+1}$.
Et donc pour $j \in [\![1, n]\!]$ fixé,

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{j} = \sum_{i=0}^{n}\left[\binom{i+1}{j+1} - \binom{i}{j}\right] = \binom{n+1}{j+1} - \underbrace{\binom{i+1}{0}}_{=0} = \binom{n+1}{j+1}.$$

Par conséquent,

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{j} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{j+1} = \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{j}.$$

On reconnaît alors la somme des coefficients de la $(n+1)^{\text{ème}}$ ligne du triangle de Pascal, privée de son premier coefficient, qui vaut 1.
Donc $\displaystyle\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n}\binom{i}{j} = 2^{n+1}-1$.

## SOLUTION DE L'EXERCICE 4.18

1. Pour $n = 1$, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 = 1$ et $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 1$, donc la récurrence est initialisée.

Supposons que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} i^3 &= \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3 \\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)\left(n^2+2n+1\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n+1}{4}\left(n^2(n+1)+4n^2+8n+4\right)\\
&= \frac{n+1}{4}\left(n^3+5n^2+8n+4\right)\\
&= \frac{n+1}{4}(n+1)\left(n^2+4n+4\right)\\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2.
\end{aligned}
$$

**Méthode**

Puisque $n^3+5n^2+8n+4$ est un polynôme en $n$, dont $-1$ est une racine, il se factorise par $n+1$.

Et donc la formule est encore vraie au rang $n+1$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Pour la seconde preuve, remarquons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^4-k^4\right)$ est une somme télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^4-k^4\right) = \sum_{k=1}^{n}(k+1)^4 - \sum_{k=1}^{n}k^4 = \sum_{i=2}^{n+1}i^4 - \sum_{k=1}^{n}k^4 = (n+1)^4-1.$$

D'autre part, on a, pour tout $k \in \mathbf{Z}$,

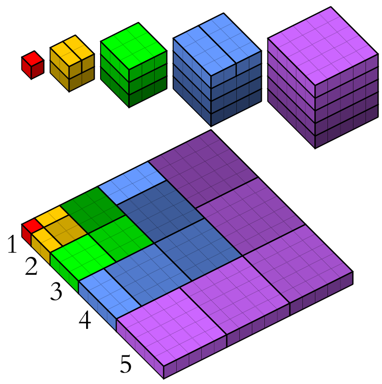
$$(k+1)^4-k^4 = k^4+4k^3+6k^2+4k+1-k^4 = 4k^3+6k^2+4k+1.$$

Et donc

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^4-k^4\right) &= 4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1\\
&= 4\sum_{k=1}^{n}k^3+n(n+1)(2n+1)+2n(n+1)+n\\
&= 4\sum_{k=1}^{n}k^3+n\left(2n^2+5n+4\right).
\end{aligned}
$$

En isolant la somme des cubes, on obtient donc

$$
\begin{aligned}
4\sum_{k=1}^{n}k^3 &= (n+1)^4-1-n\left(2n^2+5n+4\right)\\
&= n^4+4n^3+6n^2+4n-n\left(2n^2+5n+4\right)\\
&= n\left(n^3+2n^2+n\right) = n^2(n^2+2n+1) = n^2(n+1)^2.
\end{aligned}
$$




Et par conséquent, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Cette formule possède l'interprétation graphique ci-dessus, je vous laisse y réfléchir.

*Les plus courageux d'entre vous pourront essayer de pousser cette méthode plus loin en calculant la somme des n premières puissances $4^{\text{èmes}}$ en calculant*

$$\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^5-k^5\right).$$

**2.** Permutons les deux sommes :

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} ij = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij &= \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} ij\\
&= \sum_{j=2}^{n} j\sum_{i=1}^{j-1} i = \sum_{j=2}^{n} j\frac{(j-1)j}{2}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}\left(j^3 - j^2\right) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(j^3 - j^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^3 - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2\\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{8} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}\\
&= \frac{n(n+1)\left(3n^2+3n-4n-2\right)}{24} = \frac{n(n+1)\left(3n^2-n-2\right)}{24}\\
&= \frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{24}.
\end{aligned}$$

**Méthode**
Puisque $3n^2 - n - 2$ est un polynôme de degré 2 en $n$, nous savons le factoriser en produit de termes de degré 1 en cherchant ses racines. Plutôt que de calculer un discriminant, notons que 1 est racine évidente, et donc qu'on peut le factoriser par $n-1$.

## Solution de l'exercice 4.19

Notons tout de suite que les deux sommes données dans l'énoncé sont toujours égales puisque pour $k > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $k > \frac{n}{2}$, et donc $n - k < n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$, si bien que $\binom{n-k}{k} = 0$.

Prouvons la première identité par récurrence double sur $n \in \mathbf{N}$.

Pour $n = 0$, on a $F_1 = 1 = \binom{0}{0} = \sum_{k=0}^{0}\binom{0-k}{k}$.

Et pour $n = 1$, on a $F_2 = \binom{1}{0} = \sum_{k=0}^{1}\binom{1-k}{k}$.

Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $F_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k}$ et $F_{n+2} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1-k}{k}$.

Alors on a

$$\begin{aligned}
F_{n+3} = F_{n+2} + F_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1-k}{k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1-k}{k} + \sum_{i=1}^{n+1}\binom{n+1-i}{i-1}\\
&= \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n+1}\left(\binom{n+1-k}{k} + \binom{n+1-k}{k-1}\right)\\
&= \binom{n+2}{0} + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+2-k}{k}\\
&= \binom{n+2}{0} + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+2-k}{k} + \underbrace{\binom{n+2-(n+2)}{n+2}}_{=0}\\
&= \sum_{k=0}^{n+2}\binom{n+2-k}{k};
\end{aligned}$$

**Chgt d'indice**
$i = k+1$.

Identité de Pascal.

Par le principe de récurrence double, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $F_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k}$.

## Solution de l'exercice 4.20

Soit $n \in \mathbf{N}$, et soient $x, y$ deux réels strictement positifs. Alors

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{x}{y}\right)^n + \left(1+\frac{y}{x}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{y}\right)^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{y}{x}\right)^k\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\left(\frac{x}{y}\right)^k + \left(\frac{y}{x}\right)^k\right).
\end{aligned}$$

Mais pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\left(\frac{y}{x}\right)^k = \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^k}$.

Or, pour $t > 0$, on a

$$(t-1)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow 2t \leqslant t^2+1 \Leftrightarrow \frac{t^2+1}{t} \geqslant 2 \Leftrightarrow t+\frac{1}{t} \geqslant 2.$$

De plus, il y a égalité si et seulement si $(t-1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

**Alternative**

Un autre moyen d'établir cette inégalité (classique) est d'étudier la fonction $t \mapsto t + \frac{1}{t}$.

En particulier, pour $t = \left(\frac{x}{y}\right)^k$, il vient donc

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)^n + \left(1+\frac{y}{x}\right)^n \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2 \leqslant 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \leqslant 2(1+1)^n \leqslant 2^{n+1}.$$

Si $n = 0$, l'inégalité est évidemment une égalité.
Et si $n > 0$, et que $x = y$, alors il y a encore égalité puisque $2^n + 2^n = 2^{n+1}$.
En revanche, si $x \neq y$, alors $\frac{x}{y} \neq 1$ et donc comme mentionné précédemment $\frac{x}{y} + \frac{1}{\frac{x}{y}} > 2$.
Donc dans la somme, le terme correspondant à $k = 1$ est une inégalité stricte, donc l'inégalité finale est également stricte.
Ainsi, l'inégalité $\left(1+\frac{x}{y}\right)^n + \left(1+\frac{y}{x}\right)^n \geqslant 2^{n+1}$ est une égalité si et seulement si $n = 0$ ou $x = y$.

**Remarque**

Ce terme n'apparaît dans la somme que si $n \geqslant 1$, raison pour laquelle nous avons du traiter à part le cas $n = 0$.

## Solution de l'exercice 4.21

Notons que le premier et le dernier terme de la somme sont égaux à 1, et donc que $u_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\binom{n}{k}} \geqslant 2$.

D'autre part, pour $k = 1$ et $k = n-1$, on a $\binom{n}{k} = \frac{1}{n}$.
Pour les autres coefficients, essayons de nous faire une petite intuition de ce qu'il se passe.
Les coefficients que nous considérons sont sur une même ligne du triangle de Pascal.
Or, vous avez probablement déjà constaté que sur une ligne du triangle de Pascal, les coefficients croissent jusqu'au milieu de la ligne, puis décroissent.
En particulier, si $k \in [\![2, n-2]\!]$, on doit avoir $\binom{n}{k} \geqslant \binom{n}{2} \geqslant \frac{n(n-1)}{2}$.
Admettons provisoirement ceci. On aura alors, pour $k \in [\![2, n-2]\!]$, $\frac{1}{\binom{n}{k}} \leqslant \frac{2}{n(n-1)}$.

Et donc

$$\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \leqslant \sum_{k=2}^{n-2} \frac{2}{n(n-1)} \leqslant (n-3)\frac{2}{n(n-1)}.$$

Et par conséquent, il vient

$$2 \leqslant u_n \leqslant 2 + \frac{2}{n} + 2\frac{(n-3)}{n(n-1)}.$$

Mais $\frac{2(n-3)}{n(n-1)} = \frac{\frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}}{n - \frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Et donc par le théorème des gendarmes, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$.

Reste à présent à prouver ce que nous n'avons que «constaté» sur le triangle de Pascal.
Soit donc $k \in [\![2, n-2]\!]$. Alors

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\times 2\times\cdots\times k} = \frac{n(n-1)}{2}\,\frac{(n-2)(n-3)\cdots(n-k+1)}{k\times(k-1)\times\cdots\times 3} = \frac{n(n-1)}{2}\,\frac{n-2}{k}\,\frac{n-3}{k-1}\cdots\frac{n-k+1}{3}.$$

Or, on a $k \leqslant n-2$, de sorte que $\frac{n-2}{k} \geqslant 1$. Puis $\frac{n-3}{k-1} \geqslant 1, \dots, \frac{n-k+1}{3} \geqslant 1$.
Et donc on a bien, comme annoncé, $\binom{n}{k} \geqslant \frac{n(n-1)}{2}$.

Une autre manière de le dire : pour $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} = \frac{n!(k+1)!(n-k-1)!}{n!k!(n-k)!} = \frac{k+1}{n-k}.$$

Et donc on a $\binom{n}{k} \geqslant \binom{n}{k+1} \Leftrightarrow \frac{k+1}{n-k} \geqslant 1 \Leftrightarrow k+1 \geqslant n-k \Leftrightarrow k \geqslant \frac{n-1}{2} \Leftrightarrow k \geqslant \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$.
Donc les coefficients binomiaux croissent bien jusqu'au milieu de l'une ligne du triangle de Pascal, de sorte que pour $k \in [\![2, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor]\!]$, $\binom{n}{k} \geqslant \binom{n}{2}$ et pour $k \in [\![\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1, n-2]\!]$, $\binom{n}{k} \geqslant \binom{n}{n-2} = \binom{n}{2}$.

***Remarque*** *: il aurait été possible d'utiliser le même raisonnement pour dire que pour tout* $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\binom{n}{k} \geqslant \binom{n}{1} \geqslant n$.

*Mais alors nous pourrions seulement affirmer que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\binom{n}{k}} \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} \geqslant \frac{n-2}{n}$.

*Nous aurions alors obtenu l'encadrement* $2 \leqslant u_n \leqslant 2 + \frac{n-2}{n}$.
*Malheureusement, le membre de droite tend alors vers 3, et donc le théorème des gendarmes ne peut plus s'appliquer.*

## Solution de l'exercice 4.22

Il s'agit d'utiliser l'identité de Pascal : pour $i \geqslant 1$, $\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i} + \binom{n}{i-1}$. Il vient alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{k}\binom{n+1}{i}\right] &= \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\left[1+\sum_{i=1}^{k}\binom{n+1}{i}\right]\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\left[1+\sum_{i=1}^{k}\left(\binom{n}{i}+\binom{n}{i-1}\right)\right]\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\left[1+\sum_{i=1}^{k}\binom{n}{i}+\sum_{i=1}^{k}\binom{n}{i-1}\right]\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\left[1+\sum_{i=1}^{k}\binom{n}{i}+\sum_{j=0}^{k-1}\binom{n}{j}\right]\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\left[2+2\sum_{i=1}^{k-1}\binom{n}{i}+\binom{n}{k}\right]\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\left[2\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n}{i}+\binom{n}{k}\right]\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 + 2\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n}{k}\binom{n}{i} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 + 2\sum_{0\leqslant i<k\leqslant n}\binom{n}{k}\binom{n}{i} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right)^2 \\
&= (2^n)^2 = 2^{2n}.
\end{aligned}$$

*Rappelons que la formule clé que nous avons utilisée à l'avant dernière étape est*

$$(a_1+\cdots+a_n)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j.$$

## SOLUTION DE L'EXERCICE 4.23

On a donc

$$\begin{cases} x+y+2z=3 \\ x+2y+z=1 \\ 2x+y+z=0 \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-2L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+y+2z=3 \\ y-z=-2 \\ -y-3z=-6 \end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+y+2z=3 \\ y-z=-2 \\ -4z=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \\ z=2 \end{cases}$$

Donc l'unique solution au système est $(-1,0,2)$.

De même, on a

$$\begin{cases} x \phantom{-y} +2z=1 \\ -y+z=2 \\ x-2y \phantom{+z} =1 \end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3-L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x \phantom{-y} +2z=1 \\ -y+z=2 \\ -2y-2z=0 \end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3-2L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x \phantom{-y} +2z=1 \\ -y+z=2 \\ -4z=-4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \\ z=1 \end{cases}$$

Donc la seule solution au système est $(-1,-1,1)$.

De même, le dernier système possède une unique solution, qui est $(1,0,-2,-1)$.

## SOLUTION DE L'EXERCICE 4.24

1. Commençons par échanger la première ligne et la seconde, ce qui n'est pas obligatoire, mais nous permettra d'utiliser le 1 comme pivot plutôt qu'un 3.

$$\begin{cases} 3x-6y-6z+8t=2 \\ x-2y-3z+4t=0 \\ -2x+4y+4z-5t=3 \\ 6x-12y-12z+16t=4 \end{cases} \underset{L_1\leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x-2y-3z+4t=0 \\ 3x-6y-6z+8t=2 \\ -2x+4y+4z-5t=3 \\ 6x-12y-12z+16t=4 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-3L_1 \\ L_3\leftarrow L_3+2L_1 \\ L_4\leftarrow L_4-6L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x-2y-3z+4t=0 \\ 3z-4t=2 \\ -2z+3t=3 \\ 6z-8t=4 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_3\leftarrow 3L_3+2L_2 \\ L_4\leftarrow L_4-2L_2}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x-2y-3z+4t=0 \\ 3z-4t=2 \\ t=13 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x-2y-3z+4t=0 \\ z=18 \\ t=13 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=2y+2 \\ z=18 \\ t=13 \end{cases}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions est $\{(2y+2,y,18,13)\,,\ y\in\mathbf{K}\}$.

2. En soustrayant les deux lignes, il vient

$$\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x-y+z-t=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t=1 \\ -2y-2t=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=1-t \end{cases}.$$

Donc l'ensemble des solutions est $\left\{(-z,1-t,z,t)\,,\ (z,t)\in\mathbf{K}^2\right\}$.

3. Allons-y :

$$\begin{cases} x+y+2z=0 \\ 2x+5y-3z=1 \\ 3x+4y+4z=1 \\ x-2y-4z=3 \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-3L_1 \\ L_4\leftarrow L_4-L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+y+2z=0 \\ 3y-7z=1 \\ -2z=1 \\ -3y-6z=3 \end{cases}$$

$$\underset{L_4\leftarrow L_4+L_2}{\Longleftrightarrow}\begin{cases} x+\ y+\ 2z=0\\ \quad 3y-\ 7z=1\\ \qquad -\ 2z=1\\ \qquad -13z=4\end{cases}$$

Les deux dernières équations ne peuvent être satisfaites simultanément, donc le système ne possède pas de solution.

## Solution de l'exercice 4.25

1. On a

$$\begin{cases}-5x+y+2z=2\\ 2x+y+2z=2\\ 3x-y-2z=2\end{cases}\underset{\substack{L_2\leftarrow 5L_2+2L_1\\ L_3\leftarrow 5L_3+3L_1}}{\Longleftrightarrow}\begin{cases}-5x+\ y+\ 2z=2\\ \quad 7y+14z=14\\ \quad -2y-\ 4z=16\end{cases}$$
$$\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2/7\\ L_3\leftarrow -L_3/2}}{\Longleftrightarrow}\begin{cases}-5x+y+2z=2\\ y+2z=2\\ y+2z=-8\end{cases}$$

Les deux dernières équations sont clairement incompatibles[8], donc le système ne possède pas de solution.

[8] Si on ne voit pas que ces lignes sont incompatibles, on peut réaliser l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, qui nous conduit à l'équation $0 = -10$, qui n'a pas de solution.

2. On a

$$\begin{cases}4x-(3+i)y-(9+3i)z=5-3i\\ 2x-2y-6z=2-2i\\ 4x-(2+2i)y-(6+6i)z=6-2i\end{cases}\underset{\substack{L_2\leftarrow 2L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\Longleftrightarrow}\begin{cases}4x-(3+i)y-(9+3i)z=5-3i\\ (-1+i)y+(-3+3i)z=-1-i\\ (1-i)y+(3-3i)z=1+i\end{cases}$$
$$\underset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{\Longleftrightarrow}\begin{cases}4x-(3+i)y-(9+3i)z=5-3i\\ (-1+i)y+(-3+3i)z=-1-i\\ 0=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}4x-(3+i)y-(9+3i)z=5-3i\\ y=\dfrac{1+i}{1-i}-3z\end{cases}$$

Mais $\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2i}{2}=i$.
Et donc il vient $y = i - 3z$ et par conséquent

$$4x = 5-3i+(9+3i)z+(3+i)\,(i-3z) = 5-3i+(9+3i)z+3i-1-9z-3iz = 4.$$

On en déduit que l'ensemble des solutions est $\{(1, i-3z, z),\ z\in\mathbf{C}\}$.

3. Il est bien entendu possible d'utiliser la méthode du pivot : retirer la première ligne à chacune des autres fera disparaître les $x_1$, et nous laissera une deuxième ligne avec un coefficient en $x_2$ égal à 1.
Puis nous retirerons la seconde ligne à chacune des suivantes, etc.
Mais notons qu'il est possible d'aller plus vite en réalisant les opérations $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$, puis $L_{n-1}\leftarrow L_{n-1}-L_{n-2},\dots,L_2\leftarrow L_2-L_1$.
On obtient alors le système triangulaire suivant

**Remarque**
Notons que la méthode du pivot aurait fait apparaître le même système triangulaire, mais aurait nécessité plus d'opérations.
Il est d'ailleurs intéressant d'essayer de compter le nombre d'opérations élémentaires demandé par chacune de ces méthodes.

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=1\\ \quad x_2+x_3+\cdots+x_n=0\\ \qquad x_3+\cdots+x_n=0\\ \qquad\vdots\\ \qquad x_{n-1}+x_n=0\\ \qquad x_n=0\end{cases}$$

Ce système triangulaire possède alors pour unique solution $(1,0,\dots,0)$.

## Solution de l'exercice 4.26

1. Il est naturel de commencer par soustraire la première ligne aux deux suivantes :

$$\mathscr{S} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & m \\ & & (m+1)y & - & 2z & = & 1-m \\ & & & - & 2z & = & 1-m \end{array}\right.$$

► **Si** $m \neq -1$ : alors ce système est triangulaire, et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.
Il est donc de Cramer, et il vient successivement $z = \dfrac{m-1}{2}$, $y = 0$ et $x = m - z = \dfrac{m+1}{2}$.
L'unique solution du système est donc $\left(\dfrac{m+1}{2}, 0, \dfrac{m-1}{2}\right)$.

► **Si** $m = -1$ : le système est alors équivalent à $\left\{\begin{array}{l} x-y+\ \ z=-1 \\ \quad\ -2z=2 \\ \quad\ -2z=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=y \\ z=-1 \end{array}\right.$, et donc l'ensemble des solutions est $\{(y, y, -1),\ y \in \mathbf{R}\}$.

2. Commençons par échanger la première et la dernière ligne, car le cas où $m = 0$ est problématique : on ne pourrait pas prendre $m$ comme pivot.
Il vient alors

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} mx & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & my & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & mz & = & 1 \end{array}\right. \underset{L_1\leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & mz & = & 1 \\ x & + & my & + & z & = & 1 \\ mx & + & y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2\leftrightarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-mL_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & mz & = & 1 \\ & & (m-1)y & + & (1-m)z & = & 0 \\ & & (1-m)y & + & (1-m^2)z & = & 1-m \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3\leftrightarrow L_3+L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & mz & = & 1 \\ & & (m-1)y & + & (1-m)z & = & 0 \\ & & & & (2-m-m^2)z & = & 1-m \end{array}\right.$$

► Si $m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow m \in \{1, -2\}$, alors la dernière équation ne possède pas de solution car $1 - m \neq 0$.
► En revanche, si $m^2 - m - 1 \neq 0$, alors $z = \dfrac{m-1}{m^2+m-2} = \dfrac{1}{m+2}$, $y = z$, et donc $x = 1 - (1+m)z = 1 - \dfrac{m+1}{m+2} = \dfrac{1}{m+2}$.
Donc le système possède une unique solution, qui est $\left(\dfrac{1}{m+2}, \dfrac{1}{m+2}, \dfrac{1}{m+2}\right)$.

**Détails**
L'opération $L_2 \leftarrow mL_2 - L_1$ n'est pas licite si $m = 0$, puisqu'elle revient à supprimer $L_2$ et la remplacer par $-L_1$ : on a donc perdu une équation (la seconde).

## SOLUTION DE L'EXERCICE 4.27

Commençons notre pivot :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & az & = & 2 \\ 2x & + & ay & + & 2z & = & 3 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-2L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 1 \\ & & y & + & (a+1)z & = & 1 \\ & & (a-2)y & + & 4z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3-(a-2)L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 1 \\ & & y & + & (a+1)z & = & 1 \\ & & & & (-a^2+a+6)z & = & 3-a \end{array}\right.$$

► Si $a^2 - a - 6 = 0 \Leftrightarrow a = -2$ ou $a = 3$.
Alors soit $a = -2$, et la dernière ligne est $0 = 5$, qui n'est pas possible, donc le système est incompatible.
Soit $a = 3$, et donc la dernière ligne est $0 = 0$, qu'on peut donc supprimer.
Le système obtenu est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont non nuls, et possède une infinité de solutions.
► Si $a^2 - a - 6 \neq 0$, alors le système est échelonné, et possède une unique solution (que l'on pourrait exprimer en fonction de $a$, mais ce n'est pas demandé).