TD 35 : Familles sommables

Dans tout le TD, si $\alpha > 1$, on note $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. On pourra admettre si besoin que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et que $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.

► Étude de sommabilité et calcul de sommes

Exercice 35.1 Soit $q \in [0,1[$. Pour $n \in \mathbf{Z}$, on pose $u_n = q^{|n|}$. **F**

Montrer que la famille $(u_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est sommable, avec $\sum_{n\in\mathbf{Z}} u_n = \frac{1+q}{1-q}$.

Exercice 35.2 Soit $r \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbf{R}$. Montrer la sommabilité et calculer la somme de $\left(r^{|n|}e^{in\theta}\right)_{n\in\mathbf{Z}}$. **F**

Exercice 35.3 La famille $(x)_{x\in\mathbf{Q}\cap[0,1]}$ est-elle sommable ? Même question pour $\left(\frac{1}{x^2}\right)_{x\in\mathbf{Q}\cap[1,+\infty[}$. **PD**

Exercice 35.4 Si $q \in \mathbf{Q}$, on note d_q le dénominateur de la forme irréductible de q. **AD**

Étudier la sommabilité de la famille $\left(\frac{1}{d_q^3}\right)_{q\in\mathbf{Q}\cap[0,1]}$.

Exercice 35.5 Soit $I = (\mathbf{N}^*)^2$. Pour $(i,j) \in I$, on pose $u_{i,j} = \frac{1}{\max(i,j)^3}$. **AD**

À l'aide du théorème de sommation par paquets, prouver que $\sum_{(i,j)\in I} u_{i,j} = 2\zeta(2) - \zeta(3)$.

Exercice 35.6 Calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n\left(\zeta(n) - 1\right)$ et $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2p)}{2^{2p}}$. **AD**

Exercice 35.7 Déterminer les valeurs de $\alpha \in \mathbf{R}$ pour lesquelles $\left(\frac{1}{(p+q)^\alpha}\right)_{(p,q)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*}$ est sommable. **PD**

Exercice 35.8 Étudier la sommabilité de la famille $\left(\frac{1}{ab(a+b)}\right)_{(a,b)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*}$. **AD**

► Interversion de sommes

Exercice 35.9 Après avoir justifié son existence, calculer $\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=p}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{q^3}$ en fonction de $\zeta(3)$. **AD**

Exercice 35.10 Pour $(n,p) \in (\mathbf{N}^*)^2$, on pose $u_{n,p} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = p \\ \frac{1}{n^2 - p^2} & \text{sinon} \end{cases}$ **AD**

1. Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,p} = \frac{3}{4p^2}$.
2. Après avoir justifié leur existence, vérifier que $\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p} \neq \sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,p}$.
3. Quelle conclusion en tirez-vous ?

► Divers

Exercice 35.11 Soit $\sigma : \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ une permutation de $\mathbf{N}^*$. **AD**

1. Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{1}{\sigma(n)^2}$, et le cas échéant, calculer sa somme.

2. Même question pour la série de terme général $\dfrac{1}{\sigma(n)}$.

Exercice 35.12 Soit $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| < 1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n) z^n$, où $d(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n. AD

De même, écrire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nz^n}{1-z^n}$ sous la forme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} s(n) z^n$, où $s(n)$ est une suite à préciser dont on donnera une interprétation arithmétique.

Exercice 35.13 (Oral Mines-Ponts) D

1. Pour $n \in \mathbf{Z}$, calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} te^{-int}\,dt$.
2. Soit I une partie finie de $\mathbf{N}^*$, et soient $(a_n)_{n\in I}$ et $(b_n)_{n\in I}$ deux suites finies de réels positifs. Montrer que
$$\sum_{(m,n)\in I^2} \frac{a_n b_m}{m+n} \leqslant \pi \sqrt{\sum_{i\in I} a_i^2 \sum_{i\in I} b_i^2}.$$
3. Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ deux suites réelles telles que les familles $(a_n^2)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(b_n^2)_{n\in\mathbf{N}^*}$ soient sommables. Montrer que $\left(\dfrac{a_n b_m}{m+n}\right)_{(m,n)\in(\mathbf{N}^*)^2}$ est sommable et que
$$\sum_{(m,n)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*} \frac{a_n b_m}{m+n} \leqslant \pi \sqrt{\sum_{n\in\mathbf{N}^*} a_n^2 \sum_{m\in\mathbf{N}^*} b_m^2}.$$

Exercice 35.14 (Oral Centrale MP 2024) D

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note $\Omega(n)$ le nombre de facteurs premiers de n comptés avec multiplicité.
Autrement dit, $\Omega(n) = \displaystyle\sum_{p \text{ premier}} v_p(n)$. On pose également $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$ et $\Lambda(n) = \displaystyle\sum_{d|n} \lambda(d)$.

1. Montrer que si m et n sont deux entiers premiers entre eux, alors $\lambda(mn) = \lambda(m)\lambda(n)$, puis que $\Lambda(mn) = \Lambda(m)\Lambda(n)$.
2. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, donner une expression simple de $\Lambda(n)$.
3. Prouver que pour tout $z \in \mathbf{C}$, $|z| < 1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda(n) z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} z^{n^2}$.

Exercice 35.15 (Oral X) D

Montrer, pour tout $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x| < 1$, les identités
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} = \frac{x}{1-x}.$$

On veillera à bien justifier les convergences de toutes les séries en jeu.

Exercice 35.16 Étudier l'existence et le cas échéant, calculer la somme $\displaystyle\sum_{\substack{p,q\geqslant 1\\ p\wedge q=1}} \frac{1}{p^2q^2}$.

▸ Produit de Cauchy

Exercice 35.17 Soit $x \in]-1,1[$. Déterminer une suite $(a_n)_n$ telle que $\dfrac{e^x}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. PD

Exercice 35.18 Formule du binôme négatif. AD

Soit $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| < 1$, et soit $p \in \mathbf{N}$. Montrer que
$$\frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{p+n}{p} z^n.$$

Exercice 35.19 Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ la $n^{\text{ème}}$ somme partielle de la série harmonique. AD

Montrer que $e \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n!}$.

CORRECTION DES EXERCICES DU TD 35

SOLUTION DE L'EXERCICE 35.1

On a $\mathbf{Z} = \mathbf{N} \coprod \underbrace{\{-n,\ n \in \mathbf{N}^*\}}_{=A}$.

On a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Donc $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est sommable et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}} u_n = \frac{1}{1-q}$.

Puisque $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{N}^* & \longrightarrow & A \\ n & \longmapsto & -n \end{array}\right.$ est une bijection, la famille $(u_n)_{n\in A}$ est sommable si et seulement si la famille $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}^*}$ l'est.

Soit encore si et seulement si la série[1] $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_{\varphi(n)} = \sum_{n\geqslant 1} q^n$ converge.

[1] À termes positifs.

C'est bien le cas, et sa somme vaut $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$.

Donc $\displaystyle\sum_{n\in A} u_n = \frac{q}{1-q}$.

On en déduit donc que $(u_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est sommable et que

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} u_n = \sum_{n\in\mathbf{N}} u_n + \sum_{n\in A} u_n = \frac{1}{1-q} + \frac{q}{1-q} = \frac{1+q}{1-q}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 35.2

On a $\left|r^{|n|}e^{in\theta}\right| = r^{|n|}$.

Puisque $\mathbf{Z} = \mathbf{N} \coprod (-\mathbf{N}^*)$, il s'agit donc d'étudier les sommabilités de $(r^n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(r^{-n})_{n\in-\mathbf{N}^*}$.

Mais $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} r^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} r^n$ sont convergentes, donc ces deux familles sont sommables.

Et ainsi, la famille $\left(r^{|n|}e^{in\theta}\right)_{n\in\mathbf{Z}}$ est sommable.

On a alors

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} r^{|n|}e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n e^{in\theta} + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n e^{-in\theta} = \frac{1}{1-re^{i\theta}} + re^{-i\theta}\frac{1}{1-re^{-i\theta}} = \frac{1-re^{-i\theta}+re^{-i\theta}-r^2}{(1-re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 35.3

Si on note $I = \left\{1-\frac{1}{n},\ n\in\mathbf{N}^*\right\} \subset \mathbf{Q} \cap [0,1]$, alors la famille $(x)_{x\in I}$ n'est pas sommable, puisque $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ diverge.

Donc la «grosse» famille $(x)_{x\in\mathbf{Q}\cap[0,1]}$ n'est pas sommable.

Rappel
Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors pour tout $J \subset I$, $(u_i)_{i\in J}$ est sommable.

De même, si $I = \left\{1+\frac{1}{n}, n\in\mathbf{N}^*\right\} \subset \mathbf{Q}\cap[1,+\infty[$ alors $\displaystyle\sum_{x\in I}\frac{1}{x^2} = +\infty$ car la série de terme général $\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}$ diverge, et donc $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)_{x\in\mathbf{Q}\cap[1,+\infty[}$ n'est pas sommable.

SOLUTION DE L'EXERCICE 35.4

Notons qu'à $n\in\mathbf{N}^*$ fixé, il n'existe qu'un nombre fini de rationnels $q\in\mathbf{Q}\cap[0,1]$ tels que $u_q = n$.

En effet, il s'agit des $\dfrac{k}{n}$, avec $0\leqslant k\leqslant n$ et $k\wedge n = 1$.

En particulier, $I_n = \{q\in\mathbf{Q}\cap[0,1] \mid u_q = n\}$ a un cardinal majoré par $n+1$.

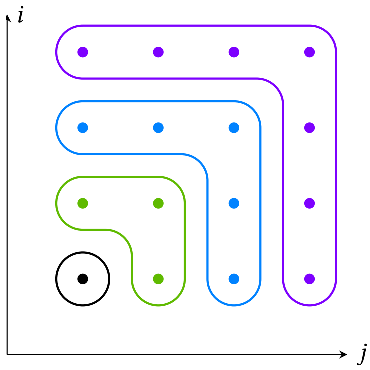
Et donc en notant que $\mathbf{Q}\cap[0,1] = \displaystyle\coprod_{n\in\mathbf{N}^*}\{q\in\mathbf{Q}\cap[0,1] \mid u_q = n\}$, alors on a :

- pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $0 \leqslant \displaystyle\sum_{q \in I_n} \frac{1}{u_q^3} \leqslant \frac{n+1}{n^3}$.
- la série de terme général $\dfrac{n+1}{n^3} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ converge, si bien que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \sum_{q \in I_q} \frac{1}{u_q^3}$ converge.

Par le théorème de sommation par paquets, $\left(\dfrac{1}{u_q^3}\right)_{q \in \mathbf{Q} \cap [0,1]}$ est sommable.

Solution de l'exercice 35.5

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, posons $I_n = \{(i,j) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* \mid \max(i,j) = n\}$.
Autrement dit, on utilise les «paquets» ci-dessous.



On a alors $\mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* = \displaystyle\coprod_{n=1}^{+\infty} I_n$, et il est facile de constater[2] que $\mathrm{Card}(I_n) = 2n - 1$.

[2] Un dessin aide bien, mais on peut formaliser sans grande difficulté en dressant la liste des éléments de I_n.

On a donc $\displaystyle\sum_{(i,j) \in I_n} \frac{1}{\max(i,j)^3} = \sum_{(i,j) \in I_n} \frac{1}{n^3} = \frac{\mathrm{Card}(I_n)}{n^3} = \frac{2n-1}{n^3} = 2\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}$.
Il s'agit là du terme général d'une série convergente, donc la famille est bien sommable et

$$\sum_{i,j \geqslant 1} \frac{1}{\max(i,j)^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(i,j) \in I_n} \frac{1}{\max(i,j)^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right) = 2\zeta(2) - \zeta(3).$$

Solution de l'exercice 35.6

Pour la première, notons que pour $n \geqslant 2$, $\zeta(n) - 1 = \displaystyle\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^n} > 0$.

Commençons par étudier la sommabilité de la famille $\left(\dfrac{(-1)^n}{p^n}\right)_{n,p \geqslant 2}$.

Il s'agit donc d'étudier celle de la famille $\left(\dfrac{1}{p^n}\right)_{n,p \geqslant 2}$.

Or on a, à $p \geqslant 2$ fixé, $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{1}{p^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{1}{p^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{1}{p^2} \frac{p}{p-1} = \frac{1}{p(p-1)}$, qui est le terme général d'une série convergente, puisqu'équivalent à $\dfrac{1}{p^2}$.

Donc le théorème de Fubini positif prouve la sommabilité de la famille, et donc Fubini s'applique :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n (\zeta(n) - 1) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{p^n} \\
&= \sum_{p=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{p^n} \\
&= \sum_{p=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} (-p^{-1}))^n \\
&= \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Série géométrique de raison $-p^{-1}$.

$$= \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p(p+1)}$$
$$= \sum_{p=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}.$$

Série télescopique.

Sur le même principe, on a clairement, pour $p \geqslant 1$, $\zeta(2p) \leqslant \zeta(2)$, si bien que $\dfrac{\zeta(2p)}{2^{2p}} \leqslant \dfrac{\zeta(2)}{2^{2p}}$, qui est le terme général d'une série convergente.

Puisque par ailleurs, $\dfrac{\zeta(2p)}{2^{2p}} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2p}2^{2p}}$, le théorème Fubini positif nous garantit la sommabilité de $\left(\dfrac{1}{n^{2p}2^{2p}}\right)_{n,p\geqslant 1}$.

Et alors on peut intervertir les sommes :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2p)}{2^{2p}} = \sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^{2p}}$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2)^p}$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2}\frac{1}{1-\frac{1}{4n^2}}$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}.$$

Décomposition en élment simples.

Série télescopique.

SOLUTION DE L'EXERCICE 35.7

Notons, pour $n \geqslant 2$, $I_n = \{(p,q) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* \mid p+q=n\}$.

Alors I_n est un ensemble fini, de cardinal $n-1$, et $\mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* = \displaystyle\coprod_{n=2}^{+\infty} I_n$.

On a alors $\displaystyle\sum_{(p,q)\in I_n} \frac{1}{(p+q)^\alpha} = \sum_{(p,q)\in I_n} \frac{1}{n^\alpha} = \frac{n-1}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

Par critère des équivalents pour les séries à termes positifs, on a donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\sum_{(p,q)\in I_n} \frac{1}{(p+q)^\alpha}$ qui converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1 \Leftrightarrow \alpha > 2$.

Et donc par le théorème de sommation par paquets, la famille $\left(\dfrac{1}{(p+q)^\alpha}\right)_{p,q\geqslant 1}$ est sommable si et seulement si $\alpha > 2$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 35.8

Par sommation par paquets, et puisqu'il s'agit d'une famille de réels positifs, on a

$$\sum_{(a,b)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*} \frac{1}{ab(a+b)} = \sum_{n\geqslant 2}\sum_{a=1}^{n-1} \frac{1}{a(n-a)n} = \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n}\sum_{a=1}^{n-1} \frac{1}{a(n-a)}.$$

Détails
On a utilisé les paquets $I_n = \{(a,b) \mid a+b=n\}$.

Une décomposition en éléments simples nous donne

$$\frac{1}{a(n-a)} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{n-a}\right).$$

Et donc $\displaystyle\sum_{a=1}^{n-1}\frac{1}{a(n-a)} = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$.

Il est classique[3] que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$, si bien que

$$\sum_{a=1}^{n-1}\frac{1}{an(n-a)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\ln(n-1)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\ln n}{n^2}.$$

Puisque $\displaystyle\frac{\ln n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^{3/2}\right)$, la série de terme général $\displaystyle\sum_{a=1}^{n-1}\frac{1}{a(n-a)}$ converge, si bien que

$$\sum_{(a,b)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}*}\frac{1}{ab(a+b)} < +\infty.$$

Autrement dit, la famille étudiée est sommable.

[3] Par comparaison série/intégrale.

Solution de l'exercice 35.9

Commençons par noter que la famille des $\displaystyle\left(\frac{(-1)^p}{q^3}\right)_{\substack{p,q\in\mathbf{N}^*\\ p\leqslant q}}$ est bien sommable.

En effet, par comparaison série intégrale, pour tout $p\in\mathbf{N}^*$,

$$\sum_{k=p}^{N}\frac{1}{k^3} \leqslant \int_p^{N+1}\frac{dt}{t^3} \Leftrightarrow \sum_{k=p}^{N}\frac{1}{k^3} \leqslant \left[-\frac{2}{t^2}\right]_p^{N+1} \leqslant \frac{2}{p^2}-\frac{2}{(N+1)^2}.$$

Et donc $\displaystyle 0 \leqslant \sum_{q=p}^{+\infty}\frac{1}{q^3} \leqslant \frac{2}{p^2}$, si bien que par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{p\geqslant 1}\left(\sum_{q=p}^{+\infty}\frac{1}{q^3}\right)$ converge.

Ainsi, la famille $\displaystyle\left(\frac{(-1)^p}{q^3}\right)_{\substack{p,q\in\mathbf{N}^*\\ p\leqslant q}}$ est sommable.

Par Fubini, on a alors

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=p}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{q^3} = \sum_{q=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{q}\frac{(-1)^p}{q^3} = \sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{q^3}\sum_{p=1}^{q}(-1)^p.$$

Mais $\displaystyle\sum_{p=1}^{q}(-1)^q = \frac{(-1)^q-1}{2}$.

Donc $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=p}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{q^3} = \frac{1}{2}\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{(-1)^q}{q^3} - \frac{1}{2}\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{q^3}$.

Reste à calculer cette dernière somme.

Notons que $\displaystyle\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{(-1)^q}{q^3} = \sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{(2q)^3} - \sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{(2q-1)^3} = \frac{1}{8}\zeta(3) + \sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{(2q-1)^3}$.

Et par ailleurs, pour les mêmes raisons,

$$\zeta(3) = \sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{(2q)^3} + \sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{(2q-1)^3} = \frac{1}{8}\zeta(3) + \sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{(2q-1)^3}.$$

On en déduit donc que $\displaystyle\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{(2q-1)^3} = \frac{7}{8}\zeta(3)$.

Et donc

$$\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{(-1)^q}{q^3} = \frac{1}{8}\zeta(3) - \frac{7}{8}\zeta(3) = -\frac{3}{4}\zeta(3).$$

Détails

Si on veut vraiment se ramener à une famille définie sur $\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*$, on peut prendre la famille définie par

$$u_{p,q} = \begin{cases} 0 & \text{si } q<p \\ \frac{(-1)^p}{q^3} & \text{si } p\geqslant q \end{cases}$$

Détails

C'est la somme d'une suite géométrique de raison -1, mais on peut aussi le retrouver facilement : ça vaut -1 si q impair, 0 si q pair.

Remarque

Ces deux séries sont clairement convergentes.

Il vient donc enfin,

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=p}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{q^3} = -\frac{3}{8}\zeta(3) - \frac{1}{2}\zeta(3) = -\frac{7}{8}\zeta(3).$$

Alternative : plus simplement, si on note $a_q = \begin{cases} -1 & \text{si } q \text{ impair} \\ 0 & \text{si } q \text{ pair}\end{cases}$, on a prouvé plus tôt que

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=p}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{q^3} = \sum_{q=1}^{+\infty}\frac{a_q}{q^3} = -\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{(2q-1)^3} = -\frac{7}{8}\zeta(3).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 35.10

1. Pour $n \neq p$, une décomposition en éléments simples[4] nous donne $\frac{1}{n^2-p^2} = \frac{1}{2p}\left(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p}\right)$.
Donc il vient, pour p fixé, et $N > 2p$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} u_{n,p} &= \sum_{n=1}^{p-1}\frac{1}{2p}\left(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p}\right) + \sum_{n=p+1}^{N}\frac{1}{2p}\left(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p}\right)\\
&= \frac{1}{2p}\left(\sum_{n=1}^{p-1}\frac{1}{n-p} - \sum_{n=1}^{p-1}\frac{1}{n+p} + \sum_{n=p+1}^{N}\frac{1}{n-p} - \sum_{n=p+1}^{N}\frac{1}{n+p}\right)\\
&= \frac{1}{2p}\left(\sum_{k=1-p}^{-1}\frac{1}{k} - \sum_{k=p+1}^{2p-1}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{N-p}\frac{1}{k} - \sum_{k=2p+1}^{N+p}\frac{1}{k}\right)\\
&= \frac{1}{2p}\left(-\cancel{\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k}} - \sum_{k=p+1}^{2p-1}\frac{1}{k} + \cancel{\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k}} + \sum_{k=p}^{N-p}\frac{1}{k} - \sum_{k=2p+1}^{N+p}\frac{1}{k}\right)\\
&= \frac{1}{2p}\left(-\cancel{\sum_{k=p+1}^{2p-1}\frac{1}{k}} + \frac{1}{p} + \cancel{\sum_{k=p+1}^{2p-1}\frac{1}{k}} + \sum_{k=2p}^{N-p}\frac{1}{k} - \sum_{k=2p+1}^{N+p}\frac{1}{k}\right)\\
&= \frac{1}{2p}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{2p} - \sum_{k=N-p+1}^{N+p}\frac{1}{k}\right)\\
&\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2p}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{2p}\right) = \frac{3}{4p^2}.
\end{aligned}$$

Donc on a bien, comme annoncé, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,p} = \frac{3}{4p^2}$.

[4] De la fraction rationnelle $\frac{1}{X^2-n^2}$.

Détails
La somme restante est formée d'un nombre **fixé** de termes qui tendent tous vers 0.

2. L'existence de $\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,p}$ découle directement de la question précédente : il s'agit d'une somme de Riemann.
On a donc $\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,p} = \frac{3}{4}\zeta(2) > 0$.
Et puisque $u_{n,p} = -u_{p,n}$, on a de même,
$$\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p} = -\frac{3}{4n^2}$$
et donc $\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p} = -\frac{3}{4}\zeta(2) \neq \frac{3}{4}\zeta(2)$.

3. Si la famille $(u_{n,p})_{n,p\geqslant 1}$ était sommable, le théorème de Fubini nous garantirait que les sommes précédentes sont égales.
Puisque ce n'est pas le cas, il ne s'agit pas d'une famille sommable.

SOLUTION DE L'EXERCICE 35.11

1. Nous savons que la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ est convergente, et donc est absolument convergente.
Par conséquent, la famille $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est sommable.
Et donc $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbf{N}^*}$ l'est également, avec $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}^*} u_{\sigma(n)} = \sum_{n\in\mathbf{N}^*} u_n$.
On en déduit donc que la série de terme général $u_{\sigma(n)} = \dfrac{1}{\sigma(n)^2}$ converge et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sigma(n)^2} = \sum_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{1}{\sigma(n)^2} = \sum_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Absolument ?
Pour les séries à termes positifs, la convergence absolue est équivalente à la convergence.

2. En revanche, on sait que $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n}$ diverge. Donc que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{1}{n} = +\infty$.
Et donc $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{1}{\sigma(n)} = +\infty$, si bien que $\displaystyle\sum_n \frac{1}{\sigma(n)}$ diverge.

Solution de l'exercice 35.12

On a, pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{1-z^n} = \sum_{k=0}^{n} z^{nk}$, si bien que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n \sum_{k=0}^{+\infty} z^{nk} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} z^{n(k+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} z^{nk}.$$

On souhaite appliquer un théorème de sommation par paquets, mais pour cela, il faut s'assurer de la sommabilité de la famille $(z^{nk})_{n,k\geqslant 1}$.
Mais notons qu'en «remontant» les calculs ci-dessus, en remplaçant z par $|z|$, on arrive, avec les mêmes arguments à

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} |z|^{nk} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|z|^n}{1-|z|^n}$$

qui est bien une série convergente, puisque $\displaystyle\frac{|z|^n}{1-|z|^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} |z|^n$.
Donc par Fubini positif, la famille $(z^{nk})_{n,k\geqslant 1}$ est sommable.

Pour $d\in\mathbf{N}^*$, notons alors $I_d = \{(n,k)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^* \mid nk = d\}$, qui est un ensemble fini, en bijection avec l'ensemble des diviseurs positifs de d.
On a alors $\displaystyle\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^* = \bigsqcup_{d\in\mathbf{N}^*} I_d$, si bien que par le théorème de sommation par paquets,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{(n,k)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*} z^{nk} = \sum_{d=1}^{+\infty}\sum_{(n,k)\in I_d} z^d = \sum_{d=1}^{+\infty} \operatorname{Card}(I_d) z^d.$$

Donc $d_n = \operatorname{Card}(I_n)$, qui est le nombre de diviseurs positifs de n convient.

Pour la seconde somme, notons que $\displaystyle\frac{nz^n}{1-z^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} nz^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, si bien que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{nz^n}{1-z^n}$ converge absolument.

À n fixé, $\displaystyle\frac{nz^n}{1-z^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} nz^n z^{nk} = \sum_{k=1}^{+\infty} nz^{nk}$.
Comme précédemment, il faut donc s'assurer de la sommabilité de la famille $\left(nz^{nk}\right)_{n,k\geqslant 1}$.
Une fois de plus, en remplaçant z par son module, on arrive à la conclusion que cette famille est sommable.

Et donc avec les mêmes «paquets»

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nz^n}{1-z^n} = \sum_{n,k\geqslant 1} nz^{nk} = \sum_{d=1}^{+\infty}\sum_{(n,k)\in I_d} nz^d = \sum_{d=1}^{+\infty}\left(\sum_{(n,k)\in I_d} n\right) z^d.$$

Donc $s(n) = \displaystyle\sum_{(n,k)\in I_d} n$, qui est la somme des diviseurs positifs de n convient.

SOLUTION DE L'EXERCICE 35.13

1. Si $n = 0$, alors $\displaystyle\int_0^{2\pi} te^{-int}\,dt = 2\pi^2$, et si $n > 0$, alors par intégration par parties,

$$\int_0^{2\pi} te^{-int}\,dt = \left[\frac{i}{n}te^{-int}\right]_0^{2\pi} - \frac{i}{n}\int_0^{2\pi} e^{-int}\,dt = \frac{2i\pi}{n}\frac{i}{n}\left[\frac{i}{n}e^{-int}\right]_0^{2\pi} = \frac{2i\pi}{n}.$$

2. Par la question précédente, pour $m, n \in I$,

$$\frac{1}{m+n} = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} te^{-i(m+n)t}\,dt.$$

Et donc

$$\sum_{(m,n)\in I^2}\frac{a_nb_m}{m+n} = \sum_{(m,n)\in I^2}\frac{a_nb_m}{2i\pi}\int_0^{2\pi} te^{-i(m+n)t}\,dt = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} t\sum_{(m,n)\in I^2} a_nb_me^{-i(m+n)t}\,dt.$$

Posons $f(t) = \displaystyle\sum_{n\in I} a_ne^{-int}$ et $g(t) = \displaystyle\sum_{n\in I} b_ne^{-int}$, de sorte que

$$\sum_{(m,n)\in I^2}\frac{a_mb_n}{m+n} = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} tf(t)g(t)\,dt.$$

Alors

$$\sum_{(m,n)\in I^2}\frac{a_nb_m}{m+n} \leqslant \left|\sum_{(m,n)\in I^2}\frac{a_nb_m}{n+m}\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{t}|f(t)|\sqrt{t}|g(t)|\,dt.$$

Et alors par inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales,

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{t}|f(t)|\sqrt{t}|g(t)|\,dt \leqslant \sqrt{\int_0^{2\pi} t|f(t)|^2\,dt\int_0^{2\pi} t|g(t)|^2\,dt}.$$

Reste donc à calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} t|f(t)|^2\,dt$.

Or

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} t|f(t)|^2\,dt &= \int_0^{\pi} tf(t)\overline{f(t)}\,dt\\ &= \int_0^{2\pi} t\sum_{n\in I} a_ne^{-int}\sum_{m\in I} a_me^{imt}\,dt\\ &= \sum_{(m,n)\in I^2} a_ma_n\int_0^{2\pi} te^{-i(n-m)t}\,dt\\ &= \sum_{n\in I} a_n^2 2\pi^2 + \sum_{\substack{(m,n)\in I^2\\ m\neq n}} a_ma_n\frac{2i\pi}{n-m}.\end{aligned}$$

Mais cette dernière somme est nulle car

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{(m,n)\in I^2\\ m\neq n}} a_ma_n\frac{2i\pi}{n-m} &= \sum_{m\in I}\sum_{\substack{n\in I\\ n\neq m}} a_ma_n\frac{2i\pi}{n-m} + \sum_{n\in I}\sum_{\substack{m\in I\\ m\neq n}} a_ma_n\frac{2i\pi}{n-m}\\ &= \sum_{m\in I}\sum_{\substack{n\in I\\ n\neq m}} a_ma_n\frac{2i\pi}{n-m} - \sum_{n\in I}\sum_{\substack{m\in I\\ m\neq n}} a_ma_n\frac{2i\pi}{m-n} = 0.\end{aligned}$$

Et donc il vient

$$\sum_{(m,n)\in I^2}\frac{a_nb_m}{m+n} \leqslant \frac{1}{2\pi}\sqrt{4\pi^4\sum_{n\in I} a_n^2\sum_{n\in I} b_n^2} \leqslant \pi\sqrt{\sum_{n\in I} a_n^2\sum_{n\in I} b_n^2}.$$

3. Soit K une partie finie de $\mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$. Considérons alors I une partie finie de $\mathbf{N}^*$ telle que $K \subset I^2$.
Par la question précédente,

$$\sum_{(m,n)\in K} \frac{|a_n b_m|}{m+n} \leqslant \sum_{(m,n)\in I^2} \frac{|a_n b_m|}{m+n} \leqslant \pi\sqrt{\sum_{n\in I} a_n^2 \sum_{n\in I} b_n^2} \leqslant \pi\sqrt{\sum_{n\in\mathbf{N}^*} a_n^2 \sum_{n\in\mathbf{N}^*} b_n^2}.$$

Ceci étant vrai pour toute partie finie K de $\mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$, on en déduit que la famille de $\frac{|a_n b_m|}{m+n}$ est sommable, et donc que $\left(\frac{a_n b_m}{m+n}\right)_{(m,n)}$ est sommable et

$$\sum_{(m,n)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*} \frac{a_n b_m}{m+n} \leqslant \sum_{(m,n)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*} \frac{|a_n b_m|}{m+n} \leqslant \pi\sqrt{\sum_{n\in\mathbf{N}^*} a_n^2 \sum_{n\in\mathbf{N}^*} b_n^2}.$$

Solution de l'exercice 35.14

1. Si m et n sont premiers entre eux, alors pour tout $p \in \mathbf{P}$, $v_p(mn) = v_p(m) + v_p(n)$.
Et donc $\Omega(mn) = \sum_{p\in\mathbf{P}} \left(v_p(m) + v_p(n)\right) = \Omega(m) + \Omega(n)$.
Et donc $\lambda(mn) = (-1)^{\Omega(n)+\Omega(m)}$.

Si on note $\mathscr{D}(n)$ l'ensemble des diviseurs de n, alors il est classique que

$$\mathscr{D}(mn) = \{a \times b, (a, b) \in \mathscr{D}(n) \times \mathscr{D}(m)\}.$$

En effet, si $a \mid n$ et $b \mid m$, puisque m et n sont premiers entre eux, a et b le sont aussi.
Et alors a et b étant deux diviseurs de mn premiers entre eux, le produit ab divise mn.

Détails
$a \wedge b$ est un diviseur de $m \wedge n = 1$.

Et inversement, si d est un diviseur de mn, notons $a = d \wedge n$, de sorte que a est un diviseur de n.
Il existe donc b, premier avec n, tel que $d = ab$.
Et alors $b \mid mn$, et $b \wedge n = 1$, si bien que par le lemme de Gauss, $b \mid m$.
Et donc d est bien le produit d'un diviseur de a par un diviseur de b.
On en déduit que

$$\Lambda(mn) = \sum_{d\mid n}\sum_{d'\mid m} \lambda(dd') = \sum_{d\mid n}\sum_{d'\mid m} \lambda(d)\lambda(d') = \Lambda(d)\Lambda(d').$$

2. Par ce qui précède, il suffit de savoir calculer les $\Lambda(p^k)$, pour p premier.
En effet, si $n = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ est la décomposition de n en produit de facteurs premiers, alors

$$\Lambda(n) = \Lambda(p_1^{k_1}) \cdots \Lambda(p_r^{k_r}).$$

Mais $\lambda(p^i) = (-1)^i$, si bien que $\Lambda(p^k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i = \dfrac{1-(-1)^{k+1}}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ impair} \\ 1 & \text{si } k \text{pair} \end{cases}.$
Et donc avec les notations précédentes, $\Lambda(n) = 1$ si et seulement si tous les k_i sont pairs, donc si et seulement si n est un carré, et vaut 0 sinon.

3. En utilisant une série géométrique, il vient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda(n)z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} \lambda(n)z^{np} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} \lambda(n)z^{np}.$$

Pour $(n, m) \in (\mathbf{N}^*)^2$, notons $u_{n,m} = \begin{cases} \lambda(n)z^m & \text{si } n \mid m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, de sorte que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda(n)z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} u_{n,m}.$$

Afin d'intervertir les sommes, prouvons que la famille $(u_{n,m})_{n,m\geqslant 1}$ est sommable. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\sum_{m\in\mathbf{N}^*} |u_{n,m}| = \sum_{p\in\mathbf{N}^*} |z|^{np} = \frac{|z|^n}{1-|z|^n}.$$

Et alors
$$\sum_{n\in\mathbf{N}^*}\frac{|z|^n}{1-|z|^n}\leqslant\sum_{n\in\mathbf{N}^*}\frac{|z|^n}{1-|z|}=\frac{|z|}{(1-|z|^2)}<+\infty.$$

Donc par le théorème de Fubini-Tonnelli, la famille $(u_{n,m})$ est sommable.
Il est donc possible d'appliquer le théorème de Fubini :

$$\sum_{m,n\in\mathbf{N}^*}u_{n,m}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda(n)z^n}{1-z^n}.$$

Et toujours par Fubini, en intervertissant les sommes,

$$\sum_{n,m\in\mathbf{N}^*}u_{n,m}=\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}u_{n,m}=\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n|m}\lambda(n)z^m=\sum_{m=1}^{+\infty}z^m\sum_{n|m}\lambda(n)=\sum_{m=1}^{+\infty}z^m\Lambda(m)=\sum_{p=1}^{+\infty}z^{p^2}.$$

Et donc comme annoncé, on a bien

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda(n)z^n}{1-z^n}=\sum_{p=1}^{+\infty}z^{p^2}.$$

Détails
Puisque $n\geqslant 1$,
$$1-|z|^n\geqslant 1-|z|.$$

Détails
À la dernière étape, on a utilisé le résultat de la question 2, si m n'est pas un carré, $\Lambda(m)=0$, et sinon $\Lambda(m)=1$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 35.15

Puisque $\left|\dfrac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}}\right|\underset{n\to+\infty}{\sim}|x|^{2n-1}=|x||x^2|^n$, la série de terme général $\dfrac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}}$ est bien convergente.

Pour $n\in\mathbf{N}^*$, on a $\dfrac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}}=x^{2n-1}\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}x^{p(2n-1)}=\sum_{p=1}^{+\infty}x^{p(2n-1)}$, et cette série est absolument convergente.
Donc la famille des $(x^{p(2n-1)})_{(n,p)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*}$ est sommable.
Par conséquent, le théorème de Fubini s'applique :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}}&=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty}x^{p(2n-1)}\\&=\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}x^{p(2n-1)}\\&=\sum_{p=1}^{+\infty}x^{-p}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(x^{2p}\right)^n\\&=\sum_{p=1}^{+\infty}x^{-p}\frac{x^{2p}}{1-x^{2p}}\\&=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{x^p}{1-x^{2p}}.\end{aligned}$$

Pour la seconde identité, notons que $\left|\dfrac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}\right|\underset{n\to+\infty}{\sim}|x|^{2^n}\leqslant|x|^n$.

Donc par comparaison à une série géométrique, la série de terme général $\dfrac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}$ converge absolument.
Par ailleurs, à $n\in\mathbf{N}$ fixé, on a

$$\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}=x^{2^n}\sum_{p=0}^{+\infty}x^{p2^{n+1}}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2^n(2p+1)}.$$

Puisque cette série est absolument convergente[5], la famille $(x^{2^n(2p+1)})_{(n,p)\in\mathbf{N}^2}$ est sommable.
Mais tout entier non nul s'écrit de manière unique $2^n(2p+1)$, avec $(p,n)\in\mathbf{N}^2$, si bien que $\varphi:\left|\begin{array}{ccc}\mathbf{N}^2&\longrightarrow&\mathbf{N}^*\\(n,p)&\longmapsto&2^n(2p+1)\end{array}\right.$ est une bijection.

[5] Pour les mêmes raisons que précédemment, avec x^{2p+1} à la place de x.

Donc la famille des $(x^{\varphi(n,p)})_{(n,p)\in\mathbf{N}^2}$ est sommable.
Autrement dit, la famille des $(x^n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est sommable[6], et on a

$$\sum_{(n,p)\in\mathbf{N}^2} x^{2^n(2p+1)} = \sum_{n\in\mathbf{N}^*} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

[6] Ce qu'on savait déjà puisqu'il s'agit d'une série géométrique convergente.

Et donc, comme annoncé,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} = \sum_{(n,p)\in\mathbf{N}^2} x^{2^n(2p+1)} = \sum_{n\in\mathbf{N}^*} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

Solution de l'exercice 35.16

Pour l'existence, notons que $\displaystyle\sum_{p,q\geqslant 1} \frac{1}{p^2q^2} = \left(\sum_{p\in\mathbf{N}^*} \frac{1}{p^2}\right)^2$ existe.

Donc la famille $\left(\dfrac{1}{p^2q^2}\right)_{p,q\in\mathbf{N}^*}$ est sommable, donc la sous-famille $\left(\dfrac{1}{p^2q^2}\right)_{\substack{p,q\geqslant 1\\ p\wedge q=1}}$ est sommable.

Notons par ailleurs que $(\mathbf{N}^*)^2 = \displaystyle\coprod_{d\in\mathbf{N}^*} I_d$ où $I_d = \{(p,q)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^* \mid p\wedge q = d\}$.

Et donc par le théorème de sommation par paquets,

$$\zeta(2)^2 = \frac{\pi^4}{36} = \sum_{p,q\in\mathbf{N}^*} \frac{1}{p^2q^2} = \sum_{d=1}^{+\infty} \sum_{(p,q)\in I_d} \frac{1}{p^2q^2}.$$

Mais si $(p,q)\in I_d$, alors $(p,q) = (dp', dq')$ avec $(p',q')\in I_1$.
Autrement dit,

$$\sum_{(p,q)\in I_d} = \sum_{(p',q')\in I_1} \frac{1}{d^4}\frac{1}{p'^2q'^2} = \frac{1}{d^4}\sum_{(p',q')\in I_1} \frac{1}{p'^2q'^2}.$$

Et donc

$$\frac{\pi^4}{36} = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{1}{d^4} \sum_{(p,q)\in I_1} \frac{1}{p^2q^2} = \left(\sum_{(p,q)\in I_1} \frac{1}{p^2q^2}\right)\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{1}{d^4} = \zeta(4) \sum_{\substack{p,q\geqslant 1\\ p\wedge q=1}} \frac{1}{p^2q^2}.$$

Et donc, en notant que $\zeta(4) = \dfrac{\pi^4}{90}$, il vient

$$\sum_{\substack{p,q\geqslant 1\\ p\wedge q=1}} \frac{1}{p^2q^2} = \frac{\zeta(2)^2}{\zeta(4)} = \frac{90}{36} = \frac{5}{2}.$$

Solution de l'exercice 35.17

Nous savons que $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ et $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.
De plus, ces deux séries sont absolument convergentes. Donc par produit de Cauchy,

$$\frac{e^x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}x^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)x^n.$$

Donc $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ convient.

Solution de l'exercice 35.18

Notons tout de suite que pour p fixé, on a

$$\binom{p+n}{p}|z^n| = \frac{(n+p)!}{p!n!}|z|^n = \frac{(n+p)(n+p-1)(n+p-2)\cdots(n+2)(n+1)}{p!}z^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^p}{p!}|z|^n.$$

Prenons alors $r \in [|z|, 1[$, de sorte que par croissances comparées, $\dfrac{n^p |z|^n}{r^n} = n^p \left|\dfrac{|z|}{r}\right|^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Donc $\dfrac{n^p}{p!} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(r^n\right)$.
Puisque la série de terme général r^n est absolument convergente, il en est de même de la série de terme général $\dfrac{n^p}{p!}z^n$ et donc[7] de la série de terme général $\dbinom{n+p}{p}z^n$.

[7] Par critère de comparaison pour les séries à termes positifs.

Rappel
Une série géométrique, quand elle converge, converge absolument.

Prouvons alors la formule annoncée par récurrence sur p.
Pour $p = 0$, c'est du cours, il s'agit de la somme d'une série géométrique absolument convergente.
Supposons donc que $\dfrac{1}{(1-z)^{p+1}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{p+n}{n} z^n$.
Alors par produit de Cauchy de séries absolument convergentes,

$$\frac{1}{(1-z)^{p+2}} = \frac{1}{(1-z)^{p+1}}\frac{1}{(1-z)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{k+p}{p}z^k z^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{k+p}{p}\right)z^n.$$

Mais on a alors, à n fixé, par l'identité de Pascal,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k+p}{p} = \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{k+p+1}{p+1} - \binom{k+p}{p+1}\right) = \binom{n+p+1}{p+1} - \binom{p}{p+1} = \binom{n+p+1}{p+1}.$$

Et donc il vient bien $\dfrac{1}{(1-z)^{p+2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+p+1}{p+1}z^n$.

Remarque : un moyen d'éviter de prouver l'absolue convergence est de prouver par récurrence sur p que pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| < 1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+p}{p}z^n = \frac{1}{(1-z)^{p+1}}$.
Donc en particulier, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\binom{n+p}{p}z^n\right| = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+p}{p}|z|^n = \frac{1}{(1-|z|)^{p+1}}$, et donc $\displaystyle\sum_n \binom{n+p}{p}z^n$ converge absolument.
Et une autre option que celle utilisée ci-dessus pour prouver l'absolue convergence serait de faire appel au critère de d'Alembert.

SOLUTION DE L'EXERCICE 35.19

Souvenons nous que $e = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}$, et que cette série converge absolument.
La série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\cdot n!}$ est également absolument convergente, et donc par produit de Cauchy,

$$e\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot n!} = \sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{\substack{k+n=p\\ n\geqslant 1}}\frac{1}{k!}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot n!}.$$

Soit alors $p \in \mathbf{N}^*$.

$$\sum_{\substack{k+n=p\\ n\geqslant 1}}\frac{1}{k!}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot n!} = \sum_{n=1}^{p}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot n!(p-n)!} = \frac{1}{p!}\sum_{n=1}^{p}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\binom{p}{n}.$$

Nous allons donc prouver que

$$\sum_{n=1}^{p}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\binom{p}{n} = H_p.$$

Notons S_p cette somme. Alors par identité de Pascal, pour $p \geqslant 2$,

$$S_p = \sum_{n=1}^{p}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\binom{p-1}{n} + \binom{p-1}{n-1}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{p-1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\binom{p-1}{n} + \sum_{n=1}^{p} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\binom{p-1}{n-1} \\
&= S_{p-1} + \sum_{n=1}^{p} \frac{(-1)^{n-1}}{p}\binom{p}{n} && \text{Formule du capitaine.} \\
&= S_{p-1} - \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{p}(-1)^n\binom{p}{n} \\
&= S_{p-1} - \frac{1}{p}\left((1-1)^p - 1\right) = S_{p-1} + \frac{1}{p}. && \text{On a reconnu un binôme auquel manque le premier terme.}
\end{aligned}
$$

Puisque de plus $S_1 = \frac{(-1)^{1-1}}{1}\binom{1}{1} = 1$, on en déduit que pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, $S_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} = H_p$.
Et donc on a bien l'identité annoncée.