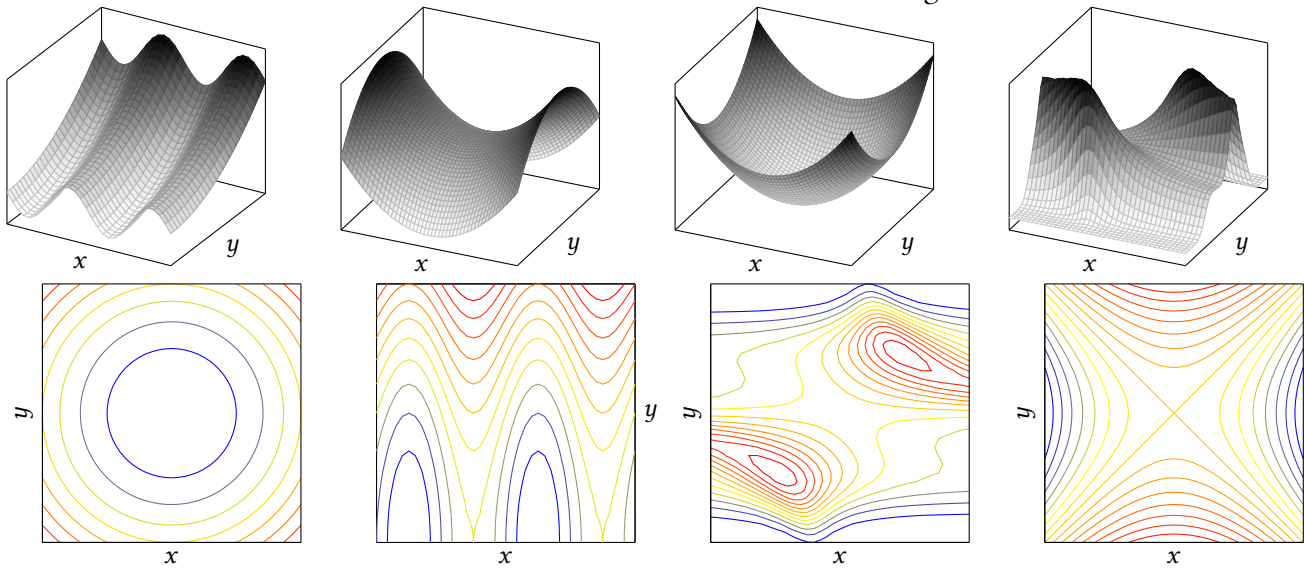


TD 33 : FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

EXERCICE 33.1 Pour chacune des fonctions tracées ci-dessous, lui associer ses lignes de niveau.

F



► Topologie de $\mathbb{R}^2$

EXERCICE 33.2 Déterminer si les ensembles suivants sont ouverts, fermés, bornés. On pourra s'appuyer d'un dessin lorsque c'est possible.

F

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 3\}$
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \neq 1 \text{ et } |y| \neq 1\}$
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x + 2y| = 1 \text{ ou } |y + 2x| \geq 4\}$.

EXERCICE 33.3 Montrer qu'une boule fermée est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

PD

► Fonctions continues

EXERCICE 33.4 Montrer que la fonction $(x, y) \mapsto \max(x, y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

PD

EXERCICE 33.5 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1 & \text{si } x^2 + y^2 > 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 & \text{sinon} \end{cases}$.

AD

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

EXERCICE 33.6 Justifier que si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors pour tout $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, $f_1 : t \mapsto f(t, a_2)$ et $f_2 : t \mapsto f(a_1, t)$ sont continues respectivement en a_1 et a_2 .

AD

En considérant la fonction $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, montrer que la réciproque est fausse.

► Dérivées partielles, fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

EXERCICE 33.7 Justifier que les fonctions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert que l'on précisera, et déterminer leurs dérivées partielles.

F

1. $f : (x, y) \mapsto 3x^2y^2 + 2xy + xe^y$
2. $g : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 - y^2}e^x$
3. $h : (x, y) \mapsto \ln(2xy) \sin(x^2 + y)$.

EXERCICE 33.8 Soit $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. On pose alors $f(x, y) = \int_{x^2}^{xy} \varphi(t) dt$.

Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$ et déterminer ses dérivées partielles.

F

EXERCICE 33.9

PD

1. Montrer que si $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction constante sur un ouvert $\mathcal{O}$, alors f est $\mathcal{C}^1$ et pour tout $x \in \mathcal{O}$, $\nabla f(x) = 0_{\mathbf{R}^2}$.
2. Donner un exemple de fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbf{R}^2$, non constante mais dont le gradient est partout nul.

EXERCICE 33.10 Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \forall t \in \mathbf{R}^*, f(tx, ty) = tf(x, y)$.
Pour tout $u \in \mathbf{R}^2$, calculer la dérivée de f en $(0, 0)$ selon le vecteur u , et en déduire que f est linéaire.

AD

EXERCICE 33.11 Soit $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$ mais n'est pas continue en $(0, 0)$.

AD

EXERCICE 33.12 Gradient en coordonnées polaires

PD

Soit $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

On définit alors une fonction $F : \mathbf{R}_+^* \times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbf{R}$ en posant $F(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$.

Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer pour tout $(r, \theta) \in \mathbf{R}_+^* \times [0, 2\pi[$, exprimer $\frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ en fonction de $\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta)$ et $\frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta)$.

On pourra utiliser les formules de Cramer rencontrées pour les systèmes 2×2 .

EXERCICE 33.13 (Oral HEC ECS)

D

Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$. On définit la fonction g de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, g(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y-x} \int_x^y f(t) dt & \text{si } x \neq y \\ f(x) & \text{si } x = y \end{cases}$$

1. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \neq y\}$. Justifier que D est ouvert. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et calculer ses dérivées partielles sur D .
2. Soit $a \in \mathbf{R}$. Montrer que g admet des dérivées partielles en (a, a) et les exprimer en fonction de $f'(a)$, où f' désigne la dérivée de f .
3. Soit $a \in \mathbf{R}$ et $(x, y) \in D$.

(a) Montrer que : $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(a, a) = \frac{1}{(y-x)^2} \int_x^y (y-t)(f'(t) - f'(a)) dt$.

(b) En déduire que : $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(a, a) \right| \leq \frac{1}{2} \sup_{t \in S} |f'(t) - f'(a)|$, où S désigne le segment d'extrémités x et y .

4. Déduire des questions précédentes que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$.

EXERCICE 33.14 Fonctions 2-hölderiennes (Oral Centrale)

AD

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$. On suppose que $\forall (x, y) \in (\mathbf{R}^2)^2, |f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|^2$. Montrer que f est constante.

EXERCICE 33.15 Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ si et seulement si pour tout $(x, y, t) \in \mathbf{R}^3$, $f(x+t, y+t) = f(x, y)$.

PD

EXERCICE 33.16 Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$. Soit alors g la fonction définie par $\forall (u, v) \in \mathbf{R}^2, g(u, v) = f(u^2 + v^2, uv)$.

F

Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer les dérivées partielles de g , notées $\frac{\partial g}{\partial u}$ et $\frac{\partial g}{\partial v}$ en fonction de celles de f .

► Exemples d'équations aux dérivées partielles

EXERCICE 33.17 Déterminer les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$ solutions de

AD

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + xyf(x, y) = 0.$$

EXERCICE 33.18 Déterminer les fonctions $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, et solution de $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f$.

AD

On pourra à cet effet utiliser le changement de variable $\begin{cases} u = x \\ v = x - y \end{cases}$.

► Extrema des fonctions de deux variables

EXERCICE 33.19

PD

1. Déterminer les extrema de $t \mapsto t^{\ln t}$ sur $\mathbf{R}_+^*$.
2. En déduire les extrema (locaux ou globaux) de $f(x, y) = x^{\ln x} + y^{\ln y}$ sur $]0, +\infty[^2$.

EXERCICE 33.20 Étude d'un extremum par variation de fonctions

PD

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

1. Montrer que f n'admet pas de maximum.
2. On se propose de montrer que f possède un minimum.
 - (a) En considérant $f(-x, -y)$, montrer qu'on peut se restreindre à $y \geq 0$.
 - (b) Pour $y \geq 0$ fixé, montrer que la fonction $x \mapsto f(x, y)$ admet un minimum noté $g(y)$.
 - (c) Étudier les variations de $y \mapsto g(y)$ et en déduire que f admet un minimum, et préciser le(s) point(s) où ce minimum est atteint.

EXERCICE 33.21 Soit $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ convexe, c'est-à-dire telle que pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$,

AD

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

Montrer que si $a \in \mathbf{R}^2$ est un point critique de f , alors f admet un minimum global en a .

EXERCICE 33.22 Soit $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ et soit f la fonction définie sur $\mathcal{D}$ par $f(x, y) = x^3 - 3x(1 + y^2)$.

AD

1. Justifier que f admet un minimum m et un maximum M sur $\mathcal{D}$.
2. Montrer que sur $B_0(0, 1)$, f n'admet pas de point critique. Que peut-on en déduire à propos de m et M ?
3. En étudiant la fonction $t \mapsto f(\cos t, \sin t)$, déterminer les valeurs de m et M .

EXERCICE 33.23 Déterminer les extrema locaux de $f(x, y) = e^{x \sin(y)}$.

AD

EXERCICE 33.24 Déterminer les extrema locaux de $f(x, y) = x^4 + y^3 - 3y - 2$.

EXERCICE 33.25 Soit f la fonction définie sur $[0, 1] \times [0, 2]$ par $f(x, y) = xy^2 - xy + x^3y$.
Montrer que f possède un maximum et un minimum, et les déterminer.

AD

EXERCICE 33.26 Soit $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x, y) = (x^2 + y^2)^x$.
Déterminer les extrema locaux et globaux de f .

AD