

TD 32 : GROUPE SYMÉTRIQUE ET DÉTERMINANT

► Groupe symétrique

EXERCICE 32.1 Décomposer les permutations suivantes en produits de cycles à supports disjoints, puis en produit de transpositions. En déduire leur signature

F

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 6 & 4 & 2 & 1 & 7 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 32.2 Un résultat annoncé en cours

PD

Soient $(i, j, k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, avec $i \neq j$ et $k \neq \ell$.

Montrer qu'il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\sigma(i) = k$ et $\sigma(j) = \ell$.

Rappelons que ce résultat nous a permis de prouver que si τ_1 et τ_2 sont deux transpositions, alors il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\tau_1 = \sigma \tau_2 \sigma^{-1}$.

EXERCICE 32.3 Montrer par récurrence sur n que toute permutation de $\mathfrak{S}_n$ est produit d'au plus $n - 1$ transpositions.

PD

Décomposer $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ en produit d'au plus 4 transpositions.

EXERCICE 32.4 Groupe alterné

AD

Soit $n \geq 2$. Montrer que $\mathfrak{A}_n = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1\}$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$, de cardinal $\frac{n!}{2}$.

EXERCICE 32.5 D'autres générateurs du groupe symétrique

AD

1. Montrer que pour $1 \leq i < j \leq n$, $(i \ j) = (i \ i+1 \ \dots \ j-1 \ j) (j-1 \ j-2 \ \dots \ i)$.
2. Montrer que tout élément de $\mathfrak{S}_n$ peut s'écrire comme produit de transpositions de la forme $(i \ i+1)$, $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.
3. En déduire que tout élément de $\mathfrak{S}_n$ est produit de transpositions de la forme $(1 \ i)$, $2 \leq i \leq n$.

EXERCICE 32.6 (Oral Mines MP)

AD

Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $f(\sigma) = \sum_{k=1}^n k\sigma(k)$. On note alors $m = \min_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f(\sigma)$ et $M = \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f(\sigma)$.

1. À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que $M = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. Montrer que si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ n'est pas décroissante, alors il existe une transposition τ telle que $f(\sigma \circ \tau) < f(\sigma)$. En déduire la valeur de m .

EXERCICE 32.7 Minoration de la fonction de Landau (Oral ENS Ulm 2019)

TD

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note $f(n) = \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \min\{k \geq 1 \mid \sigma^k = \text{id}\}$.

Prouver que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $n^k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(f(n))$.

► Formes multilinéaires

EXERCICE 32.8 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer que $\varphi : (X, Y) \mapsto X^T A Y$ est une forme bilinéaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

F

Prouver qu'elle est alternée si A est antisymétrique.

► Formes linéaires alternées

EXERCICE 32.9 Soit $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbf{K}$ une forme bilinéaire alternée sur un espace vectoriel E .

F

Pour $(x, y) \in E^2$, exprimer $\varphi(x+y, x-y)$ en fonction de $\varphi(x, y)$.

EXERCICE 32.10 Soit E un espace vectoriel de dimension n , et soit $\mathcal{B}$ une base de E . Soit également $f \in \mathcal{L}(E)$.

AD

Montrer que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$,

$$\sum_{k=1}^n \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{k-1}, f(x_k), x_{k+1}, \dots, x_n) = \text{tr}(f) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

EXERCICE 32.11 Dimension de l'espace des formes k -linéaires alternées (Oral ENS)

TD

Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension n , et soit $k \in \mathbf{N}^*$. Déterminer la dimension de l'espace $\mathcal{A}_k(E)$ des formes k -linéaires alternées sur E .

► Déterminants théoriques

EXERCICE 32.12 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice antisymétrique, avec n impair. Montrer que $\det A = 0$. Est-ce encore vrai si n est pair ?

PD

EXERCICE 32.13 Soit E un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension impaire. Montrer qu'il n'existe pas de $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\text{id}_E$.

PD

EXERCICE 32.14 Montrer que le volume d'un parallélépipède de $\mathbf{R}^3$ dont les sommets sont dans $\mathbf{Z}$ est un entier.

PD

EXERCICE 32.15 Formules de Cramer

Soit $A \in GL_n(\mathbf{K})$, de sorte que pour $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, le système $AX = B$ possède une unique solution, que l'on notera $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note A_i la matrice dont toutes les colonnes sont celles de A , sauf la $i^{\text{ème}}$, qui est égale à B .

AD

Prouver que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$.

Cas particulier : donner l'unique solution de $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ lorsque $ad - bc \neq 0$.

EXERCICE 32.16 Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, et soit $B = ((-1)^{i+j} a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Comparer $\det A$ et $\det B$.

AD

EXERCICE 32.17 Soient $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})^4$, telles que $CD = DC$.

D

1. Calculer le produit par blocs $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix}$.

2. Dans le cas où D est inversible, prouver que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$.

3. Prouver que le résultat reste valable lorsque D n'est plus inversible. On pourra à cet effet étudier la fonction $t \mapsto \det(D + tI_n)$.

EXERCICE 32.18 Un classique : deux matrices réelles semblables sur $\mathbf{C}$ sont semblables sur $\mathbf{R}$

D

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, semblables en tant que matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, c'est-à-dire telles qu'il existe $P \in GL_n(\mathbf{C})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

On note alors $P = P_1 + iP_2$, avec $P_1, P_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

En considérant l'application $t \mapsto \det(P_1 + tP_2)$, prouver que A et B sont semblables sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

EXERCICE 32.19 (Oral X 2024)

TD

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

1. On suppose A inversible. Montrer qu'en modifiant un seul coefficient de A , on peut la rendre non inversible.

2. On suppose A non inversible. Quel est le nombre minimal de coefficients de A qu'il faut modifier pour la rendre inversible ?

► Calcul de déterminants

EXERCICE 32.20 Calculer les déterminants suivants, par les méthodes de votre choix, en en donnant une forme la plus factorisée possible. Ici, a, b et c sont des scalaires.

F

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$$

EXERCICE 32.21 Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbf{C}$ la famille $(8, -1, 2 - \lambda), (5, 1 - \lambda, 1), (2 + \lambda, -2, 1)$ est-elle une base de $\mathbf{C}^3$?

PD

EXERCICE 32.22 Oh la grosse astuce !

PD

Soient $a_1, \dots, a_n, h$ des réels. Calculer $\Delta = \begin{vmatrix} \cos(a_1) & \cos(a_2) & \dots & \cos(a_n) \\ \cos(a_1 + h) & \cos(a_2 + h) & \dots & \cos(a_n + h) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(a_1 + (n-1)h) & \cos(a_2 + (n-1)h) & \dots & \cos(a_n + (n-1)h) \end{vmatrix}$

EXERCICE 32.23 Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ défini par $f(M) = M^\top$. Calculer $\text{rg}(f)$, $\text{tr}(f)$ et $\det(f)$.

PD

EXERCICE 32.24 Retour sur les déterminants par blocs

AD

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $C \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$. Soit alors $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{p,n} & C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbf{K})$.

1. Montrer que $M = \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$.
2. Retrouver alors l'expression de $\det(M)$ vue en cours.

EXERCICE 32.25 Pour $x \in \mathbf{C}$, on note $D(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix}$.

AD

Montrer que D est une fonction polynomiale, divisible par $x \mapsto (x-1)^3$, dont on donnera une forme factorisée.

EXERCICE 32.26 Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$, avec $n > p$. Calculer $\det(AB)$.

AD

EXERCICE 32.27 Calculer par récurrence les déterminants suivants, où $a_1, \dots, a_n$ sont des scalaires :

AD

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ -1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \dots & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

EXERCICE 32.28 Polynôme caractéristique

AD

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on note $\chi_A : \begin{cases} \mathbf{K} \longrightarrow \mathbf{K} \\ x \longmapsto \det(xI_n - A) \end{cases}$.

1. Montrer que χ_A est une fonction polynomiale, de degré n , dont on déterminera le coefficient dominant et le coefficient constant.
2. En déduire que $\{\lambda \in \mathbf{K} \mid A - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible}\}$ est de cardinal au plus égal à n .
3. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

(a) Montrer que $\begin{vmatrix} I_n & B \\ A & I_n \end{vmatrix} = \det(I_n - AB) = \det(I_n - BA)$.

(b) En déduire que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

EXERCICE 32.29 Soient $a \neq b$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des scalaires. Pour $x \in \mathbf{K}$, on pose

AD

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + x & a + x & \dots & a + x \\ b + x & \lambda_2 + x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a + x \\ b + x & \dots & b + x & \lambda_n + x \end{vmatrix}_{[n]}.$$

1. Montrer que Δ_n est une fonction affine de x .
2. Calculer $\Delta_n(x)$, et en déduire $\Delta_n(0)$.

► Comatrice

EXERCICE 32.30 Groupe spécial linéaire

PD

On note $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont des entiers relatifs.

On note de plus $SL_n(\mathbf{Z}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z}) \mid \det A = 1\}$. Prouver que $SL_n(\mathbf{Z})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbf{R})$.

EXERCICE 32.31 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ qui commutent. On souhaite prouver que $\text{Com}(A)$ et $\text{Com}(B)$ commutent.

D

1. Prouver le résultat si A et B sont inversibles.
2. Prouver que $f : t \mapsto \det(A + tI_n)$ est une fonction polynomiale. En déduire que pour $p \in \mathbf{N}^*$ suffisamment grand, $A + \frac{1}{p}I_n$ et $B + \frac{1}{p}I_n$ sont inversibles.
3. Conclure en faisant tendre p vers l'infini.

EXERCICE 32.32 Rang et déterminant de la comatrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Prouver que $\text{rg}(\text{Com}(A)) = \begin{cases} n & \text{si } \text{rg}(A) = n \\ 1 & \text{si } \text{rg}(A) = n - 1 \\ 0 & \text{si } \text{rg}(A) \leq n - 2 \end{cases}$.

Déterminer une expression de $\det(\text{Com}(A))$ en fonction de $\det(A)$.