TD 30 : Groupe symétrique et déterminant

▶ Groupe symétrique

Exercice 30.1 Décomposer les permutations suivantes en produits de cycles à supports disjoints, puis en produit de transpositions. En déduire leur signature **F**

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 6 & 4 & 2 & 1 & 7 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Exercice 30.2 Un résultat annoncé en cours **PD**
Soient $(i, j, k, \ell) \in [\![1, n]\!]^2$, avec $i \neq j$ et $k \neq \ell$.
Montrer qu'il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\sigma(i) = k$ et $\sigma(j) = \ell$.
Rappelons que ce résultat nous a permis de prouver que si τ_1 et τ_2 sont deux transpositions, alors il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\tau_1 = \sigma\tau_2\sigma^{-1}$.

Exercice 30.3 Montrer par récurrence sur n que toute permutation de $\mathfrak{S}_n$ est produit d'au plus $n-1$ transpositions. **PD**
Décomposer $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ en produit d'au plus 4 transpositions.

Exercice 30.4 Groupe alterné **AD**
Soit $n \geqslant 2$. Montrer que $\mathfrak{A}_n = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1\}$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$, de cardinal $\frac{n!}{2}$.

Exercice 30.5 D'autres générateurs du groupe symétrique **AD**

1. Monter que pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $\begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & i+1 & \dots & j-1 & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j-1 & j-2 & \dots & i \end{pmatrix}$.
2. Montrer que tout élément de $\mathfrak{S}_n$ peut s'écrire comme produit de transpositions de la forme $\begin{pmatrix} i & i+1 \end{pmatrix}$, $i \in [\![1, n-1]\!]$.
3. En déduire que tout élément de $\mathfrak{S}_n$ est produit de transpositions de la forme $\begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix}$, $2 \leqslant i \leqslant n$.

Exercice 30.6 Minoration de la fonction de Landau (Oral ENS Ulm 2019) **TD**
Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note $f(n) = \max\limits_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \min\{k \geqslant 1 \mid \sigma^k = \mathrm{id}\}$.
Prouver que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $n^k \underset{n \to +\infty}{=} o(f(n))$.

▶ Formes multilinéaires

Exercice 30.7 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer que $\varphi : (X, Y) \mapsto X^\top AY$ est une forme bilinéaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. **F**
Prouver qu'elle est alternée si A est antisymétrique.

▶ Formes linéaires alternées

Exercice 30.8 Soit $\varphi : E^2 \to \mathbf{K}$ une forme bilinéaire alternée sur un espace vectoriel E. **F**
Pour $(x, y) \in E^2$, exprimer $\varphi(x+y, x-y)$ en fonction de $\varphi(x, y)$.

Exercice 30.9 Soit E un espace vectoriel de dimension n, et soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soit également $f \in \mathcal{L}(E)$. **AD**
Montrer que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$,

$$\sum_{k=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{k-1}, f(x_k), x_{k+1}, \dots x_n) = \operatorname{tr}(f)\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

Exercice 30.10 Dimension de l'espace des formes k-linéaires alternées (Oral ENS) **TD**
Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n, et soit $k \in \mathbf{N}^*$. Déterminer la dimension de l'espace $\mathcal{A}_k(E)$ des formes k-linéaires alternées sur E.

▶ Déterminants théoriques

Exercice 30.11 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice antisymétrique, avec n impair. Montrer que $\det A = 0$. Est-ce encore vrai si n est pair ? PD

Exercice 30.12 Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension impaire. Montrer qu'il n'existe pas de $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{id}_E$. PD

Exercice 30.13 Montrer que le volume d'un parallélépipède de $\mathbf{R}^3$ dont les sommets sont dans $\mathbf{Z}$ est un entier. PD

Exercice 30.14 **Formules de Cramer** AD
Soit $A \in GL_n(\mathbf{K})$, de sorte que pour $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, le système $AX = B$ possède une unique solution, que l'on notera $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note A_i la matrice dont toutes les colonnes sont celles de A, sauf la $i^{\text{ème}}$, qui est égale à B.
Prouver que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = \dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}$.
Cas particulier : donner l'unique solution de $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ lorsque $ad - bc \neq 0$.

Exercice 30.15 Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, et soit $B = \left((-1)^{i+j} a_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Comparer $\det A$ et $\det B$. AD

Exercice 30.16 Soient $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})^4$, telles que $CD = DC$. D

1. Calculer le produit par blocs $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix}$.
2. Dans le cas où D est inversible, prouver que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$.
3. Prouver que le résultat reste valable lorsque D n'est plus inversible. On pourra à cet effet étudier la fonction $t \mapsto \det(D + tI_n)$.

Exercice 30.17 **Un classique : deux matrices réelles semblables sur C sont semblables sur R** D
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, semblables en tant que matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, c'est-à-dire telles qu'il existe $P \in GL_n(\mathbf{C})$ telle que $A = PBP^{-1}$.
On note alors $P = P_1 + iP_2$, avec $P_1, P_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
En considérant l'application $t \mapsto \det(P_1 + tP_2)$, prouver que A et B sont semblables sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

▶ Calcul de déterminants

Exercice 30.18 Calculer les déterminants suivants, par les méthodes de votre choix, en en donnant une forme la plus factorisée possible. Ici, a, b et c sont des scalaires. F

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$$

Exercice 30.19 Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbf{C}$ la famille $(8, -1, 2 - \lambda), (5, 1 - \lambda, 1), (2 + \lambda, -2, 1)$ est-elle une base de $\mathbf{C}^3$? PD

Exercice 30.20 **Oh la grosse astuce !** PD

Soient $a_1, \dots, a_n, h$ des réels. Calculer $\Delta = \begin{vmatrix} \cos(a_1) & \cos(a_2) & \dots & \cos(a_n) \\ \cos(a_1 + h) & \cos(a_2 + h) & \dots & \cos(a_n + h) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(a_1 + (n-1)h) & \cos(a_2 + (n-1)h) & \dots & \cos(a_n + (n-1)h) \end{vmatrix}$

Exercice 30.21 Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ défini par $f(M) = M^\top$. Calculer $\mathrm{rg}(f), \mathrm{tr}(f)$ et $\det(f)$. PD

Exercice 30.22 **Retour sur les déterminants par blocs** AD

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $C \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$. Soit alors $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{p,n} & C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbf{K})$.

1. Montrer que $M = \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$.
2. Retrouver alors l'expression de $\det(M)$ vue en cours.

Exercice 30.23 Pour $x \in \mathbf{C}$, on note $D(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix}$. AD

Montrer que D est une fonction polynomiale, divisible par $x \mapsto (x-1)^3$, dont on donnera une forme factorisée.

Exercice 30.24 Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$, avec $n > p$. Calculer $\det(AB)$. AD

Exercice 30.25 Calculer par récurrence les déterminants suivants, où $a_1, \dots, a_n$ sont des scalaires : AD

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ -1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \dots & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

Exercice 30.26 Polynôme caractéristique AD

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on note $\chi_A : \begin{vmatrix} \mathbf{K} & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & \det(xI_n - A) \end{vmatrix}$.

1. Montrer que χ_A est une fonction polynomiale, de degré n, dont on déterminera le coefficient dominant et le coefficient constant.
2. En déduire que $\{\lambda \in \mathbf{K} \mid A - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible}\}$ est de cardinal au plus égal à n.
3. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
   (a) Montrer que $\begin{vmatrix} I_n & B \\ A & I_n \end{vmatrix} = \det(I_n - AB) = \det(I_n - BA)$.
   (b) En déduire que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Exercice 30.27 Soient $a \neq b$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des scalaires. Pour $x \in \mathbf{K}$, on pose AD

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + x & a+x & \dots & a+x \\ b+x & \lambda_2 + x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+x \\ b+x & \dots & b+x & \lambda_n + x \end{vmatrix}_{[n]}.$$

1. Montrer que Δ_n est une fonction affine de x.
2. Calculer $\Delta_n(x)$, et en déduire $\Delta_n(0)$.

► Comatrice

Exercice 30.28 Groupe spécial linéaire PD

On note $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont des entiers relatifs.
On note de plus $SL_n(\mathbf{Z}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z}) \mid \det A = 1\}$. Prouver que $SL_n(\mathbf{Z})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbf{R})$.

Exercice 30.29 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ qui commutent. On souhaite prouver que $\mathrm{Com}(A)$ et $\mathrm{Com}(B)$ commutent. D

1. Prouver le résultat si A et B sont inversibles.
2. Prouver que $f : t \mapsto \det(A + tI_n)$ est une fonction polynomiale. En déduire que pour $p \in \mathbf{N}^*$ suffisamment grand, $A + \frac{1}{p} I_n$ et $B + \frac{1}{p} I_n$ sont inversibles.
3. Conclure en faisant tendre p vers l'infini.

Exercice 30.30 Rang et déterminant de la comatrice AD

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Prouver que $\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = \begin{cases} n & \text{si } \mathrm{rg}(A) = n \\ 1 & \text{si } \mathrm{rg}(A) = n-1 \\ 0 & \text{si } \mathrm{rg}(A) \leqslant n-2 \end{cases}$.

Déterminer une expression de $\det(\mathrm{Com}(A))$ en fonction de $\det(A)$.

Correction des exercices du TD 30

Solution de l'exercice 30.1

Rappelons que la méthode[1] est de déterminer les différentes orbites sous l'action de σ.
Alors σ_1 est un 5-cycle : $\sigma_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 6 & 3 & 5\end{pmatrix}$.
Et $\sigma_2 = \begin{pmatrix}1 & 3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 10 & 9 & 8 & 5\end{pmatrix}$.
Pour les signatures, ne revenons pas aux produits de transpositions, et souvenons-nous que la signature d'un p-cycle est $(-1)^{p-1}$.
Donc $\varepsilon(\sigma_1) = 1$ et $\varepsilon(\sigma_2) = (-1)^2(-1)^4 = 1$.

[1] Voir les exemples dans le cours.

Solution de l'exercice 30.2

▶ Commençons par le cas où $\{i, j\} \cap \{k, \ell\} = \emptyset$.
Notons $\tau_1 = \begin{pmatrix}i & k\end{pmatrix}$ et $\tau_2 = \begin{pmatrix}j & \ell\end{pmatrix}$, et soit $\sigma = \tau_1\tau_2$.
Alors $\tau_2(j) = \ell$ et ℓ est un point fixe de τ_1, donc $\sigma(j) = \ell$.
Et i est un point fixe de τ_2, donc $\tau_2(i) = i$ et donc $\sigma(i) = \tau_1(i) = k$.

▶ Si $\{i, j\} \cap \{k, \ell\}$ est un singleton. Quitte à échanger i et j et k et ℓ, on peut supposer que $i = k$ et $j \neq \ell$, alors $\sigma = \begin{pmatrix}j & \ell\end{pmatrix}$ convient.

▶ Si $i = k$ et $j = \ell$, alors $\sigma = \mathrm{id}$ convient.

▶ Si $i = \ell$ et $j = k$, alors $\sigma = \begin{pmatrix}i & j\end{pmatrix}$ convient.

Solution de l'exercice 30.3

Pour $n = 2$, il n'y a pas grand chose à dire, il suffit de faire la liste de tous les éléments[2] de $\mathfrak{S}_2$.
L'identité est produit de 0 transpositions, et $\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$ est une transposition, donc produit d'au plus une transposition.

[2] Il y en a 2...

Supposons la propriété vérifiée au rang n, et soit $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$.
▶ Si $\sigma(n+1) = n+1$. Alors $\sigma_{|[\![1,n]\!]}$ est une permutation de $[\![1, n]\!]$. Donc par hypothèse de récurrence, il existe p transpositions $\tau_1, \dots, \tau_p \in \mathfrak{S}_n$, avec $p \leqslant n-1$ telles que $\sigma_{|[\![1,n]\!]} = \tau_1 \cdots \tau_p$.
En posant alors $\widetilde{\tau_i} : \left| \begin{array}{ccl} [\![1, n+1]\!] & \longrightarrow & [\![1, n+1]\!] \\ k & \longmapsto & \begin{cases} \tau_i(k) & \text{si } k \leqslant n \\ n+1 & \text{si } k = n+1 \end{cases} \end{array}\right.$, alors $\widetilde{\tau_i}$ est une transposition de $\mathfrak{S}_{n+1}$ et $\sigma = \widetilde{\tau_1} \cdots \widetilde{\tau_p}$.
Donc σ est produit d'au plus p transpositions, avec $p \leqslant n-1 \leqslant n$.

▶ Si $\sigma(n+1) \neq n+1$.
Soit alors $\tau = \begin{pmatrix}n+1 & \sigma(n+1)\end{pmatrix}$.
Alors $\sigma' = \tau\sigma$ est une permutation de $[\![1, n+1]\!]$ qui possède $n+1$ comme point fixe.
Donc nous sommes ramenés au cas précédent : il existe $\tau_1, \dots, \tau_p$, $p \leqslant n-1$ des transpositions telles que $\sigma' = \tau_1 \cdots \tau_p$.
Et donc $\sigma = \tau\tau_1 \cdots \tau_p$ est produit d'au plus $p+1$ transpositions, avec $p+1 \leqslant n$.

En appliquant ce qui a été dit précédemment au σ de l'énoncé, il vient

$$\begin{pmatrix}5 & 2\end{pmatrix}\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 2\end{pmatrix}.$$

Et donc $\sigma = \begin{pmatrix}5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 2\end{pmatrix}$.

Remarque

On aurait pu itérer le procédé et commencer par composer par $\begin{pmatrix}4 & 2\end{pmatrix}$, mais comme il est clair que les orbites non triviales sont de cardinal 2, la décomposition en produit de cycles disjoints est déjà une décomposition en produit de transpositions.

Solution de l'exercice 30.4

L'ensemble $\mathfrak{A}_n$ est le noyau du morphisme $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \to \{-1, 1\}$.
Et donc comme le noyau de tout morphisme, c'est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.
Pour son cardinal, notons que si τ est une transposition de $\mathfrak{S}_n$, par exemple on pourra prendre $\tau = \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$, alors l'application $\sigma \mapsto \tau\sigma$ est une bijection de $\mathfrak{A}_n$ sur $\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \varepsilon(\sigma) = -1\} = \mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n$.
En effet, elle est injective, car si $\tau\sigma = \tau\sigma'$, alors par multiplication par $\tau^{-1} = \tau$, on a $\sigma = \sigma'$.
Et si σ est une permutation de signature -1 (on dit que σ est *impaire*), alors $\tau\sigma \in \mathfrak{A}_n$ et

$\sigma = \tau(\tau\sigma)$.
Mais $\text{Card}(\mathfrak{A}_n) + \text{Card}(\mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n) = \text{Card}(\mathfrak{S}_n) = n! \Leftrightarrow 2\text{Card}(\mathfrak{A}_n) = n!$, d'où le résultat.

Généralisation
Prouver que si $\varphi : G \to H$ est un morphisme de groupes entre deux groupes finis G et H, alors $\text{Card}(\text{Ker}\,\varphi) = \dfrac{\text{Card}(G)}{\text{Card}(\text{Im}\,\varphi)}$.

Solution de l'exercice 30.5

1. Il «suffit» de faire le calcul...
Notons à cet effet $\sigma_1 = (i \quad i+1 \quad \dots \quad j)$ et $\sigma_2 = (j-1 \quad j-2 \quad \dots \quad i)$ et $\tau = (i \quad j)$.
Il s'agit donc de prouver que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $(\sigma_1 \circ \sigma_2)(k) = \tau(k)$.
▶ Si $k \notin [\![i, j]\!]$, alors k est invariant par σ_1 et σ_2, donc par leur produit. Mais par ailleurs $\tau(k) = k$.
▶ Si $k = i$, $\sigma_2(i) = j-1$ et donc $\sigma_1(\sigma_2(i)) = \sigma_1(j-1) = j$.
▶ Si $k = j$, alors $\sigma_2(j) = j$ et donc $\sigma_1(\sigma_2(k)) = \sigma_1(j) = i$.
▶ Enfin, si $i < k < j$, alors $\sigma_2(k) = k-1$ et donc $\sigma_1(\sigma_2(k)) = \sigma_1(k-1) = k = \tau(k)$.
Donc on a bien $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \tau$.
2. Nous savons que tout élément de $\mathfrak{S}_n$ est un produit de transpositions.
Donc si nous prouvons que toutes les transpositions sont produit de $(k \quad k+1)$, c'est gagné.
Il suffit d'utiliser la décomposition d'un cycle en produit de transpositions qui a été vue en cours, conjuguée à la question 1 :
$$(i \quad i+1 \quad \dots \quad j-1 \quad j) = (i \quad i+1)\,(i+1 \quad i+2)\cdots(j-1 \quad j)$$
et de même
$$(j-1 \quad j-2 \quad \dots \quad i) = (j-1 \quad j-2)\cdots(i+1 \quad i)\,.$$
Et donc
$$(i \quad j) = (\,i \quad i+1)\cdots(j-2 \quad j-1)\,(j-1 \quad j)\,(j-2 \quad j-1)\cdots(i \quad i+1)\,.$$
3. Il suffit de remarquer que $(i \quad i+1) = (1 \quad i)\,(1 \quad i+1)\,(1 \quad i)$ si $i \geqslant 2$ et que sinon, c'est juste $(1 \quad 2)$.
Et alors le résultat est immédiat en utilisant la question précédente.

Solution de l'exercice 30.6

Il s'agit de comprendre que $f(n)$ représente l'ordre[3] maximal d'un élément du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

Or si une permutation σ s'écrit sous forme de produits de cycles à supports disjoints $\sigma_1 \cdots \sigma_p$, de longueurs respectives $a_1, \dots, a_p$, alors puisque ces ccles commutent, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\sigma^k = \sigma_1^k \sigma_2^k \cdots \sigma_p^k$.
Donc en particulier, $\sigma^k = \text{id}$ si et seulement si chacun des σ_i^k est égal à l'identité. Mais $\sigma_i^k = \text{id}$ si et seulement si $a_i \mid k$. Donc $\sigma^k = \text{id}$ si et seulement si k est divisible par tous les a_i.
Donc l'ordre de σ est le ppcm de $a_1, \dots, a_p$.

Ce qui signifie que $f(n)$ est le max des ppcm de toutes les suites finies $a_1, \dots, a_p$ d'entiers, avec $a_1 + \cdots + a_p \leqslant n$.
Commençons par noter que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathfrak{S}_{n+1}$ contient un sous-groupe[4] isomorphe à $\mathfrak{S}_n$.
Et par conséquent, $f(n) \leqslant f(n+1)$, de sorte que f est croissante.

Soit donc à présent $k \in \mathbf{N}^*$, et prenons dans un premier temps un entier n multiple de k, donc de la forme kp, avec $p > k$.
Considérons alors les entiers $p, p-1, \dots, p-k+1$. Les seuls éventuels diviseurs communs à deux de ces nombres sont $1, 2, \dots, k-1$.
Donc leur ppcm est supérieur ou égal à
$$\frac{p}{1\cdot 2\cdots(k-1)}\frac{p-1}{1\cdot 2\cdots(k-1)}\cdots\frac{p-k+1}{1\cdot 2\cdots(k-1)} = \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{((k-1)!)^k}.$$
Cette majoration est bien entendu loin d'être optimale, mais elle nous donne déjà
$$\frac{f(pk)}{(pk)^{k-1}} \geqslant \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{p^{k-1}k^{k-1}((k-1)!)^k} \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$$

[3] **Rappel** : l'ordre d'un élément x dans un groupe fini est le plus petit $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $x^p = e$.

Remarque
En effet,pour toute telle suite finie d'entiers, il existe bien une permutation de $[\![1, n]\!]$ qui est produit de p cycles à supports disjoints de longueurs respectives $a_1, \dots, a_p$.
Il suffit de prendre $\sigma_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & a_1\end{pmatrix}$ puis $\sigma_2 = \begin{pmatrix}a_1+1 & a_1+2 & \dots a_1+a_2\end{pmatrix}$, etc, et $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_p$.

[4] En fait plusieurs sous-groupes. On peut prendre par exemple l'ensemble des permutations dont $n+1$ est un point fixe.

puisque le numérateur est un polynôme de degré k en p et le dénominateur un polynôme de degré $k-1$.

Pour traiter les n quelconques (et plus nécessairement multiples de k), notons que $f(n) \geqslant f\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor k\right)$, et donc que

$$\frac{f(n)}{n^{k-1}} \geqslant \frac{f\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor k\right)}{n^{k-1}}.$$

Mais $n \underset{n\to+\infty}{\sim} k\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ et donc $n^{k-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(k\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right)^{k-1}$, si bien que

$$\frac{f\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor k\right)}{n^{k-1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{f\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor k\right)}{\left(k\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right)^{k-1}}$$

qui tend vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$ d'après la question précédente.
Et donc $\dfrac{f(n)}{n^{k-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, si bien que $n^k \underset{n\to+\infty}{=} o(f(n))$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.7

Commençons par noter que φ est bien à valeurs dans $\mathbf{K}$.
Soient $X, Y, Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})^2$, et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors

$$\varphi(\lambda X + Y, Z) = (\lambda X + Y)^\top AZ = \lambda X^\top AZ + Y^\top AZ = \lambda\varphi(X, Z) + \varphi(Y, Z).$$

Donc φ est linéaire par rapport à sa première variable.
On prouve sans difficulté qu'elle l'est aussi par rapport à la seconde.

De plus, si A est antisymétrique, alors pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, on a

$$\varphi(X, X) = X^\top AX = \left(X^\top A^\top X\right)^\top = \left(-X^\top AX\right)^\top = -\varphi(X, X).$$

Transposée

$X^\top AX$ est une matrice 1×1 (que l'on identifie donc à un scalaire).
Elle est donc égale à sa propre transposée.

Et donc $\varphi(X, X) = 0$, de sorte que φ est alternée.

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.8

Soient $(x, y) \in E^2$. Alors

$$\begin{aligned}
\varphi(x+y, x-y) &= \varphi(x, x-y) + \varphi(y, x-y) \\
&= \underbrace{\varphi(x, x)}_{=0} - \varphi(x-y) + \varphi(y, x) - \underbrace{\varphi(y, y)}_{=0} \\
&= 2\varphi(y, x).
\end{aligned}$$

Linéarité par rapport à la première variable.

Linéarité par rapport à la seconde variable.

φ est alternée.

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.9

Nous allons commencer par prouver que $\varphi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{i-1}, f(x_i), x_{i+1}, \dots, x_n)$ est une forme n-linéaire alternée.

Prouvons la linéarité par rapport à la $j^{\text{ème}}$ variable.
Soient donc $(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \in E^{n-1}$, et soient $(x, y) \in E^2$, $\lambda \in \mathbf{K}$.
Alors

$$\begin{aligned}
\varphi(x_1, \dots, x_{j-1}, \lambda x + y, x_{j+1}, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^{j-1} \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, f(x_i), \dots, x_{j-1}, \lambda x + y, x_{j+1}, \dots, x_n) \\
&+ \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{j-1}, f(\lambda x + y), x_{j+1}, \dots, x_n) \\
&+ \sum_{i=j+1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{j-1}, \lambda x + y, x_{j+1}, \dots, f(x_i), \dots, x_n) \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} \left(\lambda \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x, \dots, x_n) + \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, y, \dots, x_n)\right) \\
&+ \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, \lambda f(x) + f(y), \dots, x_n) \\
&+ \sum_{i=j+1}^{n} \left(\lambda \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x, \dots, x_n) + \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, y, \dots, x_n)\right)
\end{aligned}$$

On ne note plus que les vecteurs en $i^{\text{ème}}$ position.

On a seulement utilisé la linéarité de f.

$$= \lambda\varphi(x_1, \dots, x, \dots, x_n) + \varphi(x_1, \dots, y, \dots, x_n).$$

Donc φ est n-linéaire.
De plus, si on suppose que $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ est tel que $x_k = x_\ell$, $k < \ell$, alors

$$\begin{aligned}
\varphi(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, f(x_i), \dots, x_n)\\
&= \sum_{i \notin \{k,\ell\}} \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, f(x_i), \dots, x_k) + \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, f(x_k), \dots, x_\ell, \dots, x_n)\\
&+ \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_k, \dots, f(x_\ell), \dots, x_n)\\
&= \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, f(x_k), \dots, x_k, \dots, x_n) + \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_k, \dots, f(x_k), \dots, x_n)\\
&= \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, f(x_k), \dots, x_k, \dots, x_n) - \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, f(x_k), \dots, x_k, \dots, x_n) = 0.
\end{aligned}$$

Donc φ est n-linéaire alternée.

On sait alors que

$$\varphi = \varphi(e_1, \dots, e_n)\det_{\mathscr{B}} = \sum_{i=1}^n \det_{\mathscr{B}}(e_1, \dots, e_{i-1}, f(e_i), e_{i+1}, \dots, e_n)\det_{\mathscr{B}}.$$

Notons $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.
Alors pour $i \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\begin{aligned}
\det_{\mathscr{B}}(e_1, \dots, e_{i-1}, f(e_i), e_{i+1}, \dots, e_n) &= \det_{\mathscr{B}}\left(e_1, \dots, e_{i-1}, \sum_{j=1}^n a_{j,i}e_j, e_{i+1}, \dots, e_n\right)\\
&= \sum_{j=1}^n a_{j,i}\det_{\mathscr{B}}(e_1, \dots, e_{i-1}, e_j, e_{i+1}, \dots, e_n)\\
&= a_{i,i}\det_{\mathscr{B}}(e_1, \dots, e_n) = a_{i,i}.
\end{aligned}$$

Donc au final, $\varphi(e_1, \dots, e_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_{i,i} = \mathrm{tr}(f)$.

Et donc $\varphi = \mathrm{tr}(f)\det_{\mathscr{B}}$.

Trop long ! Pour abréger, on n'a pas détaillé une dernière étape, qui utilise la linéarité de $\det_{\mathscr{B}}$ par rapport à la $j^{\text{ème}}$ variable.

Tous les termes pour $i \notin \{k, \ell\}$ sont nuls puisque deux des vecteurs sont identiques et que $\det_{\mathscr{B}}$ est alternée.

Rappel L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E est un espace vectoriel de dimension 1.

Détails Les déterminants précédents sont nuls si $j \neq i$ car alors deux des vecteurs sont égaux.

Solution de l'exercice 30.10

L'énoncé suppose implicitement qu'on sait que $\mathscr{A}_k(E)$ est un espace vectoriel, ce n'est pas directement du cours, mais ce n'est pas difficile du tout de prouver qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de l'ensemble des applications de E^k dans $\mathbf{K}$.

Notons tout de suite que pour $k > n$, il n'y a pas de forme k-linéaire alternée non nulle sur E.
En effet, toute famille de k vecteurs de E est alors liée, et donc possède une image nulle par toute forme k-linéaire alternée.
Autrement dit, pour $k > n$, $\dim \mathscr{A}_k(E) = 0$.
Dans la suite, nous supposons donc $k < n$.

Les mêmes arguments que ceux utilisés pour le déterminant prouvent que si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, que $(x_1, \dots, x_k) \in E^k$ est une famille de vecteurs de E tels que $x_j = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_{i,j}e_i$, alors pour tout forme k-linéaire alternée $f : E^n \to \mathbf{K}$,

$$\begin{aligned}
f(x_1, \dots, x_n) &= f\left(\sum_{i=1}^n a_{i,1}e_i, \sum_{i=1}^n a_{i,2}e_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{i,k}e_i\right)\\
&= \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n a_{i_1,1} \cdots a_{i_k,k} f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k})\\
&= \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) a_{i_{\sigma(1)},1} a_{i_{\sigma(2)},2} \cdots a_{i_{\sigma(k)},k}\right) f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}) \qquad (\star)
\end{aligned}$$

Détails On réordonne les vecteurs de la base par ordre croissant, et tout échange de deux vecteurs fait apparaître un -1.

Contrairement au cas des formes n-linéaires, il ne suffit ici pas[5] de connaître la valeur de f sur la base $(e_1, \dots, e_n)$, mais il faut la connaître sur chaque «p-uplet croissant de de $(e_1, \dots, e_n)$», c'est-à-dire sur chaque élément de

$$\mathcal{D}_k = \{(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}), 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n\}.$$

[5] Sauf si $k = n$.

Commençons par remarquer que le cardinal de $\mathcal{D}_k$ est $\binom{n}{k}$: choisir un élément de $\mathcal{D}_k$, c'est choisir une partie de cardinal p de $(e_1, \dots, e_n)$, il n'y aura alors qu'une seule manière de l'ordonner.
Donc $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ est un bon candidat pour la dimension cherchée, ne reste plus qu'à le prouver...

Pour commencer, montrons que pour $\underline{i} = (i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{D}_k$,

$$f_{\underline{i}} : (x_1, \dots, x_k) \mapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{k} a_{i_{\sigma(j)},j}$$

est une forme k-linéaire alternée sur E.
La k-linéarité ne pose aucune difficulté, et pour le caractère alterné, la preuve donnée en cours de l'antisymétrie[6] reste valable.
Plus simplement, on peut remarquer que $f_{\underline{i}}(x_1, \dots, x_k)$ est le déterminant de la matrice extraite de $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant k}}$ obtenue en ne gardant que les lignes $i_1, \dots, i_k$.
Et alors le determiner étant n-linéaire alterné, il est facile de constater que $f_{\underline{i}}$ l'est aussi.
Ce point de vue nous permet d'aller plus loin : pour $\underline{i} = (i_1, \dots, i_k)$ et $\underline{k} = (j_1, \dots, j_k) \in \mathcal{D}^n$, on a $f_{\underline{i}}(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \underline{i} = \underline{j} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
En effet, dans le cas $\underline{i} = \underline{j}$, alors $f_{\underline{i}}(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$ est le déterminant de la matrice I_k.
Et si $\underline{i} \neq \underline{j}$, l'un des éléments de $\underline{i}$, appelons-le i_p n'est pas dans $\underline{j}$, et donc la $p^{\text{ème}}$ ligne de la matrice dont $f_{\underline{i}}(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$ est le déterminant est nulle, donc le déterminant est nul.

[6] Qui rappelons-le implique le caractère alterné, au moins pour les corps tels que $2 \neq 0$.

Remarque
Le point que nous venons de prouver pourrait se retrouver sans parler de matrice.

Donc nous avons $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ formes n-linéaires alternées, et la formule $(\star)$ prouve qu'elles engendrent $\mathcal{A}_k(E)$.
Il ne reste donc qu'à prouver qu'elles sont libres.
Soient alors $(\lambda_{\underline{i}})_{\underline{i} \in \mathcal{D}_k}$ des scalaires tels que $\sum_{\underline{i} \in \mathcal{D}_k} \lambda_{\underline{i}} f_{\underline{i}} = 0$.
Pour $\underline{i} = (i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{D}_k$, en évaluant la relation ci-dessus en $(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$, on arrive à

$$\lambda_{\underline{i}} f_{\underline{i}}(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = 0 \Leftrightarrow \lambda_{\underline{i}} = 0.$$

Et donc la famille $(f_{\underline{i}})_{\underline{i} \in \mathcal{D}_n}$ est libre, et donc est une base de $\mathcal{A}_k(E)$.
On en déduit que $\dim \mathcal{A}_k(E) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.
Remarque *: une vérification aisée : pour $k = n$, on obtient $\dim \mathcal{A}_n(E) = 1$, ce qui est un résultat du cours.*

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.11

Par n-linéarité, on a

$$\det(A) = \det\left(-A^\top\right) = (-1)^n \det\left(A^\top\right) = (-1)^n \det(A) = -\det(A).$$

Et donc $\det A = 0$.
Ce résultat n'est plus valable pour n pair, comme en témoigne le cas de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Et plus généralement, si $n = 2p$ est pair, on peut considérer la matrice triangulaire par

blocs

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est clairement antisymétrique et possède $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}^p = 1$ comme déterminant.

Solution de l'exercice 30.12

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'un tel f existe, et notons $n = \dim E$.
Alors $\det(f^2) = \det(-\mathrm{id}_E) \Leftrightarrow (\det f)^2 = (-1)^n \det(\mathrm{id}_E) = -1$.
Et bien entendu, ceci n'est pas possible lorsque $\det f$ est réel.

Solution de l'exercice 30.13

Notons $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ les vecteurs sur lequel est construit ce parallélépipède, qui sont à coordonnées entières, puisqu'il en est de même des sommets.
Le volume en question s'entend au sens usuel du terme, c'est-à-dire le déterminant de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

En effet
Considérer le déterminant dans la base canonique, c'est prendre comme unité de volume un cube de côtés 1. C'est bien ce qu'on entend usuellement par *volume*.

Donc le volume cherché est le déterminant d'une matrice 3×3 dont tous les coefficients sont dans $\mathbf{Z}$.
Or, toute matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, à coefficients entiers possède un déterminant entier, puisque

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$$

est une somme de produits d'entiers.

Solution de l'exercice 30.14

Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A, et $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.
Puisque $AX = B$, on a donc $B = x_1C_1 + x_2C_2 + \cdots + x_nC_n$.
Et donc

$$\begin{aligned} \det(A_i) &= \det_{\mathscr{B}}\left(C_1, \dots, C_{i-1}, \sum_{k=1}^n x_kC_k, C_{i+1}, \dots, C_n\right) \\ &= \sum_{k=1}^n x_k \det_{\mathscr{B}}(C_1, \dots, C_{i-1}, C_k, C_{i+1}, \dots, C_n) \\ &= x_i \det_{\mathscr{B}}(C_1, \dots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \dots, C_n) = x_i \det(A). \end{aligned}$$

Si $k \neq i$, le déterminant considéré possède deux colonnes égales, donc est nul.

Une autre preuve : une autre option est de noter que $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$.
Mais nous savons que $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\mathrm{Com}(A)^\top$.
Donc x_i, le coefficient à la $i^{\text{ème}}$ ligne de X est égal à

$$\begin{aligned} x_i = [X]_{i,1} = \frac{1}{\det A}[\mathrm{Com}(A)^\top B]_i &= \frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^n [\mathrm{Com}(A)^\top]_{i,j}[B]_{j,1} \\ &= \frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^n [\mathrm{Com}(A)]_{j,i}[B]_{j,1} \\ &= \frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^n (-1)^{j+i}\Delta_{j,i}(A)[B]_{j,1}. \end{aligned}$$

Cette somme ressemble fortement à un développement, par rapport à une colonne[7]
Et en effet, c'est le développement par rapport à la $i^{\text{ème}}$ colonne de $\det(A_i)$, puisque $[B]_{j,1}$

[7] Puisque c'est j, le numéro de ligne qui varie.

est le coefficient (j,i) de A_i, et que les colonnes de A_i autres que la $i^{\text{ème}}$ étant celles de A, $\Delta_{j,i}(A_i) = \Delta_{j,i}(A)$.
Et donc on a directement $x_i = \dfrac{\det A_i}{\det A}$.
Dans le cas où $n = 2$, et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$, on trouve donc que l'unique solution est

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{ed - bf}{ad - bc} \text{ et } y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{af - ce}{ad - bc}.$$

Commentaires *: comme souvent avec le déterminant, ces formules sont très jolies, mais en pratique inutilisables lorsque n grandit, et ce n'est probablement pas la meilleure façon de résoudre un système linéaire !*

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.15

Pour passer de B à A, on a multiplié la ligne i par $(-1)^i$ et la colonne j par $(-1)^j$. Ainsi, on a

$$\det B = \begin{vmatrix} (-1)^1(-1)^1 a_{1,1} & (-1)^1(-1)^2 a_{1,2} & \dots & \dots & (-1)^1(-1)^j a_{1,j} & \dots & (-1)^1(-1)^n a_{1,n} \\ (-1)^2(-1)^1 a_{2,1} & (-1)^2(-1)^2 a_{2,2} & \dots & \dots & (-1)^2(-1)^j a_{2,j} & \dots & (-1)^2(-1)^n a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ (-1)^i(-1)^1 a_{i,1} & (-1)^i(-1)^2 a_{i,2} & \dots & \dots & (-1)^i(-1)^j a_{i,j} & \dots & (-1)^i(-1)^n a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ (-1)^n(-1)^1 a_{n,1} & (-1)^n(-1)^2 a_{n,2} & \dots & \dots & (-1)^n(-1)^j a_{n,j} & \dots & (-1)^n(-1)^n a_{n,n} \end{vmatrix}$$

La multilinéarité par rapport aux lignes nous permet de sortir le $(-1)^1$ de la première ligne.

$$= -\begin{vmatrix} (-1)^1 a_{1,1} & (-1)^2 a_{1,2} & \dots & \dots & (-1)^j a_{1,j} & \dots & (-1)^n a_{1,n} \\ (-1)^2(-1)^1 a_{2,1} & (-1)^2(-1)^2 a_{2,2} & \dots & \dots & (-1)^2(-1)^j a_{2,j} & \dots & (-1)^2(-1)^n a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ (-1)^i(-1)^1 a_{i,1} & (-1)^i(-1)^2 a_{i,2} & \dots & \dots & (-1)^i(-1)^j a_{i,j} & \dots & (-1)^i(-1)^n a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ (-1)^n(-1)^1 a_{n,1} & (-1)^n(-1)^2 a_{n,2} & \dots & \dots & (-1)^n(-1)^j a_{n,j} & \dots & (-1)^n(-1)^n a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Puis le $(-1)^2$ de la seconde, le $(-1)^3$ de la troisième, etc.

$$= -(-1)^{1+2+\dots+n} \begin{vmatrix} (-1)^1 a_{1,1} & (-1)^2 a_{1,2} & \dots & \dots & (-1)^j a_{1,j} & \dots & (-1)^n a_{1,n} \\ (-1)^1 a_{2,1} & (-1)^2 a_{2,2} & \dots & \dots & (-1)^j a_{2,j} & \dots & (-1)^n a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ (-1)^1 a_{i,1} & (-1)^2 a_{i,2} & \dots & \dots & (-1)^j a_{i,j} & \dots & (-1)^n a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ (-1)^1 a_{n,1} & (-1)^2 a_{n,2} & \dots & \dots & (-1)^j a_{n,j} & \dots & (-1)^n a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= -(-1)^{1+2+\dots+n}(-1)^{1+2+\dots+n} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Même principe mais pour les colonnes

$$= (-1)^{n(n+1)} \det(A) = \det(A).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.16

1. On a $\begin{pmatrix} AD - BC & B \\ CD - DC & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & B \\ 0_n & D \end{pmatrix}$.

2. Si D est inversible, la matrice $\begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix}$ est triangulaire par blocs, de déterminant $\det(D)\det(I_n) = \det(D) \neq 0$, donc elle est inversible.
Il vient donc
$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \det(D) = \det\begin{pmatrix} AD - BC & B \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$
Mais ce dernier déterminant est lui-même triangulaire par blocs, égal à $\det(AD-BC)\det(D)$.
Et donc $\det(D)$ étant non nul, on a bien $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$.

Analogie
Vos aurez sûrement reconnu que ce $AD - BC$ ressemble au $ad - bc$ du déterminant de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

3. La fonction $t \mapsto \det(D+tI_n)$ est une fonction polynomiale de degré au plus n. En effet, c'est

$$\det(D+tI_n) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}[D+tI_n]_{\sigma(i),i}$$

qui est une somme de produits de n termes polynomiaux en t de degré au plus 1.

De plus, à $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ fixé, $\prod_{i=1}^{n}[D+tI_n]_{\sigma(i),i}$ est de degré n si et seulement si tous les $[D+tI_n]_{\sigma(i),i}$ sont de degré 1.

Ceci n'arrive que lorsque pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\sigma(i) = i$, et donc pour $\sigma = \mathrm{id}$.
Et alors le coefficient de degré n est 1.
Ainsi, $P : t \mapsto \det(D+tI_n)$ est polynomiale, et non nulle. Donc elle ne possède qu'un nombre fini de racines (dont 0 fait partie puisque $\det(D) = 0$).
Soit alors $\alpha > 0$ la plus petite racine strictement positive de P si elle existe (sinon, posons $\alpha = +\infty$).
Alors pour $t \in]0,\alpha[$, $\det(D+tI_n) \neq 0$.
Donc par la question 2, puisque C et $D+tI_n$ commutent,
$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D+tI_n\end{pmatrix} = \det(A(D+tI_n) - BC)$.

Or, par le même type d'arguments, les fonctions $t \mapsto \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D+tI_n\end{pmatrix}$ et $t \mapsto \det(A(D+tI_n)-BC)$ sont polynomiales, et en particulier sont continues sur $\mathbf{R}$. Et en particulier sont continues en 0.
Donc en passant à la limite lorsque $t \to 0^+$, il vient

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix} = \lim_{t\to0^+}\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D+tI_n\end{pmatrix} = \lim_{t\to0^+}\det(A(D+tI_n)-BC) = \det(AD-BC).$$

> **Détails**
> Pour $\sigma(i) \neq i$, le coefficient $(\sigma(i), i)$ de I_n est nul et donc $[D+tI_n]_{\sigma(i),i}$ est une constante indépendante de t.

Solution de l'exercice 30.17

Commençons par remarquer que $A = PBP^{-1}$ s'écrit aussi $AP = PB$.
Soit encore $AP_1 + iAP_2 = P_1B + iP_2B$.
Puisque A, P_1, P_2 et B sont à coefficients réels, on a $AP_1 = P_1B$ et de même $AP_2 = P_2B$.
Donc si l'une des matrices P_1 ou P_2 est inversible, alors on a fini : il existe $Q \in GL_n(\mathbf{R})$ telle que $AQ = QB \Leftrightarrow A = QBQ^{-1}$, donc A et B sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

Le problème va donc apparaître lorsque ni P_1 ni P_2 ne sont inversibles.
Dans ce cas, notons φ l'application définie sur $\mathbf{C}$ par $t \mapsto \det(P_1 + tP_2)$.
Alors il s'agit d'une application polynomiale en t, de degré au plus n.
Pour le voir, écrivons, une fois n'est pas coutume,

$$\varphi(t) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}[P_1+tP_2]_{\sigma(i),i}$$

qui fait apparaître des produits de n polynômes en t de degrés au plus 1.
De plus, φ n'est pas le polynôme nul puisque $P = P_1 + iP_2$ est inversible, donc $\varphi(i) \neq 0$.
Par conséquent, φ ne possède qu'un nombre fini de racines. Et donc il existe $t_0 \in \mathbf{R}$ tel que $\varphi(t_0) \neq 0 \Leftrightarrow P_1 + t_0P_2$ soit inversible.
Et alors on a $A(P_1+t_0P_2) = (P_1+t_0P_2)B \Leftrightarrow A = (P_1+t_0P_2)B(P_1+t_0P_2)^{-1}$.
Comme $P_1 + t_0P_2$ est à coefficients réels, A et B sont semblables en tant que matrices réelles.

Solution de l'exercice 30.18

1. Bien entendu, on pourrait développer par la ligne ou la colonne de notre choix. Dans ce cas, le meilleur choix est sûrement la troisième ligne puisqu'elle ne contient que deux coefficients non nuls, et donc il ne faudrait calculer que deux déterminants 3×3.
Préférons commencer par une opération sur les colonnes pour n'avoir qu'un déterminant 3×3 à calculer[8].

$$D \underset{C_4\leftarrow C_4-C_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 4\end{vmatrix}$$

[8] Ce qui peut se faire à l'aide de la règle de Sarrus, un développement, par opérations élémentaires, ou par une combinaisons des deux derniers.

$$\underset{L_3\leftarrow L_3-L_1}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 2.$$

2. 18.

3. Il suffit de développer par rapport à la première ligne, ce qui nous donne

$$-a\begin{vmatrix} a & c \\ b & 0 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{vmatrix} = 2abc.$$

4. Commençons par réaliser les opérations $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$. Alors on obtient

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c^2-a^2)-(c-a)(b^2-a^2) = (b-a)(c-a)(c-b).$$

5. Commençons par des opérations élémentaires :

$$D = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} \underset{C_3\leftarrow C_3-C_2}{=} \begin{vmatrix} a & c & 0 & b \\ c & a & b-a & c \\ c & b & a-b & c \\ b & c & 0 & a \end{vmatrix} \underset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{=} \begin{vmatrix} a & c & 0 & b \\ c & a & b-a & c \\ 2c & a+b & 0 & 2c \\ b & c & 0 & a \end{vmatrix}.$$

Puis développons par rapport à la troisième colonne :

$$D = (a-b)\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2c & a+b & 2c \\ b & c & a \end{vmatrix} \underset{C_1\leftarrow C_1-C_3}{=} (a-b)\begin{vmatrix} a-b & c & b \\ 0 & a+b & 2c \\ b-a & c & a \end{vmatrix} = (a-b)^2\begin{vmatrix} 1 & c & b \\ 0 & a+b & 2c \\ -1 & c & a \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première colonne,

$$D = (a-b)^2\left[(a+b)a - 2c^2 - 2c^2 + (a+b)b\right] = (a-b)^2\left((a+b)^2 - 4c^2\right) = (a-b)^2(a+b+2)(a+b-2c).$$

Solution de l'exercice 30.19

Écrivons la matrice de cette famille (nommons-la (e_1, e_2, e_3)) dans la base canonique : il s'agit de $A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2+\lambda \\ -1 & 1-\lambda & -2 \\ 2-\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Nous savons que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbf{C}^3$ si et seulement si $\det A \neq 0$.
Pour calculer $\det A$, commençons par des opérations sur les colonnes, en réalisant les opérations $C_1 \leftarrow C_1 - (2-\lambda C_3)$ et $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$, de sorte que

Rappel
L'ajout à une colonne d'une combinaison linéaire des autres ne change pas le déterminant.

$$\det A = \begin{vmatrix} 4+\lambda^2 & 3-\lambda & 2+\lambda \\ 3-2\lambda & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3}\times 1\begin{vmatrix} 4+\lambda^2 & 3-\lambda \\ 3-2\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 4+\lambda^2 & 1 \\ 3-2\lambda & 1 \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2+2\lambda+1) = (3-\lambda)(\lambda+1)^2$$

Et donc ce déterminant est nul si et seulement si $\lambda \in \{-1, 3\}$.
Donc (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbf{C}^3$ si et seulement si $\lambda \notin \{-1, 3\}$.

Solution de l'exercice 30.20

Il faut faire un peu de trigo et se souvenir que $\cos(a_j + ih) = \cos(a_j)\cos(ih) - \sin(a_j)\sin(ih)$.

Notons alors $C = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(h) \\ \vdots \\ \cos((n-1)h) \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(h) \\ \vdots \\ \sin((n-1)h) \end{pmatrix}$.

Alors la $j^{\text{ème}}$ colonne du déterminant Δ est $\cos(a_j)C - \sin(a_j)S \in \mathrm{Vect}(C, S)$.
Donc toutes les colonnes de Δ sont dans un espace de dimension au plus[9] 2.
En particulier, si $n \geqslant 3$, elles forment une famille liée, et donc $\Delta = 0$.
Et si $n = 2$, alors

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} \cos(a_1) & \cos(a_2) \\ \cos(a_1+h) & \cos(a_2+h) \end{vmatrix} \\ &= \cos(a_1+a_2+h)\cos(a_1-a_2-h) - \cos(a_1+a_2+h)\cos(a_2-a_1-h) \\ &= \cos(a_1+a_2+h)\sin(h)\sin(a_1-a_2).\end{aligned}$$

[9] En fait il est facile de constater (en utilisant leur première ligne) qui S et C ne sont pas proportionnelles, et donc engendrent un espace de dimension exactement 2.

Solution de l'exercice 30.21

Le rang est facile car f est une symétrie : $f^2 = \mathrm{id}$, et en particulier est inversible, égale à son propre inverse[10].
Donc $\mathrm{rg}(f) = \dim \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) = n^2$.
Pour la trace comme pour le déterminant, il nous faut la matrice de f dans une base de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Et pour que les calculs soient le plus faciles possibles, mieux vaut choisir intelligemment cette base.
Donnons deux solutions, juste pour prouver qu'il n'y a pas toujours qu'une bonne solution.

[10] On dit encore une involution.

▶ **Première option** : travaillons dans la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Celle-ci n'est pas canoniquement ordonnée, donc choisissons judicieusement l'ordre des éléments, et notons $\mathscr{B} = (E_{1,1}, E_{2,2}, \dots, E_{n,n}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{1,3}, E_{3,1}, \dots, E_{n-1,n}, E_{n,n-1})$. Alors

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} f(E_{1,1}) & \dots & f(E_{n,n}) & f(E_{1,2}) & f(E_{2,1}) & f(E_{1,3}) & f(E_{3,1}) & \dots & f(E_{n-1,n}) & f(E_{n,n-1}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & & & \\ & & & 1 & 0 & & & & & \\ & & & & & 0 & 1 & & & \\ & & & & & 1 & 0 & & & \\ & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} E_{1,1} \\ \vdots \\ E_{n,n} \\ E_{1,2} \\ E_{2,1} \\ E_{1,3} \\ E_{3,1} \\ \vdots \\ E_{n-1,n} \\ E_{n,n-1} \end{array}$$

où tous les coefficients laissés vides sont nuls.
Autrement dit, A est diagonale par blocs, avec n blocs 1×1 égaux à 1 et $\dfrac{n^2 - n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ blocs de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Et donc non seulement on a tout de suite $\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A) = n$, mais en plus, par déterminant par blocs :

$$\det(f) = \det(A) = \underbrace{1 \cdots 1}_{n \text{ fois}} \times \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}_{\frac{n(n-1)}{2} \text{ fois}} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Dénombrement

Le $\frac{n^2-n}{2}$ vient du fait qu'aux n matrices de la base canonique, on a retiré les n de la forme $E_{i,i}$, et qu'on a regroupé celles qui restaient par deux.
Dit autrement, c'est $\binom{n}{2}$, le nombre de manières de choisir une paire formée de deux éléments distincts de $[\![1, n]\!]$.

▶ **Seconde option** : souvenons nous que $\mathscr{M}_n(\mathbf{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbf{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbf{K})$, et que nous avons déjà établi que $\dim \mathscr{S}_n(\mathbf{K}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim \mathscr{A}_n(\mathbf{K}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.
Si $\left(S_1, \dots, S_{\frac{n(n+1)}{2}}\right)$ est une base de $\mathscr{S}_n(\mathbf{K})$ et que $\left(A_1, \dots, A_{\frac{n(n-1)}{2}}\right)$ est une base de $\mathscr{A}_n(\mathbf{K})$, alors leur concaténation $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ dans laquelle la matrice de f est

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f(S_1) & \dots & f(S_{n(n+1)/2}) & f(A_1) & \dots & f(A_{n(n-1)/2}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} S_1 \\ \vdots \\ S_{n(n+1)/2} \\ A_1 \\ \vdots \\ A_{n(n-1)/2} \end{array}$$

C'est donc une matrice diagonale avec $\dfrac{n(n+1)}{2}$ termes égaux à 1 et $\dfrac{n(n-1)}{2}$ termes égaux à -1, de sorte que

$$\mathrm{tr}(f) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n \text{ et } \det(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Remarque

Le même raisonnement s'applique pour toute symétrie s, pour laquelle on a alors

$$\det(s) = (-1)^{\dim \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)}.$$

Notons enfin que ceci se simplifie un peu $\det(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0 \pmod 4 \text{ ou } n \equiv 1 \pmod 4 \\ -1 & \text{si } n \equiv 2 \pmod 4 \text{ ou } n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.22

1. C'est un simple calcul de produit par blocs :
$$\begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_p\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_nA & BI_p \\ 0 & CI_p\end{pmatrix} = M.$$

2. On a donc $\det M = \det \begin{pmatrix} I_n & C \\ 0 & B\end{pmatrix} \times \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_p\end{pmatrix}$.

Mais si on développe $\begin{vmatrix} I_n & C \\ 0 & B\end{vmatrix}$ par rapport à sa première colonne, on fait apparaître un déterminant de la forme $\begin{vmatrix} I_{n-1} & C' \\ 0 & B\end{vmatrix}$, qui peut de nouveau se développer par rapport à la première colonne, etc.
Jusqu'à arriver à $\begin{vmatrix} I_n & C \\ 0 & B\end{vmatrix} = \det(B)$.

Et de même, pour $\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & I_p\end{vmatrix}$, que l'on peut développer par rapport à sa dernière ligne, etc, pour prouver qu'il vaut $\det(A)$.
On retrouve ainsi $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C\end{pmatrix} = \det(A)\det(C)$.

Déjà vu ?
C'est exactement l'argument utilisé en cours pour prouver la formule sur le déterminant par blocs.

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.23

Commençons par procéder à des opérations sur les colonnes, en réalisant l'opération $C_4 \leftarrow C_4 - 3C_3 + 3C_2 - C_1$, de sorte que, par le binôme de Newton
$$D(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & (x-1)^3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 0\end{vmatrix}$$
En développant par rapport à la dernière colonne, on trouve donc
$$D(x) = -(x-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2\end{vmatrix}.$$
On reconnaît alors un déterminant de Vandermonde :
$$D(x) = -(x-1)^3(3-1)(3-2)(2-1) = -2(x-1)^3.$$

Remarque
Le binôme n'est pas apparu par hasard, l'énoncé nous demandait de faire apparaître $(x-1)^3$, nous nous sommes donc arrangés pour le faire apparaître !

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.24

Commençons par noter que AB est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
Nous allons prouver que $\operatorname{rg}(AB) < n$.
Notons $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de A (qui sont donc dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$) et $D_1, \dots, D_n$ celles de B (qui sont donc dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$).
Alors les colonnes de AB sont $AD_1, \dots, AD_n$.
Mais si $D_i = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p\end{pmatrix}$, alors $AD_i = \lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_p C_p$.
Ainsi, toutes les colonnes de B sont dans $\operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_p)$, qui est de dimension au plus p.
Et donc $\operatorname{rg}(AB) \leqslant p < n$. En particulier, AB ne saurait être inversible, et donc son déterminant est nul.

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.25

Une des grosses difficultés de ce type d'exercice est la gestion des pointillés : assurez-vous d'avoir bien compris les matrices en jeu, et soyez soigneux dans votre rédaction.

1. Pour $n \geqslant 2$, réalisons les opérations $L_1 \leftarrow L_1 - L_2, L_2 \leftarrow L_2 - L_3, \dots, L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_n$.
Alors
$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ -1\dots & \dots & -1 & -1 & 0\end{vmatrix}_{[n]}.$$

Il est alors possible de procéder à un développement par rapport à la première colonne :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ -1\dots & \dots & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]} - (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{[n-1]} = D_{n-1} + (-1)^n.$$

Détails

Pour le premier des deux déterminants, on reconnaît D_{n-1}, non pas sous la forme de l'énoncé, mais sous celle obtenue après opérations sur les lignes.

Puisque $D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$, on a donc $D_3 = D_2 - 1 = 0$, puis $D_4 = 1$, etc. Soit encore

$$D_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

Notons que la matrice dont on calcule le déterminant est antisymétrique, donc pour n impair, il n'est pas surprenant de trouver 0, c'est le résultat de l'exercice 11.

Une autre solution : commençons par réaliser les opérations $C_1 \leftarrow C_1 + C_n$, puis $L_1 \leftarrow L_1 + L_n$:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \dots & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \dots & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

Développons alors par rapport à la première colonne :

$$D_n = (-1)(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \dots & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}_{[n-1]}.$$

On redéveloppe par rapport à la première ligne :

$$D_n = (-1)^{2n+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ -1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \dots & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n-2]} = D_{n-2}.$$

Ambigu

Sur ce type d'exercice, la valeur de n à partir de laquelle le déterminant est clairement bien défini n'est pas toujours très claire...

$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$, donc pour tout n pair, $D_n = 1$.

Si on a envie de donner un sens à D_1, c'est $D_1 = |0| = 0$.

Si on préfère commencer à $D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

Donc pour tout n impair, $D_n = 0$.

2. Notons $D_n(a_1, \dots, a_n)$ le déterminant cherché.
Soustrayons la première ligne aux suivantes :

$$D_n(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_2 - a_1 & \dots & a_2 - a_1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_3 - a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_2-a_1 & \dots & a_2-a_1 \\ a_2-a_1 & a_3-a_1 & \dots & a_3-a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2-a_1 & a_3-a_1 & \dots & a_n-a_1 \end{vmatrix} = a_1 D_{n-1}(a_2-a_1,\dots,a_n-a_1).$$

On a développé par rapport à la première colonne.

Puis sur le même principe, $D_{n-1}(a_2-a_1,\dots,a_n-a_1) = (a_2-a_1)D_{n-2}(a_3-a_2,\dots,a_n-a_2)$, etc, et donc au final

$$D_n(a_1,\dots,a_n) = a_1(a_2-a_1)(a_3-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1}).$$

Une autre solution : réalisons l'opération $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$:

$$\begin{aligned} D_n(a_1,\dots,a_n) &= \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n-a_{n-1} \end{vmatrix}_{[n]} \\ &= (a_n-a_{n-1})(-1)^{2n}D_{n-1}(a_1,a_2,\dots,a_{n-1}) \\ &= (a_n-a_{n-1})D_{n-1}(a_1,\dots,a_{n-1}) \end{aligned}$$

On a $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_1(a_2-a_1)$.
Donc $D_3 = (a_3-a_2)D_2 = a_1(a_2-a_1)(a_3-a_2)$.

Par récurrence, on prouve alors que

$$D_n = a_1(a_2-a_1)(a_3-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1}) = a_1\prod_{i=1}^{n-1}(a_{i+1}-a_i).$$

3. On a facilement $D_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3$ et $D_3 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4$.
Et pour $n \geqslant 4$, on a, en développant par rapport à la première ligne

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \end{vmatrix}_{[n]} = -2 \begin{vmatrix} -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & -2 \end{vmatrix}_{[n-1]} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & -2 \end{vmatrix}_{[n-1]} \\ &= -2D_{n-1} - \begin{vmatrix} -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & -2 \end{vmatrix}_{[n-2]} = -2D_{n-1} - D_{n-2}. \end{aligned}$$

Astuce
Dans ce type de déterminants écrits avec des pointillés, on perd vite la taille de la matrice, il est utile de l'inscrire en bas à droite.

On reconnaît alors une suite récurrente linéaire d'ordre 2, dont le polynôme caractéristique est X^2+2X+1, qui possède -1 comme racine double.
Donc il existe deux réels α et β tels que $D_n = (\alpha+\beta n)(-2)^n$. À l'aide des conditions initiales ($D_2 = 3$ et $D_3 = -4$), on trouve $D_n = (n+1)(-1)^n$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.26

1. Pour $x \in \mathbf{K}$, on a

$$\chi_A(x) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n [xI_n - A]_{\sigma(i),i}.$$

Or, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et tout $i \in [\![1,n]\!]$, $x \mapsto [xI_n-A]_{\sigma(i),i}$ est une fonction polynomiale de degré au plus 1.

En effet, elle est de degré 1 si $\sigma(i) = i$, et constante (donc de degré 0) sinon.

Donc pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $x \mapsto \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} [xI_n - A]_{\sigma(i),i}$ est polynomiale de degré au plus n.

Et donc χ_A l'est également.

Mieux

Le degré de cette fonction est exactement le nombre de i tels que $\sigma(i) = i$, c'est-à-dire le nombre de points fixes de σ.

Mieux : pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $x \mapsto \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} [xI_n - A]_{\sigma(i),i}$ est de degré n si et seulement si ses n facteurs sont de degré 1.
Donc si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\sigma(i) = i$. Donc si et seulement si $\sigma = \mathrm{id}$.

Et donc $x \mapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} [xI_n - A]_{\sigma(i),i}$ est de degré exactement n, puisque somme d'une fonction polynomiale de degré n et de fonctions[11] polynomiales de degré strictement inférieur à n.

[11] Au nombre de $n! - 1$.

Son coefficient dominant est alors celui de $\prod_{i=1}^{n} [xI_n - A]_{\mathrm{id}(i),i} = \prod_{i=1}^{n} [xI_n - A]_{i,i} = \prod_{i=1}^{n} (x - a_{i,i})$.
Il vaut donc 1.

Enfin, son coefficient constant est $\chi_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$.

Remarque : une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ne peut pas posséder $n - 1$ points fixes : soit elle en a n (et c'est l'identité), soit elle en a au plus $n - 2$.
Donc tous les termes de la somme correspondant à $\sigma \in \mathfrak{S}_n \setminus \{\mathrm{id}\}$ sont de degré au plus $n - 2$.
Donc le coefficient de degré $n - 1$ est précisément celui correspondant à $\sigma = \mathrm{id}$, donc le terme de degré $n - 1$ de $x \mapsto \prod_{i=1}^{n} (x - a_{i,i})$.

Par les relations racines-coefficients, c'est $\sum_{i=1}^{n} (-a_{i,i}) = -\mathrm{tr}(A)$.

2. Pour $\lambda \in \mathbf{K}$, $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible si et seulement si $\det(A - \lambda I_n) = 0$, soit si et seulement si $\chi_A(\lambda) = 0$.
Mais puisque χ_A est polynomiale de degré au plus n, elle s'annule au plus n fois sur $\mathbf{K}$.

3.a. Donnons deux preuves de ce résultat.
Pour la première, travaillons sur les lignes de $\begin{vmatrix} I_n & B \\ A & I_n \end{vmatrix}$.

Intuition

À l'aide du 1 tout en haut à gauche, on peut annuler les coefficients du bloc A en bas à gauche à l'aide des opérations $L_{n+1} \leftarrow L_{n+1} - a_{1,1}L_1$, $L_{n+2} \leftarrow L_{n+2} - a_{2,1}L_1$, etc.
Puis utiliser le 1 en position $(2, 2)$ pour annuler la deuxième colonne du bloc A.
Et ainsi de suite...

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, réalisons l'opération $L_{n+i} \leftarrow L_{n+i} - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} L_j$.

Cela a pour effet de rendre le bloc en bas à gauche nul.
Et pour $k \in [\![1, n]\!]$, le coefficient $(n + i, n + k)$ devient

$$[I_n]_{i,k} - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,k} = [I_n]_{i,k} - [AB]_{i,k}.$$

Autrement dit, le bloc en bas à droite devient $I_n - AB$.
Puisque les opérations que nous venons de réaliser n'ont à aucun moment changé le déterminant , on a donc

Rappel

Ajouter à une ligne une combinaison linéaire **des autres** préserve le déterminant.

$$\begin{vmatrix} I_n & B \\ A & I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & B \\ 0_n & I_n - AB \end{vmatrix} = \det(I_n) \det(I_n - AB) = \det(I_n - AB).$$

Sur le même principe, à l'aide d'opérations sur les colonnes, on peut montrer que

$$\begin{vmatrix} I_n & B \\ A & I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & 0_n \\ A & I_n - BA \end{vmatrix} = \det(I_n - BA).$$

Alternative, moins laborieuse mais plus astucieuse : on a

$$\begin{pmatrix} I_n & B \\ A & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -A & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n - AB & B \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}.$$

Et donc $\begin{vmatrix} I_n & B \\ A & I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & 0_n \\ -A & I_n \end{vmatrix}\begin{vmatrix} I_n - BA & B \\ 0_n & I_n \end{vmatrix} = \det(I_n - BA)$.

Et de même, $\begin{pmatrix} I_n & B \\ A & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & -B \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ A & I_n - AB \end{pmatrix}$.

3.b. Soit $x \in \mathbf{K}$.
Si $x = 0$, alors $\chi_{AB}(0) = \det(-AB) = (-1)^n \det(A)\det(B) = \det(-BA) = \chi_{BA}(0)$.
Si $x \neq 0$, alors par ce qui précède, on a

$$\chi_{AB}(x) = \det(xI_n - AB) = x^n \det\left(I_n - \frac{1}{x}AB\right) = x^n \det\left(I_n - \frac{1}{x}BA\right) = \det(xI_n - BA) = \chi_{BA}(x).$$

Et donc pour tout $x \in \mathbf{K}$, $\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.27

1. Au premier abord, un développement «brutal» de $\Delta_n(x)$ nous prouverait qu'il s'agit d'un polynôme de degré au plus n, mais il est alors bien difficile de constater que tous les termes de degré $2, 3, \dots, n$ en x se simplifient.
Plus simplement, commençons par l'opération $C_i \leftarrow C_i - C_1$, pour $2 \leqslant i \leqslant n$. Alors

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + x & a - \lambda_1 & \dots & a - \lambda_1 \\ b + x & \lambda_2 - b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a - b \\ b + x & \dots & 0 & \lambda_n - b \end{vmatrix}.$$

Et alors un développement par rapport à la première colonne prouve[12] cette fois qu'il s'agit d'un polynôme de degré au plus 1, c'est-à-dire d'une fonction affine en x.

2. Nous savons donc qu'il existe deux réels α, β tels que pour tout $x \in \mathbf{K}$, $\Delta_n(x) = \alpha x + \beta$.
Or, on a[13] $\Delta_n(-a) = \displaystyle\prod_{i=1}^n (\lambda_i - a)$ et de même $\Delta_n(-b) = \displaystyle\prod_{i=1}^n (\lambda_i - b)$.
Par résolution d'un système 2×2, on trouve donc

$$\alpha = \frac{\prod_{i=1}^n (\lambda_i - a) - \prod_{i=1}^n (\lambda_i - b)}{b - a}, \ \beta = \frac{b\prod_{i=1}^n (\lambda_i - a) - a\prod_{i=1}^n (\lambda_i - b)}{b - a}.$$

Et donc en particulier, $\Delta_n(0) = \beta$.

[12] Les cofacteurs sont des constantes indépendantes de x.

[13] Il s'agit de deux déterminants de matrices triangulaires.

Remarque

Pour $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, $a = 1$ et $b = -1$, on retrouve le résultat de la première question de l'exercice 25.

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.28

Il est clair que $I_n \in SL_n(\mathbf{Z})$ et que $SL_n(\mathbf{Z})$ est stable par produit.
Il s'agit donc de prouver la stabilité par passage à l'inverse.
Soit donc $A \in SL_n(\mathbf{Z})$. Alors toutes les matrices extraites de A sont à coefficients entiers.
Mais le déterminant d'une matrice à coefficients entiers est à coefficients entiers. Le plus simple pour le voir est de se souvenir que

$$\det M = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n m_{\sigma(i),i}.$$

Donc si A est à coefficients entiers, tous ses mineurs sont des entiers. Et par conséquent, $\mathrm{Com}(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$. Mais alors $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\mathrm{Com}(A)^\top = \mathrm{Com}(A)^\top$ est encore à coefficients entiers, et a pour déterminant $\dfrac{1}{\det(A)} = 1$. C'est donc une matrice de $SL_n(\mathbf{Z})$.
Et donc $SL_n(\mathbf{Z})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbf{R})$.

Remarque *: en revanche, il existe des matrices inversibles à coefficients entiers dont l'inverse n'est pas à coefficients entiers, prendre par exemple* $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution de l'exercice 30.29

1. Si A et B sont inversibles, et commutent, alors leurs inverses aussi[14].
Mais nous savons alors que $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\mathrm{Com}(A)^\top$ et idem pour B.
Donc les transposées des comatrices commutent, et par transposition, $\mathrm{Com}(A)$ et $\mathrm{Com}(B)$ commutent également.

2. Il s'agit de se souvenir que

$$f(t) = \det(A + tI_n) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}[A + tI_n]_{\sigma(i),i} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}(a_{\sigma(i),i} + \delta_{\sigma(i),i}t).$$

On a donc une somme[15] de produit de n fonctions polynomiales de degré au plus 1.
Donc f est bien une fonction polynomiale, et en plus on peut affirmer que son degré au plus n.
Allons plus loin : il s'agit d'un polynôme de degré exactement n. En effet, pour $\sigma = \mathrm{id}$, $\prod_{i=1}^{n}(a_{\sigma(i),i} + \delta_{\sigma(i),i}t) = \prod_{i=1}^{n}(a_{i,i} + t)$ est un polynôme de degré exactement n.
Et si $\sigma \neq \mathrm{id}$, alors il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $\sigma(i_0) \neq i_0$, et alors $\delta_{\sigma(i_0),i_0} = 0$, de sorte que $\prod_{i=1}^{n}(a_{\sigma(i),i} + \delta_{\sigma(i),i})$ est de degré inférieur ou égal à $n - 1$.
Donc par somme, f est une fonction polynomiale en t de degré n.
En particulier, elle n'est pas constante, et donc, comme tout polynôme, possède un nombre fini de racines (dont fait partie 0 si A n'est pas inversible).
En particulier, si p est assez grand, alors $\frac{1}{p}$ n'est pas l'une de ces racines, de sorte que $\det\left(A + \frac{1}{p}I_n\right) \neq 0$, et donc $A + \frac{1}{p}I_n$ est inversible.
De même, pour p suffisamment grand, $B + \frac{1}{p}I_n$ est inversible.

3. Il nous faudrait ici disposer d'une notion correctement définie de limite de suite de matrices[16] pour conclure rapidement, donc le raisonnement va être un peu laborieux.
Mais l'idée principale, et vous pouvez probablement vous en contenter, est que $A + \frac{1}{p}I_n \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} A$, même si la signification de cette limite reste à préciser.
Et alors $\mathrm{Com}\left(A + \frac{1}{p}I_n\right) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Com}(A)$.
Comme on a le même résultat pour B et que pour p suffisamment grand,

$$\mathrm{Com}\left(A + \frac{1}{p}I_n\right)\mathrm{Com}\left(B + \frac{1}{p}I_n\right) = \mathrm{Com}\left(B + \frac{1}{p}I_n\right)\mathrm{Com}\left(A + \frac{1}{p}I_n\right)$$

en passant à la limite lorsque p tend vers $+\infty$, $\mathrm{Com}(A)\mathrm{Com}(B) = \mathrm{Com}(B)\mathrm{Com}(A)$.

Plus précisément, notons $c_{i,j}$ (resp. $d_{i,j}$) les coefficients de $\mathrm{Com}(A)$ (resp. de $\mathrm{Com}(B)$), et $c_{i,j}^{(p)}$ (resp. $d_{i,j}^{(p)}$) ceux de $\mathrm{Com}\left(A + \frac{1}{p}I_n\right)$ (resp. $\mathrm{Com}\left(B + \frac{1}{p}I_n\right)$).
Alors pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $c_{i,j}^{(p)} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}\left(A + \frac{1}{p}I_n\right)$.
Or, $\Delta_{i,j}\left(A + \frac{1}{p}I_n\right) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \Delta_{i,j}(A)$. Les détails resteraient (laborieusement[17].) à écrire, mais l'idée est que $\Delta_{i,j}(A + tI_n)$ est un polynôme en t, donc continu en 0.
De même, $\Delta_{i,j}\left(B + \frac{1}{t}I_n\right) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \Delta_{i,j}(B)$.
Et donc on a à la fois $c_{i,j}^{(p)} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} c_{i,j}$ et $d_{i,j}^{(p)} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} d_{i,j}$. Notons que nous parlons ici de suites de complexes, pour lesquelles nous savons ce que signifie une limite.
Mais alors, pour p suffisamment grand pour que $A+\frac{1}{p}I_n$ et $B+\frac{1}{p}I_n$ soient inversibles, on a par la question 1, qui s'applique car $A+\frac{1}{p}I_n$ et $B+\frac{1}{p}I_n$ commutent, en identifiant les coefficients

[14] Passer à l'inverse dans la relation $AB = BA$.

[15] À $n!$ termes.

Mieux
Le coefficient dominant est alors égal à 1.

[16] Ce sera fait en spé.

[17] Le plus simple étant sûrement de revenir à la formule donnant le déterminant $\Delta_{i,j}(A + tIn)$ sous forme d'une somme, et de remarquer que tous les coefficients de $A + tI_n$ sont des polynômes en t

(i, j) de l'égalité $\mathrm{Com}\left(A + \frac{1}{p}I_n\right)\mathrm{Com}\left(B + \frac{1}{p}I_n\right) = \mathrm{Com}\left(B + \frac{1}{p}I_n\right)\mathrm{Com}\left(A + \frac{1}{p}I_n\right)$

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \sum_{k=1}^{n} c_{i,k}^{(p)} d_{k,j}^{(p)} = \sum_{k=1}^{n} d_{i,k}^{(p)} c_{k,j}^{(p)}$$

Et donc par passage à la limite,

$$\sum_{k=1}^{n} c_{i,k} d_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} d_{i,k} c_{k,j}$$

ce qui signifie que le coefficient (i, j) de $\mathrm{Com}(A)\mathrm{Com}(B)$ est égal à celui de $\mathrm{Com}(B)\mathrm{Com}(A)$. Ceci étant vrai pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, il vient bien $\mathrm{Com}(A)\mathrm{Com}(B) = \mathrm{Com}(B)\mathrm{Com}(A)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.30

▶ **Si A est de rang n,** elle est inversible, et son inverse est $\dfrac{1}{\det(A)}\mathrm{Com}(A)^\top$.
Donc $\mathrm{Com}(A)^\top$ est de rang n, et par invariance du rang par transposition, $\mathrm{Com}(A)$ est également de rang n.

▶ **Si A est de rang $n-1$.** Alors nous savons que $A\mathrm{Com}(A)^\top = \det(A)I_n = 0$.
Donc $\mathrm{Im}(\mathrm{Com}(A)) \subset \mathrm{Ker}(A)$, et par le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}\, A = n - \mathrm{rg}(A) = 1$.
Donc soit $\dim \mathrm{Im}(\mathrm{Com}(A)^\top) \leqslant 1$.
Soit encore $\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)^\top) \leqslant 1 \Leftrightarrow \mathrm{rg}\,(\mathrm{Com}(A)) \leqslant 1$.

Détails
Il y a là un résultat classique sur les applications linéaires : $g \circ f = 0$ si et seulement si $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g$.
L'analogue matriciel est donc

$$AB = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, B \subset \mathrm{Ker}\, A.$$

Mais A étant de rang $n-1$, elle possède une matrice extraite de taille $n-1$ qui est inversible.
Et donc le déterminant de cette matrice extraite, qui est un mineur de A, est non nul.
Et par conséquent, $\mathrm{Com}(A) \neq 0$, et donc est de rang 1.

▶ **Enfin, si A est de rang inférieur à $n-2$,** alors toutes ses matrices extraites de taille $n-1$ sont non inversibles, et donc de déterminant nul.
Donc tous les mineurs de A sont nuls, de sorte que la comatrice de A est nulle.

Remarque *: puisque A est de rang inférieur à n − 2, il existe au moins 2 colonnes de A qui sont combinaison linéaires des n − 2 autres.*
Et donc dans toute matrice A′ extraite de A de taille n − 1 se trouve encore l'une de ces deux lignes, qui est alors combinaison linéaire des autres lignes de A′.
Donc A′ n'est pas inversible, si bien que son déterminant est nul.
Et par conséquent tous les mineurs de A sont nuls, si bien que $\mathrm{Com}(A) = 0$.

Pour le déterminant de la comatrice, il suffit d'utiliser la relation $A\mathrm{Com}(A)^\top = \det(A)I_n$, qui par passage au déterminant nous donne $\det(A)\det(\mathrm{Com}(A)) = (\det A)^n$.
Si A est inversible, il vient donc $\det(\mathrm{Com}(A)) = (\det A)^{n-1}$.
Et si A n'est pas inversible, alors $\mathrm{Com}(A)$ non plus, donc est de déterminant nul.
Dans tous les cas, $\det(\mathrm{Com}(A)) = (\det A)^{n-1}$.