

TD 3 : LOGIQUE, ENSEMBLES

► Logique

EXERCICE 3.1 Si E désigne l'ensemble des élèves de MP2I, F l'ensemble des livres existants alors on note $P(x, y)$ la proposition «l'individu x a lu le livre y ».

Traduire par une phrase en français chacune des propositions suivantes (et si ça vous amuse, déterminer sa valeur de vérité).

1. $\forall x \in E, \forall y \in F, P(x, y)$
2. $\forall x \in E, \exists y \in F, P(x, y)$
3. $\exists x \in E, \exists y \in F, P(x, y)$
4. $\exists y \in F, \exists x \in E, P(x, y)$
5. $\exists x \in E, \forall y \in F, P(x, y)$
6. $\forall y \in F, \exists x \in E, P(x, y)$
7. $\exists y \in F, \forall x \in E, P(x, y)$

EXERCICE 3.2 Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en le justifiant. Écrire également sa négation.

1. $\forall x \in \mathbf{R}, \sqrt{x^2} = x$
2. $\forall x \in \mathbf{R}, x \leq 2 \Rightarrow x^2 \leq 4$
3. $\exists x \in \mathbf{R}_+, x < \sqrt{x}$
4. $\forall x \in \mathbf{R}_+, x < \sqrt{x}$
5. $\forall (a, b) \in \mathbf{Z}^2, \exists (u, v) \in \mathbf{Z}^2, au + bv = 1$
6. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{Z}, \exists z \in \mathbf{R}, z \neq x + y$

EXERCICE 3.3

1. Montrer que $\forall a \in [0, 1], \exists b \in \mathbf{R}, a = \cos b$.
2. En déduire que $\forall t \in [0, 2], \exists (x, y) \in \mathbf{R}^2, t = \cos x + \sin y$.

EXERCICE 3.4 Soit J un intervalle de \mathbf{R} et soit $f : \mathbf{R} \rightarrow J$ une fonction. Traduire avec des quantificateurs les propriétés suivantes :

1. f n'est pas paire
2. f est périodique
3. f n'est pas constante
4. f est croissante
5. f n'est pas strictement décroissante
6. f ne s'annule pas sur \mathbf{R}
7. f n'est pas la fonction nulle
8. f réalise une bijection de \mathbf{R} sur J .

EXERCICE 3.5

1. Donner la négation, ainsi que la valeur de vérité de la proposition suivante

$$\forall a \in]-\pi, \pi[, \left(\cos(a) > 0 \Rightarrow a \in \left] -\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right] \right).$$

2. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction. Les assertions suivantes sont-elles équivalentes ?

(a) $\forall t \in \mathbf{R}, (f(t) > 0 \text{ ou } f(t) < 0)$ (b) $(\forall t \in \mathbf{R}, f(t) > 0) \text{ ou } (\forall t \in \mathbf{R}, f(t) < 0)$.

EXERCICE 3.6 Permutation de quantificateurs

Soit $P(x, y)$ une proposition dépendant de deux variables, et soient E et F deux ensembles. Montrer que $(\exists x \in E, \forall y \in F, P(x, y)) \Rightarrow (\forall y \in F, \exists x \in E, P(x, y))$. Que dire de la réciproque ?

EXERCICE 3.7 Soient P, Q, R trois propositions logiques.

1. Redémontrer que $P \Rightarrow Q$ est équivalente à $\neg P \vee Q$. Retrouver la négation de $P \Rightarrow Q$.
2. Montrer que les assertions (a) et (b) suivantes sont équivalentes :
 - (a) $(P \vee Q) \Rightarrow R$ et $(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$.
 - (b) $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R))$ et $((P \wedge Q) \Rightarrow R)$.

EXERCICE 3.8 Soit x un réel. Montrer que $(\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon) \Rightarrow x = 0$.

EXERCICE 3.9 Soit I une partie de \mathbf{R} . Une fonction $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ est dite localement constante sur I si

$$\forall x \in I, \exists a \in \mathbf{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall t \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap I, f(t) = a.$$

1. Montrer que $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ est localement constante sur I si et seulement si $\forall x \in I, \exists \varepsilon > 0, \forall t \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap I, f(t) = f(x)$.
2. Montrer qu'une fonction constante sur I est localement constante.
3. Donner un exemple de partie $I \subset \mathbf{R}$ et de fonction $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ non constante mais localement constante.
4. Prouver que toute fonction localement constante sur I est constante si et seulement si I est un intervalle.

► Ensembles

EXERCICE 3.10 Soient A et B deux ensembles avec $A \subset B$. Déterminer $A \cup B$ et $A \cap B$.

F

EXERCICE 3.11 Soit E un ensemble et soit $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$.

PD

1. Montrer que $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$.
2. Montrer que $(A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \Leftrightarrow (B = C)$.

EXERCICE 3.12 Soient A et B deux ensembles. Est-il vrai que $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$?
Que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$?

AD

EXERCICE 3.13 Soient E et F deux ensembles. Montrer que $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$ si et seulement si $E \subset F$.

PD

EXERCICE 3.14 Décrire les ensembles suivants :

PD

1. $A = \{x \in \mathbf{R} \mid (x > 0 \text{ et } x < 1) \text{ ou } x = 2\}$
2. $B = \{x \in \mathbf{R} \mid (x > 0 \Rightarrow x > 1)\}$
3. $C = \{x \in \mathbf{R} \mid (x \leq 2 \Rightarrow x^2 > 4) \text{ ou } (x^2 > 4 \text{ et } x > 2)\}$ (★).

EXERCICE 3.15 Soient A, B, C trois parties d'un même ensemble E . Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

PD

1. $A \setminus B \subset C$
2. $A \setminus C \subset B$
3. $A \subset B \cup C$.

EXERCICE 3.16 Que valent les ensembles suivants : $\mathcal{P}(\{1\}), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\})), \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))))$ (★) ?

PD

EXERCICE 3.17 Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E . Montrer que

AD

1. $A \cup B = B \cap C \Leftrightarrow (A \subset B \subset C)$
2. $\overline{\overline{A}} = A$
3. $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$
4. $A \setminus B = A \Leftrightarrow B \setminus A = B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$
5. $\overline{A \setminus B} = B \setminus A$.
6. $A \setminus B = \bigcup_A^{A \cap B}$.

EXERCICE 3.18 Montrer que $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ n'est pas le produit cartésien de deux ensembles de \mathbf{R} .

AD

EXERCICE 3.19 On considère A et B deux parties de E . Résoudre l'équation $A \cap X = B$, d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.

D

EXERCICE 3.20 Soit E un ensemble et soient E_1, \dots, E_n ($n \geq 2$) des parties deux à deux distinctes de E . Montrer que l'un au moins de ces ensembles n'en contient aucun autre.

D

► Raisonnements divers

EXERCICE 3.21 Soit x un irrationnel strictement positif. Montrer que \sqrt{x} est irrationnel.

F

EXERCICE 3.22 Soit $r \in \mathbf{N}^*$, et pour $i \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$, soit $A_i = \{n \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z}, n = rk + i\}$.
Montrer que A_0, \dots, A_{r-1} sont deux à deux disjoints.

PD

EXERCICE 3.23 Montrer que $\frac{\ln 2}{\ln 3} \notin \mathbf{Q}$.

PD

EXERCICE 3.24 Le réel $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ est-il rationnel ? Même question pour $\sqrt{4 + \sqrt{3 + \sqrt{2}}}$.

PD

EXERCICE 3.25

AD

1. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ telles que $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, f(xy) = f(x) + f(y)$.
2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ telles que $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, f(x)f(y) - f(xy) = x + y$.

EXERCICE 3.26 Une suite récurrente linéaire d'ordre 2

AD

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1, u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.
Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = a(-1)^n + b2^n$.



EXERCICE 3.27 Soit $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ vérifiant : 1) $\forall p \in \mathbf{N}, \exists n \in \mathbf{N}, f(n) = p$ et 2) $\forall n \in \mathbf{N}, f(n) \geq n$.
Prouver que $f = \text{id}_{\mathbf{N}}$. On pourra utiliser un raisonnement par récurrence.

D

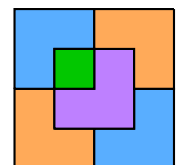
EXERCICE 3.28 Un peu de Tétris

TD

On dispose d'un échiquier de taille $2^n \times 2^n$ ($n \geq 2$), que l'on souhaite remplir à l'aide d'un

monomino (pièce carrée de taille 1×1 : ) et de triominos coudés .

Montrer que quelle soit la position du monomino sur l'échiquier, il est possible de paver le reste de l'échiquier avec les triominos, comme sur la figure ci-contre.



CORRECTION DES EXERCICES DU TD 3

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.1

1. Tout le monde a lu tous les livres.¹
2. Tout le monde a lu au moins un livre.²
3. Il existe un étudiant qui a lu au moins un livre.
4. Cf question précédente : on peut échanger deux quantificateurs existentiels.
5. Il existe un étudiant qui a lu tous les livres.³
6. Tout livre a été lu par au moins un étudiant.
7. Il existe un livre que tous les étudiants ont lu.⁴

¹ Faux : avez vous tous lu le dernier Guillaume Musso ?

² J'espère que oui !

³ Permettez-moi d'en douter !

⁴ Vrai : *L'Émile* de ROUSSEAU.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.2

1. **Faux.** En effet, pour $x = -1$, $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1 \neq -1$.
Sa négation est $\exists x \in \mathbf{R}, x \neq \sqrt{x^2}$ (ce qui est par exemple vrai pour $x = -1$).
2. **Faux.** Pour $x = -3$, on a $x \leq 2$ et pourtant $x^2 = 9 > 4$.
Sa négation est $\exists x \in \mathbf{R}, x \leq 2$ et $x^2 > 4$.
3. **Vrai.** $x = \frac{1}{4}$ convient, puisque $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ qui est bien plus grand que $\frac{1}{4}$.
Sa négation est $\forall x \in \mathbf{R}_+, x \geq \sqrt{x}$.
4. **Faux.** Pour $x = 1$, on a $x = \sqrt{x}$.
Sa négation est $\exists x \in \mathbf{R}_+, x \geq \sqrt{x}$.
5. **Faux.** Si $a = b = 0$, alors, quels que soient u et v dans \mathbf{Z} , $au + bv = 0$.
Sa négation est $\exists (a, b) \in \mathbf{Z}^2, \forall (u, v) \in \mathbf{Z}^2, au + bv \neq 0$.
6. **Vrai.** Prenons $x = \frac{1}{2}$, et $z = 0$ (indépendamment de la valeur de y). Alors quel que soit $y \in \mathbf{Z}, 0 \neq y + \frac{1}{2}$.
Sa négation est $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{Z}, \forall z \in \mathbf{R}, z = x + y$.

Plus généralement

Cette proposition est fautive pour tout $x < 0$.

Rappel

La négation de $P \Rightarrow Q$ est P et (non Q).

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.3

1. Nous savons déjà⁵ que la fonction \cos réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0, 1]$.
Et donc $\forall a \in [0, 1], \exists! b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], a = \cos b$.
Mais qui peut le plus peut le moins : on peut remplacer $\exists!$ par \exists , et s'il existe un b dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, alors il existe $b \in \mathbf{R}$ (mais qui cette fois n'a plus de raison d'être unique !)
2. Soit $t \in [0, 2]$.
► **Si $t \leq 1$** , alors $t = t + 0 = t + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
Et par la question précédente, il existe $x \in \mathbf{R}$ tel que $t = \cos(x)$.
Et donc, en prenant $y = 0$, nous venons de prouver qu'il existe deux réels x et y tels que $t = \cos x + \sin y$.
► **Si $t > 1$** , alors $t - 1 \in [0, 1]$.
Donc par la question précédente, il existe $b \in \mathbf{R}$ tel que

$$t - 1 = \cos b \Leftrightarrow t = \cos b + 1 = \cos b + \sin \frac{\pi}{2}.$$

Et donc il existe deux réels $x = b$ et $y = 0$ tels que $t = \cos x + \sin y$.

Alternative : soit $t \in [0, 2]$. Alors $\frac{t}{2} \in [0, 1]$.

Et alors par la question précédente, il existe $b \in \mathbf{R}$ tel que $\frac{t}{2} = \cos(b)$.

Considérons un tel b , de sorte que $\frac{t}{2} = \cos(b) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$.

Alors en posant $x = b$ et $y = \frac{\pi}{2} - b$, on a

$$\cos(x) + \sin(y) = \cos(b) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \cos(b) + \cos(b) = \frac{t}{2} + \frac{t}{2} = t.$$

⁵ Si jamais nous ne l'avons pas dit, à vous de le prouver à l'aide du théorème de la bijection.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.4

- Rappelons que f est paire si et seulement si $\forall x \in \mathbf{R}, f(-x) = f(x)$.
Donc la négation de cette proposition est $\exists x \in \mathbf{R}, f(-x) \neq f(x)$.
- Nous avons dit que f est périodique s'il existe $T \in \mathbf{R}_+^*$ tel que f soit T -périodique.
Soit encore $\exists T \in \mathbf{R}_+^*, \forall x \in \mathbf{R}, f(x+T) = f(x)$.
- Deux options ici : dire que f n'est pas constante revient à dire qu'elle prend au moins deux valeurs. Donc

$$\exists(x, y) \in \mathbf{R}^2, f(x) \neq f(y).$$

Une autre option, plus pédestre, est de dire que f est constante si et seulement si

$$\exists \lambda \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, f(x) = \lambda.$$

Et donc la négation en est $\forall \lambda \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R}, f(x) \neq \lambda$.

- $\forall(x, y) \in \mathbf{R}^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
- La fonction f est strictement décroissante si et seulement si

$$\forall(x, y) \in \mathbf{R}^2, x < y \Rightarrow f(x) > f(y).$$

Donc la négation en est $\exists(x, y) \in \mathbf{R}^2, x < y$ et $f(x) \leq f(y)$.

- $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \neq 0$.
- Rappelons que la fonction nulle est la fonction qui vaut **toujours** zéro.
Et donc que f est non nulle dès lors qu'elle ne s'annule pas en au moins un point :
 $\exists x \in \mathbf{R}, f(x) \neq 0$.
- f réalise une bijection de \mathbf{R} sur J si tout élément de J possède un unique antécédent par f .
Soit encore $\forall y \in J, \exists! x \in \mathbf{R}, f(x) = y$.
Et si vous n'aimez pas les $\exists!$, cela s'écrit encore

$$\forall y \in J, \exists x \in \mathbf{R}, (f(x) = y) \text{ et } (\forall z \in \mathbf{R}, (y = f(z) \Rightarrow z = x)).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.5

- La négation en est $\exists a \in]-\pi, \pi[, \cos(a) > 0$ et $a \notin]-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}[$.
Or cette négation est fautive, puisqu'il est bien connu que pour $a \in]-\pi, \pi[, \cos(a) > 0 \Leftrightarrow a \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
Donc pour $a \in]-\pi, \pi[, \text{ si } \cos(a) > 0, \text{ alors } a \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\subset]-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}[$.

Puisque la négation est fautive, la proposition de départ est vraie.

- Ces assertions ne sont pas équivalentes. Prenons par exemple f la fonction définie par $f(x) = (-1)^{|x|}$.
Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $f(x) = 1$ ou $f(x) = -1$, si bien que l'assertion (a) est vraie.
En revanche, $f(1) = -1$ et $f(2) = 1$, si bien que l'assertion (b) est fautive.

En français : (a) signifie que f ne s'annule jamais, et (b) signifie que f ne s'annule jamais et reste de signe constant sur \mathbf{R} .

On a bien $(b) \Rightarrow (a)$, mais pas l'implication réciproque.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.6

Supposons que $\exists x \in E, \forall y \in F, P(x, y)$.

Notons alors x_0 un élément de E tel que $\forall y \in F, P(x_0, y)$.

Soit $y \in F$. Alors $P(x_0, y)$ est vraie.

Et donc $\exists x \in E, P(x, y)$ est vraie (car on peut prendre $x = x_0$).

Et par conséquent, nous venons de prouver que $\forall y \in F, \exists x \in E, P(x, y)$.

Nous venons donc bien de prouver que

$$(\exists x \in E, \forall y \in F, P(x, y)) \Rightarrow (\forall y \in F, \exists x \in E, P(x, y)).$$

En revanche, la réciproque est fautive, puisque $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x \leq y$ est vraie⁶, alors que $\exists y \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, x \leq y$ est fautive⁷.

Commentaires : nous avons dit en cours qu'il n'était pas toujours permis de permuter les symboles \forall et \exists .

Nous venons donc de prouver que si $\exists \forall$ est vraie, alors $\forall \exists$ est vraie aussi, mais la réciproque est fautive ! Et donc on n'a toujours pas le droit de permuter sans précaution les symboles \forall et \exists .

⚠ Attention !

Il n'est pas question de permuter les deux quantificateurs, cela signifierait que le $T \in \mathbf{R}_+^*$ peut dépendre du $x \in \mathbf{R}$ choisi, ce que nous ne voulons pas !

Remarque

Si l'on sait que f est à valeurs dans J , il est possible de restreindre les λ à J .

Rappel

La négation de $P \Rightarrow Q$ est P et (non Q).

⁶ Pour tout réel, il existe un réel plus grand.

⁷ Il n'existe pas de réel plus grand que tous les réels.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.7

Il suffit de faire des tables de vérité.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$(\neg P) \vee Q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

On en déduit que la négation de $P \Rightarrow Q$ est

$$\neg(P \Rightarrow Q) \equiv \neg((\neg P) \vee Q) \equiv \neg(\neg P) \wedge \neg Q \equiv P \wedge (\neg Q).$$

2.a. On pourrait faire des tables de vérité, mais également utiliser ce qui précède :

$$(P \vee Q) \Rightarrow R \equiv \text{non}(P \text{ ou } Q) \text{ ou } R \equiv (\text{non } P \text{ et non } Q) \text{ ou } R \equiv (\text{non } P \text{ ou } R) \text{ et } (\text{non } Q \text{ ou } R).$$

Mais $P \Rightarrow R \equiv \text{non } P \text{ ou } R$ et $Q \Rightarrow R \equiv \text{non } Q \text{ ou } R$, et donc

$$(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R) \equiv ((\text{non } P \text{ ou } R)) \text{ et } (\text{non } Q \text{ ou } R).$$

On a donc bien

$$(P \text{ ou } Q) \Rightarrow R \equiv (P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R).$$

2.b. Montrons que $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ et $(P \wedge Q) \Rightarrow R$ ont même table de vérité.

P	Q	R	$Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$	$(P \wedge Q)$	$(P \wedge Q) \Rightarrow R$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F
V	F	V	V	V	F	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	F	V
F	V	F	F	V	F	V
F	F	V	V	V	F	V
F	F	F	V	V	F	V

Là aussi, il aurait été possible d'utiliser la question 1 :

$$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \equiv (\neg P \vee (Q \Rightarrow R)) \equiv (\neg P \vee (\neg Q \vee R)) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q) \vee R.$$

Et sur le même principe, $(P \wedge Q) \Rightarrow R \equiv (\neg(P \wedge Q) \vee R) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q) \vee R$.

Et donc $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \equiv (P \wedge Q) \Rightarrow R$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.8

Il y a là un abus de notation que nous ferons souvent : on note $\forall \varepsilon > 0$ pour dire $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$.

Et donc la négation de $\forall \varepsilon > 0, P(\varepsilon)$ est $\exists \varepsilon > 0, \neg P(\varepsilon)$.

Et surtout pas $\exists \varepsilon \leq 0, \neg P(\varepsilon)$.

Il s'agit de prouver une implication, nous pouvons donc prouver sa contraposée.

Celle-ci est $x \neq 0 \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0, |x| \geq \varepsilon)$.

Soit donc x non nul. Alors $|x| > 0$. Et par conséquent, $\varepsilon = |x|$ est bien un réel strictement positif tel que $|x| \geq \varepsilon$.

Ainsi, nous venons de prouver que

$$(x \neq 0) \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0, |x| > \varepsilon).$$

Et donc sa contraposée, qui est notre proposition de départ est également vraie.

Rappel : une implication et sa contraposée ont la même valeur de vérité. On ne confondra pas la contraposée avec la négation et/ou la réciproque.

Une autre solution : c'est peut-être un peu moins naturel, mais il est tout à fait possible de revenir à la définition de l'implication : $P \Rightarrow Q \equiv P \vee \neg Q$.

Autrement dit, il s'agit de prouver que pour $x \in \mathbf{R}$, $(\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon)$ ou $x \neq 0$.

Si $x \neq 0$, il n'y a rien à dire, on a directement $x \neq 0$, donc $(\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon)$ ou $x \neq 0$.

Et si $x = 0$, alors $|x| = 0$ et donc $\forall \varepsilon > 0, 0 = |x| < \varepsilon$.

Donc on a bien l'implication annoncée.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.9

1. Supposons f localement constante sur I .

Soit alors $x \in I$. Notons alors $a \in \mathbf{R}$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\forall t \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap I, f(t) = a$.

Mais en particulier, comme $x \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap I, f(x) = a$.

Et donc pour tout $t \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap I, f(t) = f(x)$.

Nous avons donc bien prouvé que $\forall x \in I, \exists \varepsilon > 0, \forall t \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap I, f(t) = f(x)$.

Inversement, si $\forall x \in I, \exists \varepsilon > 0, \forall t \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap I, f(t) = f(x)$, alors pour $x \in I$ fixé, en notant $a = f(x)$, il existe bien $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall t \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap I, f(t) = f(x) = a.$$

Et donc nous avons prouvé que

$$\forall x \in I, \exists a \in \mathbf{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall t \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap I, f(t) = a$$

de sorte que f est localement constante sur I .

2. Soit f la fonction constante égale à λ sur I .

Alors, pour tout $x \in I, f(x) = \lambda$.

En particulier, pour tout $x \in I$, pour tout $t \in]x - 1, x + 1[\cap I, f(t) = \lambda$.

Et donc en prenant $a = \lambda$ et $\varepsilon = 1$, on a $\forall t \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap I, f(t) = a$. Et donc on a bien

$$\forall x \in I, \exists a \in \mathbf{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall t \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap I, f(t) = a.$$

Et donc f est localement constante.

Un autre exemple de fonction localement constante mais non constante serait la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ définie non pas sur \mathbf{R} mais sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$.

3. Considérons la fonction $f : \begin{cases} \mathbf{R}^* & \rightarrow & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{cases}$.

Prouvons alors que f est localement constante.

Soit donc $x \in \mathbf{R}^*$. Distinguons alors deux cas :

► **si $x > 0$** : notons $\varepsilon = \frac{x}{2}$, de sorte que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[=]\frac{x}{2}, \frac{3x}{2}[\subset \mathbf{R}_+^*$ et donc

$\forall t \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap \mathbf{R}^*, f(t) = 1$.

Donc en posant $a = 1$, on a bien prouvé que

$$\exists a \in \mathbf{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall t \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[, f(t) = a.$$

► **si $x < 0$** : notons alors $\varepsilon = \frac{|x|}{2}$, de sorte que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[=]\frac{3x}{2}, \frac{x}{2}[\subset \mathbf{R}^*$.

Et donc $a = -1$ convient.

Ainsi, on a bien prouvé que :

$$\forall x \in \mathbf{R}^*, \exists a \in \mathbf{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall t \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap \mathbf{R}^*, f(t) = a.$$

Donc f est localement constante, mais n'est clairement pas constante sur \mathbf{R}^* .

4. L'exemple donné ci-dessus se transpose assez bien, pour prouver que si I n'est pas un intervalle, alors il existe une fonction définie sur I , localement constante mais non constante.

En effet, si I n'est pas un intervalle, alors $\exists (x, y) \in I^2, x \leq y$ et $(\exists z \in \mathbf{R}, (x \leq z \leq y \text{ et } z \notin I))$.

Autrement dit, il existe trois réels $x \leq z \leq y$ tels que $x \in I, y \in I$ et $z \notin I$.

$$\text{Soit alors } f : \begin{cases} I & \rightarrow & \mathbf{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } t > z \\ -1 & \text{si } t < z \end{cases} \end{cases}$$

On prouve comme ci-dessus que f est localement constante sur I .

Et pourtant $f(x) = -1 \neq f(y) = 1$, donc f n'est pas constante.

Par contraposée, nous venons donc de prouver le sens direct : si toute fonction localement constante sur I est constante, alors I est un intervalle.

Réciproquement, supposons que I soit un intervalle, et soit f une fonction localement constante sur I .

Laissons de côté le cas où I est vide⁸ ou réduit à un point⁹.

Autrement dit, considérons le cas où I est infini¹⁰.

Remarque

Dans la définition, les variables ε et a peuvent dépendre de x , nous sommes en train de dire que dans le cas précis d'une fonction constante, il est possible de prendre les mêmes valeurs pour tout $x \in I$.

Remarque

Nous ne disons rien du cas $t = z$, puisque $z \notin I$.

⁸ L'ensemble vide est bien un intervalle, bien que peu intéressant.

⁹ Idem.

¹⁰ Savez-vous prouvez qu'un intervalle contient soit 0, soit 1, soit une infinité d'éléments ?

Soit alors $x \in I$, et soit $\varepsilon > 0$ et $a \in \mathbf{R}$ tels que $\forall t \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap I, f(t) = a$.

► **Si x n'est pas l'une des bornes de I** , c'est-à-dire s'il existe $(x_1, x_2) \in I^2$ tels que $x_1 \leq x \leq x_2$.

Alors en prenant $\varepsilon' = \min(\varepsilon, x - x_1, x_2 - x)$, on a $]x - \varepsilon', x + \varepsilon'[\subset I$ et $\forall t \in]x - \varepsilon', x + \varepsilon'[$, $f(t) = a$.

Donc f est constante, égale à a sur $]x - \varepsilon', x + \varepsilon'[$.

En particulier, f est dérivable en x et $f'(x) = 0$.

► **Si x est la borne de droite de I** , c'est-à-dire si $I \cap]x, x + \varepsilon[= \emptyset$.

Alors il existe $x_1 \in I$ tel que $x_1 < x$, et donc en posant $\varepsilon' = \min(x - x_1, \varepsilon)$, alors $]x - \varepsilon', x[\subset I$, et pour tout $t \in]x - \varepsilon', x[$, $f(t) = a$.

Comme f n'est pas définie à droite de x , ceci prouve que f est dérivable en x et que $f'(x) = 0$.

► **Si x est la borne de gauche de I** : on raisonne comme pour la borne de droite.

Au final, nous venons de prouver que pour tout $x \in I$, f est dérivable en x avec $f'(x) = 0$. Mais I étant un intervalle (et c'est fondamental ici), si f est de dérivée nulle sur I , alors elle est constante sur I .

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.10

Il semble plutôt intuitif¹¹ que $A \cup B = B$, mais il faut le prouver, ce qui peut se faire par double inclusion.

On a toujours $B \subset A \cup B$.

Inversement, soit $x \in A \cup B$. Alors, par définition d'une union, $x \in A$ ou $x \in B$. Or, si $x \in A$, puisque $A \subset B$, alors $x \in B$.

Donc nous avons prouvé que dans tous les cas, si $x \in A \cup B$, alors $x \in B$, c'est-à-dire que $A \cup B \subset B$.

Et donc on a bien l'égalité annoncée : $A \cup B = B$.

De même, il semble plutôt clair que $A \cap B = A$.

On a toujours $A \cap B \subset A$.

Soit $x \in A$. Alors, puisque $A \subset B$, $x \in B$.

Et donc x est à la fois dans A et dans B : il est dans $A \cap B$.

Nous venons donc de prouver que $\forall x \in A, x \in A \cap B$, c'est-à-dire que $A \subset A \cap B$, et donc par double inclusion $A = A \cap B$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.11

1. Procédons par double implication.

► Si $A = B$, il est évident que $A \cup B = A \cup A = A$ et $A \cap B = A \cap A = A$.

Donc ceci prouve l'implication $A = B \Rightarrow A \cup B = A \cap B$.

► Supposons donc à l'inverse que $A \cap B = A \cup B$.

Nous souhaitons prouver que $A = B$, et pour cela, nous pouvons procéder par double inclusion.

Soit $x \in A$. Alors $x \in A \cup B$ (car $A \subset A \cup B$), et donc $x \in A \cap B$ (car $A \cup B = A \cap B$).

On en déduit que $x \in B$ (puisque $A \cap B \subset B$).

Ainsi, nous avons prouvé que pour tout $x \in A, x \in B$, donc que $A \subset B$.

En échangeant les rôles de A et B , on prouve exactement de la même manière que $B \subset A$.

Et donc par double inclusion, $A = B$, si bien que $A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B$.

Par double implication, nous avons donc prouvé que $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$.

Alternative : pour l'implication $A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$, proposons une autre solution.

Supposons donc que $A \cap B = A \cup B$.

On a alors $A \cap B \subset A \subset A \cup B$, ce qui s'écrit encore, au vu des hypothèses faites, $A \cap B \subset A \subset A \cap B$.

Par double inclusion, on a donc $A \cap B = A$.

Et sur le même principe, $A \cap B = B$, si bien que $A = B$.

2. Il est évident que si $B = C$, alors $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$.

Supposons donc $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$.

Prouvons alors que $B \subset C$. Soit $x \in B$.

► **Si $x \in A$** , alors $x \in A \cap B$ et donc $x \in A \cap C$, de sorte que $x \in C$.

Arnaque ?

Cette histoire de dérivée en une borne de I n'est pas totalement claire pour l'instant, et nécessitera (une fois de plus) d'avoir une bonne définition de la dérivée. L'idée est que si x n'est pas une borne de I , alors il faut connaître f «autour de x » et «des deux côtés de x » pour parler de sa dérivabilité en x . Pensez par exemple à la valeur absolue, qui n'est pas dérivable en 0, mais dont la restriction à \mathbf{R}_+ , qui est l'identité de \mathbf{R}_+ est dérivable en 0.

¹¹ Faire des dessins pour s'en convaincre !

Échange ?

Dans l'hypothèse, A et B jouent des rôles totalement symétriques, et donc si on les échange, le même raisonnement reste valable mot pour mot afin de prouver $B \subset A$. Lorsque deux raisonnements sont identiques, vous pouvez le dire ainsi pour ne pas tout réécrire, mais n'en abusez pas, si les arguments sont différents, vous devez bien tenir deux raisonnements.

► Si $x \notin A$, alors $x \in A \cup B$ et donc $x \in A \cup C$.
Mais puisque $x \notin A$, s'il est dans $A \cup C$, c'est qu'il est dans C .

Ainsi, nous venons de prouver que $\forall x \in B, x \in C$, de sorte que $B \subset C$.
En échangeant les rôles de B et C on prouve que $C \subset B$, et donc par double inclusion, $B = C$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.12

- On n'a pas en général $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.
En effet, si $A = \{1\}$ et $B = \{2\}$, alors $A \cup B = \{1, 2\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$, mais pourtant $A \cup B \notin \mathcal{P}(A)$ et $A \cup B \notin \mathcal{P}(B)$.
- On a bien $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
En effet, si E est un ensemble, alors on a

$$\begin{aligned} E \in \mathcal{P}(A \cap B) &\Leftrightarrow E \subset A \cap B \\ &\Leftrightarrow (E \subset A) \text{ et } (E \subset B) \\ &\Leftrightarrow E \in \mathcal{P}(A) \text{ et } E \in \mathcal{P}(B) \\ &\Leftrightarrow E \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B). \end{aligned}$$

Et donc ceci prouve bien que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Détaillons tout de même l'équivalence $((E \subset A) \text{ et } (E \subset B)) \Leftrightarrow E \subset A \cap B$.
Supposons que $(E \subset A)$ et que $(E \subset B)$.
Alors pour $x \in E$, on a $x \in A$ et $x \in B$, et donc $x \in A \cap B$. Ceci prouve donc que $E \subset A \cap B$.

Inversement, si $E \subset A \cap B$, puisque $A \cap B \subset A$, alors $E \subset A$. Et on prouve de même que $E \subset B$, de sorte qu'on a bien $(E \subset A)$ et $(E \subset B)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.13

Procédons par double implication.

\Rightarrow Si $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$, alors toute partie de F est une partie de E . Mais E lui-même est une partie de E , et donc $E \subset F$.
Si vous préférez une rédaction plus formelle : $E \in \mathcal{P}(E)$, et donc $E \in \mathcal{P}(F)$. Et par conséquent, $E \subset F$.

\Leftarrow Inversement, supposons que $E \subset F$, et soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
Alors $A \subset E$, et donc $A \subset F$. Donc $A \in \mathcal{P}(F)$.
Nous venons donc de prouver que tout élément de $\mathcal{P}(E)$ est un élément de $\mathcal{P}(F)$, donc $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.14

- Il n'y a pas de grande difficulté ici : $A =]0, 1[\cup \{2\}$.
- Plus dur : rappelons que $(x > 0) \Rightarrow (x > 1)$ est vraie si $(x > 0)$ et $(x > 1)$ sont vraies, ou si $x > 0$ est fausse.
Donc $B = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 0\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid (x > 0) \text{ et } (x > 1)\} =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.
- Il faut travailler un peu plus ici, et se souvenir que $(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg P) \vee Q$.
On a donc, pour un réel x fixé,

$$\begin{aligned} (x \leq 2 \Rightarrow x^2 > 4) \text{ ou } (x^2 > 4 \text{ et } x > 2) &\equiv (x > 2 \text{ ou } x^2 > 4) \text{ ou } (x^2 > 4 \text{ et } x > 2) \\ &\equiv ((x > 2 \text{ ou } x^2 > 4) \text{ ou } x^2 > 4) \text{ et } ((x > 2 \text{ ou } x^2 > 4) \text{ ou } x > 2) \\ &\equiv (x > 2 \text{ ou } x^2 > 4) \text{ et } (x^2 > 4 \text{ ou } x > 2) \\ &\equiv (x > 2 \text{ ou } x^2 > 4) \text{ et } (x^2 > 4) \\ &\equiv (x > 2 \text{ et } x^2 > 4) \text{ ou } x^2 > 4 \\ &\equiv x^2 > 4. \end{aligned}$$

Et donc $C = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 > 4\} =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.15

Utilisons un raisonnement circulaire, en prouvant que $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 1)$.
► Supposons que $A \setminus B \subset C$, et prouvons que $A \setminus C \subset B$.

Pour aller plus loin

À quelle(s) condition(s) a-t-on

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)?$$

Détails

Si cette équivalence vous semble douteuse, elle est détaillée ci-dessous !

Rappel

L'équivalence

$$E \in \mathcal{P}(F) \Leftrightarrow E \subset F$$

est la **définition** de $\mathcal{P}(F)$.

Soit donc $x \in A \setminus C$. Supposons par l'absurde que $x \notin B$. Alors $x \in A$ (car $A \setminus C \subset A$) et $x \notin B$, donc $x \in A \setminus B$. Et donc d'après l'hypothèse, $x \in C$, ce qui contredit le fait que $x \in A \setminus C = A \cap \bar{C}$.

Donc $A \setminus C \subset B$.

► Supposons à présent que $A \setminus C \subset B$, et soit $x \in A$. Alors si $x \notin C$, $x \in A \setminus C$, et donc $x \in B$. Autrement dit, soit $x \in C$, soit $x \in B$. Et dans tous les cas, $x \in B \cup C$.

► Enfin, supposons que $A \subset B \cup C$, et soit $x \in A \setminus B$. Alors $x \in A$, donc $x \in B \cup C$. Mais $x \notin B$, et donc $x \in C$. On en déduit que $A \setminus B \subset C$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.16

Puisque $\{1\}$ est un singleton, on a $\mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$.

On en déduit que $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\})) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{1\}, \{\emptyset, \{1\}\}\}$.

De même, en se rappelant qu'une partie de $\{1, 2, 3, 4\}$ peut contenir 0, 1, 2, 3 ou 4 éléments, et en listant toutes les parties à un élément, puis celles à deux éléments, etc, on obtient

$$\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}.$$

On a $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

Et donc $\mathcal{P}(\emptyset)$ est un singleton, de sorte que $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Une étape supplémentaire donne

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}.$$

Cet ensemble a donc quatre éléments, de sorte qu'on est dans un cas similaire à $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$: il suffit de remplacer 1 par \emptyset , 2 par $\{\emptyset\}$, 3 par $\{\{\emptyset\}\}$ et 4 par $\{\{\{\emptyset\}\}\}$.

Il vient donc

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))) = & \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}, \\ & \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}, \\ & \{\{\emptyset\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}\}. \end{aligned}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.17

Pour chaque question, je donne plusieurs méthodes afin de vous montrer qu'il existe souvent plusieurs moyens de répondre à la question posée, à vous de voir laquelle est la plus simple (en général, la plus simple est de travailler directement sur les ensembles si c'est possible, en utilisant les propriétés vues en cours).

1. Puisqu'il s'agit de prouver une équivalence, procédons par double implication. Supposons que $A \cup B = B \cap C$. Alors $B \subset A \cup B \subset B \cap C \subset C$, donc $B \subset C$. Et de même, $A \subset A \cup B \subset B \cap C \subset B$, donc $A \subset B$. Ainsi $A \subset B \subset C$.

Inversement, supposons que $A \subset B \subset C$. Il s'agit donc de prouver que $A \cup B = B \cap C$.

Puisque $A \subset B$, on a $A \cup B = B$. Et d'autre part, puisque $B \subset C$, on a $B \cap C = B$.

Et donc $A \cup B = B = B \cap C$.

Ainsi, on a bien prouvé l'équivalence

$$A \cup B = B \cap C \Leftrightarrow A \subset B \subset C.$$

2. C'est assez évident : pour $x \in E$, on a

$$x \in \bar{\bar{A}} \Leftrightarrow x \notin \bar{A} \Leftrightarrow \text{non}(x \in \bar{A}) \Leftrightarrow \text{non}(\text{non}(x \in A)) \Leftrightarrow x \in A.$$

3. Plusieurs options sont possibles¹².

Première méthode : en travaillant sur les ensembles : on a

$$A \setminus (B \cap C) = A \cap \overline{(B \cap C)} = A \cap (\bar{B} \cup \bar{C}) = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{C}) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Seconde méthode : par équivalences : pour $x \in E$, on a

$$x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \notin C)$$

⚠ Danger !

\emptyset est l'ensemble vide.
 $\{\emptyset\}$ est un ensemble qui ne contient qu'un élément (lui-même un ensemble) : l'ensemble vide.
 $\{\{\emptyset\}\}$ est un ensemble, qui ne contient qu'un élément : l'ensemble $\{\emptyset\}$.

¹² Et je vous laisse choisir votre préférée...

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (x \in A) \text{ et } (x \notin B \text{ ou } x \notin C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A) \text{ et } (x \in \overline{B \cup C}) \\ &\Leftrightarrow (x \in A) \text{ et } x \in \overline{B \cap C} \\ &\Leftrightarrow (x \in A) \text{ et } x \notin B \cap C \\ &\Leftrightarrow x \in A \setminus (B \cap C). \end{aligned}$$

Troisième méthode : par double inclusion.

Soit $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Alors soit $x \in A \setminus B$, soit $x \in A \setminus C$.

Dans le premier cas, $x \in A$, et $x \notin B$, donc $x \notin B \cap C$, de sorte que $x \in A \setminus (B \cap C)$.

Et dans le second cas, $x \in A$ et $x \notin C$, donc $x \notin B \cap C$, et donc $x \in A \setminus (B \cap C)$.

On a donc prouvé que $\forall x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$, $x \in A \setminus (B \cap C)$, de sorte que

$$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \subset A \setminus (B \cap C).$$

Inversement, soit $x \in A \setminus (B \cap C)$. Alors $x \in A$ et $x \notin B \cap C$.

Donc soit $x \notin B$, auquel cas $x \in A \setminus B \subset (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Soit $x \notin C$, auquel cas $x \in A \setminus C \subset (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Nous avons donc bien $A \setminus (B \cap C) \subset (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

4. Prouvons directement que $A \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$, l'autre équivalence en découlera directement en échangeant les rôles de A et B .

Supposons donc que $A \setminus B = A$.

Alors $A \cap \overline{B} = A$, et donc $A \cap B = (A \cap \overline{B}) \cap B = A \cap \underbrace{(B \cap \overline{B})}_{=\emptyset} = \emptyset$.

Donc $A \setminus B = A \Rightarrow A \cap B = \emptyset$.

Alternative : supposons par l'absurde que $A \cap B \neq \emptyset$.

Alors il existe un élément x dans $A \cap B$.

Mais un tel x est alors dans A et dans B , donc n'est pas dans $A \setminus B$. Et puisque $A \setminus B = A$, x n'est donc pas dans A , ce qui est absurde.

On en déduit que $A \cap B = \emptyset$, ce qui prouve que $A \setminus B = A \Rightarrow A \cap B = \emptyset$.

Inversement, supposons que $A \cap B = \emptyset$, et prouvons que $A \setminus B = A$.

L'inclusion $A \setminus B \subset A$ est vraie, par définition de $A \setminus B$.

Et si $x \in A$, alors $x \notin B$, faute de quoi on aurait $x \in A \cap B$, contredisant la vacuité de $A \cap B$.

Par conséquent, $x \in A \setminus B$, et donc $A \subset A \setminus B$.

Par double inclusion, $A = A \setminus B$, ce qui achève de prouver la seconde implication, et donc l'équivalence

$$A \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset.$$

Alternative : on a toujours¹³ $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$.

Et donc si $A \cap B = \emptyset$, $A = (A \setminus B) \cup \emptyset = A \setminus B$.

5. Là aussi nous pourrions procéder par double inclusion, mais il est tout aussi simple de procéder par équivalence.

Soit donc $x \in E$. Alors

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} \setminus \overline{B} &\Leftrightarrow (x \in \overline{A}) \text{ et } (x \notin \overline{B}) \\ &\Leftrightarrow (x \notin A) \text{ et } (x \in B) \\ &\Leftrightarrow x \in B \setminus A. \end{aligned}$$

Et donc $\overline{A} \setminus \overline{B} = B \setminus A$.

Encore plus simple : $\overline{A} \setminus \overline{B} = \overline{A} \cap \overline{\overline{B}} = \overline{A} \cap B = B \setminus A$.

6. Il serait possible de raisonner par double inclusion, essayons d'y aller directement par équivalence : soit $x \in E$. Alors

$$\begin{aligned} x \in \complement_A^{A \cap B} &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge \neg(x \in A \cap B) \\ &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B) \\ &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin A \vee x \notin B) \\ &\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \notin A)) \vee ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \end{aligned}$$

Méthode

Pour prouver qu'un ensemble est vide, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il contient au moins un élément pour arriver à une contradiction.

¹³ Un élément de A est soit dans B (et donc dans $A \cap B$), soit dans \overline{B} et donc dans $A \cap \overline{B} = A \setminus B$.

$$\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin A)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \setminus B.$$

Alternative :

$$\begin{aligned} \complement_A^{AnB} &= A \setminus (A \cap B) = A \cap \overline{(A \cap B)} \\ &= A \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \\ &= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \\ &= A \cap \overline{B} = A \setminus B. \end{aligned}$$

Loi de De Morgan.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.18

Commençons par dire deux mots de l'intuition géométrique qui se cache là-dedans : vous savez que $x^2 + y^2 = 1$ est une équation du cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.

Et donc \mathcal{C} est l'ensemble des points qui se trouvent à l'intérieur de ce cercle : \mathcal{C} est le disque centré en l'origine et de rayon 1.

Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe deux parties A et B de \mathbf{R} telles que $\mathcal{C} = A \times B$.

Puisque $(0, 1) \in \mathcal{C}$, nécessairement $1 \in B$.

De même, puisque $(1, 0) \in \mathcal{C}$, alors $1 \in A$.

Et donc $(1, 1) \in A \times B = \mathcal{C}$, ce qui est absurde car $1^2 + 1^2 > 1$.

On en déduit donc que notre hypothèse de départ est fautive : \mathcal{C} n'est pas le produit cartésien de deux parties de \mathbf{R} .

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.19

Notons que pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, $A \cap X \subset A$.

Et donc si $B \not\subset A$, alors l'équation ne possède pas de solution.

En revanche, si $B \subset A$, considérons une solution X de l'équation. Alors on a

$$X = X \cap E = X \cap (A \cup \overline{A}) = \underbrace{(X \cap A)}_{=B} \cup (X \cap \overline{A}) = B \cup (X \cap \overline{A}).$$

Et donc en particulier, $B \subset X$. De plus $X \cap \overline{A} \subset \overline{A}$.

Donc X est de la forme $B \cup C$, avec $C \subset \overline{A}$.

Inversement, si $X = B \cup C$, avec $C \subset \overline{A}$, alors

$$A \cap X = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup \underbrace{(A \cap C)}_{=\emptyset \text{ car } C \subset \overline{A}} = A \cap B = B.$$

Et donc l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\mathcal{S} = \{B \cup C, C \in \mathcal{P}(\overline{A})\} = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid B \subset X \subset B \cup \overline{A}\}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.20

Juste pour le plaisir, et bien que ceci ne nous soit pas vraiment utile dans la suite, reformulons l'énoncé : il s'agit de prouver que

$$\exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}, E_j \not\subset E_i.$$

Nous allons prouver le résultat par récurrence sur n , le nombre d'ensembles.

Autrement dit, nous prouvons la propriété $\mathcal{P}(n)$ suivante : «quelles que soient E_1, \dots, E_n des parties deux à deux distinctes de E , il en existe une qui ne contienne aucune des autres.»

Notons que là encore, il peut être instructif¹⁴ d'essayer d'écrire $\mathcal{P}(n)$ à l'aide de quantificateurs :

$$\mathcal{P}(n) : \forall (E_1, \dots, E_n) \in \mathcal{P}(E)^n, (\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow E_i \neq E_j) \Rightarrow (\exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}, E_j \not\subset E_i).$$

Pour $n = 2$, donnons nous deux parties E_1, E_2 de E distinctes.

Alors on ne peut avoir à la fois $E_1 \subset E_2$ et $E_2 \subset E_1$, car alors on aurait $E_1 = E_2$, contredisant

Détails

Il s'agit de l'ensemble des points dont la distance à l'origine est inférieure à 1.

Méthode

Nous sommes en train de faire un raisonnement par analyse-synthèse, et nous commençons par l'analyse : si X est solution, que peut-on dire à son sujet ?

Méthode

Il s'agit ici de la synthèse : si X est de la forme $B \cup C$, est-il bien solution de l'équation ?

Intuition

Un ensemble X vérifie $A \cap X = B$ si et seulement si X contient B tout entier, ainsi que des éléments qui ne sont pas dans A .

¹⁴ Oserais-je dire «amusant» ?

le fait que $E_1 \neq E_2$.

Donc on a toujours soit¹⁵ E_1 qui ne contient pas E_2 , soit E_2 qui ne contient pas E_1 .

Supposons à présent que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, et considérons E_1, \dots, E_{n+1} des parties distinctes de E .

Par hypothèse de récurrence, l'un des E_1, \dots, E_n , appelons-le E_i , ne contient aucun des autres.

Il y a alors deux cas possibles :

- Si $E_{n+1} \not\subset E_i$, alors aucun des $E_1, \dots, E_{i-1}, E_{i+1}, \dots, E_{n+1}$ n'est contenu dans E_i .
- Si $E_{n+1} \subset E_i$, alors E_{n+1} ne contient aucun des $E_k, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
En effet, pour $k \neq i$, si on avait $E_k \subset E_{n+1}$, comme $E_{n+1} \subset E_i$, on aurait également $E_k \subset E_i$, ce qui contredit la définition de i .
Et pour $k = i$, on ne peut avoir $E_i \subset E_{n+1}$ car on a déjà $E_{n+1} \subset E_i$, et par hypothèse $E_i \neq E_{n+1}$ car E_1, \dots, E_{n+1} sont deux à deux distincts..
Et donc E_{n+1} ne contient aucun des ensembles E_1, \dots, E_n .

Ainsi, dans tous les cas, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 2$.

Et donc, pour toute famille finie de parties deux à deux distinctes de E , l'une¹⁶ de ces parties n'en contient aucune autre.

¹⁵ Et peut-être même les deux à la fois !

¹⁶ Au moins.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.21

Il s'agit donc de prouver que $x \notin \mathbf{Q} \Rightarrow \sqrt{x} \notin \mathbf{Q}$.

Prouvons plutôt la contraposée, qui est : $\sqrt{x} \in \mathbf{Q} \Rightarrow x \in \mathbf{Q}$.

Si $\sqrt{x} \in \mathbf{Q}$, alors il existe deux entiers a et b , avec $b \neq 0$, tels que $\sqrt{x} = \frac{a}{b}$.

Et donc $x = (\sqrt{x})^2 = \frac{a^2}{b^2}$ est également le quotient de deux entiers, donc dans \mathbf{Q} .

Ainsi, on a bien prouvé que $\sqrt{x} \in \mathbf{Q} \Rightarrow x \in \mathbf{Q}$, de sorte que $x \notin \mathbf{Q} \Rightarrow \sqrt{x} \notin \mathbf{Q}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.22

Il s'agit de prouver que pour tout $(i, j) \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket^2$ vérifiant $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Soient donc $i \neq j$ deux éléments distincts de $\llbracket 0, r-1 \rrbracket$, et supposons qu'il existe $n \in A_i \cap A_j$.

Alors, puisque $n \in A_i$, il existe $k_1 \in \mathbf{Z}$ tel que $n = rk_1 + i$, et de même, il existe $k_2 \in \mathbf{Z}$ tel que $n = rk_2 + j$.

On a donc $0 = n - n = r(k_1 - k_2) + i - j \Leftrightarrow i - j = r(k_2 - k_1)$.

Donc r divise $i - j$. Mais on a $-r + 1 \leq i - j \leq r - 1$, et le seul nombre de $\llbracket -r + 1, r - 1 \rrbracket$ qui est divisible par r est 0, donc $i = j$, ce qui est absurde.

Ainsi, $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Danger !

L'erreur à ne pas faire serait de supposer que k_1 et k_2 sont égaux. Autrement dit, d'écrire : « il existe k tel que $n = kr + i$ et $n = kr + j$. »

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.23

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\frac{\ln(2)}{\ln(3)} = \frac{p}{q}$ où p et q sont deux entiers naturels non nuls¹⁷.

Alors $q \ln(2) = p \ln(3) \Leftrightarrow \ln(2^q) = \ln(3^p) \Leftrightarrow 2^q = 3^p$.

Mais 2^q est pair, alors que 3^p est impair, d'où une contradiction.

On en déduit que $\frac{\ln 2}{\ln 3} \notin \mathbf{Q}$.

¹⁷ Puisque $\ln(2) \neq 0$, il est raisonnable de supposer $p \neq 0$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.24

Supposons que $\alpha \in \mathbf{Q}$. Alors α^2 est encore dans \mathbf{Q} .

Or, $\alpha^2 = 5 + 2\sqrt{6}$. Donc $\sqrt{6} = \frac{\alpha^2 - 5}{2}$ est un rationnel : il existe deux entiers p et q tels que la fraction $\frac{p}{q}$ soit irréductible et égale à $\sqrt{6}$.

Alors $\frac{p^2}{q^2} = 6 \Leftrightarrow 6q^2 = p^2$.

La suite de la preuve est alors la même que pour l'irrationalité de $\sqrt{2}$: on montre que p est pair, puis que q est pair, contredisant l'irréductibilité de $\frac{p}{q}$.

Et donc notre hypothèse de départ est fautive : $\alpha \notin \mathbf{Q}$.

De même, si $\sqrt{4 + \sqrt{3 + \sqrt{2}}} \in \mathbf{Q}$, alors son carré $4 + \sqrt{3 + \sqrt{2}}$ est dans \mathbf{Q} car somme de deux rationnels.

Donc $\sqrt{3 + \sqrt{2}}$ est rationnel, et donc son carré aussi : $3 + \sqrt{2}$ est rationnel. Donc $\sqrt{2}$ est rationnel, ce qui est absurde !

On en déduit que $\sqrt{4 + \sqrt{3 + \sqrt{2}}}$ est irrationnel.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.25

1. Procédons par analyse synthèse, et soit f une telle fonction. Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, en prenant $y = 0$, il vient $f(0) = f(0) + f(x)$, donc $f(x) = 0$.
Par conséquent, f est la fonction nulle.

Inversement, il est clair que la fonction nulle satisfait à la relation donnée.

Et donc la fonction nulle est la seule fonction à satisfaire cette relation.

Remarque : plus généralement, le même raisonnement prouve qu'une telle fonction ne peut pas être définie sur un ensemble contenant 0.

En particulier, le \ln vérifie bien $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$, mais son ensemble de définition ne contient pas 0 !

2. Supposons que f satisfasse $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, f(x)f(y) - f(xy) = x + y$.
Alors en prenant $x = y = 0$, il vient $f(0)^2 - f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0)(1 - f(0)) = 0$.
Donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.
En prenant $x = 0$ et $y = 1$, il vient $f(0)f(1) - f(0) = 1$, donc $f(0) \neq 0$, de sorte que $f(0) = 1$.
On en déduit donc que $f(1) - 1 = 1 \Leftrightarrow f(1) = 2$.
Et donc, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x)f(0) - f(0 \times x) = x \Leftrightarrow f(x) = 1 + x$.
Ainsi, la seule fonction susceptible de satisfaire les conditions de l'énoncé est la fonction $x \mapsto 1 + x$.

Inversement, notons $f : x \mapsto 1 + x$. Alors pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on a

$$f(x)f(y) - f(xy) = (1+x)(1+y) - (1+xy) = 1+x+y+xy - 1 - xy = x+y.$$

Donc la fonction f satisfait bien aux conditions de l'énoncé.

On en déduit que la seule fonction vérifiant les conditions requises est $x \mapsto 1 + x$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.26

Procédons par analyse-synthèse.

Si deux tels réels a et b existent, alors en particulier, $1 = u_0 = a(-1)^0 + b2^0 = a + b$.

Et de même, $3 = u_1 = a(-1)^1 + b2^1 = -a + 2b$.

$$\text{Donc } \begin{cases} a + b = 1 \\ -a + 2b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{4}{3} \\ a = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Ainsi, si deux tels réels existent, nous les avons uniquement déterminés.

Reste à faire la synthèse : il faut encore prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \frac{1}{3}((-1)^n + 2^{n+2})$.

Pour ce faire, procédons par récurrence double sur $n \in \mathbf{N}$, en prouvant la propriété

$$\mathcal{P}(n) : u_n = \frac{1}{3}((-1)^n + 2^{n+2}).$$

Pour $n = 0$ et $n = 1$, c'est vrai (car nous avons tout fait pour !)

Supposons que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ soient vraies, c'est-à-dire que $u_n = \frac{1}{3}((-1)^n + 2^{n+2})$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}((-1)^{n+1} + 2^{n+3})$. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= u_{n+1} + 2u_n = \frac{1}{3}((-1)^{n+1} + 2(-1)^n + 2^{n+3} + 22^{n+2}) \\ &= \frac{1}{3}((-1)^n(2-1) + 2^{n+2}(2+2)) = \frac{1}{3}((-1)^{n+2} + 2^{n+2+2}). \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

Par le principe de récurrence double, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n .

⚠ Attention !

Nous n'avons procédé qu'à l'analyse : si une telle fonction existe, alors c'est $x \mapsto 1 + x$, mais la synthèse reste à faire, c'est-à-dire qu'il faut encore déterminer si cette fonction vérifie ou non la condition de l'énoncé.

✍ Rédaction

Qui dit récurrence double dit initialisation double.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.27

Prouvons par récurrence forte sur $n \in \mathbf{N}$ que $f(n) = n$.

Notons donc, pour $n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{P}(n) : f(n) = n$

Initialisation : par le point 1) il existe un entier p tel que $f(p) = 0$.

Or, par le point 2) $f(p) \geq p$, soit encore $0 \geq p$.

Puisque $p \geq 0$, on a donc $p = 0$, si bien que $f(0) = 0$.

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \dots, \mathcal{P}(n)$ soient vraies, c'est-à-dire telles que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $f(k) = k$.

Par le point 1), il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $f(p) = n + 1$.

Par ailleurs, par le point 2), $f(p) \geq p$, donc $n + 1 \geq p$.

Ainsi, $p \in \llbracket 0, n + 1 \rrbracket$.

Mais par hypothèse, on a déjà $f(0) = 0 \neq n + 1$, $f(1) = 1 \neq n + 1, \dots, f(n) = n \neq n + 1$.

Donc $p \geq n + 1$, si bien que par double inégalité $p = n + 1$.

Et donc $f(n + 1) = n + 1$, si bien que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

Donc par le principe de récurrence forte, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = n$, ce qui est exactement la définition de $f = \text{id}_{\mathbf{N}}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.28

Nous allons raisonner par récurrence¹⁸ sur n , et plus précisément prouver la proposition $\mathcal{P}(n) : \text{«pour tout échiquier de taille } 2^n \times 2^n, \text{ quelle que soit la position du monomino, il est possible de paver le reste de l'échiquier avec des triominos»}$.

Pour $n = 2$, ça se passe d'explications¹⁹.

Supposons donc que l'on sache paver tout échiquier carré de côté 2^n privé d'une case à l'aide de triominos, et considérons un échiquier carré de côté 2^{n+1} , sur lequel se trouve déjà un monomino. Et procédons en plusieurs étapes²⁰.

- ▶ **Étape 1** : partageons l'échiquier en 4 échiquiers carrés de côté 2^n .
- ▶ **Étape 2** : Le monomino se trouve alors dans l'un de ces 4 sous-échiquiers. Par hypothèse de récurrence, on peut donc paver ce sous-échiquier avec des triominos.
- ▶ **Étape 3** : positionnons un triomino au centre de l'échiquier, de manière à ce qu'il intersecte les trois sous-échiquiers ne contenant pas le monomino.
- ▶ **Étape 4** : les trois sous-échiquiers restants ont alors une seule case occupée. Par hypothèse de récurrence, ils sont donc pavables par des triominos. Et donc quelle que soit la position de départ du monomino, l'échiquier de côté 2^{n+1} est pavable par des triominos.

Ainsi, $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie et donc par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n .

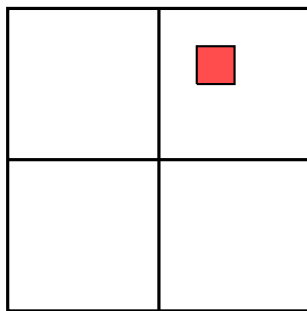
Rédaction

Dans une récurrence forte, il faut faire apparaître **très clairement** que vous ne supposez pas seulement $\mathcal{P}(n)$ vraie, mais bien $\mathcal{P}(k)$ vraie pour $k \leq n$.

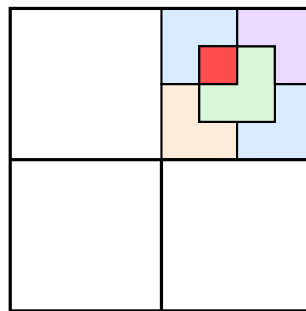
¹⁸ Simple.

¹⁹ Il n'y a que trois cases vides !

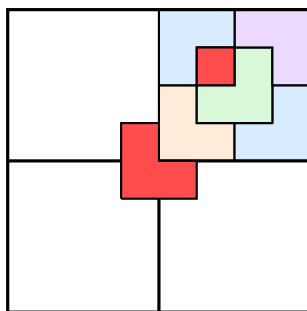
²⁰ Ces étapes sont illustrées sur la figure ci-dessous.



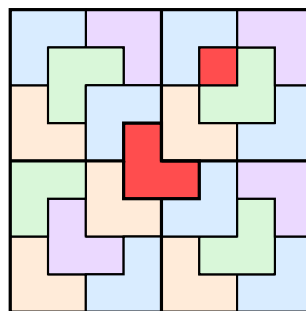
Étape 1



Étape 2



Étape 3



Étape 4