TD 3 : Fonctions numériques

► Généralités sur les fonctions, dérivées

Exercice 3.1 Un peu de logique PD
Soit J un intervalle de $\mathbf{R}$ et soit $f : \mathbf{R} \to J$ une fonction. Traduire avec des quantificateurs les propriétés suivantes :

1. f n'est pas paire
2. f est périodique
3. f n'est pas constante
4. f est croissante
5. f n'est pas strictement décroissante
6. f ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$
7. f n'est pas la fonction nulle
8. f réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur J.

Exercice 3.2 Étudier la parité de la fonction $x \mapsto \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$. Même question avec $f : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbf{Q} \\ x^2 & \text{si } x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$ F

Exercice 3.3 Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant votre affirmation. PD
Toutes les fonctions considérées seront définies sur $\mathbf{R}$.

1. la somme de deux fonctions croissantes est croissante.
2. la somme de deux fonctions monotones est monotone.
3. le produit de deux fonctions monotones est monotone.
4. le produit de deux fonctions croissantes et positives est croissant.
5. si f est T-périodique, alors pour tout $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$, $g : x \mapsto f(\alpha x)$ est périodique.
6. si f est périodique, alors $g \circ f$ est périodique.
7. si g est périodique, alors $g \circ f$ est périodique.
8. si $g \circ f$ est bornée, alors g est bornée.
9. f est paire si et seulement si $-f$ est impaire.
10. le produit de deux fonctions majorées est majoré.
11. le produit de deux fonctions bornées est borné.
12. si f et g sont impaires, alors $g \circ f$ est impaire.

Exercice 3.4 Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \begin{cases} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ AD

1. Déterminer les points fixes de f.
2. Montrer que $f \circ f$ est bien définie et que $f \circ f = f$.

Exercice 3.5 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction telle que $f \circ f$ soit croissante et $f \circ f \circ f$ soit strictement décroissante. PD
Montrer que f est strictement décroissante.

Exercice 3.6 Fonctions périodiques PD

1. Montrer que pour $k \in \mathbf{N}^*$, $f_k : x \mapsto \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor - \frac{\lfloor x \rfloor}{k}$ est k-périodique.
2. Que dire d'une fonction périodique et croissante ? D'une fonction périodique et strictement croissante ?

Exercice 3.7 Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ une fonction, qu'on ne suppose pas nécessairement dérivable, telle que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $f(x)e^{f(x)} = x$. Étudier la monotonie de f. PD

Exercice 3.8 Courbes présentant un axe de symétrie AD
Dans tout l'exercice, on se place dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Soit $a \in \mathbf{R}$. Justifier que la symétrie par rapport à la droite (verticale) d'équation $x = \frac{a}{2}$ envoie un point de coordonnées (x,y) sur le point de coordonnées $(a-x, y)$.
2. Soit $f : [0,a] \to \mathbf{R}$ telle que pour tout $x \in [0,a]$, $f(x) = f(a-x)$.
   Justifier alors que $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{a}{2}$.
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \sin(x)\left|2\cos^2(x) - 1\right|$.
   (a) Justifier qu'il suffit d'étudier f sur $[0, \pi]$.
   (b) ($\star$) Tracer le graphe de f sur $[-\pi, 2\pi]$.

Exercice 3.9 Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f(x) = \left(2x + 1 + \frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$. AD

1. Montrer que f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbf{R}_+$. Étudier la dérivabilité de ce prolongement.
2. Déterminer les asymptotes au graphe de f.

Exercice 3.10 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ sur lequel elle est dérivable, et calculer sa dérivée. F

1. $f : x \mapsto \dfrac{\ln \sqrt{3e^x - 1}}{4 - x^2}$ 2. $g : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ 3. $h : x \mapsto \dfrac{2^{x - \frac{1}{x}}}{x^2 - 1}$.

Exercice 3.11 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer sa dérivée $n^{\text{ème}}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ (on admettra que ces dérivées $n^{\text{èmes}}$ existent). *Indication : on pourra commencer par conjecturer une formule, et la prouver par récurrence sur n.* AD

1. $f : x \mapsto \ln(x)$
2. $g : x \mapsto \dfrac{2}{1+3x}$
3. $h : x \mapsto e^{ax+b}$, $a \neq 0$
4. sin
5. $(\star)$ $p : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 1}$.
6. $k : x \mapsto 3^x$.

Pour la fonction p, on commencera par déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, $p(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1}$.

Exercice 3.12 Dérivées successives d'une fonction polynomiale AD

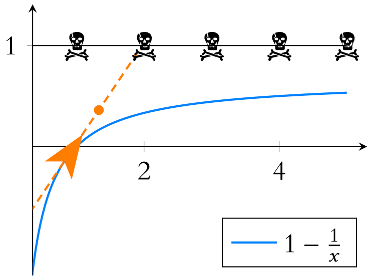
Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soit f une fonction de la forme $x \mapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, calculer $f^{(k)}(0)$.

Exercice 3.13 PD

Dans un (très vieux) jeu vidéo, un vaisseau spatial se déplace sur la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = 1 - \dfrac{1}{x}$.

Lorsqu'il tire un missile, celui-ci part en ligne droite suivant la tangente à $\mathscr{C}$.

Quelle doit être la position du vaisseau au moment où il tire son $k^{\text{ème}}$ missile pour atteindre le $k^{\text{ème}}$ ennemi, situé au point de coordonnées $(k, 1)$?



Exercice 3.14 Soit $a > 0$, et soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x+a) = \dfrac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2}$. Prouver que f est périodique. D

Exercice 3.15 Une équation fonctionnelle (Oral Polytechnique) TD

Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}_+^*$ qui tendent vers 0 en $+\infty$ et telles que pour tous réels strictement positifs x et y : $f(xf(y)) = yf(x)$ $(\mathscr{R})$.

1. Montrer que $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est solution du problème posé.
2. Prouver que si f est une fonction satisfaisant aux conditions de l'énoncé, alors le seul éventuel point fixe de f est 1.
3. En déduire que g est la seule solution au problème posé.

▸ Bijections

Exercice 3.16 Montrer que la fonction $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} \setminus \{3\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x+1}{x-3} \end{array} \right.$ réalise une bijection de $\mathbf{R} \setminus \{3\}$ sur un ensemble à préciser. Déterminer alors f^{-1}. PD

Exercice 3.17 PD

1. Montrer que l'équation $x^2 \ln(x) = 1$ possède une unique solution.
2. $(\star)$ Déterminer le nombre de points fixes de $f : x \mapsto (x+1)e^{-x}$.
3. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, la fonction $x \mapsto \cos^k(x)$ possède un unique point fixe.

Exercice 3.18 Déterminer le nombre de racines (réelles) des fonctions polynomiales suivantes, où $\lambda \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}^*$: PD

1. $f : x \mapsto x^5 - x^3 + 1$ 2. $g : x \mapsto 3x^5 + 10x^3 - 45x + \lambda$ 3. $h : x \mapsto x^{n+2} - (n+2)x^2 + 1$

Exercice 3.19 Donner une condition nécessaire et suffisante sur $y \in \mathbf{R}$ pour que l'équation $xe^x = y$, d'inconnue $x \in \mathbf{R}$ possède exactement une solution. Même question mais pour deux solutions. PD

Exercice 3.20 Soit f la fonction définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$. AD

1. Montrer que f réalise une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
2. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{1\}$ et que pour tout $x \in J \setminus \{1\}$, $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$.

Exercice 3.21 Soif $a > 0$, soit I une partie de $\mathbf{R}$, et soit $f :]-a, a[\to I$ une fonction impaire réalisant une bijection de $]-a, a[$ sur I. AD

Montrer que f^{-1} est encore impaire. Que dire si f est paire ?

Correction des exercices du TD 3

Solution de l'exercice 3.1

1. Rappelons que f est paire si et seulement si $\forall x \in \mathbf{R},\ f(-x) = f(x)$.
   Donc la négation de cette proposition est $\exists x \in \mathbf{R},\ f(-x) \neq f(x)$.
2. Nous avons dit que f est périodique s'il existe $T \in \mathbf{R}_+^*$ tel que f soit T-périodique.
   Soit encore $\exists T \in \mathbf{R}_+^*,\ \forall x \in \mathbf{R},\ f(x+T) = f(x)$.
3. Deux options ici : dire que f n'est pas constante revient à dire qu'elle prend au moins deux valeurs. Donc
   $$\exists x, y \in \mathbf{R},\ f(x) \neq f(y).$$
   Une autre option, plus pédestre, est de dire que f est constante si et seulement si
   $$\exists \lambda \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \lambda.$$
   Et donc la négation en est $\forall \lambda \in \mathbf{R},\ \exists x \in \mathbf{R},\ f(x) \neq \lambda$.
4. $\forall x, y \in \mathbf{R},\ x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
5. La fonction f est strictement décroissante si et seulement si
   $$\forall x, y \in \mathbf{R},\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y).$$
   Donc la négation en est $\exists x, y \in \mathbf{R},\ x < y$ **et** $f(x) \leqslant f(y)$.
6. $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) \neq 0$.
7. Rappelons que la fonction nulle est la fonction qui vaut **toujours** zéro.
   Et donc que f est non nulle dès lors qu'elle ne s'annule pas en au moins un point : $\exists x \in \mathbf{R},\ f(x) \neq 0$.
8. f réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur J si tout élément de J possède un unique antécédent par f.
   Soit encore $\forall y \in J,\ \exists! x \in \mathbf{R},\ f(x) = y$.
   Et si vous n'aimez pas les $\exists!$, cela s'écrit encore
   $$\forall y \in J,\ \exists x \in \mathbf{R},\ (f(x) = y) \textbf{ et } (\forall z \in \mathbf{R},\ (y = f(z) \Rightarrow z = x)).$$

⚠ Attention ! Il n'est pas question de permuter les deux quantificateurs, cela signifierait que le $T \in \mathbf{R}_+^*$ peut dépendre du $x \in \mathbf{R}$ choisi, ce que nous ne voulons pas !

Remarque Si l'on sait que f est à valeurs dans J, il est possible de restreindre les λ à J.

Rappel La négation de $P \Rightarrow Q$ est P **et** (**non** Q).

Solution de l'exercice 3.2

Commençons par nous intéresser au domaine de définition de f, puisque la notion de parité n'aura de sens que si celui-ci est symétrique.
On a $\sqrt{x^2+1} + x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > -x$.
Or, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x^2+1 > x^2$ et donc $\sqrt{x^2+1} \geqslant \sqrt{x^2} \geqslant |x| \geqslant -x$.
Donc f est définie sur $\mathbf{R}$.

Astuce $|x|$ est toujours à la fois supérieur à x et à $-x$, puisque c'est le plus grand des deux.

Pour $x \in \mathbf{R}$, on a $f(-x) = \ln\left(\sqrt{(-x)^2+1} - x\right) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$.
Il est clair que pour $x \neq 0$, ceci n'est pas égal[1] à $f(x)$, donc f n'est pas paire.
Nous serions tentés de dire que ce n'est pas égal à $-f(x) = -\ln(\sqrt{x^2+1} + x)$, mais ce n'est pas parce qu'on ne voit pas que c'est égal que ça ne l'est pas...
En effet, on a
$$-f(x) = -\ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}\right).$$
Or
$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)} = \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x^2+1-x^2} = \sqrt{x^2+1}-x.$$
Et donc en composant par ln, $f(-x) = -f(x)$, de sorte que f est impaire.
La seconde fonction n'est pas paire, puisque $f(-1) = -1 \neq 1 = f(1)$.
Elle n'est pas non plus impaire, puisque $f(-\sqrt{2}) = 2 \neq -2 = -f(\sqrt{2})$.
Pourtant, on remarquera que $\forall x \in \mathbf{R},\ (f(-xx) = f(x)$ **ou** $f(-x) = -f(x))$.
La subtilité est dans le fait que cette dernière assertion n'est pas équivalente à
$$(\forall x \in \mathbf{R},\ f(-x) = f(x)) \textbf{ ou } (\forall x \in \mathbf{R},\ f(-x) = -f(x)).$$

[1] Car ln ne prend pas deux fois la même valeur et que
$$\sqrt{x^2+1} - x \neq \sqrt{x^2+1} + x.$$

Solution de l'exercice 3.3

1. **Vrai.** Soient f et g deux fonctions croissantes. Soient alors $x, y \in \mathbf{R}$ tels que $x \leqslant y$. Alors $f(x) \leqslant f(y)$ et $g(x) \leqslant g(y)$, si bien que[2] $f(x)+g(x) \leqslant f(y)+g(y)$: $f+g$ est croissante.
2. **Faux.** Soit $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto -x^3$. Alors f est croissante et g est décroissante sur $\mathbf{R}$.
En revanche, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $(f+g)'(x) = 1-2x^2$, qui n'est pas de signe constant sur $\mathbf{R}$.
Donc $f+g$ n'est pas monotone.
3. **Faux.** La fonction $f : x \mapsto x$ est croissante sur $\mathbf{R}$, pourtant $f \times f$ est la fonction carré, qui n'est pas monotone sur $\mathbf{R}$.
4. **Vrai.** Soient f et g deux fonctions croissantes et positives.
Soient alors $x \leqslant y$ deux réels. On a $0 \leqslant f(x) \leqslant f(y)$ et $0 \leqslant g(x) \leqslant g(y)$, donc en multipliant ces inégalités, $0 \leqslant f(x)g(x) \leqslant f(y)g(y)$: la fonction fg est croissante.
5. **Vrai.** Pour $x \in \mathbf{R}$, on a
$$g\left(x+\frac{T}{\alpha}\right) = f\left(\alpha\left(x+\frac{T}{\alpha}\right)\right) = f(\alpha x+T) = f(\alpha x) = g(x).$$
Donc g est $\dfrac{T}{\alpha}$-périodique.
6. **Vrai.** Si T est une période de f, alors pour $x \in \mathcal{D}_f$,
$$(g\circ f)(x+T) = g(f(x+T)) = g(f(x)) = (g\circ f)(x).$$
Donc $g\circ f$ est T-périodique.
7. **Faux.** Soit $g : x \mapsto \sin(x)$ qui est périodique, et soit $f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.
Alors g est périodique. Et pourtant, pour tout $T > 0$,
$$(g\circ f)(-T) = \sin(-1) \neq \sin(1) = (g\circ f)(0) = (g\circ f)(-T+T).$$
Donc $g\circ f$ n'est pas T-périodique, et ce pour tout $T > 0$, donc n'est pas périodique.
8. **Faux.** Si g est la fonction $x \mapsto x^2$ et f est la fonction cosinus, alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $(g\circ f)(x) = \cos^2(x) \in [-1,1]$. Donc $g\circ f$ est bornée, pourtant la fonction g n'est pas majorée (donc pas bornée).
9. **Faux.** Si f est paire, alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $-f(-x) = -f(x) = (-f)(x)$.
Donc $-f$ est encore paire, et n'est donc pas impaire... sauf si f est constante[3].
10. **Faux.** Prenons $f : x \mapsto -e^x$ et $g = f$.
Alors f et g sont tous les deux majorées[4] par 0 et pourtant pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x)g(x) = e^{2x}$, si bien que fg n'est pas majorée.
En effet, supposons qu'il existe $M \in \mathbf{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $e^{2x} \leqslant M$.
Alors pour $x = \frac{\ln(M)}{2} + 1$, il vient
$$e^{2x} \leqslant M \Leftrightarrow e^{\ln(M)+1} \leqslant M \Leftrightarrow e \times M \leqslant M$$
ce qui est absurde.
11. **Vrai.** Soient K_1, K_2 deux réels tels que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|f(x)| \leqslant K_1$ et $|g(x)| \leqslant K_2$.
Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leqslant K_1K_2$.
Donc fg est bornée.
12. **Vrai.** Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors
$$(g\circ f)(-x) = g(f(-x)) = g(-f(x)) = -g(f(x)) = -(g\circ f)(x)$$
et donc $g\circ f$ est impaire.

[2] Par somme d'inégalités.

Danger ! Sans l'hypothèse de positivité, on ne peut plus multiplier les inégalités (cf question précédente).

[3] Mais il existe des fonctions paires non constantes, comme la fonction carré.

[4] Elles ne prennent que des valeurs négatives.

Solution de l'exercice 3.4

1. Il est clair que 0 n'est pas un point fixe de f, et pour $x \in]0,1]$, alors x est un point fixe de f si et seulement si
$$f(x) = x \Leftrightarrow \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1 \Leftrightarrow 1 \leqslant \frac{1}{x} < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x \leqslant 1.$$
Et donc l'ensemble des points fixes de f est $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$.

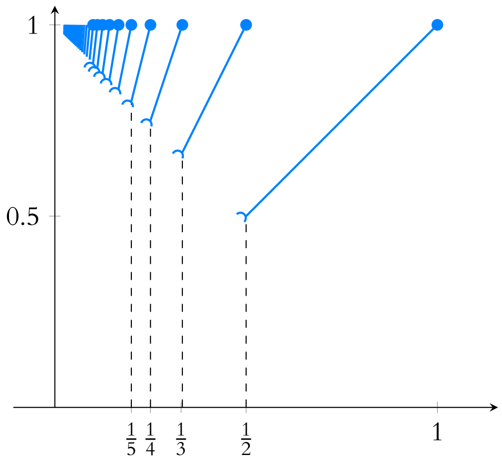


FIGURE 3.1 – Le graphe de f. Les points fixes y sont bien visibles : pour $x > \frac{1}{2}$, le graphe de f coïncide avec la première bissectrice.

2. Pour prouver que $f \circ f$ est bien définie, il faut prouver que f est à valeurs dans $[0,1]$.
Si $x = 0$, alors $f(x) = 1 \in [0,1]$.
Et si $x \in]0,1]$, alors, par définition de la partie entière,

$$\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{x} \text{ donc } \underbrace{1-x}_{\geqslant 0} < x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant 1.$$

Et donc $f(x) \in [0,1]$. Ainsi, $f \circ f$ est bien définie.

Soit $x \in [0,1]$.
Alors, prouver que pour tout $x \in [0,1]$, $f(f(x)) = f(x)$ revient à prouver que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x)$ est un point fixe de f.
Soit encore, d'après la question 1, que $f(x) \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$.

Soit donc $x \in [0,1]$.
► Si $x = 0$, on a $f(x) = 1$ qui est un point fixe de f.
► Si $x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$, alors $1 \leqslant \frac{1}{x} < 2$, si bien que $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$ et donc $f(x) = x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$.
► Si $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, alors nous avons déjà prouvé à la question 1 que $1 - x < f(x) \leqslant 1$.
Or, $x \leqslant \frac{1}{2}$ et donc $1 - x \geqslant \frac{1}{2}$, de sorte que $1 - x < f(x) \Rightarrow \frac{1}{2} < f(x)$.
Et donc $f(x) \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$.

Ainsi, nous avons prouvé que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$, et donc $f(f(x)) = f(x)$.
On en déduit que $f \circ f = f$.

> **Méthode**
> Pour prouver que deux fonctions f et g sont égales, il faut prouver :
> ► qu'elles ont le même ensemble de définition $\mathscr{D}$ (si ce n'est pas évident)
> ► qu'en tout $x \in \mathscr{D}$ elles prennent la même valeur, *i.e.* que $f(x) = g(x)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.5

Procédons à un raisonnement par l'absurde en supposant que f ne soit pas strictement décroissante.
Cela signifie qu'il existe donc deux réels x et y vérifiant $x < y$ et $f(x) \leqslant f(y)$.
Considérons deux tels réels x et y. Puisque $f(x) \leqslant f(y)$, et que $f \circ f$ est croissante, alors $(f \circ f)(f(x)) \leqslant (f \circ f)(f(y))$, ce qui s'écrit encore

$$(f \circ f \circ f)(x) \leqslant (f \circ f \circ f)(y).$$

Par ailleurs, par stricte décroissance de $f \circ f \circ f$ et puisque $x < y$, on a

$$(f \circ f \circ f)(x) > (f \circ f \circ f)(y).$$

> **⚠ Attention !**
> La négation de f est strictement décroissante n'est ni «f est strictement croissante», ni «f est croissante» !

C'est absurde et donc notre hypothèse de départ est fausse, si bien que f est strictement décroissante.

Solution de l'exercice 3.6

1. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors
$$f_k(x+k) = \left\lfloor \frac{x+k}{k} \right\rfloor - \frac{\lfloor x+k \rfloor}{k} = \left\lfloor \frac{x}{k} + 1 \right\rfloor - \frac{\lfloor x+k \rfloor}{k}.$$
Or nous savons que pour tout réel x et tout entier n, $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
Donc en particulier, $\left\lfloor \frac{x}{k} + 1 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor + 1$ et $\lfloor x+k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$.
On en déduit que $f_k(x+k) = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor + 1 - \frac{\lfloor x \rfloor + k}{k} = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor - \frac{\lfloor x \rfloor}{k} = f_k(x)$.
Et donc f_k est bien k-périodique.

2. Prouvons qu'une fonction périodique et croissante est nécessairement constante.
Soit donc $f : \mathscr{D} \to \mathbf{R}$ une fonction périodique et croissante. Nous allons prouver que $\forall x, y \in \mathscr{D}$, $f(x) = f(y)$, ce qui est[5] l'une des caractérisations des fonctions constantes.

[5] Voir le TD1.

Soient donc $x, y \in \mathscr{D}$. Quitte à les échanger, supposons que $x \leqslant y$. Notons T une période de f, et soit alors $n \in \mathbf{N}$ tel que $x + nT \geqslant y$.
Puisque $x \leqslant y$, par croissance de f, $f(x) \leqslant f(y)$.
Et $y \leqslant x + nT$, donc par croissance de f, $f(y) \leqslant f(x+nT)$.
Or par T-périodicité de f, $f(x+nT) = f(x)$.
On a donc $f(x) \leqslant f(y) \leqslant f(x)$, si bien que $f(x) = f(y)$.
Donc une fonction continue et périodique est constante.

Remarque
Un tel n existe, puisque la condition est équivalente à $n \geqslant \frac{y-x}{T}$.
On peut par exemple prendre $n = \left\lfloor \frac{y-x}{T} \right\rfloor + 1$.

En revanche, il n'existe pas de fonction périodique et strictement croissante.
En effet, supposons qu'une telle fonction $f : \mathscr{D} \to \mathbf{R}$, T-périodique et strictement croissante existe.
Alors $f(0) < f(T) = f(0)$, ce qui est absurde.

Solution de l'exercice 3.7

Notons que si jamais f était dérivable, alors $x \mapsto e^{f(x)}$ le serait aussi, et on aurait, par dérivation terme à terme, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$,
$$f'(x)e^{f(x)} + f'(x)f(x)e^{f(x)} = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{e^{f(x)}}{1+f(x)} > 0.$$
Donc f serait strictement croissante.

⚠ Attention !
L'énoncé ne fait aucune telle hypothèse, donc au mieux nous sommes en train de répondre partiellement à la question posée.
Cela dit, traiter ce cas particulier nous permet de nous faire une idée du résultat attendu.

La fonction $g : x \mapsto xe^x$ est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$ car produit de fonctions positives strictement croissantes.
Soient alors $a < b$ deux réels positifs. Alors par hypothèse, $f(a)e^{f(a)} < f(b)e^{f(b)}$, soit encore $g(f(a)) < g(f(b))$.
Or nous savons que puisque g est strictement croissante, pour tous $x, y \in \mathbf{R}_+$,
$$x < y \Leftrightarrow g(x) < g(y).$$
Et donc ici $f(a) < f(b)$.
Alternative : soient $x < y$ deux réels strictement positifs.
Supposons par l'absurde que $f(x) \geqslant f(x)$.
Alors $e^{f(x)} \geqslant e^{f(y)}$ et donc par produit d'inégalités à termes positifs,
$$f(x)e^{f(x)} \geqslant f(y)e^{f(y)} \Leftrightarrow x \geqslant y,$$
ce qui est absurde.
Donc nécessairement $f(x) < f(y)$, si bien que f est strictement croissante.

Alternative
On pourrait aussi tout simplement utiliser la croissance de $x \mapsto xe^x$, produit de deux fonctions croissantes et positives sur $\mathbf{R}_+$.

Solution de l'exercice 3.8

1. Notons donc M le point de coordonnées (x, y), et soit N son symétrique par rapport à la droite D d'équation $y = \frac{a}{2}$, de cordonnées (x_N, y_N).
Alors D est la médiatrice de $[MN]$, si bien que le milieu de $[MN]$ est sur D, et par ailleurs, $\overrightarrow{MN}$ est orthogonal à $\vec{j}$, qui est un vecteur directeur de D.

Donc $\begin{cases} \dfrac{x+x_N}{2} = \dfrac{a}{2} \\ \overrightarrow{MN}\cdot\vec{j} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = a - x \\ y_N - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x_N, y_N) = (a-x, y)$.
Donc les coordonnées du symétrique de M par rapport à D sont bien celles annoncées dans l'énoncé.

2. Soit $g : x \mapsto f(a-x)$.
Alors un point de coordonnées (x,y) appartient à $\mathscr{C}_f$ si et seulement si

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = g(a-x) \Leftrightarrow (a-x, y) \in \mathscr{C}_g.$$

Ainsi, la courbe de g est symétrique de la courbe de f par rapport à la droite d'équation $x = \frac{a}{2}$.
Et en particulier, si $f = g$, alors f et g ont même courbes représentatives, donc D est un axe de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

3.a. La fonction f est clairement 2π-périodique car sin et cos le sont. Donc il suffit de l'étudier sur $[-\pi, \pi]$.
Puisque de plus, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(-x) = -f(x)$, f est impaire, et donc il suffit de l'étudier sur $[0, \pi]$.

3.b. Pour $x \in [0, \pi]$, on a

$$f(\pi - x) = \sin(\pi - x)\left|2\cos^2(\pi - x) - 1\right| = \sin(x)\left|2(-\cos(x))^2 - 1\right| = f(x).$$

Et donc par la question précédente, il suffit d'étudier f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, puis de réaliser la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = \frac{\pi}{2}$.

Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a donc $f(x) = \sin(x)\ (2\cos^2(x) - 1| = \sin(x)|\cos(2x)|$.
Et donc en particulier, pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $f(x) = \sin(x)\cos(2x)$
et pour $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = -\sin(x)\cos(2x)$.
Donc f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$, avec pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x)\cos(2x) - 2\sin(x)\sin(2x) = \cos(x)\left[2\cos^2(x) - 1 - 4\sin^2(x)\right] \\ &= \cos(x)\left[6\cos^2(x) - 5\right]. \end{aligned}$$

Sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\cos(x) \geqslant 0$, et $6\cos^2(x) - 5 \geqslant 0 \Leftrightarrow \cos(x) \geqslant \sqrt{\dfrac{5}{6}}$.
Mais cos réalise une bijection[6] strictement décroissante de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ sur $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$, et $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \sqrt{\dfrac{5}{6}} \leqslant 1$, donc il existe un unique $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right[$ tel que $\cos(\alpha) = \sqrt{\dfrac{5}{6}}$.
Et donc au final, pour $x \in [0, \alpha]$, $f'(x) \geqslant 0$, et pour $x \in \left[\alpha, \frac{\pi}{4}\right]$, $f'(x) \leqslant 0$.
Donc f est croissante sur $[0, \alpha]$ et décroissante sur $\left[\alpha, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

De même, sur $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, f est dérivable et pour tout $x \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$f'(x) = -\cos(x)\left[6\cos^2(x) - 5\right] \geqslant 0.$$

Donc f est croissante sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Donc le tableau de variations de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est le suivant :

x	0		α		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

Nous sommes donc en mesure de tracer le graphe de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Puis on réalise la symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$, puis une symétrie par

Rappel
Pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$\cos(x - \pi) = -\cos(x)$.

[6] Car continue.

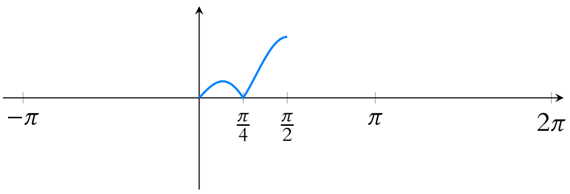
Détails
On a cette fois $x \in \left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos(x) \leqslant \sqrt{\dfrac{5}{6}}$ et donc $f'(x) \geqslant 0$.

rapport à l'origine (par imparité), et enfin une translation de vecteur $2\pi\vec{i}$ (en se limitant aux $x \leqslant 2\pi$).
Voici donc le résumé des étapes de la construction du graphe de f :

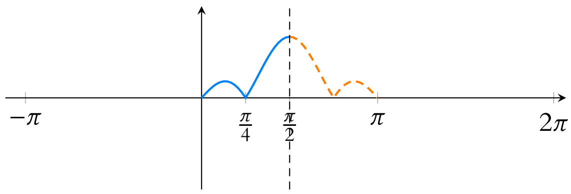
x	0		α		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

Nous sommes donc en mesure de tracer le graphe de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Puis on réalise la symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$, puis une symétrie par rapport à l'origine (par imparité), et enfin une translation de vecteur $2\pi\vec{i}$ (en se limitant aux $x \leqslant 2\pi$).
Voici donc le résumé des étapes de la construction du graphe de f :

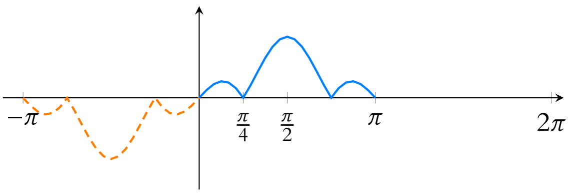
Tracé sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$



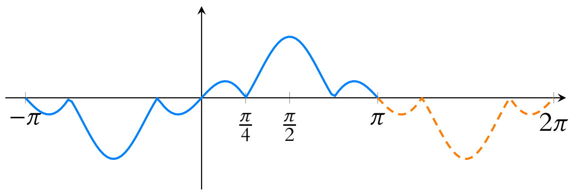
Symétrie par rapport à $x = \frac{\pi}{2}$



Symétrie par rapport à l'origine



Translation (partielle)



Solution de l'exercice 3.9

1. Il s'agit de prouver que f possède une limite **finie** en 0.
On a $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$. Et donc $\lim\limits_{x\to 0^+} (2x+1)e^{-\frac{1}{x}} = 0$.
En revanche, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}$ est une forme indéterminée.
Mais le changement de variable $X = \frac{1}{x}$ nous donne $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X\to+\infty} Xe^{-X} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{X}{e^X}$.
Il est alors connu[7] que cette limite est nulle et donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$.
Donc la fonction f se prolonge par continuité en 0 et son prolongement par continuité à $\mathbf{R}_+$ est

$$\widetilde{f} : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ f(x) & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

On a alors, pour $x > 0$,

$$\frac{\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(0)}{x} = \frac{f(x)}{x} = \left(2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}}.$$

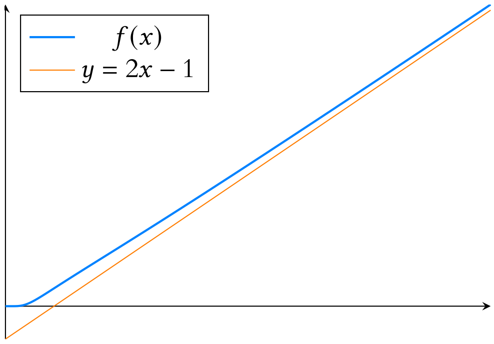
Comme précédemment, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{X^2}{e^X} = 0$.
Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(0)}{x} = 0$, de sorte que $\widetilde{f}$ est dérivable en 0, et $\widetilde{f}'(0) = 0$.

[7] Et ce sera reprouvé plus tard.

2. On a $\dfrac{f(x)}{x} = \left(2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2.$
Donc si $\mathscr{C}_f$ possède une asymptote en $+\infty$, elle a 2 pour coefficient directeur.
Et alors
$$f(x)-2x = 2x\left(e^{-\frac{1}{x}}-1\right)+\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}.$$
Il est facile[8] de constater que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} = 1.$
Pour l'autre partie, procédons au changement de variable $X=\frac{1}{x}$, de sorte que
$$\lim_{x\to+\infty} 2x\left(e^{-\frac{1}{x}}-1\right) = \lim_{X\to 0^+} 2\frac{e^{-X}-e^{-0}}{X}.$$
Nous reconnaissons là le taux d'accroissement en 0 de $g : x\mapsto e^{-x}$, dont la dérivée en 0 vaut $f'(0) = -e^{-0} = -1$.
Autrement dit, on a donc $\lim\limits_{X\to 0^+}\dfrac{e^{-X}-e^{-0}}{X} = g'(0) = -1.$
Et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x) = -1$, de sorte que la droite d'équation $y=2x-1$ est asymptote à Γ_f au voisinage de $+\infty$.

[8] Il n'y a pas de forme indéterminée.

Astuce
Pour les formes indéterminées qui ne relèvent pas des résultats de croissance comparée, il est souvent possible de les écrire comme limite d'un taux d'accroissement.



SOLUTION DE L'EXERCICE 3.10

1. On a $3e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow x>-\ln(3)$.
Or, la fonction $t\mapsto\sqrt{t}$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$ et de même, ln est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$.
Notons alors $f_1 : \left|\begin{array}{ccc} -\ln(3),+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R}_+^* \\ x & \longmapsto & 3e^x-1\end{array}\right.$, $f_2 : \left|\begin{array}{ccc}\mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R}_+^* \\ x & \longmapsto & \sqrt{x}\end{array}\right.$ et $f_3 : \left|\begin{array}{ccc}\mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \ln t\end{array}\right.$.
Alors la par composition de fonctions dérivables, $f_3\circ f_2\circ f_1 : x\mapsto \ln\sqrt{3e^x-1}$ est dérivable sur $\left]-\ln(3),+\infty\right[$.
Pour calculer sa dérivée, notons que pour tout $x>-\ln(3)$, $\ln\sqrt{3e^x-1} = \dfrac{1}{2}\ln(3e^x-1)$. Et alors la dérivée de $x\mapsto\ln\sqrt{3e^x-1} = \dfrac{1}{2}\ln(f_1)$ est
$$x\mapsto\frac{1}{2}\frac{f_1'(x)}{f_1(x)} = \frac{1}{2}\frac{3e^x}{3e^x-1}.$$
De plus, $4-x^2\neq 0\Leftrightarrow x\notin\{-2,2\}$.
Donc la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{4-x^2}$ est dérivable sur $\mathbf{R}\setminus\{-2,2\}$.
Par produit, on en déduit que f est dérivable sur $]-\ln(3),2[\cup]2,+\infty[$ et que pour x dans cet ensemble,
$$f'(x) = \frac{\frac{3e^x}{6e^x-2}(4-x^2)+2x\ln(\sqrt{3e^x-1})}{(4-x^2)^2}.$$

2. Puisque $t\mapsto\sqrt{t}$ n'est dérivable que sur $\mathbf{R}_+^*$ (bien qu'elle soit définie sur $\mathbf{R}_+$), il nous faut déterminer à quelle condition $\dfrac{1+x}{1-x}>0$.
Un tableau de signe nous permet de répondre facilement :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{1+x}{1-x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Donc g est dérivable sur $]-1,1[$.
Notons alors $g_1 : x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x}$ et $g_2 : x \mapsto \sqrt{x}$.
Alors pour tout $x \in]-1,1[$, $g_1'(x) = \dfrac{1-x+(1+x)}{(x-1)^2} = \dfrac{2}{(x-1)^2}$.
D'autre part, pour tout $x > 0$, $g_2'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
Et donc par dérivation d'une composée, pour $x \in]-1,1[$,

$$g'(x) = (g_2 \circ g_1)'(x) = g_1'(x) g_2'(g_1(x)) = \frac{2}{(x-1)^2}\frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = \frac{1}{(1-x)^{3/2}\sqrt{x+1}}.$$

3. Notons que $2^{x-\frac{1}{x}} = \exp\left(\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\ln(2)\right)$ est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ et que sa dérivée est

$$x \mapsto \ln(2)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)2^{x-\frac{1}{x}}.$$

D'autre part, x^2-1 est non nul si et seulement si $x \neq \pm 1$, donc h est dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]-1,0[\cup]0,1[\cup]1+\infty[$ et sa dérivée est

$$h' : x \mapsto \frac{\ln(2)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)2^{x-\frac{1}{x}}(x^2+1) - 2x2^{x-\frac{1}{x}}}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{x^2(x^2-1)^2}2^{x-\frac{1}{x}}\left(\ln(2)(x^4-1)-2x^3\right).$$

Solution de l'exercice 3.11

1. On a, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, $f^{(3)}(x) = \dfrac{2}{x^3}$, $f^{(4)}(x) = -\dfrac{6}{x^4}$, $f^{(5)}(x) = \dfrac{24}{x^5}$.
Il est donc raisonnable de conjecturer que pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $x > 0$, on a $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$.
Prouvons le par récurrence. Plus précisément, pour $n \in \mathbf{N}^*$, notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété « f est n fois dérivable et quel que soit $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$ ».
Pour $n = 1$, la propriété est vraie.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que pour tout $x > 0$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.
Alors $f^{(n)}$ est dérivable puisque la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ l'est, et on a pour tout $x > 0$,

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{-n}{x^{n+1}} = (-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}} = (-1)^{n+1-1}\frac{(n+1-1)!}{x^{n+1}}.$$

Donc la propriété est encore vraie au rang $n+1$, de sorte que par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, et tout $x > 0$, $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$.

> **Dérivabilité**
> Notons que, contrairement à ce que demandait l'énoncé, nous avons ici **prouvé** l'existence des dérivées $n^{\text{èmes}}$.
> Les preuves sont similaires pour les autres fonctions, et nous les omettons (nous aurons bientôt des outils plus puissant pour prouver sans efforts l'existence de ces dérivées).

2. Commençons par noter que l'ensemble de définition de g est $\mathbf{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{3}\right\} = \left]-\infty,-\dfrac{1}{3}\right[\cup \left]-\dfrac{1}{3},+\infty\right[$.
On a alors, pour $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$,

$$g'(x) = -\frac{2\times 3}{(1+3x)^2},\ g''(x) = \frac{2\times 2\times 3^2}{(1+3x)^3},\ g^{(3)}(x) = -\frac{2\times 2\times 3\times 3^3}{(1+3)^4},\ \text{etc}$$

Prouvons donc par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$ que $\forall x \neq -\frac{1}{3}$, $g^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n 2 \times 3^n \times n!}{(1+3x)^{n+1}}$.
Pour $n = 1$, alors

$$\forall x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\},\ g'(x) = -\frac{6}{(1+3x)^2} = \frac{(-1)^1 2 \times 3^1 \times 1!}{(1+3x)^{1+1}}.$$

Donc la récurrence est initialisée.
Supposons que $\forall x \neq -\frac{1}{3}$, $g^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n 2 \times 3^n \times n!}{(1+3x)^{n+1}}$.
Alors $g^{(n)}$ est dérivable car quotient de deux fonctions dérivables, et

$$\forall x \neq -\frac{1}{3},\ g^{(n+1)}(x) = (-1)^n 2 \times 3^n \times n! \frac{-3(n+1)}{(1+3x)^{n+2}} = (-1)^{n+1} 2 \times 3^{n+1} \times (n+1)! \frac{1}{(1+3x)^{n+2}}.$$

Et donc la propriété est encore vraie au rang $n+1$.
Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$, $g^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n 2 \times 3^n \times n!}{(1+3x)^{n+1}}$.

> **Méthode**
> Pour conjecturer la bonne formule, mieux vaut essayer de comprendre ce qui se passe à chaque fois qu'on dérive (ici c'est le numérateur qui pose problème).
> Lorsqu'on dérive $g^{(n-1)}$, il y a un 3 qui apparaît au numérateur (qui est la dérivée de $1+3x$), mais également un $-n$ (qui vient de la dérivée de la puissance n au dénominateur). Et comme il y avait également un 2 au numérateur au départ, on le garde.

3. On a, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $h'(x) = ae^{ax+b} = ah(x)$.
Donc $h''(x) = ah'(x) = a^2 h(x)$, puis $h^{(3)}(x) = a^2 h'(x) = a^3 h(x)$.
Une récurrence rapide prouve alors que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$,

$$h^{(n)}(x) = a^n h(x) = a^n e^{ax+b}.$$

4. Les premières dérivées de sin sont cos, − sin, − cos, sin. Puis les suivantes sur cos, − sin, − cos, sin etc.
Et donc une certaine périodicité revient dans les dérivées : dès que l'on dérive 4 fois, on retombe sur sin.
Nous pouvons donc distinguer 4 cas :
- **Si n est de la forme $4k$, $k \in \mathbf{N}$ (autrement dit si n est divisible par 4)** : alors $\sin^{(n)} = \sin$.
- **Si n est de la forme $4k+1$, $k \in \mathbf{N}$** : alors $\sin^{(n)} = \cos$.
- **Si n est de la forme $4k+2$, $k \in \mathbf{N}$** : alors $\sin^{(n)} = -\sin$.
- **Si n est de la forme $4k+3$, $k \in \mathbf{N}$** : alors $\sin^{(n)} = -\cos$.

> **Autrement dit**
> Ce cas correspond à n pair mais non divisible par 4.

Notons que si l'on voulait être totalement convaincant, on pourrait faire une récurrence rapide pour prouver que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\sin^{(4k)} = \sin$.
Et alors $\sin^{(4k+1)} = \left(\sin^{(4k)}\right)' = \sin' = \cos$, puis $\sin^{(4k+2)} = \left(\sin^{(4k+1)}\right)' = -\sin$, etc.
Alternative *: il existe un moyen plus simple de décrire les dérivées successives de* sin, *et qui consiste à remarquer que* $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
Donc $\sin'(x) = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
Donc $\sin''(x) = \sin'\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x + \pi)$.
On prouve alors par récurrence que pour tout $k \in \mathbf{N}$ *et tout* $x \in \mathbf{R}$, $\sin^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$.
Une formule analogue existe pour le cosinus.

> **En physique**
> Un physicien vous dira que dériver, c'est déphaser de $\frac{\pi}{2}$. Autrement dit, un signal sinusoïdal et sa dérivée sont en quadrature de phase.

5. Notons que p est définie sur $\mathbf{R}$ privé de -1 et 1.
Suivons l'indication donnée, et commençons par chercher deux réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, $p(x) = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-1}$.
Pour a et b réels, et $x \neq \pm 1$, on a

$$\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} = \frac{a(x-1) + b(x+1)}{x^2-1} = \frac{(a+b)x + (b-a)}{x^2-1}.$$

Donc en particulier, cette quantité vaut $p(x)$ si et seulement si pour tout $x \neq \pm 1$, $(a+b)x + (b-a) = 1$.
Si de tels a et b existent, alors en prenant $x = 0$ et $x = 2$, on obtient alors $b - a = 1$ et $a + 3b = 1$. Et donc après calculs, $a = -\frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$.

Inversement, pour tout $x \neq \pm 1$, on a

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1}{2}\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{x^2-1}.$$

Donc pour tout $x \neq \pm 1$, $p(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$.

Il nous faut donc calculer les dérivées successives de $p_1 : x \mapsto \frac{1}{x+1}$ et $f_2 : x \mapsto \frac{1}{x-1}$.
Ces deux cas se traitant de la même manière, calculons directement les dérivées successives de $f_c : x \mapsto \frac{1}{x+c}$.
On a alors pour tout $x \neq -c$, $f_c'(x) = -\frac{1}{(x+c)^2}$, $f_c''(x)=\frac{2}{(x+c)^3}$, $f_c^{(3)}(x) = -\frac{6}{(x+c)^4}$.
Et alors une récurrence rapide, similaire à celle de la question 2 prouve que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, et tout $x \neq -c$, $f_c^{(n)}(x) = (-1)^n\frac{n!}{(x+c)^{n+1}}$.
On en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $x \neq \pm 1$,

$$p^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{2}\left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right).$$

Alternative

Plutôt que l'analyse synthèse que nous venons d'effectuer, on peut, si on connaît ce résultat, utiliser le fait que deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients.
Et donc ici les polynômes $(a+b)x+(b-a)$ et 1 sont égaux si et seulement si

$$\begin{cases} a+b=0 \\ b-a=1 \end{cases}$$

6. Rappelons que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $3^x = e^{x\ln 3}$.
Et donc $k'(x) = (\ln 3)e^{x\ln(3)}$, $k''(x) = (\ln 3)^2 e^{x \ln(3)}$, etc, et donc une récurrence facile prouve que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$,

$$k^{(n)}(x) = (\ln 3)^n e^{x\ln(3)} = (\ln 3)^n 3^x.$$

Solution de l'exercice 3.12

Pour $k=0$, on a $f^{(0)}(0) = f(0) = a_0$.
Pour $k=1$, $f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1}$ et donc $f^{(1)}(0) = f'(0) = a_1$.
Pour $k=2$, on a $f''(x) = 2a_2 + 3\times 2a_3x + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2}$ et donc $f^{(2)}(0) = 2a_2$.
En dérivant encore une fois,

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f^{(3)}(x) = 3\times 2a_3 + 4\times 3\times 2a_4x + \cdots + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}$$

et donc $f^{(3)}(0) = 6a_3$.
Prouvons par récurrence sur $k \leqslant n$ que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= k(k-1)\cdots 1a_k + (k+1)k\cdots 2a_{k+1}x + \cdots + n(n-1)\cdots(n-k+1)a_nx^{n-k} \\ &= k!a_k + (k+1)!a_{k+1}x + \frac{(k+2)!}{2!}a_{k+2}x^2 + \cdots + \frac{n!}{(n-k)!}a_nx^{n-k}. \end{aligned}$$

La récurrence a été largement initialisée ci-dessus.
Supposons donc la propriété vraie pour k, et supposons que $k+1 \leqslant n$.
Alors en dérivant $f^{(k)}$, on obtient pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= (k+1)!a_{k+1} + \frac{(k+2)!}{(k+2-k)!}2a_{k+2}x + \cdots + \frac{n!}{(n-k)!}(n-k)a_nx^{n-k-1} \\ &= (k+1)!a_{k+1} + (k+2)!a_{k+2}x + \cdots + \frac{n!}{(n-k-1)!}a_nx^{n-(k+1)} \\ &= (k+1)!a_{k+1} + (k+2)!a_{k+2}x + \cdots + \frac{n!}{(n-(k+1))!}a_nx^{n-(k+1)}. \end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie au rang $k+1$.
En particulier, pour $k \leqslant n$, on a $f^{(k)}(0) = k!a_k$.

Enfin, puisque $f^{(n)}$ est constante (égale à $n!a_n$), $f^{(n+1)}$ est nulle, de même que toutes les dérivées suivantes.
Et donc pour $k > n$, $f^{(k)}(0) = 0$.

Remarque

L'hypothèse de récurrence semble plus forte que le résultat que l'on souhaite au final.
C'est pourtant indispensable, car la connaissance de la valeur de $f^{(k)}(0)$ ne peut pas suffire à déterminer la valeur de $f^{(k+1)}(0)$: la valeur d'une fonction en un point ne suffit pas à déterminer la valeur de sa dérivée en ce même point. Penser par exemple aux fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$, qui valent toutes deux 0 en 0, mais n'ont pas le même nombre dérivé en 0.
Donc on a besoin de connaître $f^{(k)}$ partout (ou au moins sur un petit intervalle contenant 0) pour pouvoir calculer $f^{(k+1)}$ et donc $f^{(k+1)}(0)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.13

La fonction $f : x \mapsto 1 - \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, avec $f'(x) = \dfrac{1}{x^2}$.
Donc au point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a, la tangente à $\mathscr{C}$ est la droite d'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a) = \dfrac{1}{a^2}(x-a) + 1 - \dfrac{1}{a}$.
Et donc le point $(k, 1)$ appartient à cette tangente si et seulement si

$$1 = \frac{1}{a^2}(k-a) + 1 - \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{k}{a^2} = \frac{2}{a} \Leftrightarrow a = \frac{k}{2}.$$

Par conséquent le joueur doit tirer son $k^{\text{ème}}$ missile lorsque son vaisseau se trouve au point de coordonnées $\left(\dfrac{k}{2}, \dfrac{k-2}{k}\right)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.14

Notons que l'équation implique que nécessairement, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x)$ est toujours compris entre $\dfrac{1}{2}$ et 1 (car $f(x) - f(x)^2 \geqslant 0$ si et seulement si $f(x) \in [0,1]$).
On a alors, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}
f(x+2a) &= \frac{1}{2} + \sqrt{f(x+a) - f(x+a)^2} \\
&= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{f(x)-f(x)^2} - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{f(x)-f(x)^2}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \cancel{\sqrt{f(x)-f(x)^2}} - \frac{1}{4} - \cancel{\sqrt{f(x)-f(x)^2}} - f(x) + f(x)^2} \\
&= \frac{1}{2} + \sqrt{f(x)^2 - f(x) + \frac{1}{4}} \\
&= \frac{1}{2} + \sqrt{\left(f(x) - \frac{1}{2}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2} + f(x) - \frac{1}{2} \qquad f(x) - \tfrac{1}{2} \geqslant 0. \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

Et donc ceci prouve que f est $2a$-périodique.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.15

1. Il est bien connu que g tend bien vers 0 en $+\infty$.
De plus, pour deux réels strictement positifs x et y, on a

$$g(xg(y)) = \frac{1}{xg(y)} = \frac{1}{x\frac{1}{y}} = \frac{y}{x} \text{ et } yg(x) = \frac{y}{x}.$$

Donc g est bien solution du problème posé.

2. Si f est une solution, et si α est un point fixe de f, alors $f(\alpha) = \alpha$.
Alors[9], pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f(x\alpha) = \alpha f(x)$.
Donc pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f\left(x\alpha^2\right) = f\left((x\alpha)\alpha\right) = \alpha f(x\alpha) = \alpha^2 f(x)$.
Puis de même, $f\left(x\alpha^3\right) = \alpha f\left(x\alpha^2\right) = \alpha^3 f(x)$.
Une récurrence facile prouve alors que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f\left(x\alpha^n\right) = \alpha^n f(x)$.
Notons que si $\alpha = 1$, cette relation ne nous apprend pas grand chose : $f(x) = f(x)$...
► En revanche, supposons que $\alpha > 1$. Alors $x\alpha^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et donc par hypothèse, $f\left(x\alpha^n\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Mais $f\left(x\alpha^n\right) = \alpha^n f(x)$. Or, f étant supposée à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$, $f(x)$ est non nul, et donc $\alpha^n f(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, d'où une contradiction.
Donc déjà, on ne peut pas avoir $\alpha > 1$.

► Supposons à présent $\alpha < 1$. On a toujours $f\left(x\alpha^n\right) = \alpha^n f(x)$, mais cette fois, $\alpha^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui ne nous avance pas beaucoup...
On a alors $\alpha = f(\alpha) = f(1 \times \alpha) = f(1 f(\alpha)) = \alpha f(1)$.

[9] En prenant $y = \alpha$ dans la relation $(\mathscr{R})$.

Et donc en divisant par α, $f(1) = 1$.
Et alors $1 = f(1) = f\left(\frac{1}{\alpha}\alpha\right) = \alpha f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ de sorte que $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}$.
Et donc $\frac{1}{\alpha}$ est également un point fixe de f.
Or, $\frac{1}{\alpha} > 1$, et nous avons déjà dit qu'il ne pouvait y avoir de points fixes supérieurs strictement à 1.
Donc il n'y a pas non plus de points fixes de f dans $]0,1[$, de sorte que le seul point fixe éventuel de f est 1.

Détails — Nous avons utilisé deux fois la relation $(\mathscr{R})$: une fois avec $x = \frac{1}{\alpha}$ et $y = \alpha$ et une autre fois avec $x = \alpha$ et $y = \frac{1}{\alpha}$.

3. Nous n'avons pas encore dit qu'une fonction f solution au problème posé possède un point fixe ! Mais notons que si $x \in \mathbf{R}_+^*$, alors en prenant $y = x$ dans la relation $(\mathscr{R})$, on a $f(xf(x)) = xf(x)$.
Et donc pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $xf(x)$ est un point fixe de f, qui possède donc au moins un point fixe.
Et d'après la question précédente, ce point fixe ne peut être que 1.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $xf(x) = 1$ et donc $f(x) = \frac{1}{x} = g(x)$.
Et donc g est la seule fonction qui satisfait aux conditions de l'énoncé.

Solution de l'exercice 3.16

La fonction f est dérivable sur $]-\infty, 3[$ et sur $]3, +\infty[$ car quotient de deux fonctions dérivables.
On a alors, pour $x \neq 3$,

$$f'(x) = \frac{2(x-3)-(2x+1)}{(x-3)^2} = -\frac{7}{(x-3)^2} < 0$$

Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty, 3[$ et sur $]3, +\infty[$.

Danger ! — On n'en déduit pas directement que f est décroissante sur son domaine de définition, car celui-ci n'est pas un intervalle !

On a

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}} = 2.$$

Et de même, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}} = 2$.
D'autre part, lorsque x tend vers 3 par valeurs inférieures, alors $2x+1 \to 7$ et $x-3 \to 0$, en restant négatif, de sorte que $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$.
Au contraire, lorsque x tend vers 3 par valeurs supérieures, alors $x - 3 \to 0$ en restant positif et donc $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$.
En appliquant le théorème de la bijection sur $]-\infty, 3[$, où f est continue[10] et strictement décroissante, f réalise une bijection de $]-\infty, 3[$ sur $]-\infty, 2[$.
De même, en appliquant le théorème de la bijection sur $]3, +\infty[$, on montre que f réalise une bijection de $]3, +\infty[$ sur $]2, +\infty[$.
Autrement dit, un réel strictement inférieur à 2 possède un unique antécédent par f dans $]-\infty, 3[$ et aucun dans $]3, +\infty[$.
Inversement, tout réel strictement supérieur à 2 possède un unique antécédent dans $]3, +\infty[$ et aucun dans $]-\infty, 3[$.
Donc tout réel différent de 2 possède un unique antécédent par f dans $\mathbf{R} \setminus \{3\}$.
Ainsi, f réalise une bijection de $]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$ sur $]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$.
Pour déterminer sa bijection réciproque, considérons un réel $y \neq 2$, et résolvons l'équation $f(x) = y$, d'inconnue x.

[10] Car quotient de deux fonctions continues.

Monotonie — Nous avons là un exemple de bijection qui n'est pas monotone.

On a

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-3} = y \\ &\Leftrightarrow 2x+1 = y(x-3) \\ &\Leftrightarrow x(2-y) = -3y-1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1+3y}{y-2}. \end{aligned}$$

Et donc la bijection réciproque de f est $f^{-1}: \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}\setminus\{2\} & \longrightarrow & \mathbf{R}\setminus\{3\} \\ y & \longmapsto & \dfrac{1+3y}{y-2} \end{array}\right.$.

Remarque *: montrer que l'équation $f(x) = y$ possède une et une seule solution suffit à prouver que f est bijective... mais pour cela il faut déjà savoir sur quel ensemble elle est bijective (ce pour quoi nous avons utilisé le théorème de la bijection).*
Cela dit, en essayant de résoudre $f(x) = y$, on réalise rapidement qu'il y a une et une seule solution si $y \neq 2$, et aucune si $y = 2$, donc on retrouve ainsi le fait que l'ensemble image soit $\mathbf{R}\setminus\{2\}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.17

1. Soit $f: \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2\ln(x) \end{array}\right.$. Alors f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ car produit de fonctions dérivables, et
$$f'(x) = 2x\ln(x) + \frac{x^2}{x} = x\left(2\ln(x)+1\right).$$
Et donc $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 2\ln(x)+1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geqslant \dfrac{-1}{2} \Leftrightarrow x \geqslant e^{-1/2}$.
Enfin, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$.

Limite
Notons que la limite de f en 0 fait apparaître une forme indéterminée $0\times -\infty$, et nous ne pouvons conclure qu'à l'aide des résultats de croissances comparées du cours.

Le tableau de variations de f est donc donné par

x	0		$e^{-1/2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 0	↘	$-\frac{e^{-1}}{2}$	↗	$+\infty$

Il est donc clair[11] que f prend des valeurs négatives sur $]0, e^{-1/2}]$, et donc cet intervalle ne saurait contenir de solution à l'équation $f(x) = 1$.
En revanche, sur $]e^{-1/2}, +\infty[$, f est dérivable, elle y est strictement croissante, et donc par le théorème de la bijection, réalise une bijection de $]e^{-1/2}, +\infty[$ sur $\left]-\dfrac{e^{-1}}{2}, +\infty\right[$.
Et par conséquent, il existe un unique $x \in \left]-e^{-1/2}, +\infty\right[$ vérifiant $f(x) = 1$.

[11] Bien entendu, un tableau de variations n'est pas une preuve, mais a-t-on vraiment besoin de tout écrire ? Ici, l'argument clé est que f est décroissante sur $]0, e^{-1/2}]$, et puisque f tend vers 0 en 0, elle prend donc des valeurs négatives sur $]0, e^{-1/2}]$. Mais tout le monde doit pouvoir le comprendre sur le tableau de variation.

2. Pour $x \in \mathbf{R}$, posons $g(x) = f(x) - x$, de sorte que x est un point fixe de f si et seulement si $f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$.
Alors g est dérivable sur $\mathbf{R}$ car somme et produit de fonctions qui le sont, et on a, pour $x \in \mathbf{R}$,
$$g'(x) = -(x+1)e^{-x} + e^{-x} - 1 = -xe^{-x} - 1.$$
Le signe de g' n'est pas évident, donc dérivons une fois de plus : g' est dérivable et pour $x \in \mathbf{R}$, $g''(x) = (x-1)e^{-x}$.
Donc le tableau de variations de g' est donné par

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$	$+\infty$	↘	$-e^{-1}-1$	↗	-1

En appliquant le théorème de la bijection à g', sur $]-\infty, 1]$, on prouve qu'il existe un unique $\alpha \in]-\infty, 1[$ tel que $g'(\alpha) = 0$.
On peut même, bien que ce ne soit pas utile ici, être plus précis : $g'(-1) = e - 1 > 0$, donc $\alpha > -1$.
De même, $g'(0) = -1$, donc $\alpha \in]-1, 0[$.
Nous pouvons donc désormais dresser le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

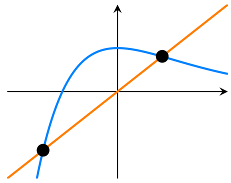


FIGURE 3.2– Les deux points fixes de

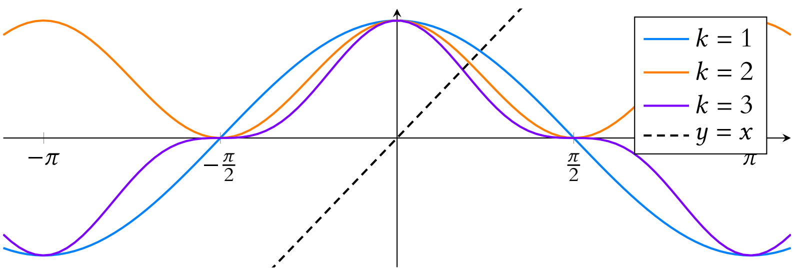
$f : x \mapsto (x+1)e^{-x}$.

Notons que la valeur exacte de $g(\alpha)$ n'est pas connue, mais puisque $g(0) = 1$, alors $g(\alpha) \geqslant g(0) > 0$.
Et donc g est dérivable et strictement croissante sur $]-\infty, \alpha]$: elle réalise une bijection de $]-\infty, \alpha[$ sur $]-\infty, g(\alpha)]$.
En particulier, il existe[12] un unique $x_0 \in]-\infty, \alpha]$ tel que $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$.
De même, g réalise une bijection de $]\alpha, +\infty[$ sur $]-\infty, g(\alpha)[$, et donc il existe un unique $x_2 \in]\alpha, +\infty[$ tel que $g(x_2) = 0 \Leftrightarrow f(x_2) = x_2$.
Au final, f possède deux points fixes, qui sont x_1 et x_2.

[12] Car 0 est dans l'intervalle image.

3. Il s'agit de prouver qu'il existe un unique $x \in \mathbf{R}$ tel que $\cos^k(x) = x$.
Notons dès à présent que $-1 \leqslant \cos^k(x) \leqslant 1$, et donc que l'équation $\cos^k(x) = x$ ne possède pas de solution en dehors de $[-1, 1]$.
De plus, puisque $[-1, 1] \subset \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, pour $x \in [-1, 1]$, $\cos^k(x) \geqslant 0$. Et donc $\cos^k(x) = x$ n'a pas de solution dans $[-1, 0[$. Pour $x \in [0, 1]$, posons alors $f(x) = \cos^k(x) - x$. Un réel $x \in [0, 1]$ est alors un point fixe de $\cos^k$ si et seulement si $f(x) = 0$.
Or, f est dérivable sur $[0, 1]$, avec $f'(x) = -k\sin(x)\cos^{k-1}(x) - 1$.
Toujours car $[0, 1] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, pour $x \in [0, 1]$, $\sin(x) \geqslant 0$.
Et donc $f'(x) < 0$. Par conséquent, f est strictement décroissante sur $[0, 1]$.
Or f est continue sur cet intervalle, et $f(0) = 1$ et $f(1) = \cos^k(1) - 1 < 0$.
Par le théorème de la bijection, il existe donc une unique solution à l'équation $f(x) = 0$, et donc $\cos^k$ possède un unique point fixe.

Détails
Puisque 1 n'est pas un multiple de π, $\cos^k(1) \neq 1$.



SOLUTION DE L'EXERCICE 3.18

1. La fonction f est dérivable[13], et sa dérivée est $f' : x \mapsto 5x^4 - 3x^2 = 5x^2\left(x^2 - \frac{3}{5}\right)$.

Par conséquent, $f'(x)$ est du signe de $x^2 - \frac{3}{5}$.
Et donc le tableau de variations de f est donné par

[13] Comme toute fonction polynomiale.

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{5}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{5}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$		$\searrow$		$f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Mais $f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = -\left(\frac{3}{5}\right)^{5/2} + \left(\frac{3}{5}\right)^{3/2} + 1$.

Mais puisque $0 < \frac{3}{5} < 1$, $\left(\frac{3}{5}\right)^{5/2} < \left(\frac{3}{5}\right)^{3/2}$, et donc $f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) > 1$.

D'autre part, $f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = \left(\frac{3}{5}\right)^{5/2} - \underbrace{\left(\frac{3}{5}\right)^{3/2}}_{<1} + 1 \geqslant \left(\frac{3}{5}\right)^{5/2} > 0.$

Sur l'intervalle $\left]-\infty, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right[$, f est strictement croissante, et réalise donc une bijection de $\left]-\infty, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right[$ sur $\left]-\infty, f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right[$. Puisque 0 appartient à cet intervalle, il existe donc une unique racine de f dans $\left]-\infty, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right[$.

Puisque d'autre part le minimum de f sur $\left]-\sqrt{\frac{3}{5}}, +\infty\right[$ est strictement positif, f ne possède pas de racine sur cet intervalle. Et donc f possède une unique racine.

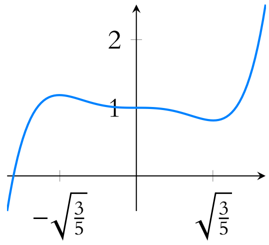


FIGURE 3.3– La fonction f.

2. La fonction g est dérivable, avec $g' : x \mapsto 15x^4 + 30x^2 - 45 = 15(x^4 + 2x^2 - 3)$.
Pour étudier son signe, posons $X = x^2$, de sorte que

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow X^2 + 2X - 3 = 0.$$

Il s'agit donc d'une équation polynomiale de degré 2 en X, dont les racines sont $X_1 = 1$ et $X_2 = -3$.
Et donc on a

$$g'(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow -3 \leqslant x^2 \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Le tableau de variations de g est donc donné par

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g(-1)$	$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

Mais $g(-1) = -3 - 10 + 45 + \lambda = 32 + \lambda$ et $g(1) = 3 + 10 - 45 + \lambda = \lambda - 32$.
Et donc $g(-1) \geqslant 0 \Leftrightarrow \lambda \geqslant -32$ et de même, $g(1) \geqslant 0 \Leftrightarrow \lambda \geqslant 32$.
Distinguons alors plusieurs cas :

► **Si** $\lambda < -32$.
Alors sur $]-\infty, 1]$, g possède un maximum atteint en -1, et qui vaut $g(-1) < 0$.
Et donc pour tout $x \in]-\infty, 1]$, $g(x) < 0$, de sorte que g ne possède pas de racine sur $]-\infty, 1]$.
Sur $]1, +\infty[$, g est strictement croissante, et étant dérivable, par le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]g(1), +\infty[$.
Mais $g(1) < 0$, et donc ce dernier intervalle contient 0 : il existe un unique $\alpha \in]1, +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
Et donc g possède une unique racine.

► **Si** $-32 < \lambda < 32$.
Alors g est strictement croissante sur $]-\infty, -1]$, et donc réalise une bijection de $]-\infty, -1]$ sur $]-\infty, g(-1)]$. Puisque $g(-1) \geqslant 0$, 0 appartient bien à $]-\infty, g(-1)]$ et donc possède un unique antécédent par g dans l'intervalle $]-\infty, -1]$.
Il existe donc un unique $\alpha_1 \in]-\infty, -1]$ tel que $g(\alpha_1) = 0$.
Sur le même principe, on montre qu'il existe une unique racine α_2 de g dans l'intervalle $]-1, 1]$ et une unique racine α_3 dans l'intervalle $]1, +\infty[$.
Et donc g possède trois racines.

► **Si** $\lambda > 32$
Alors $g(-1) > 0$ et $g(1) > 0$, et on montre comme précédemment, que g possède une unique racine, qui se trouve dans l'intervalle $]-\infty, -1]$.

► **Si** $\lambda = 32$.
Alors $g(-1) > 0$ et $g(1) = 32$.

Donc il existe une unique racine sur $]-\infty, -1[$, et 1 est l'unique racine sur $[-1, +\infty[$, de sorte que g possède deux racines.
► **Si $\lambda = -32$.**
Alors $g(-1) = 0$ et $g(1) < 0$, donc g possède une unique racine dans $]1, +\infty[$, et -1 est l'unique racine dans $]-\infty, 1]$, donc g possède deux racines.

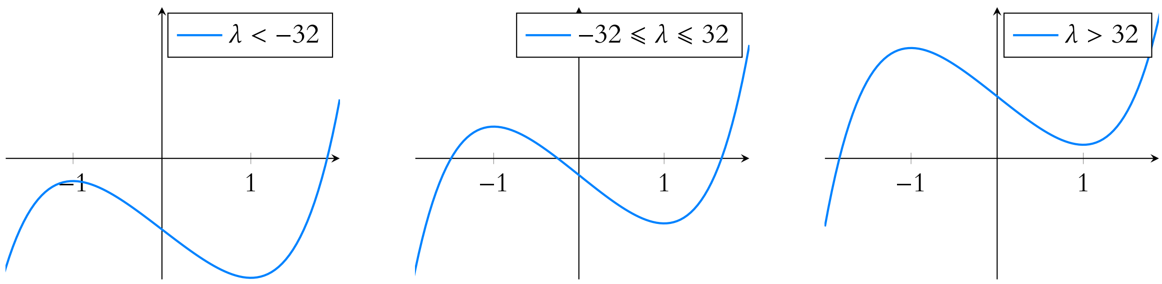


FIGURE 3.4 – Les trois cas possibles.

3. La fonction h est dérivable, et pour tout $x \geqslant 0$, $h'(x) = (n+2)x^{n+1} - 2(n+2)x = (n+2)x(x^n - 2)$.
► **Si n est pair**, notons que h est paire[14] de sorte qu'il suffit de l'étudier sur $\mathbf{R}_+$, intervalle sur lequel h' est du signe de $x^n - 2$.
Alors $x^n - 2 \leqslant 0 \Leftrightarrow -\sqrt[n]{2} \leqslant x \leqslant \sqrt[n]{2}$.
Le tableau de variations de h est donc donné par

x	0		$\sqrt[n]{2}$		$+\infty$
$h'(x)$	$+$	z	$-$	z	$+$
$h(x)$	1	$\searrow$	$h(\sqrt[n]{2})$	$\nearrow$	$+\infty$

[14] La fonction $x \mapsto x^k$ a même parité que k.

Or, $h\left(\sqrt[n]{2}\right) = 2^{\frac{n+2}{n}} - (n+2)2^{\frac{2}{n}} + 1 = 2 \cdot 2^{\frac{2}{n}} - (n+2)2^{\frac{2}{n}} + 1 = 1 - n2^{\frac{n}{2}} < 0$.
Donc deux applications du théorème de la bijection[15] sur $[0, \sqrt[n]{2}]$ (où h est strictement décroissante) et sur $[\sqrt[n]{2}, +\infty[$ (où h est strictement croissante) prouvent que h possède une et une seule racine sur chacun de ces intervalles.
Par parité, elle en a donc une et une seule sur $]-\infty, -\sqrt[n]{2}[$ et une et une seule sur $[-\sqrt[n]{2}, 0]$, et donc possède en tout 4 racines.

[15] Qui s'applique puisque h est continue.

► **Si n est impair**
Alors cette fois, on a $x^n - 2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \sqrt[n]{2}$. Et donc le tableau de variations de h est donné par :

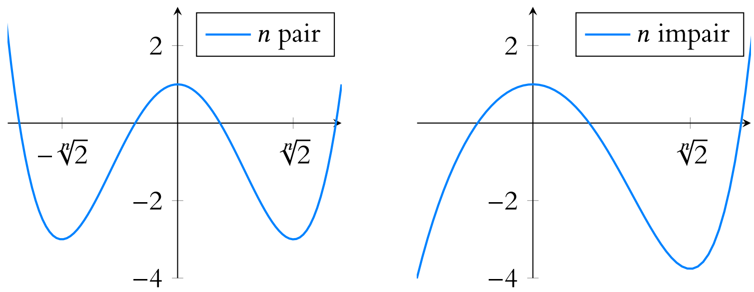
x	$-\infty$		0		$\sqrt[n]{2}$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x^n - 2$		$-$		$-$	0	$+$	
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$h(\sqrt[n]{2})$	$\nearrow$	$+\infty$

Comme précédemment, on a $h\left(\sqrt[n]{2}\right) < 0$.

Quelques précisions tout de même sur les limites en $\pm\infty$: on a

$$h(x) = x^{n+2}\left(1 \underbrace{-(n+2)\frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n+2}}}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0}\right)$$

et donc h a même limite en $\pm\infty$ que x^{n+2}.
Donc en $+\infty$, cette limite est $+\infty$ et en $-\infty$, c'est soit $+\infty$, soit $-\infty$, suivant que n soit pair ou impair.
Comme précédemment, des applications du théorème de la bijection sur $]-\infty, 0]$, $]0, \sqrt[n]{2}[$ et $]\sqrt[n]{2}, +\infty[$, sur lesquels h est strictement monotone et continue, prouvent que h possède une racine sur chacun de ces intervalles.
Et donc qu'elle possède en tout 3 racines réelles.



SOLUTION DE L'EXERCICE 3.19

Il s'agit donc de trouver quelles sont les valeurs que peut prendre la fonction $f : x \mapsto xe^x$, et combien de fois elle prend chaque valeur.
La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$, et $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1)$.
Une exponentielle étant toujours strictement positive, $f'(x)$ est du signe de $x+1$, et donc f est strictement décroissante sur $]-\infty, -1]$ et strictement croissante sur $[-1, +\infty[$.
On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Et lorsque $x \to -\infty$, en posant $X = -x \underset{+\infty\longrightarrow x\longrightarrow -\infty}{\longrightarrow}$, il vient

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{X\to+\infty} -Xe^{-X} = \lim_{X\to+\infty} -\frac{X}{e^X} = 0.$$

Donc le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

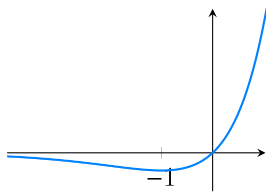


FIGURE 3.5– Le graphe de f.

Par le théorème de la bijection, (qui s'applique car f est continue comme produit de deux fonctions continues) f réalise une bijection strictement décroissante, de $]-\infty, -1]$ sur $]-e^{-1}, 0[$ et une bijection strictement croissante de $]-1, +\infty[$ sur $]-e^{-1}, +\infty[$.
Donc si $y < -e^{-1}$, y ne possède aucun antécédent par f, et donc $xe^x = y$ ne possède pas de solution.
Si $y = -e^{-1}$, alors y possède -1 comme unique antécédent par f.
Si $y \in]-e^{-1}, 0[$, alors y possède deux[16] antécédents par f : un dans $]-\infty, -1]$ et un dans $]-1, +\infty[$.
Donc l'équation $xe^x = y$ possède deux solutions.
Enfin, si $y \geqslant 0$, alors y ne possède aucun antécédent par f dans $]-\infty, -1]$, et un seul dans $]-1, +\infty[$ (qui se trouve dans $[0, +\infty[$). Et donc $xe^x = y$ possède une et une seule solution.
En résumé, l'équation $xe^x = y$ possède :

- aucune solution si $y < -e^{-1}$

[16] Et exactement deux.

- une unique solution si $y = -e^{-1}$ ou $y \geqslant 0$
- deux solutions si $-e^{-1} < y < 0$.

Solution de l'exercice 3.20

1. Notons que f est bien définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, puisque cos ne s'y annule pas.
De plus, cos y est dérivable, donc il en est de même de f, qui par conséquent est continue.
Puisque cos est strictement décroissante et positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, son inverse f y est strictement croissante.
On a $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$, de sorte que par le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $J = [1, +\infty[$.

2. Nous savons que f^{-1} est dérivable en tous les points x de J tels que $f'\left(f^{-1}(x)\right) \neq 0$.
Or, la dérivée de f est $f' : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$ qui, sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, s'annule uniquement en 0.
Puisque $f(0) = 1$, alors $f^{-1}(1) = 0$. Et donc si $x \in J \setminus \{1\}$, on a $f'(f^{-1})(x) \neq 0$, si bien que f^{-1} est dérivable x.
Et alors, pour $x \in J \setminus \{1\} =]1, +\infty[$, on a

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{\cos^2(f^{-1}(x))}{\sin(f^{-1}(x))}.$$

Nous savons[17], que $f\left(f^{-1}(x)\right)(x) = x$. Or

$$f\left(f^{-1}(x)\right)(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{\cos\left(f^{-1}(x)\right)} = x \Leftrightarrow \cos\left(f^{-1}(x)\right) = \frac{1}{x}.$$

Et donc[18],

$$\cos^2\left(f^{-1}(x)\right) + \sin^2\left(f^{-1}(x)\right) = 1 \text{ si bien que } \sin^2\left(f^{-1}(x)\right) = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

Puisque $f^{-1}(x)$ est dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, son sinus est positif, et donc $\sin\left(f^{-1}(x)\right) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$.
On en déduit donc que pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{x^2\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Signe
La positivité est importante pour conclure quant à la monotonie de l'inverse !
Par exemple $x \mapsto x$ est croissante, mais pas de signe constant, et son inverse n'est pas décroissante sur son ensemble de définition ($\mathbf{R}^*$).

[17] Par définition d'une bijection réciproque.

[18] $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

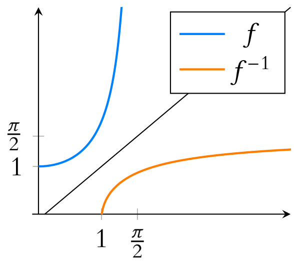


Figure 3.6– Les graphes de f et f^{-1}. On y voit notamment que f^{-1} n'est pas dérivable en 1 (tangente verticale).

Solution de l'exercice 3.21

Avant toute chose, remarquons que I doit être symétrique pour que la notion d'imparité possède bien un sens.
Soit donc $x \in I$. Alors $f\left(-f^{-1}(x)\right) = -f\left(f^{-1}(x)\right) = -x$.
Puisque $f^{-1}(x) \in]-a, a[$, alors $-f^{-1}(x) \in]-a, a[$, et donc $-x$ est bien l'image d'un élément de $]-a, a[$, donc il est dans I.
Ceci prouve donc que I est nécessairement symétrique.

Mieux : nous venons de prouver que $-f^{-1}(x)$ est un antécédent de $-x$ par f. Mais f étant réalisant une bijection de $]-a, a[$ sur I, un tel antécédent est unique, et c'est $f^{-1}(-x)$.
Et donc $f^{-1}(-x) = -f^{-1}(x)$: la fonction f^{-1} est impaire.

Si f est paire, $f\left(\frac{a}{2}\right) = f\left(-\frac{a}{2}\right)$, et donc ce nombre possède deux antécédents distincts par f. Donc f ne réalise pas une bijection de $]-a, a[$ sur I et par conséquent, f^{-1} n'existe pas.