TD 29 : Variables aléatoires finies

► Lois de variables aléatoires, espérance, variance

Exercice 29.1 Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$. Déterminer la loi de $Y = n - X$. F

Exercice 29.2 Un (excellent) biathlète affiche 90% de réussite au tir. PD
Une course comporte 20 tirs, et une saison comporte 18 courses à 20 tirs.
On note X le nombre de 20/20 réalisés par le biathlète au cours d'une saison. Déterminer la loi de X.
Notre biathlète passe 10 ans sur le circuit mondial, et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de saisons où il a réalisé au moins un 20/20. Déterminer la loi de Y.

Exercice 29.3 Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire au hasard une boule, on retire de l'urne toutes les boules qui portent un numéro strictement supérieur, et on remet la boule tirée dans l'urne. PD
On effectue alors un second tirage et on note Y le numéro de la boule obtenue. Déterminer la loi et l'espérance de Y.

Exercice 29.4 **Loi triangulaire** PD
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, 2n-1]\!]$ telle que

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \mathbf{P}(X=i) = \lambda i,\ \forall i \in [\![n+1, 2n-1]\!],\ \mathbf{P}(X=i) = \lambda(2n-i)$$

où λ est un réel fixé.

1. À quelle condition sur λ définit-on ainsi la loi d'une variable aléatoire ?
2. Prouver alors que X et $2n - X$ ont même loi. En déduire $\mathbf{E}(X)$.
3. Calculer $\mathbf{V}(X)$. *On pourra admettre que* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 29.5 Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. PD
On tire simultanément deux boules, on note X le plus grand des deux numéros et Y le plus petit.
Déterminer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{E}(Y)$.

Exercice 29.6 On choisit au hasard (et de manière équiprobable) une permutation σ de $[\![1,n]\!]$. AD
On note alors N le plus grand entier $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(k)$.
Déterminer la loi de la variable aléatoire N.

Exercice 29.7 **De l'intérêt des variables indicatrices** AD
Un ascenseur dessert les k étages d'un immeuble ($k \in \mathbf{N}^*$). Au rez-de-chaussée, n personnes ($n \in \mathbf{N}^*$) entrent dans l'ascenseur, et chacune descend à un étage donné avec probabilité $\frac{1}{k}$ indépendamment du choix de ses voisins. On suppose de plus que personne ne monte dans l'ascenseur aux étages.
On note X_i la variable indicatrice de l'événement «l'ascenseur s'arrête à l'étage i», et X le nombre total d'arrêts de l'ascenseur.

1. Déterminer la loi de X_i.
2. En déduire $\mathbf{E}(X)$.

Exercice 29.8 Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, et soit $Y = \dfrac{1}{1+X}$. Calculer $\mathbf{E}(Y)$. PD

Exercice 29.9 **Le problème des rencontres** AD
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On vide l'urne par des tirages successifs (et sans remise !), et on dit qu'il y a une rencontre une $i^{\text{ème}}$ tirage si celui-ci donne la boule numéro i.
Donner le nombre moyen de rencontres.

Exercice 29.10 Une urne contient b boules blanches et b boules rouges. On y effectue une suite de tirages de la manière suivante : on replace dans l'urne la boule obtenue, en rajoutant b boules de la même couleur. AD
Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.

1. Déterminer les lois de X_1 et X_2.
2. Montrer que X_n suit la loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$.

Exercice 29.11 PD

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1,n]\!]$. Montrer que $\mathbf{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X \geqslant k)$.

2. **Application** : une urne contient n boules numérotées de 1 à n, que l'on tire successivement et sans remise. On note alors X_i la variable aléatoire égale au numéro de la $i^{\text{ème}}$ boule tirée, et on note X la variable aléatoire égale au plus grand entier k tel que $X_1 < X_2 < \cdots < X_k$.
   Déterminer les valeurs de $\mathbf{P}(X \geqslant k)$, et en déduire $\mathbf{E}(X)$.

Exercice 29.12 On dispose de N urnes contenant chacune n boules numérotées de 1 à n. On tire au hasard une boule dans chaque urne et on note Z_n la variable aléatoire égale au plus grand numéro obtenu.
Déterminer $\mathbf{P}(Z_n \leqslant k)$, et en déduire la loi de Z_n.

Exercice 29.13 (Banque CCP) AD
Un téléconseiller effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts. On admet que les appels constituent n expériences indépendantes, et que pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant est égale à $p \in]0,1[$.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X.
2. Le téléconseiller rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'il n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de cette seconde série d'appels.
   (a) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}_{[X=i]}(Y = k)$.
   (b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
   (c) Déterminer alors l'espérance et la variance de Z, ainsi que $\mathbf{E}(Y)$.

Exercice 29.14 Un téléphone contient $n \geqslant 2$ chansons, et fonctionne en mode aléatoire en choisissant à la fin de chaque chanson une nouvelle chanson parmi les n, s'autorisant ainsi à lire plusieurs fois de suite la même chanson. AD
Pour $k \in \mathbf{N}^*$, on note X_k le nombre de chansons différentes qui ont été jouées au moins une fois parmi les k premières chansons.

1. Déterminer le support de X_k.
2. Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, calculer $\mathbf{P}(X_k = 1)$ et $\mathbf{P}(X_k = k)$.
3. Pour $k \in \mathbf{N}^*$, prouver que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{P}(X_{k+1} = i) = \dfrac{i}{n}\mathbf{P}(X_k = i) + \dfrac{n-i+1}{n}\mathbf{P}(X_k = i-1)$.
4. Donner alors une relation entre $\mathbf{E}(X_{k+1})$ et $\mathbf{E}(X_k)$, puis l'expression générale de $\mathbf{E}(X_k)$ en fonction de k et n.

Exercice 29.15 Une loi finie est caractérisée par ses moments D
Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Montrer que si X et Y ont même loi si et seulement si $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{E}\left(X^k\right) = \mathbf{E}\left(Y^k\right)$.
($\star$) Plus généralement, montrer que deux variables aléatoires X et Y sur des univers finis ont même loi si et seulement si $\forall k \in \mathbf{N}$, $\mathbf{E}\left(X^k\right) = \mathbf{E}\left(Y^k\right)$.

▶ Couples et n-uplets de variables aléatoires

Exercice 29.16 Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathbf{P})$, suivant deux lois de Bernoulli. Déterminer la loi de la variable aléatoire XY. F

Exercice 29.17 Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathbf{P})$ soit indépendante de toute variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbf{P})$. PD

Exercice 29.18 Une caractérisation algébrique de l'indépendance AD
Soient X et Y deux variables aléatoires sur Ω. On note $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \ldots, y_p\}$ (où les x_i et les y_i sont deux à deux distincts).
Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, on note $m_{i,j} = \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j])$.
Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si la matrice $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ est de rang 1.

Exercice 29.19 Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p), p \in]0, 1[$. AD
On pose, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $Y_i = X_i X_{i+1}$.
Montrer que Y_i et Y_j sont indépendantes si et seulement si $|i - j| > 1$.

Exercice 29.20 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathbf{P})$, suivant toutes deux la loi uniforme $\mathscr{U}([\![1, n]\!])$. AD

1. On pose $Z = \max(X, Y)$. Pour $k \in \mathbf{N}$, Déterminer $\mathbf{P}(Z \leqslant k)$ en fonction de $\mathbf{P}(X \leqslant k)$. En déduire la loi de Z.
2. Déterminer de même la loi de $U = \min(X, Y)$.
3. Donner la loi de $T = X - Y$.

Exercice 29.21 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbf{P})$, suivant toutes deux la loi uniforme sur $[\![-n, n]\!]$. **PD**

Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose $M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$. Déterminer la probabilité que M soit inversible.

Exercice 29.22 Déterminant aléatoire (Oral Mines MP 2017) **D**

Soit $A = (A_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice dont les coefficients sont des variables aléatoires réelles $A_{i,j}$ centrées, réduites, identiquement distribuées et mutuellement indépendantes sur un univers probabilisé fini $(\Omega, \mathbf{P})$.

Calculer $\mathbf{E}(\det(A))$ et $\mathbf{V}(\det(A))$.

Exercice 29.23 Dés dont la somme suit une loi uniforme **D**

On souhaite prouver qu'il n'est pas possible de truquer deux dés à n faces numérotées 1 à n de telle sorte que leur somme suive la loi uniforme sur $[\![2, 2n]\!]$.

Pour cela, on suppose que deux tels dés existent, et on note X (resp. Y) la variable aléatoire égale au numéro du premier (resp. du second) dé.

On note alors $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $p_k = \mathbf{P}(X = k)$ et $q_k = \mathbf{P}(Y = k)$.

1. Déterminer une relation entre p_1 et q_1, ainsi qu'une relation entre p_n et q_n.
2. Montrer que $p_1 q_n + p_n q_1 \leqslant \dfrac{1}{2n-1}$.
3. Conclure.

Exercice 29.24 Inégalité de Hoeffding (Oral X-ENS PSI) **TD**

Soient $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tels que $a < b$ et soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes sur un même espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbf{P})$, vérifiant : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $a \leqslant X_i \leqslant b$.

On pose alors $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Le but de l'exercice est de démontrer l'inégalité suivante :

$$\forall t > 0,\ \mathbf{P}(S - \mathbf{E}(S) \geqslant t) \leqslant \exp\left(-\frac{2t^2}{n(b-a)^2}\right).$$

1. Soient $c < d$ deux réels et $\Phi : [c, d] \to \mathbf{R}$, continue, et $\mathscr{C}^2$ sur $]c, d[$, telle que $\Phi(c) = \Phi(d) = 0$ et $\forall x \in]c, d[$, $\Phi''(x) > 0$. Montrer que $\Phi \leqslant 0$.
2. En déduire que : $\forall s > 0$, $\forall y \in [c, d]$, $e^{sy} \leqslant \dfrac{c-y}{c-d} e^{sd} + \dfrac{y-d}{c-d} e^{sc}$.
3. Soit Y une variable aléatoire réelle centrée à valeurs dans $[c, d]$, et soit $s > 0$.
   Montrer que $\ln\left(\mathbf{E}\left(e^{sY}\right)\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{c}{c-d} e^{sd} - \dfrac{d}{c-d} e^{sc}\right)$, puis que : $\mathbf{E}\left(e^{sY}\right) \leqslant \exp\left(\dfrac{s^2(d-c)^2}{8}\right)$.
   Indication : remarquer que : $\ln\left(\dfrac{c}{c-d} e^{sd} - \dfrac{d}{c-d} e^{sc}\right) \leqslant \dfrac{s^2(d-c)^2}{8}$.
4. Prouver que $\mathbf{P}(S - \mathbf{E}(S) \geqslant t) \leqslant e^{-st} \prod_{i=1}^{n} \mathbf{E}\left(e^{s(X_i - \mathbf{E}(X_i))}\right)$.
5. En choisissant judicieusement les Y_i, prouver à l'aide de la question 3 que :
   $$\mathbf{P}(S - \mathbf{E}(S) \geqslant t) \leqslant \exp\left(-st + n\frac{s^2(b-a)^2}{8}\right).$$
6. Conclure.

▸ Covariance

Exercice 29.25 Soient X et Y deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathbf{P})$ telles que $X + Y$ et $X - Y$ soient indépendantes. Comparer $\mathbf{V}(X)$ et $\mathbf{V}(Y)$. **PD**

Exercice 29.26 Soit $p \in]0; 1[$ et $n \geqslant 2$. On considère n joueurs de basket-ball qui tirent chacun deux lancers francs. **PD**

On considère qu'à chaque lancer, un joueur a une probabilité p de marquer, et que les deux lancers sont indépendants.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de joueurs ayant marqué leur premier lancer franc, et Z la variable aléatoire égale au nombre de joueurs ayant marqué au moins un lancer franc.

1. Déterminer la loi de X.
2. Montrer que Z suit une loi binomiale, donner son espérance et sa variance.
3. On pose $Y = Z - X$. Que représente la variable aléatoire Y ? Déterminer sa loi.

4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Exercice 29.27 **(Oral Mines-Ponts PC)** PD

On lance deux dés équilibrés à n faces. Soient U_1, U_2 deux variables aléatoires correspondant aux résultats des lancers. On pose $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$.

1. Déterminer la loi et l'espérance de X.
2. Calculer $X + Y$ en fonction de U_1 et U_2. En déduire l'espérance de Y.
3. Calculer de même XY et en déduire $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Exercice 29.28 AD

On lance n dés équilibrés à 6 faces. On note X le nombre de numéros distincts qui sont sortis lors des n lancers, et pour tout $i \in \{1, \dots, 6\}$, on note X_i la variable de Bernoulli qui vaut 1 si et seulement si le numéro i est apparu.

1. Déterminer la loi des variables X_i.
2. Déterminer l'espérance de X.
3. Pour $(i, j) \in \{1, \dots, 6\}^2, i \neq j$, déterminer la loi de $X_i X_j$. En déduire $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$. Les variables aléatoires X_i et X_j sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer la variance de X.

Exercice 29.29 **Loi trinomiale** AD

Soit $n \geqslant 2$, et soient $p, q \in]0, 1[$ tels que $p + q < 1$.

1. Montrer qu'on définit bien une loi conjointe en posant $(k, \ell) \in [\![0, n]\!]^2$,

$$\mathbf{P}([X = k] \cap [Y = \ell]) = \binom{n}{k}\binom{n-k}{\ell} p^k q^\ell (1 - p - q)^{n-k-\ell}.$$

Dans toute la suite, on considère un couple (X, Y) de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée ci-dessus.

2. Déterminer les lois de X et Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathbf{E}(XY)$, puis $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Exercice 29.30 PD

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathbf{P})$, indépendantes, admettant une espérance $M \neq 0$ et une variance $V \neq 0$.

1. Calculer l'espérance et la variance de XY en fonction de M et V.
2. Les variables $X + Y$ et XY sont-elles indépendantes ?

Exercice 29.31 PD

Soit $n \geqslant 2$. On choisit au hasard une permutation σ de $[\![1, n]\!]$, et on note N son nombre de points fixes. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note F_i l'événement «i est un point fixe de σ»

1. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, déterminer $\mathbf{P}(F_i)$ et $\mathbf{P}(F_i \cap F_j)$.
2. Déterminer $\mathbf{E}(N)$.
3. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, calculer $\mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{F_i}, \mathbb{1}_{F_j})$. En déduire $\mathbf{V}(N)$.
4. Prouver que $\mathbf{P}(N \geqslant 4) \leqslant \dfrac{1}{9}$.

Exercice 29.32 **(Oral ENS PSI)** D

Pour n un entier supérieur à 2, soit Z une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathbf{U}_n$ l'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.

Soit θ la variable aléatoire indiquant l'unique argument de Z dans $[0, 2\pi[$, soit X la partie réelle de Z et soit Y sa partie imaginaire.

1. Calculer $\mathbf{E}(\theta)$, $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{E}(Y)$.
2. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

CORRECTION DES EXERCICES DU TD 29

SOLUTION DE L'EXERCICE 29.1

Il suffit de noter que $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$, et que $\forall k \in Y(\Omega)$,

$$\mathbf{P}(Y = k) = \mathbf{P}(n - X = k) = \mathbf{P}(X = n - k) = \binom{n}{n-k} p^{n-k} (1-p)^{n-(n-k)} = \binom{n}{k} (1-p)^k (1-(1-p))^{n-k}.$$

Donc $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n, 1-p)$.
Intuitivement : si X désigne le nombre de succès lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes de proba de succès égale à p, alors $Y = n - X$ représente le nombre d'échecs lors de la répétition de ces n épreuves.
Mais l'échec se produit avec probabilité $1 - p$, donc logiquement, $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n, 1-p)$.
Toutefois, ce raisonnement, qui doit guider l'intuition, ne peut suffire : si l'énoncé nous dit juste que X est une variable aléatoire, il n'y a pas derrière de notion de succès, d'échec ou de répétitions.

SOLUTION DE L'EXERCICE 29.2

Notons $p = 0.9$.
Pour chacune des courses, la probabilité de réaliser un 20/20 est p^{20} (qui vaut environ 0.12). Et donc par indépendance des 18 courses, X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(18, p^{20})$.

Pour chaque saison, la probabilité de n'avoir aucun 20/20 est $\mathbf{P}(X = 0) = \binom{18}{0} \left(p^{20}\right)^0 \left(1 - p^{20}\right)^{18}$.

Et donc la probabilité d'obtenir au moins un 20/20 est $1 - \mathbf{P}(X = 0) = 1 - \left(1 - p^{20}\right)^{18}$ (qui vaut environ 0.096).
Par indépendance des saisons[1], Y suit donc la loi $\mathscr{B}\left(10, 1 - \left(1 - p^{20}\right)^{18}\right)$.

[1] Ce qui est plutôt légitime si les tirs sont déjà supposés indépendants.

SOLUTION DE L'EXERCICE 29.3

Notons X le numéro porté par la boule obtenue au premier tirage. Alors $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, n]\!])$.
Ensuite, la loi de Y sachant $[X = k]$ est une loi uniforme sur $[\![1, k]\!]$. Et donc

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathbf{P}_{[X=k]}(Y = i) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Danger ! Ne pas penser à distinguer les cas peut conduire à écrire $\mathbf{P}_{[X=k]}(Y = i) = \frac{1}{k}$ pour tout i, ce qui change vraiment la donne dans la suite.

Par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{[X = k],\ k \in [\![1, n]\!]\}$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathbf{P}(Y = i) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X = k) \mathbf{P}_{[X=k]}(Y = i) = \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{n} \frac{1}{k}.$$

Et donc

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y) &= \sum_{i=1}^{n} i \mathbf{P}(Y = i) = \sum_{i=1}^{n} i \frac{1}{n} \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{1 \leqslant k \leqslant i \leqslant n} \frac{i}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} i \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{2} = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} k + \frac{1}{2} = \frac{n+3}{4}. \end{aligned}$$

Permutation des sommes.

SOLUTION DE L'EXERCICE 29.4

1. Nous savons que les conditions cherchées sont :
   - ►les probas annoncées sont positives (ce qui est le cas si $\lambda \geqslant 0$)
   - ►leur somme vaut 1.

   Soit encore, à l'aide du changement d'indice $j = 2n - i$,

$$\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=n+1}^{2n-1} (2n - i) = \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} = n^2.$$

   Et donc $\lambda = \frac{1}{n^2}$ est l'unique solution.

2. Commençons par noter que X et $2n-X$ ont toutes les deux $[\![1,2n-1]\!]$ pour support. Pour X, c'est par définition, et pour $2n-X$, il suffit de regarder les valeurs que prend $2n-k$ pour $1 \leqslant k \leqslant 2n-1$.
▸ Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on a
$$\mathbf{P}(2n-X=k) = \mathbf{P}(X=2n-k) = \frac{1}{n^2}(2n-(2n-k)) = \frac{k}{n^2} = \mathbf{P}(X=k).$$
▸ Et de même si $n+1 \leqslant k \leqslant 2n-1$,
$$\mathbf{P}(2n-X=k) = \mathbf{P}(X=2n-k) = \frac{2n-k}{n^2} = \mathbf{P}(X=k).$$
Donc X et $2n-X$ suivent bien la même loi.
On en déduit qu'elles ont mêmes espérances, et donc que
$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(2n-X) \Leftrightarrow 2\mathbf{E}(X) = 2n \Leftrightarrow \mathbf{E}(X) = n.$$

Méthode
Avoir même loi, c'est avoir même support, et pour chaque élément x du support, avoir même probabilité de prendre la valeur x.

3. Utilisons la formule de Huygens : $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left(X^2\right) - \mathbf{E}(X)^2$.
Par le théorème de transfert, on a
$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(X^2\right) &= \sum_{i=1}^{2n-1} i^2\mathbf{P}(X=i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^3 + \frac{1}{n^2}\sum_{i=n+1}^{2n-1} i^2(2n-i)\\ &= \frac{(n+1)^2}{4} + \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n-1}(2n-j)^2 j = \frac{(n+1)^2}{4} + 4\sum_{j=1}^{n-1} j - \frac{4}{n}\sum_{j=1}^{n-1} j^2 + \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n-1} j^3\\ &= \frac{(n+1)^2}{4} + 2n(n-1) - \frac{2(n-1)(2n-1)}{3} + \frac{(n-1)^2}{4}\\ &= \frac{7n^2-1}{6}.\end{aligned}$$
Et donc $\mathbf{V}(X) = \dfrac{7n^2-1}{6} - n^2 = \dfrac{n^2-1}{6}$.

Méthode
Pour calculer une variance à partir de la loi, la formule de Huygens est presque toujours le moyen le plus efficace.

Solution de l'exercice 29.5

Commençons par déterminer les lois de X et Y.
On a $X(\Omega) = [\![2,n]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![1,n-1]\!]$.
Les $\dbinom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ tirages sont équiprobables.
Pour $k \in [\![2,n]\!]$, il y a $k-1$ tirages réalisant $[X=k]$: il faut tirer la boule k, et une boule portant un numéro strictement inférieur (et il y a $k-1$ telles boules).
Donc $\mathbf{P}(X=k) = \dfrac{k-1}{\binom{n}{2}} = \dfrac{2k}{n(n-1)}$.
De même, pour $k \in [\![1,n-1]\!]$, il y a $n-k$ tirages réalisant $[Y=k]$, et donc
$$\mathbf{P}(Y=k) = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}.$$

Méthode
Pour déterminer une loi, il faut commencer par déterminer le support.

Il vient donc
$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X) &= \sum_{k=2}^{n} k\mathbf{P}(X=k) = \sum_{k=2}^{n}\frac{2}{n(n-1)}k^2\\ &= \frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=2}^{n} k(k-1) = \frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n} k(k-1)\\ &= \frac{2}{n(n-1)}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k\right)\\ &= \frac{2}{n(n-1)}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right)\\ &= \frac{2}{n(n-1)}\frac{n(n+1)(2n-2)}{6}\end{aligned}$$

Le terme correspondant à $k=1$ est nul.

$$= \frac{2n+2}{3}.$$

Et de même,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y) &= \sum_{k=1}^{n-1} k\mathbf{P}(Y=k)\\
&= \frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)\\
&= \frac{2}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} k - \frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1} k^2\\
&= n - \frac{2}{n(n-1)}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\\
&= n - \frac{2n-1}{3} = \frac{n+1}{3}.
\end{aligned}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 29.6

Il est évident que N est à valeurs dans $[\![1, N]\!]$.
Il y a en tout $n!$ permutations de $[\![1, n]\!]$, il s'agit donc de trouver combien parmi elles réalisent $[N = k]$.

Mais lorsqu'on essaie de le faire, on réalise assez vite que c'est plutôt difficile, car pour choisir une permutation réalisant $[N = k]$, il faut choisir la valeur de $\sigma(k)$, choisir toutes les valeurs de $\sigma(1), \dots, \sigma(k-1)$ dans l'ordre croissant, mais surtout aller ensuite choisir $\sigma(k+1)$ inférieur à $\sigma(k)$, mais pas égaux aux précédents[2].

[2] Faute de quoi on n'a plus une permutation.

Dénombrons plutôt les issues réalisant $[N \geqslant k]$.
Pour cela il suffit de choisir les k premiers éléments ordonnés par ordre croissant, et une permutation des autres.
Mais une fois choisis les k premiers éléments (et il y a $\binom{n}{k}$ manières de le faire), il n'y a qu'une manière de les ordonner par ordre croissant, et il y a $(n-k)!$ manières de choisir le $(n-k)$-uplet $(\sigma(k+1), \dots, \sigma(n))$.

Donc $\mathbf{P}(N \geqslant k) = \dfrac{n!(n-k)!}{k!(n-k)!}\dfrac{1}{n!} = \dfrac{1}{k!}$.
Et puisque N est à valeurs entières, on a $[N \geqslant k] = [N = k] \cap [N \geqslant k+1]$, si bien que

$$\mathbf{P}(N \geqslant k) = \mathbf{P}(N = k) + \mathbf{P}(N \geqslant k+1) \Leftrightarrow \mathbf{P}(N = k) = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{k}{(k+1)!}.$$

Sauf dans le cas où $k = n$, puisqu'alors $\mathbf{P}(N \geqslant n+1)$ est nul, et donc
$\mathbf{P}(N = n) = \mathbf{P}(N \geqslant n) = \dfrac{1}{n!}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 29.7

1. Soit $i \in [\![1, k]\!]$.
Remarquons que X_i est la variable aléatoire qui vaut 1 si au moins une personne descend à l'étage i et 0 sinon.
Alors la probabilité que personne ne s'arrête à l'étage i est la probabilité que les n personnes aient choisi un étage autre que le numéro i.
Mais pour une personne donnée, la probabilité que ceci se produise est $1 - \dfrac{1}{k}$, et donc par indépendance des choix des n personnes, $\mathbf{P}(X_i = 0) = \left(1 - \dfrac{1}{k}\right)^n$.
On en déduit que $\mathbf{P}(X_i = 1) = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{k}\right)^n$, donc que X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $1 - \left(1 - \dfrac{1}{k}\right)^n$.

Bernoulli
Rappelons qu'une variable indicatrice, par définition ne prend que les valeurs 0 et 1, et donc suit une loi de Bernoulli.

2. Il s'agit de remarquer que $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$.
Les X_i n'étant pas indépendantes, ceci ne nous aiderait pas à déterminer la loi de X, problème qui est difficile. En revanche, l'espérance étant linéaire, il vient tout de suite

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{k}\left(1-\left(1-\frac{1}{k}\right)^n\right) = k\left(1-\left(1-\frac{1}{k}\right)^n\right).$$

Exercice
Vous pouvez tout de même déterminer $\mathbf{P}(X = 1)$.
Calculer $\mathbf{P}(X = 2)$ vous donnera une idée de la complexité combinatoire derrière le calcul de $\mathbf{P}(X = i)$.

Solution de l'exercice 29.8

Y est une variable aléatoire à support fini, donc elle admet une espérance.
De plus, par le théorème de transfert, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k}\mathbf{P}(X=k)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}p^k(1-p)^{n-k}\\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}p^{k-1}(1-p)^{n+1-k}\\
&= \frac{1}{(n+1)p}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}p^k(1-p)^{n+1-k} - (1-p)^{n+1}\right)\\
&= \frac{1}{(n+1)p}\left((p+(1-p))^{n+1}) - (1-p)^{n+1}\right)\\
&= \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}.
\end{aligned}$$

Rappel
On a

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{n-1}.$$

(formule dite «du capitaine»)

Solution de l'exercice 29.9

Encore un exercice où les indicatrices vont nous sauver la mise ! Notons X_i la variable aléatoire qui vaut 1 s'il y a rencontre au $i^{\text{ème}}$ tirage et 0 sinon.
Alors X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n}$, et le nombre total de rencontres est $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
Par linéarité de l'espérance, on a donc $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(X_1) + \cdots + \mathbf{E}(X_n)$.
Reste à déterminer les espérances des X_i. Mais X_i est l'indicatrice de l'événement A_i : «il y a rencontre au $i^{\text{ème}}$ tirage».
Elle suit donc la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbf{P}(A_i)$.
Mais les $n!$ façons de vider l'urne sont toutes équiprobables, et parmi elles, il y en a $(n-1)!$ pour lesquelles il y a rencontre en i. En effet, on peut choisir les numéros des boules obtenues aux autres tirages comme on le souhaite.
Et donc $\mathbf{P}(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$. Donc $\mathbf{E}(X_i) = \mathbf{P}(A_i) = \frac{1}{n}$, de sorte que $\mathbf{E}(X) = n\frac{1}{n} = 1$.

Indicatrices
L'indicatrice $\mathbb{1}_A$ d'un événement A ne prend que les valeurs 0 et 1 donc suit une loi de Bernoulli.
Et puisque $[\mathbb{1}_A = 1] = A$, son paramètre est $\mathbf{P}(A)$.

Solution de l'exercice 29.10

1. Il est évident que $X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$: on avait une chance sur deux d'obtenir une boule blanche au premier tirage.
2. Considérons le système complet d'événements $\{[X_1 = 0], [X_1 = 1]\}$.
Alors, X_2 prend ses valeurs dans $[\![0, 2]\!]$, et

$$\mathbf{P}(X_2 = 0) = \mathbf{P}_{[X_1=0]}(X_2 = 0)\mathbf{P}(X_1 = 0) + \underbrace{\mathbf{P}_{[X_1=1]}(X_2 = 0)}_{=0}\mathbf{P}(X_1 = 1) = \frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

De même, puisque l'événement $[X_2 = 2] \cap [X_1 = 0]$ est impossible, on a

$$\mathbf{P}(X_2 = 2) = \mathbf{P}_{[X_1=1]}(X_2 = 2)\mathbf{P}(X_1 = 1) = \frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

On pourrait de même faire le calcul pour $\mathbf{P}(X_2 = 1)$, mais si nous sommes convaincus que X_2 prend ses valeurs dans $[\![0, 2]\!]$, alors il est évident que

$$\mathbf{P}(X_2 = 1) = 1 - \mathbf{P}(X_2 = 0) - \mathbf{P}(X_2 = 2) = \frac{1}{3}.$$

3. Montrons le résultat par récurrence sur n. Nous venons d'initialiser la récurrence pour $n = 1$ et $n = 2$.
Supposons donc que $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, n]\!])$, et donc que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{P}(X_n = k) = \dfrac{1}{n+1}$.
Si $X_n = k$, alors l'urne contient, à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage $b + kb = b(k+1)$ boules blanches, et au total $2b + nb = b(n+2)$ boules.
Ainsi, $\mathbf{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k+1) = \dfrac{k+1}{n+2}$ et $\mathbf{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k) = \dfrac{n-k+1}{n+2}$.
Et évidemment, pour $i \notin \{k, k+1\}$, $\mathbf{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} = i) = 0$.
Puisque $\{[X_n = i], i \in [\![0, n]\!]\}$ forme un système complet d'événements, on a $\forall k \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_{n+1} = k) &= \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}(X_n = i)\mathbf{P}_{[X_n=i]}(X_{n+1} = k)\\ &= \mathbf{P}(X_{n+1} = k) = \mathbf{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k)\mathbf{P}(X_n = k) + \mathbf{P}_{[X_n=k-1]}(X_{n+1} = k)\\ &= \frac{n-k+1}{n+2}\frac{1}{n+1} + \frac{k}{n+2}\frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+2}.\end{aligned}$$

Enfin, le même raisonnement reste valable pour $\mathbf{P}(X_{n+1} = 0)$ et $\mathbf{P}(X_{n+1} = n+1)$:

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = 0) = \mathbf{P}_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 0)\mathbf{P}(X_n = 0) = \frac{n+1}{n+2}\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+2}.$$
$$\mathbf{P}(X_{n+1} = n+1) = \mathbf{P}_{[X_n=n]}(X_{n+1} = n+1)\mathbf{P}(X_n = n) = \frac{n+1}{n+2}\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+2}.$$

En conclusion, $\forall k \in [\![0, n+1]\!]$,

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = k) = \frac{1}{n+2}.$$

On en déduit que X_{n+1} suit la loi uniforme sur $[\![0, n+1]\!]$.
Commentaires : cet exercice est une très légère variation de l'exercice 14 du TD28, où c'est essentiellement la formulation qui a changé. Je vous laisse en revanche constater que les calculs sont exactement les mêmes dans ces deux exercices.

Attention !
Un système complet d'événements doit recouvrir Ω tout entier. Donc ici, il est hors de question de se limiter à $[X_n = k]$, $[X_n = k-1]$, même si vous sentez bien qu'eux seuls sont pertinents pour la suite, **ils ne forment pas un système complet d'événements.**

Pourquoi les séparer ?
Ces cas sont traités à part pour ne pas avoir eu à écrire par exemple $\mathbf{P}_{[X_n=-1]}(X_{n+1} = 0)$. L'événement $[X_n = -1]$ étant de probabilité nulle, on ne peut pas l'utiliser pour conditionner des probas.

SOLUTION DE L'EXERCICE 29.11

1. Remarquons que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{P}(X \geqslant k) = \displaystyle\sum_{i=k}^{n} \mathbf{P}(X = i)$. Et donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X \geqslant k) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n} \mathbf{P}(X = i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i} \mathbf{P}(X = i)\\ &= \sum_{i=1}^{n} i\mathbf{P}(X = i) = \mathbf{E}(X).\end{aligned}$$

Permutation de sommes.

2. Il y a en tout $n!$ manières de vider l'urne, toutes équiprobables.
Parmi celles-ci, il y en a $\dbinom{n}{k} \times (n-k)!$ qui réalisent $[X \geqslant k]$. En effet, il suffit de choisir quels sont les numéros des k premières boules, il n'y aura alors qu'une seule manière de les ordonner, les $n-k$ boules suivantes pouvant être tirées dans n'importe quel ordre.
Et donc $\mathbf{P}(X \geqslant k) = \dfrac{\binom{n}{k}(n-k)!}{n!} = \dfrac{1}{k!}$.
Il vient donc, par la formule de la question 1 : $\mathbf{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X \geqslant k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$.

Détails
L'événement $[X \geqslant k]$ ne regarde pas ce qui se passe après le $k^{\text{ème}}$ tirage.

SOLUTION DE L'EXERCICE 29.12

Commençons tout de suite par noter que $Z_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
L'événement $[Z_n \leqslant k]$ est réalisé si et seulement si dans chaque urne on a obtenu une boule portant un numéro inférieur ou égal à k, ce qui se produit avec probabilité $\frac{k}{n}$.
Et les tirages dans les différentes urnes étant indépendants, on a donc $\mathbf{P}(Z_n \leqslant k) = \left(\dfrac{k}{n}\right)^N$.

Méthode
Une question du type «déterminer la loi de X» doit nécessairement commencer par la détermination du support de X, afin de savoir pour quelles valeurs de k on aura besoin de calculer $\mathbf{P}(X = x)$. C'est de plus souvent un moyen de détecter des erreurs grossières.

Mais Z_n étant à valeurs entières, $[Z_n \leqslant k] = [Z_n \leqslant k-1] \cup [Z_n = k]$, ces deux événements étant incompatibles.
Donc $\mathbf{P}(Z_n \leqslant k) = \mathbf{P}(Z_n \leqslant k-1) + \mathbf{P}(Z_n = k) \Leftrightarrow \mathbf{P}(Z_n = k) = \mathbf{P}(Z_n \leqslant k) - \mathbf{P}(Z_n \leqslant k-1)$.

Astuce

Cette formule sert régulièrement pour déterminer la loi de variables pour lesquelles il est plus facile d'obtenir $\mathbf{P}(X \leqslant k)$ que $\mathbf{P}(X = k)$. Elle ne vaut que pour des variables à valeurs entières (qui ne peuvent prendre aucune valeur entre $k-1$ et k).

Ensuite, pour tout $k \in Z_n(\Omega)$

$$\mathbf{P}(Z_n = k) = \mathbf{P}(Z_n \leqslant k) - \mathbf{P}(Z_n \leqslant k-1) = \left(\frac{k}{n}\right)^N - \left(\frac{k-1}{n}\right)^N.$$

Solution de l'exercice 29.13

1. C'est évidemment une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

2.a. La loi de Y sachant $[X=i]$ est une loi binomiale $\mathscr{B}(n-i,p)$, et donc

$$\forall k \in \mathbf{N},\ \mathbf{P}_{[X=i]}(Y=k) = \begin{cases} \binom{n-i}{k} p^k (1-p)^{n-i-k} & \text{si } k \leqslant n-i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2.b. Il est clair que $Z(\Omega) = [\![0,n]\!]$, puisque le téléconseiller aura au maximum obtenu une fois chaque personne.
Appliquons alors la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{[X=i], 0 \leqslant i \leqslant n\}$: $\forall k \in [\![0,n]\!]$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Z=k) &= \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}([Z=k]\cap[X=i]) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}([X+Y=k]\cap[X=i]) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbf{P}([Y=k-i]\cap[X=i]) = \sum_{i=0}^{k} \mathbf{P}(X=i)\mathbf{P}_{[X=i]}(Y=k-i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \binom{n-i}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{(n-i)-(k-i)} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{n!}{i!\cancel{(n-i)!}} \frac{\cancel{(n-i)!}}{(k-i)!(n-k)!} p^k (1-p)^{2n-k-i} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{k!}{i!(k-i)!} p^k (1-p)^{2n-k-i} \\
&= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (1-p)^{-i} \\
&= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{1-p}\right)^k}_{=\left(\frac{2-p}{1-p}\right)^k} = \binom{n}{k} (p(2-p))^k (1-p)^{2n-2k} \\
&= \binom{n}{k} (p(2-p))^k \left((1-p)^2\right)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Si on a une loi binomiale, c'est nécessairement la loi $\mathscr{B}(n, p(2-p))$, et il suffit de vérifier que $(1-p)^2 = 1 - p(2-p)$, ce qui est bien le cas.
Donc $Z \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p(2-p))$.

Alternative : vu la formulation des questions, la solution ci-dessus est probablement celle qui était attendue. Proposons-en tout de même une autre, qui explique probablement mieux l'origine de la loi binomiale.
La variable aléatoire $n-Z$ représente le nombre de personnes qui n'ont pas répondu aux deux appels. Or pour chaque personne, la probabilité de ne pas répondre aux deux appels est $(1-p)^2$. Donc $n - Z \hookrightarrow \mathscr{B}(n,(1-p)^2)$.
Ainsi, pour $k \in [\![0,n]\!]$,

$$\mathbf{P}(n-Z=k) = \binom{n}{k} (1-p)^{2k} \left(\underbrace{1-(1-p)^2}_{=p(2-p)}\right)^{n-k}.$$

Et donc
$$\mathbf{P}(Z=k)=\mathbf{P}(n-Z=n-k)=\binom{n}{n-k}(1-p)^{2(n-k)}(p(2-p))^k.$$

2.c. Il suffit d'appliquer des formules du cours :
$$\mathbf{E}(Z)=np(2-p) \text{ et } \mathbf{V}(Z)=np(2-p)(1-p)^2.$$
Enfin, par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}(Y)=\mathbf{E}(Z)-\mathbf{E}(X)=np(1-p)$.

Solution de l'exercice 29.14

1. Dans le pire des cas, une seule chanson a été jouée, et donc $X_k=1$, et au mieux, k chansons distinctes ont été jouées, sauf si $k>n$, auquel cas au maximum n chansons auront été jouées.
Donc $X_k(\Omega)=[\![1,\min(n,k)]\!]$.

2. Pour que X_k soit égal à 1, il faut que la même chanson ait été jouée en boucle, c'est-à-dire qu'à chacune des étapes, la même chanson ait été choisie.
Donc $\mathbf{P}(X_k=1)=n\left(\frac{1}{n}\right)^k=\frac{1}{n^{k-1}}$.
Si $k>n$, alors $[X_k=k]=\emptyset$, et donc $\mathbf{P}(X_k=k)=0$.
Si $k\leqslant n$, alors on peut s'en tirer par dénombrement : il y a n^k façons de jouer k chansons à la suite.
Et pour choisir une playlist formée de chansons différentes, il faut choisir ces chansons (il y en a $\binom{n}{k}$), puis l'ordre dans lequel on les joue (il y a k choix).
Donc $\mathbf{P}(X_k=k)=\frac{\binom{n}{k}k!}{n^k}=\frac{n!}{(n-k)!n^k}$.

Détails
Le facteur n vient du choix de la chanson.

3. Soit $i\in[\![1,n]\!]$. Alors par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{[X_k=j], 1\leqslant j\leqslant \min(k,n)\}$, il vient
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_{k+1}=i)&=\sum_{j=1}^{\min(k,n)}\mathbf{P}(X_k=j)\mathbf{P}_{[X_k=j]}(X_{k+1}=i)\\&=\mathbf{P}(X_k=i)\mathbf{P}_{[X_k=i]}(X_{k+1}=i)+\mathbf{P}(X_k=i-1)\mathbf{P}_{[X_k=i-1]}(X_{k+1}=i).\end{aligned}$$
Mais $\mathbf{P}_{[X_k=i]}(X_{k+1}=i)$ est la probabilité que la $(k+1)^{\text{ème}}$ chanson figure parmi les i déjà jouée, et donc vaut $\frac{i}{n}$.
Et $\mathbf{P}_{[X_k=i-1]}(X_{k+1}=i)$ est la probabilité que la $(k+1)^{\text{ème}}$ chanson figure parmi les $n-i+1$ qui n'ont pas encore été jouées, et donc vaut $\frac{n-i}{n}$.
Donc comme annoncé : $\mathbf{P}(X_{k+1}=i)=\frac{i}{n}\mathbf{P}(X_k=i)+\frac{n-i+1}{n}\mathbf{P}(X_k=i-1)$.
Le cas $i=1$ mériterait un traitement à part, car $\mathbf{P}(X_k=0)=0$, mais on arrive bien entendu au même résultat.

4. Multiplions par i la relation précédente, puis sommons les relations ainsi obtenues pour i allant de 1 à n :
$$\sum_{i=1}^n i\mathbf{P}(X_{k+1}=i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n i^2\mathbf{P}(X_k=i)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n i(n-i+1)\mathbf{P}(X_k=i-1)$$
On a évidemment[3] $\sum_{i=1}^n i\mathbf{P}(X_{k+1}=i)=\mathbf{E}(X_{k+1})$. Et donc

[3] Car X_{k+1} est à valeurs dans $[\![1,n]\!]$.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X_{k+1})&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n i^2\mathbf{P}(X_k=i)+\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)(n-j)\mathbf{P}(X_k=j)\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n i^2\mathbf{P}(X_k=i)+\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}(j+1)(n-j)\mathbf{P}(X_k=j)\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(i^2+(n-1)i-i^2+n)\mathbf{P}(X_k=i)\end{aligned}$$

Le terme $j=n$ de la seconde somme est nul.

$$= \frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n} i\mathbf{P}(X_k = i) + \sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(X_k = i)$$
$$= \frac{n-1}{n}\mathbf{E}(X_k) + 1.$$

La suite $(\mathbf{E}(X_k))_k$ est donc une suite arithmético-géométrique de raison $\frac{n-1}{n}$.
Posons $u_k = \mathbf{E}(X_k)$, de sorte que $u_{k+1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)u_k + 1$.
Nous savons alors que si ℓ est l'unique solution de $\ell = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\ell + 1 \Leftrightarrow \ell = n$, alors il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $u_k = \ell + \lambda\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$.
En particulier, pour $k = 1$, il vient

$$u_1 = 1 = n + \lambda\left(1 - \frac{1}{n}\right)^1 \Leftrightarrow \lambda = -n.$$

Et donc $\forall k \in \mathbf{N}$,

$$\mathbf{E}(X_k) = n - n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k = n\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right).$$

Remarque *: ce résultat ressemble beaucoup à celui de l'exercice 5. Et pour cause, c'est la même situation (sauf qu'au lieu de choisir des étages on choisit des chansons) !*
Et donc nous avons là deux méthodes différentes qui permettent toutes deux de calculer l'espérance. Celle de l'exercice 5 était bien plus efficace, mais celle que nous avons mis en œuvre ici permet également de calculer récursivement (c'est la question 3) la loi de X_k.

Solution de l'exercice 29.15

Prouvons qu'il existe au plus une loi de moments fixés.
Plus précisément, donnons nous $(a_1, \dots, a_n)$ des réels, et prouvons qu'il existe au plus une loi de variable aléatoire X telle que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{E}\left(X^k\right) = a_k$.
Par le théorème de transfert, cela revient à demander que les $\mathbf{P}(X = x_i)$ soient solution de

$$\begin{cases} x_0\mathbf{P}(X = x_0) + x_1\mathbf{P}(X = x_1) + \cdots + x_n\mathbf{P}(X = x_n) & = a_1 \\ x_0^2\mathbf{P}(X = x_0) + x_1^2\mathbf{P}(X = x_1) + \cdots + x_n^2\mathbf{P}(X = x_n) & = a_2 \\ & \vdots \\ x_0^n\mathbf{P}(X = x_0) + x_1^n\mathbf{P}(X = x_1) + \cdots + x_n^n\mathbf{P}(X = x_n) & = a_n \end{cases}$$

Ajoutons en plus la contrainte évidente $\mathbf{P}(X = x_0) + \mathbf{P}(X = x_1) + \cdots + \mathbf{P}(X = x_n) = 1$.
Alors $(\mathbf{P}(X = x_0), \dots, \mathbf{P}(X = x_n))$ est solution d'un système dont la matrice est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}.$$

Or cette matrice est inversible. Ce sera du cours une fois le chapitre de déterminants abordé, mais nous l'avons en fait déjà rencontrée : c'est la matrice dans les bases canoniques de $\mathbf{R}_n[X]$ et $\mathbf{R}^{n+1}$ de l'application $P \mapsto (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n))$, qui est un isomorphisme. Elle est donc inversible.
Donc le système possède une unique solution.
Notons que cette solution n'est pas forcément une loi de probabilité, parce qu'il se pourrait que l'une de ses composantes soit négative, mais en tous cas ceci prouve bien qu'il existe au plus une loi de probabilité qui satisfait les conditions requises.

Plus généralement, soient X et Y deux variables aléatoires telles que $\forall k \in \mathbf{N}$, $\mathbf{E}(X^k) = \mathbf{E}(Y^k)$.
Les deux supports de X et de Y étant finis, l'union des deux supports l'est également.
Soient alors $\{x_0, \dots, x_n\}$ tels que $X(\Omega) \cup Y(\Omega) \subset \{x_0, \dots, x_n\}$. Alors par la question précédente, X et Y ont même loi.

SOLUTION DE L'EXERCICE 29.16

Puisque X et Y ne prennent que les valeurs 0 ou 1, il en est de même de XY, qui suit donc une loi de Bernoulli.
Et alors son paramètre est $\mathbf{P}([XY = 1]) = \mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 1])$.

> **Remarque**
> Ce paramètre est égal au produit des paramètres de X et Y si (et seulement si) X et Y sont indépendantes.

SOLUTION DE L'EXERCICE 29.17

Si X est une variable indépendante de toute variable, alors en particulier elle est indépendante d'elle même.
Nous allons prouver que X suit une loi certaine : supposons par l'absurde qu'il existe $a \neq b$ deux éléments de $X(\Omega)$ tels que $\mathbf{P}(X = a) \neq 0$ et $\mathbf{P}(X = b) \neq 0$.
Alors $\mathbf{P}([X = a] \cap [X = b]) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0$.
Mais cette probabilité doit être égale à $\mathbf{P}(X = a)\mathbf{P}(X = b) \neq 0$.
Donc X ne peut pas prendre deux valeurs distinctes avec probabilités non nulles.
Elle suit donc une loi certaine.

> **Remarque**
> En réalité, il reste un tout petit peu de travail : elle prend **au plus** une valeur avec proba non nulle.
> Mais «la somme des probas vaut 1» (ou plutôt devrais-je dire $\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = x) = 1$) donc elle prend au moins une valeur, donc exactement une, qui est donc avec proba 1.

Inversement, si X suit la loi certaine égale à a, et si Y est une variable aléatoire quelconque, alors pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \cap Y(\Omega)$, on a :

- si $x \neq a$: $[X = x] \cap [Y = y] \subset [X = x]$, et donc
$$\mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]) = 0 = \mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y).$$
- si $x = a$, alors $[Y = y] = ([Y = y] \cap [X = a]) \cup ([Y = y] \cap [X \neq a])$ et donc
$$\mathbf{P}(Y = y) = \mathbf{P}([Y = y] \cap [X = a]) + \mathbf{P}([Y = y] \cap [X \neq a]).$$
Mais[4] $0 \leqslant \mathbf{P}([Y = y] \cap [X \neq a]) \leqslant \mathbf{P}(X \neq a) = 0$, et donc
$$\mathbf{P}([Y = y] \cap [X = a]) = \mathbf{P}(Y = y) = \mathbf{P}(Y = y) \times 1 = \mathbf{P}(Y = y)\mathbf{P}(X = a).$$

[4] Par croissance de la probabilité.

Alternative si X est à valeurs réelles : si X est indépendante de toute variable, alors elle est indépendante d'elle même, et donc $0 = X - X$, et ces deux variables sont indépendantes, de sorte que
$$0 = \mathbf{V}(0) = \mathbf{V}(X - X) = \mathbf{V}(X) + (-1)^2\mathbf{V}(X) = 2\mathbf{V}(X).$$
Donc $\mathbf{V}(X) = 0$, et par conséquent X suit une loi certaine.

> **⚠ Attention !**
> La variance d'une différence n'est pas la différence des variances : le signe moins sort avec un carré.

SOLUTION DE L'EXERCICE 29.18

Supposons X et Y indépendantes. Alors pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$,
$$m_{i,j} = \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = \mathbf{P}(X = x_i)\mathbf{P}(Y = y_j).$$
Ainsi, la $j^{\text{ème}}$ colonne de M est $\mathbf{P}(Y = y_j)\begin{pmatrix} \mathbf{P}(X = x_1) \\ \mathbf{P}(X = x_2) \\ \vdots \\ \mathbf{P}(X = x_n) \end{pmatrix}$.
Donc toutes les colonnes de M sont colinéaires à $\begin{pmatrix} \mathbf{P}(X = x_1) \\ \mathbf{P}(X = x_2) \\ \vdots \\ \mathbf{P}(X = x_n) \end{pmatrix}$, et donc M est de rang au plus 1.
N'étant pas nulle[5], M est de rang exactement 1.

[5] La somme de ses coefficients vaut 1 car
$$\{[X = x_i] \cap [Y = y_j]\}$$
est un système complet d'événements.

Inversement, supposons M de rang 1. L'une de ses colonnes C_i est non nul nulle, et quitte à renuméroter les x_i, supposons que c'est C_1.
Alors pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, il existe λ_j tel que $C_j = \lambda_j C_1$.
D'autre part, on a
$$C_1 + C_2 + \cdots + C_p = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^p \mathbf{P}([X = x_1] \cap [Y = y_j]) \\ \sum_{j=1}^p \mathbf{P}([X = x_2] \cap [Y = y_j]) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^p \mathbf{P}([X = x_n] \cap [Y = y_j]) \end{pmatrix}$$

Mais par la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $\{[Y = y_j],\ 1 \leqslant j \leqslant p\}$, on reconnaît là les probabilités $\mathbf{P}(X = x_1), \dots, \mathbf{P}(X = x_n)$.

Donc $C_1 + \cdots + C_p = (\lambda_1 + \cdots + \lambda_p)C_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X = x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{P}(X = x_n) \end{pmatrix}$. Appelons C_X ce vecteur colonne.

Et donc pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, il existe μ_j (qui est en fait $\dfrac{\lambda_j}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_p}$) tel que $C_j = \mu_j C_X$.

Appliquons cette fois la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{[X = x_i],\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$ de sorte que pour tout $j \in [\![1, p]\!]$,

$$\mathbf{P}(Y = y_j) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = \sum_{i=1}^n \mu_j \mathbf{P}(X = x_i) = \mu_j \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(X = x_i) = \mu_j.$$

Et donc on a bien pour tout (i, j),

$$\mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = \mu_j \mathbf{P}(X = x_i) = \mathbf{P}(Y = y_j)\mathbf{P}(X = x_i).$$

Par conséquent, X et Y sont indépendantes.

Solution de l'exercice 29.19

Notons que la condition $|i - j| > 1$ signifie $i \neq j$ (mais il est évident que si $i = j$, alors Y_i et Y_j ne sont pas indépendantes[6]) et i et j non consécutifs.
Commençons par supposer que $|i - j| > 1$. Alors, les variables X_i, X_{i+1}, X_j et X_{j+1} étant mutuellement indépendantes, par le lemme des coalitions[7], il en est de même de $Y_i = X_i X_{i+1}$ et $Y_j = X_j X_{j+1}$.

Supposons au contraire que $|i - j| \leqslant 1$. Comme on a déjà traité le cas $i = j$, on peut[8] supposer que $j = i + 1$.
Alors $Y_i = X_i X_{i+1}$ et $Y_j = X_{i+1} X_{i+2}$.
Y_i et Y_j suivent des lois de Bernoulli puisqu'elles ne prennent que les valeurs 0 et 1, et de plus, on a

$$\mathbf{P}(Y_i = 1) = \mathbf{P}([X_i = 1] \cap [X_{i+1} = 1]).$$

Par indépendance de X_i et X_{i+1}, il vient alors

$$\mathbf{P}(Y_i = 1) = \mathbf{P}(X_i = 1)\mathbf{P}(X_{i+1} = 1) = p^2$$

et donc Y_i suit la loi de Bernoulli de paramètre p^2. On prouverait le même résultat pour Y_j.
Or

$$\mathbf{P}([Y_i = 1] \cap [Y_j = 1]) = \mathbf{P}([X_i = 1] \cap [X_{i+1} = 1] \cap [X_{i+2} = 1]) = p^3 \neq p^4 = \mathbf{P}(Y_i = 1)\mathbf{P}(Y_j = 1),$$

donc Y_i et Y_j ne sont pas indépendantes.

[6] car elles sont égales !

[7] Qui s'applique car $\{i, i+1\} \cap \{j, j+1\} = \emptyset$.

[8] Quitte à échanger i et j.

Solution de l'exercice 29.20

1. Il est clair que $Z(\Omega) = [\![1, n]\!]$, et pour $k \in Z(\Omega)$,

$$\mathbf{P}(Z \leqslant k) = \mathbf{P}([X \leqslant k] \cap [Y \leqslant k]) = \mathbf{P}(X \leqslant k)\mathbf{P}(Y \leqslant k) = \left(\frac{k}{n}\right)^2.$$

Et alors, puisque Z est à valeurs entières, pour tout k,

$$\mathbf{P}(Z = k) = \mathbf{P}(Z \leqslant k) - \mathbf{P}(Z \leqslant k - 1) = \frac{k^2}{n} - \frac{(k-1)^2}{n^2} = \frac{2k - 1}{n^2}.$$

Remarque

En réalité il y aurait quelques précautions à prendre pour $k = 1$, c'est-à-dire s'assurer que la formule donnée ci-dessus pour $\mathbf{P}(Z \leqslant 0)$ est valable.

2. Sur le même principe, $U(\Omega) = [\![1, n]\!]$, et pour $k \in U(\Omega)$,

$$\mathbf{P}(U \geqslant k) = \mathbf{P}([X \geqslant k] \cap [Y \geqslant k]) = \mathbf{P}(X \geqslant k)\mathbf{P}(Y \geqslant k) = \left(\frac{n - k + 1}{n}\right)^2$$

puis $\mathbf{P}(U = k) = \mathbf{P}(U \geqslant k) - \mathbf{P}(U \geqslant k + 1) = \frac{2n - 2k + 1}{n^2}$.

3. On a $T(\Omega) = [\![-(n-1), n-1]\!]$.
Et alors, pour $k \in [\![T(\Omega)$, par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{[X = i],\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$, on a

$$\mathbf{P}(T = k) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}([X = i] \cap [T = k]) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = i - k]).$$

Et donc par indépendance de X et Y,

$$\mathbf{P}(T = k) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X = i)\mathbf{P}(Y = i - k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(Y = i - k).$$

Danger ! Ne remplaçons pas trop vite $\mathbf{P}(Y = i - k)$ par $\frac{1}{n}$, ceci ne vaudra que si $1 \leqslant i - k \leqslant n$.

► **Si** $k \geqslant 0$, alors $i - k \geqslant 1 \Leftrightarrow i \geqslant k + 1$ et $i - k \leqslant n \Leftrightarrow i \leqslant n + k$, et cette dernière condition est toujours vérifiée.
Donc

$$\mathbf{P}(T = k) = \sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{n - k + 1}{n^2}.$$

► **Si** $k < 0$, alors pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on a bien $i - k \geqslant 1$, et $i - k \leqslant n \Leftrightarrow i \leqslant n + k$. Et donc

$$\mathbf{P}(T = k) = \sum_{i=1}^{n+k} \frac{1}{n^2} = \frac{n + k}{n^2}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 29.21

L'énoncé peut sembler bancal au premier abord, mais l'événement A dont nous cherchons la probabilité est

$$A = \{\omega \in \Omega \mid \det(M(\omega)) \neq 0\}$$

et donc est parfaitement défini. Mais $\det(M(\omega)) \neq 0$ si et seulement si $X^2(\omega) - Y^2(\omega) \neq 0$.
Il s'agit donc de calculer la probabilité $\mathbf{P}\left(X^2 - Y^2 \neq 0\right)$.
Cherchons plutôt la probabilité de l'événement contraire $\mathbf{P}\left(X^2 - Y^2 = 0\right)$.
À cet effet, utilisons le système complet d'événements $\{[X = k],\ -n \leqslant k \leqslant n\}$.
On a alors par la formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}\left(X^2 - Y^2 = 0\right) = \sum_{k=-n}^{n} \mathbf{P}([X = k] \cap [X^2 - Y^2 = 0]) = \sum_{k=-n}^{n} \mathbf{P}([X = k] \cap [Y^2 = k^2]).$$

Puisque X et Y sont indépendantes, par le lemme des coalitions[9] il en est de même de X et Y^2, et donc $\mathbf{P}([X = k] \cap [Y^2 = k^2]) = \mathbf{P}(X = k)\mathbf{P}(Y^2 = k^2)$.

[9] On a ici des «paquets» formés d'une seule variable aléatoire.

Nous savons déjà que $\mathbf{P}(X = k) = \dfrac{1}{2n+1}$.

Et $\mathbf{P}(Y^2 = k^2) = \begin{cases} \mathbf{P}(Y = 0) & \text{si } k = 0 \\ \mathbf{P}(Y = -k) + \mathbf{P}(Y = k) & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2n+1} & \text{si } k = 0 \\ \frac{2}{2n+1} & \text{sinon} \end{cases}.$

Il vient donc

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(X^2 - Y^2 = 0\right) &= \sum_{\substack{k=-n \\ k \neq 0}}^{n} \frac{1}{2n+1} \frac{2}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \frac{1}{2n+1} \\ &= \frac{4n+1}{(2n+1)^2}. \end{aligned}$$

En passant à l'événement contraire, $\mathbf{P}(A) = 1 - \dfrac{4n+1}{(2n+1)^2} = \left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)^2$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 29.22

Attention ! Cet exercice n'est pas abordable pour l'instant, vous pourrez le reprendre une fois le déterminant défini (chapitre 30).

Rappelons que les $A_{i,j}$ étant centrées, on a $\mathbf{E}(A_{i,j}) = 0$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.
On a alors

$$\mathbf{E}(\det A) = \mathbf{E}\left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{\sigma(i), i}\right)$$

$$= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^n A_{\sigma(i),i}\right)$$

Linéarité de l'espérance.

$$= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n \mathbf{E}\left(A_{\sigma(i),i}\right)$$

L'espérance d'un produit de variables indépendantes est le produit de l'espérance.

$$= 0.$$

De même, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(\det(A)) &= \mathbf{V}\left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n A_{\sigma(i),i}\right)\\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathbf{V}\left(\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n A_{\sigma(i),i}\right) + \sum_{\substack{\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_n\\ \sigma\neq\tau}}\operatorname{Cov}\left(\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n A_{\sigma(i),i}, \varepsilon(\tau)\prod_{j=1}^n A_{\tau(j),j}\right).\end{aligned}$$

Pour $\sigma\in\mathfrak{S}_n$, notons alors $A_\sigma = \prod_{i=1}^n A_{\sigma(i),i}$, si bien que

$$\mathbf{V}(\det(A)) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\underbrace{\varepsilon(\sigma)^2}_{=1}\mathbf{V}(A_\sigma) + \sum_{\substack{\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_n\\ \sigma\neq\tau}}\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)\operatorname{Cov}(A_\sigma, A_\tau).$$

Pour $\sigma\neq\tau\in\mathfrak{S}_n$, il existe $k\in[\![1,n]\!]$ tel que $\sigma(k)\neq\tau(k)$, et alors

$$\mathbf{E}\left(A_\sigma, A_\tau\right) = \mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^n A_{\sigma(i),i}\prod_{j=1}^n A_{\tau(j),j}\right) = \mathbf{E}\left(A_{\sigma(k),k}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^n A_{\sigma(i),i}A_{\tau(k),k}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^n A_{\tau(j),j}\right).$$

Mais $A_{\sigma(k),k}$ est indépendante de toutes les autres variables apparaissant dans le produit, donc par le lemme des coalitions, est indépendante du produit, si bien que

$$\mathbf{E}(A_\sigma A_\tau) = \mathbf{E}\left(A_{\sigma(k),k}\right)\mathbf{E}\left(A_{\tau(k),k}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^n A_{\sigma(i),i}A_{\tau(i),i}\right) = 0.$$

On a alors, par la formule de Huygens,

$$\operatorname{Cov}(A_\sigma, A_\tau) = \mathbf{E}\left(A_\sigma A_\tau\right) - \mathbf{E}(A_\sigma)\mathbf{E}(A_\tau) = 0 - 0\times 0 = 0.$$

Et donc il ne reste que

$$\mathbf{V}(\det(A)) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathbf{V}(A_\sigma).$$

Mais pour $\sigma\in\mathfrak{S}_n$, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(A_\sigma) &= \mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^n A_{\sigma(i),i}^2\right) - \mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^n A_{\sigma(i),i}\right)^2\\ &= \prod_{i=1}^n \mathbf{E}\left(A_{\sigma(i),i}^2\right) - \left(\prod_{i=1}^n \mathbf{E}(A_{\sigma(i),i})\right)^2\\ &= \prod_{i=1}^n\underbrace{\left(\mathbf{V}(A_{\sigma(i),i}) + E(A_{\sigma(i),i})^2\right)}_{=1} - \left(\prod_{i=1}^n 0\right)^2\\ &= 1^n = 1.\end{aligned}$$

Détails

Dans les deux cas, on a affaire à l'espérance d'un produit de variables indépendantes (les $A_{\sigma(i),i}^2$ le sont car les $A_{\sigma(i),i}$ le sont).

Et donc au final, $\mathbf{V}(\det(A)) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathbf{V}(A_\sigma) = n!$

Solution de l'exercice 29.23

Nous allons utiliser dans toute la suite une formule qui découle directement des probabilités totales appliquées au système complet d'événements $\{[X=\ell], 1\leqslant\ell\leqslant n\}$:

$$\mathbf{P}(X+Y=k) = \sum_{\ell=1}^n \mathbf{P}([X+Y=k]\cap[X=\ell]) = \sum_{\ell=1}^n \mathbf{P}(X=\ell)\mathbf{P}(Y=k-\ell).$$

1. Notons que X et Y sont indépendantes, et par hypothèse, $X+Y \hookrightarrow \mathscr{U}([\![2, 2n]\!])$.
On a alors,

$$p_1q_1 = \mathbf{P}(X+Y=2) = \frac{1}{2n-1} \text{ et } p_nq_n = \mathbf{P}(X+Y=2n) = \frac{1}{2n-1}.$$

2. Par indépendance de X et Y, on a

$$\frac{1}{2n-1} = \mathbf{P}(X+Y=n+1) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}([X=k]\cap[Y=n-k]) = \sum_{k=1}^{n} p_q q_{n-k}.$$

Et donc
$$\frac{1}{2n-1} = p_1q_n + p_2q_{n-1} + \cdots + p_{n-1}q_2 + p_nq_n \geqslant p_1q_n + p_nq_1.$$

3. Dans l'inégalité qui précède, substituons q_1 par $\dfrac{1}{(2n-1)p_1}$ et q_n par $\dfrac{1}{(2n-1)p_n}$.
Il vient alors
$$\frac{1}{2n-1}\frac{p_1}{p_n} + \frac{1}{2n-1}\frac{p_n}{p_1} \leqslant \frac{1}{2n-1} \Leftrightarrow \frac{p_1}{p_n} + \frac{p_n}{p_1} \leqslant 1.$$
Mais il est classique[10] que pour tout $x > 0$, $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$, contredisant le fait que

$$\frac{p_1}{p_n} + \frac{1}{\frac{p_1}{p_n}} \leqslant 1.$$

On en déduit donc qu'il n'est pas possible de truquer deux dés de sorte que la somme des deux dés suive une loi uniforme.

[10] Étudier la fonction $x \mapsto x + \frac{1}{x}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 29.24

1. Puisque Φ'' est positive, Φ' est croissante strictement sur $]c, d[$.
Mais par le théorème de Rolle, qui s'applique car Φ est continue sur $[c, d]$ et dérivable sur $]c, d[$, il existe $\alpha \in]c, d[$ tel que $\Phi'(\alpha) = 0$.
Donc Φ' est strictement négative sur $]c, \alpha[$ et strictement positive sur $]\alpha, d[$.
Donc Φ est strictement décroissante sur $[c, \alpha]$, avec $\Phi(c) = 0$, donc elle est négative sur $[c, \alpha]$.
Et de même, elle est croissante sur $[\alpha, d]$, avec $\Phi(d) = 0$, donc elle est négative sur $[\alpha, d]$.
2. Utilisons donc la question précédente, en posant, à $s > 0$ fixé

$$\Phi(t) = e^{st} - \frac{c-t}{c-d}e^{ds} - \frac{t-d}{c-d}.$$

Alors elle est évidemment $\mathscr{C}^2$ sur $[c, d]$, avec $\Phi(c) = \Phi(d) = 0$, et $\Phi''(t) = s^2e^{st} > 0$.
3. Rappelons que centrée signifie que $\mathbf{E}(Y) = 0$.
La majoration de la question précédente prouve que

$$e^{sY} \leqslant \frac{c-Y}{c-d}e^{sd} + \frac{Y-d}{c-d}e^{sc}.$$

Et donc par croissance et linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}\left(e^{sY}\right) \leqslant \frac{c}{c-d}e^{sd} - \frac{\mathbf{E}(Y)}{c-d}e^{sd} + \frac{\mathbf{E}(Y)}{c-d}e^{sc} - \frac{d}{c-d}e^{sc} \leqslant \frac{c}{c-d}e^{sd} - \frac{d}{c-d}e^{sc}.$$

Ne reste alors qu'à passer au logarithme pour obtenir l'inégalité demandée.
Si on dispose du résultat en indication[11], alors il suffit de composer par l'exponentielle, mais la difficulté réside donc dans la preuve de l'inégalité annoncée.
J'en donne ici une preuve, elle est sûrement instructive, mais gardons à l'esprit que sans indication, elle était très dure.

[11] Franchement peu utile, on comprend bien qu'il s'agit de démontrer ceci, toute la question est comment le prouver...

À c et d fixés, posons $u = s(d-c)$, de sorte que $s = \dfrac{u}{d-c}$.
Soit alors $\psi(u) = \ln\left(\dfrac{c}{c-d}e^{sd} - \dfrac{d}{c-d}e^{sc}\right) = \ln\left(\dfrac{c}{c-d}e^{ud/(d-c)} - \dfrac{d}{c-d}e^{sc/(d-c)}\right)$.

Soit alors $p = \dfrac{c}{c-d}$, de sorte que $\dfrac{d}{c-d} = \dfrac{c}{c-d} - 1 = p - 1$.
Alors $\psi(u) = \ln\left(pe^{u-up} + (p-1)e^{-up}\right) = \ln(e^{-up}) + \ln(pe^u + (p-1)) = -pu + \ln(pe^u + p - 1)$.
La fonction ψ est évidemment dérivable sur $\mathbf{R}_+$, avec

$$\psi'(u) = -p + \frac{p}{pe^u + p - 1} \text{ et } \psi''(u) = -\frac{p(p-1)e^u}{(pe^u + p - 1)^2}.$$

On a alors notamment $\psi(0) = \psi'(0) = 0$, et donc par la formule de Taylor avec reste intégral, pour tout $u > 0$,

$$\psi(u) = \psi(0) + \psi'(0)u + \int_0^u \psi''(t)(u-t)\,dt = \int_0^u \psi''(t)(u-t)\,dt.$$

Mais en posant $\alpha = pe^t$ et $\beta = p - 1$, on a $\psi''(t) = \dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}$.
Et il est classique que pour $\alpha, \beta > 0$, $(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = (\alpha-\beta)^2 \geqslant 0$, et donc $\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2} \leqslant \dfrac{1}{4}$.
Et donc pour $u > 0$ fixé et tout $t \in [0, u]$, $\psi''(t) \leqslant \dfrac{1}{4}$.
On en déduit que pour tout $u > 0$

$$\psi(u) \leqslant \int_0^u \frac{(u-t)}{4}\,dt \leqslant \left[\frac{-(u-t)^2}{8}\right]_0^u \leqslant \frac{u^2}{8}.$$

Et donc[12] en remplaçant p et s par leurs expressions, pour tout $s > 0$,

$$\ln\left(\frac{c}{c-d}e^{sd} - \frac{d}{c-d}e^{sc}\right) \leqslant \frac{s^2(d-c)^2}{8}.$$

[12] Ouf ! Je ne m'explique pas la raison pour laquelle le sujet d'origine ne comprenait pas de question intermédiaire...

4. On a, pour tout $s > 0$, $[S - \mathbf{E}(S) \geqslant t] = [e^{s(S-\mathbf{E}(S))} \geqslant e^{st}]$. Or la variable aléatoire $e^{s(S-\mathbf{E}(S))}$ est positive[13], donc par l'inégalité de Markov,

$$\mathbf{P}\left(e^{s(S-\mathbf{E}(S))} \geqslant e^{st}\right) \leqslant e^{-st}\mathbf{E}\left(e^{s(S-\mathbf{E}(S))}\right).$$

[13] Hypothèse indispensable dans l'inégalité de Markov.

Mais $e^{s(S-\mathbf{E}(S))} = \displaystyle\prod_{i=1}^n e^{s(X_i-\mathbf{E}(X_i))}$. Et les X_i étant indépendantes, il en est de même[14] des $e^{s(X_i-\mathbf{E}(X_i))}$.
Donc $\mathbf{E}\left(\displaystyle\prod_{i=1}^n e^{s(X_i-\mathbf{E}(X_i))}\right) = \displaystyle\prod_{i=1}^n \mathbf{E}\left(e^{s(X_i-\mathbf{E}(X_i))}\right)$, d'où l'inégalité souhaitée.

[14] C'est le lemme des coalitions.

5. Posons $Y_i = X_i - \mathbf{E}(X_i)$, qui est centrée.
Puisque $\mathbf{E}(X_i) \in [a, b]$, on a $a - \mathbf{E}(X_i) \leqslant X_i - \mathbf{E}(X_i) \leqslant b - \mathbf{E}(X_i)$. Et donc par la question 3, avec $c = a - \mathbf{E}(X_i)$ et $d = b - \mathbf{E}(X_i)$, pour tout $s > 0$,

$$\mathbf{E}\left(e^{sY_i}\right) \leqslant \exp\left(\frac{s^2(b-a)^2}{8}\right).$$

Et donc en reprenant la majoration de la question 4,

$$\mathbf{P}(S - \mathbf{E}(S) \geqslant t) \leqslant e^{-st}\prod_{i=1}^n \exp\left(\frac{s^2(b-a)^2}{8}\right) \leqslant \exp\left(-st + n\frac{(b-a)^2}{8}\right).$$

6. Ne reste plus qu'à remarquer que l'inégalité ainsi obtenue est valable pour tout $s > 0$. Donc à a, b, n, t fixés, nous pouvons faire varier s pour trouver le meilleur majorant possible.
Mais le terme à l'intérieur de l'exponentielle est un polynôme de degré 2 en s, qui atteint son minimum en $s = \dfrac{4t}{ns^2(b-a)^2}$.
Ce minimum vaut donc $-\dfrac{2t^2}{n(b-a)^2}$, ce qui nous conduit bien à l'inégalité demandée :

$$\mathbf{P}(S - \mathbf{E}(S) \geqslant t) \leqslant \exp\left(-\frac{2t^2}{n(b-a)^2}\right).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 29.25

Puisque X et Y sont indépendantes, $\mathrm{Cov}(X+Y, X-Y) = 0$.
Mais par bilinéarité de la covariance,

$$\mathrm{Cov}(X+Y, X-Y) = \mathrm{Cov}(X,X) - \mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(Y,X) - \mathrm{Cov}(Y,Y) = \mathbf{V}(X) - \mathbf{V}(Y)$$

si bien que $\mathbf{V}(X) = \mathbf{V}(Y)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 29.26

1. Chaque joueur marque (ou non) indépendamment des autres, et donc on compte le nombre de succès au cours d'une répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p. Et alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.
2. La probabilité qu'un joueur rate ses deux lancers est $(1-p)^2$ (par indépendance des deux lancers), et donc la probabilité qu'il marque au moins un des deux lancers est $1-(1-p)^2$. On en déduit que $Z \hookrightarrow \mathscr{B}(n, 1-(1-p)^2)$.
3. Y représente le nombre de joueurs ayant marqué uniquement leur second lancer franc. Comme pour chaque joueur, ceci se produit avec probabilité $p(1-p)$, on en déduit que $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p(1-p))$.
4. X et Y ne sont pas indépendantes car on a

$$\mathbf{P}(X=n) \neq 0, \mathbf{P}(Y=n) \neq 0, \text{et pourtant}^{15}\ \mathbf{P}([X=n] \cap [Y=n]) = 0.$$

De plus, on a $\mathbf{V}(Z) = \mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$, ce qui peut encore se réécrire sous la forme

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{V}(X+Y) - \mathbf{V}(X) - \mathbf{V}(Y)\right).$$

Soit encore

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \frac{n}{2}\left((1-p)^2(1-(1-p)^2) - p(1-p) - p(1-p)(1-p(1-p))\right)\\ &= \frac{n}{2p}(1-p)\left((1-p)(2-p) - 1 - (1-p+p^2)\right)\\ &= \frac{n(1-p)p}{2}\left(2-p-2p+p^2-1-1+p-p^2\right)\\ &= -np^2(1-p)\end{aligned}$$

Notons qu'on aurait pu commencer par calculer la covariance, constater qu'elle est non nulle, et en déduire que X et Y ne sont pas indépendantes.

[15] En effet, on ne peut avoir à la fois les n joueurs ayant marqué leur premier lancer franc et ayant manqué le premier et réussi le second.

Astuce
Cette formule est toujours vraie, et facile à retrouver. Elle permet de calculer la covariance si l'on connait $\mathbf{V}(X+Y)$, $\mathbf{V}(X)$ et $\mathbf{V}(Y)$.

Signe
Notons qu'on a une covariance négative. Cela signifie qu'en moyenne, quand X augmente, Y a tendance à diminuer, et vice-versa. Cela semble conforme à l'intuition : plus le nombre de joueurs marquant leur premier panier est important, plus le nombre de joueurs manquant le premier et réussiant le second est faible.

SOLUTION DE L'EXERCICE 29.27

1. Il est évident que U_1 et U_2 suivent toutes deux la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.
Donc X est à valeurs dans $[\![1,n]\!]$. Et pour $k \in [\![1,n]\!]$, on a $[X \geqslant k] = [U_1 \geqslant k] \cap [U_2 \geqslant k]$.
Par indépendance de U_1 et U_2, il vient donc

$$\mathbf{P}(X \geqslant k) = \mathbf{P}(U_1 \geqslant k)\mathbf{P}(U_2 \geqslant k) = \left(\frac{n+1-k}{n}\right)^2.$$

Puis $\mathbf{P}(X=k) = \mathbf{P}(X \geqslant k) - \mathbf{P}(X \geqslant k+1) = \dfrac{2n-2k+1}{n^2}$.
Et donc

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X) &= \sum_{k=1}^n k\mathbf{P}(X=k) = \sum_{k=1}^n k\frac{2n-2k+1}{n^2}\\ &= \frac{2n+1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{2}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{3n}\\ &= (n+1)\frac{3(2n+1)-2(2n+1)}{6n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}.\end{aligned}$$

Remarque : si on connait la formule $\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(X \geqslant k)$, l'espérance se calcule plus facilement.

2. Des deux variables X et Y, l'une représente le dé qui a donné le plus grand résultat, l'autre représente l'autre dé, et donc $X + Y = U_1 + U_2$.
Par linéarité de l'espérance, on a donc $\mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(U_1) + \mathbf{E}(U_2)$ soit
$$\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(U_1) + \mathbf{E}(U_2) - \mathbf{E}(X) = 2\frac{n+1}{2} - \frac{(n+1)(2n+1)}{6n} = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}.$$

> **Attention !** On ne dit pas que l'une des deux variables U_1 ou U_2 est égale à X. Mais que pour chaque $\omega \in \Omega$, $X(\omega)$ est égal soit à $U_1(\omega)$, soit à $U_2(\omega)$.

3. Sur le même principe, $XY = U_1U_2$, et par indépendance de U_1 et U_2,
$$\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(U_1)\mathbf{E}(U_2) = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2.$$
Il vient alors, par la formule de Huygens,
$$\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = \frac{(n+1)^2}{4} - \frac{(n+1)^2(4n-1)(2n+1)}{36n^2} = \frac{(n^2-1)^2}{36n^2}.$$

Solution de l'exercice 29.28

1. X_i est une variable de Bernoulli car elle ne prend que les valeurs 0 et 1. De plus, $[X_i = 0]$ si et seulement si tous les dés ont donné un nombre différent de i, ce qui se produit avec probabilité $\left(\frac{5}{6}\right)^n$.
Donc X_i suit une loi de Bernoulli $\mathscr{B}\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)$.

> **Astuce** Pour une loi de Bernoulli, il suffit de déterminer l'un des deux nombres $\mathbf{P}(X = 0)$ et $\mathbf{P}(X = 1)$ pour déterminer le paramètre. Autant choisir celui qui est le plus facile à obtenir !

2. On a $X = \sum_{i=1}^{6} X_i$ et donc par linéarité de l'espérance,
$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{6} \mathbf{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{6} 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n = 6\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right).$$

3. Notons que X_iX_j est encore une variable de Bernoulli car elle ne peut prendre que les valeurs 0 et 1. De plus, $[X_iX_j = 1]$ si et seulement si les numéros i et j sont apparus au cours des n lancers. En passant à l'événement contraire, on a donc
$$\begin{aligned}\mathbf{P}([X_iX_j = 0]) &= \mathbf{P}([X_i = 0] \cup [X_j = 0])\\ &= \mathbf{P}(X_i = 0) + \mathbf{P}(X_j = 0) - \mathbf{P}([X_i = 0] \cap [X_j = 0])\\ &= 2\left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n.\end{aligned}$$

> **Explication** Si $X_i = 0$ et $X_j = 0$, alors les différents lancers n'ont donné que des faces portant des numéros différents de i et de j, ce qui arrive à chaque lancer avec probabilité $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

On en déduit que X_iX_j suit une loi de Bernoulli $\mathscr{B}\left(1 - 2\left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$ et donc
$$\mathbf{E}(X_iX_j) = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2\left(\frac{5}{6}\right)^n.$$
Par la formule de Huygens, on en déduit que la covariance $\operatorname{Cov}(X_i, X_j)$ vaut
$$\operatorname{Cov}(X_i, X_j) = \mathbf{E}(X_iX_j) - \mathbf{E}(X_i)\mathbf{E}(X_j) = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2\left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{25}{36}\right)^n.$$
En particulier, cette covariance est non nulle, et donc X_i et X_j ne sont pas indépendantes.

> **Intuition** Cette non indépendance est intuitive... mais pas trop. L'idée est que si on sait que i n'est pas sorti, alors j a plus de chances d'être sorti (puisque tous les dés ont donné un résultat parmi les cinq faces qui ne sont pas égales à j).

4. On a
$$\begin{aligned}\mathbf{V}(Y) = \mathbf{V}(X_1 + \cdots + X_6) &= \sum_{i=1}^{6} \mathbf{V}(X_i) + 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 6} \operatorname{Cov}(X_i, X_j)\\ &= 6\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)\left(\frac{5}{6}\right)^n + 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 6}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{25}{36}\right)^n\right)\\ &= 6\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)\left(\frac{5}{6}\right)^n + 30\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{25}{36}\right)^n\right).\end{aligned}$$

> **Détails** Le nombre de termes de la somme est le nombre de parties à deux éléments de $[\![1, 6]\!]$.

Solution de l'exercice 29.29

1. Il s'agit donc de prouver que les n^2 nombres donnés par l'énoncé sont positifs, et que leur somme vaut 1.
La positivité ne pose pas de difficulté.
Pour la somme, n'oublions pas que $\binom{n-k}{\ell} = 0$ si $\ell > n-k$. On a donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n-k}{\ell}p^k q^\ell (1-p-q)^{n-k-\ell} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k\sum_{\ell=0}^{n-k}\binom{n-k}{\ell}q^\ell(1-p-q)^{n-k-\ell}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\ &= (p+1-p)^n = 1.\end{aligned}$$

Loi conjointe
La loi conjointe d'un couple n'est rien d'autre que la loi de la variable aléatoire à valeurs dans $[\![0,n]\!]^2$.
Il s'agit donc ici d'appliquer la proposition 28.11 du cours pour une variable à valeurs dans $[\![0,n]\!]^2$.

Binôme de Newton.

Re-binôme.

2. Puisque la variable aléatoire Y prend ses valeurs dans $[\![0,n]\!]$, $\{[Y=\ell], \ell \in [\![0,n]\!]\}$ est un système complet d'événements.
Ainsi, pour $k \in [\![0,n]\!]$, par la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X=k) &= \sum_{\ell=0}^{n}\mathbf{P}([X=k]\cap[Y=\ell])\\ &= \sum_{\ell=0}^{n-k}\mathbf{P}([X=k]\cap[Y=\ell])\\ &= \sum_{\ell=0}^{n-k}\frac{n!}{k!\ell!(n-k-\ell)!}p^k q^\ell r^{n-k-\ell}\\ &= \binom{n}{k}p^k\sum_{\ell=0}^{n-k}\binom{n-k}{\ell}q^\ell r^{n-k-\ell}\\ &= \binom{n}{k}p^k(q+r)^{n-k}\\ &= \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.\end{aligned}$$

Explication
Si $k+\ell > n \Leftrightarrow \ell > n-k$, alors
$$\mathbf{P}([X=k]\cap[Y=\ell]) = 0.$$

Ainsi, X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. On montrerait de même[16] que Y suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,q)$.

[16] En notant tout de même que
$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{\ell} = \binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{k}$$
ce qui se prouve en revenant aux factorielles.

3. On a $\mathbf{P}([X=n]\cap[Y=n]) = 0$, alors que $\mathbf{P}(X=n)$ et $\mathbf{P}(Y=n)$ sont non nuls, donc X et Y ne sont pas indépendantes.

4. Par le théorème de transfert, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(XY) &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n-k}k\ell\,\mathbf{P}([X=k]\cap[Y=\ell])\\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n-k}k\ell\binom{n}{k}\binom{n-k}{\ell}p^k q^\ell(1-p-q)^{n-k-\ell}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n-k}k\ell\binom{n}{k}\binom{n-k}{\ell}p^k q^\ell(1-p-q)^{n-k-\ell}\\ &= \sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}\sum_{\ell=1}^{n-k}(n-k)\binom{n-k-1}{\ell-1}p^k q^\ell(1-p-q)^{n-k-\ell}\\ &= \sum_{k=1}^{n}k(n-k)\binom{n}{k}p^k q\sum_{\ell'=0}^{n-k-1}\binom{n-k-1}{\ell'}q^{\ell'}(1-p-q)^{n-k-1-\ell'}\\ &= \sum_{k=1}^{n}k(n-k)\binom{n}{k}p^k q(1-p)^{n-k-1}\\ &= \frac{q}{1-p}\sum_{k=0}^{n}k(n-k)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.\end{aligned}$$

Si k ou ℓ est nul, le terme correspondant l'est aussi.

Binôme.

À ce stade, il est possible, mais un peu fastidieux de calculer directement les sommes. Notons plutôt que

$$\mathbf{E}(XY) = \frac{q}{1-p}\left(n\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\right).$$

Mais ces deux sommes nous sont familières : la première est $\mathbf{E}(X)$, la seconde est $\mathbf{E}(X^2)$. Et par la formule de Huygens, $\mathbf{E}(X^2) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{E}(X)^2 = np(1-p) + n^2p^2$. Donc

$$\mathbf{E}(XY) = \frac{q}{1-p}\left(n^2p - np(1-p) - n^2p^2\right) = n(n-1)pq.$$

Et donc enfin, $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = n(n-1)pq - n^2pq = -npq$.
Commentaires *: ces lois se rencontrent en fait lors de répétitions d'une expérience à trois issues*[17]*, où X compterait le nombre de fois où l'on a obtenue la première issue, de probabilité p, lors de n répétitions, et où Y compte le nombre de fois où on obtient la seconde issue, de probabilité q lors des mêmes répétitions.*
On peut alors prouver que la loi de (X,Y) est celle ci-dessus, et on comprend alors mieux l'origine des binomiales, ainsi que le fait que la covariance soit négative (plus on a de 1, moins on a de 2).

[17] D'où le nom de loi trinomiale.

Solution de l'exercice 29.30

1. Puisque X et Y sont indépendantes, on a $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = M^2$.
De plus, par la formule de Huygens, on a $\mathbf{E}(X^2) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{E}(X)^2 = V + M^2$ et de même $\mathbf{E}(Y^2) = V + M^2$.
Et alors, X^2 et Y^2 étant indépendantes[18], il vient

$$\mathbf{E}((XY)^2) = \mathbf{E}(X^2)\mathbf{E}(Y^2) = (V+M^2)^2.$$

Alors, toujours par la formule de Huygens,

$$\mathbf{V}(XY) = \mathbf{E}((XY)^2) - \mathbf{E}(XY)^2 = (V+M^2)^2 - (M^2)^2 = V^2 + 2VM^2 + M^4 - M^4 = V^2 + 2VM^2.$$

[18] Car X et Y le sont.

2. D'après la formule de Huygens[19], on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X+Y, XY) &= \mathbf{E}(X+Y(XY)) - \mathbf{E}(X+Y)\mathbf{E}(XY)\\ &= \mathbf{E}(X^2Y) + \mathbf{E}(XY^2) - (\mathbf{E}(X)+\mathbf{E}(Y))\mathbf{E}(XY)\\ &= \mathbf{E}(X^2)\mathbf{E}(Y) + \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y^2) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) - \mathbf{E}(Y)\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)\\ &= (V+M^2)M + M(V+M^2) - M^3 - M^3 = 2MV.\end{aligned}$$

X^2 et Y sont indépendantes, de même que X et Y^2.

Et donc $\mathrm{Cov}(X+Y, XY) \neq 0$, de sorte que XY et $X+Y$ ne sont pas indépendantes.

[19] Celle pour la covariance.

Solution de l'exercice 29.31

1. Il y a autant de permutations de $[\![1,n]\!]$ possédant i pour point fixe que de permutations de $[\![1,n]\!] \setminus \{i\}$, c'est-à-dire $n-1$.
Et donc $\mathbf{P}(F_i) = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$.

De même, pour $i \neq j$, il y a autant de permutations de $[\![1,n]\!]$ possédant i et j pour point fixe que de permutations de $[\![1,n]\!] \setminus \{i,j\}$, donc $(n-2)!$.
Et donc $\mathbf{P}(F_i \cap F_j) = \dfrac{(n-2)!}{n!} = \dfrac{1}{n(n-1)}$.

2. Ici la loi de N serait trop difficile à obtenir, car il est délicat de dénombrer le nombre de permutations de $[\![1,n]\!]$ possédant exactement k points fixes.
En revanche, on peut remarquer que $N = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{F_i}$.
Or par ce qui précède, les $\mathbb{1}_{F_i}$ suivent toutes la loi $\mathscr{B}\left(\frac{1}{n}\right)$, si bien que $\mathbf{E}\left(\mathbb{1}_{F_i}\right) = \frac{1}{n}$.
Et alors par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(N) = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}\left(\mathbb{1}_{F_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n} = 1.$$

En moyenne, une permutation de $[\![1,n]\!]$ possède un seul point fixe.

Remarque
Cela peut paraître peu au premier abord, mais il ne faut pas oublier que beaucoup de permutations n'ont pas de point fixe, et font donc considérablement baisser l'espérance de N.

3. On a donc

$$\mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{F_i}, \mathbb{1}_{F_j}) = \mathbf{E}(\mathbb{1}_{F_i}\mathbb{1}_{F_j}) - \mathbf{E}(\mathbb{1}_{F_i})\mathbf{E}(\mathbb{1}_{F_j}) = \mathbf{E}(\mathbb{1}_{F_i}\mathbb{1}_{F_j}) - \frac{1}{n^2}.$$

Si $i = j$, on a évidemment $\mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{F_i}, \mathbb{1}_{F_j}) = \mathbf{V}(\mathbb{1}_{F_i}) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{n^2}$.
Si $i \neq j$, alors la variable $\mathbb{1}_{F_i}\mathbb{1}_{F_j}$ vaut 1 si et seulement si F_i et F_j sont simultanément réalisés. Autrement dit, il s'agit de $\mathbb{1}_{F_i \cap F_j}$, qui suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n(n-1)}$ d'après la question 1.
Et donc $\mathbf{E}(\mathbb{1}_{F_i}\ \mathbb{1}_{F_j}) = \frac{1}{n(n-1)}$.
On en déduit que $\mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{F_i}, \mathbb{1}_{F_j}) = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2(n-1)}$.

Et alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(N) = \mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{F_i}\right) &= \sum_{i=1}^n \mathbf{V}(\mathbb{1}_{F_i}) + 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{F_i}, \mathbb{1}_{F_j}) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{n-1}{n^2} + 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{1}{n^2(n-1)} \\
&= \frac{n-1}{n} + 2\binom{n}{2}\frac{1}{n^2(n-1)} \\
&= \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} = 1.
\end{aligned}$$

4. Par l'inégalité de Markov[20], on a

$$\mathbf{P}(N \geqslant 4) \leqslant \frac{\mathbf{E}(N)}{4} \leqslant \frac{1}{4}.$$

[20] N est bien une variable aléatoire positive.

Ce n'est pas la majoration attendue, Markov est trop grossière...

Notons plutôt que $[N \geqslant 4] = [N - 1 \geqslant 3] \subset [|N-1| \geqslant 3]$.
Or par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbf{P}(|N-1| \geqslant 3) = \mathbf{P}(|N - \mathbf{E}(N)| \geqslant 3) \leqslant \frac{\mathbf{V}(N)}{3^2} \leqslant \frac{1}{9}.$$

Et donc par croissance de la probabilité,

$$\mathbf{P}(N \geqslant 4) \leqslant \mathbf{P}(|N-1| \geqslant 3) \leqslant \frac{1}{9}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 29.32

On sent bien qu'il va être désagréable de travailler avec Z, tout simplement car on ne sait pas comment l'écrire.
Mais nous savons que $\mathbf{U}_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ 0 \leqslant k \leqslant n-1\right\}$.
Notons U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![0, n-1]\!]$. Alors $Z' = e^{\frac{2i\pi}{n}U}$ suit la même loi que Z.
Et par conséquent, pour toute application f définie sur $\mathbf{U}_n$, $f(Z)$ et $f(Z')$ ont même loi.
Donc ceci vaut en particulier si f est la fonction «module dans $[0, 2\pi[$, la fonction partie réelle, la fonction partie imaginaire.
Mieux : cela vaut aussi pour la fonction $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ z & \longmapsto & (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)) \end{array}\right.$, de sorte que les lois conjointes de (X, Y) et de $(\mathrm{Re}(Z'), \mathrm{Im}(Z'))$ sont les mêmes.

Remarque
On a ici choisi de voir un couple de variables aléatoires réelles comme une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{R}^2$.
Le fait que la loi conjointe soit la même sera important lorsqu'on en viendra à l'étude de la covariance, qui dépend de la loi conjointe, et pas seulement de marginales.

1. L'argument dans $[0, 2\pi[$ de Z' est $\frac{2\pi}{n}U$, et donc puisque θ a même loi que $\frac{2\pi}{n}U$,
$\mathbf{E}(\theta) = \frac{2\pi}{n}\mathbf{E}(U) = \pi$.

Par ailleurs, $\mathrm{Re}(Z') = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}U\right)$.
Par le théorème de transfert, on a donc

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}U\right)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\frac{2k\pi}{n}\mathbf{P}(U=k) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right).$$

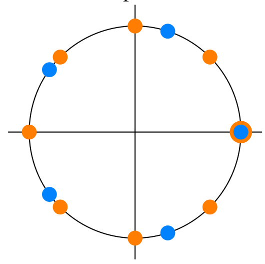
Sur le même principe, $\mathbf{E}(Y) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$.
Et alors

$$\mathbf{E}(X) + i\mathbf{E}(Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k = 0.$$

Et donc $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y) = 0$.

Prévisible

Placer les racines de l'unité sur un cercle trigonométrique permet d'anticiper ce résultat.
Peut-être que pour en être totalement convaincu, il est plus sage de faire une figure avec une valeur paire de n et une valeur impaire.



La seule qui n'est pas complètement évidente est $\mathbf{E}(X)$ dans le cas où n est impair (ici en bleu).

2. Avec nos notations, on a cette fois $XY = \cos\left(\frac{2\pi}{n}U\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}U\right) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{4\pi}{n}U\right)$.
Et donc, toujours par le théorème de transfert,

$$\mathbf{E}(XY) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right)$$

dont on prouve par des arguments similaires à ceux employés ci-dessus qu'elle est nulle.
Et donc par la formule de Huygens, $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = 0$.

3. Ce type de question sent le piège à plein nez, et on attend bien entendu de voir si vous allez ou non dire que les variables sont indépendantes *car la covariance est nulle*[21].
Bref, les variables sont non corrélées, mais il faut encore travailler pour déterminer si elles sont ou non indépendantes.
Mais, pour $n \geqslant 3$, prenons $x = 1$ et $y = \sin\frac{2\pi}{n}$, de sorte que $\mathbf{P}(X = x) \neq 0$ et $\mathbf{P}(Y = y) \neq 0$.
Mais $x + iy$ n'est pas dans $\mathbf{U}_n$, donc $\mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbf{P}(Z = x + iy) = 0$.
Donc X et Y ne sont pas indépendantes.
En revanche, ce raisonnement ne tient plus pour $n = 2$, mais alors Y est une variable constante égale à 0, et donc indépendante de toute autre variable aléatoire (et en particulier de X).

[21] Rappelons que c'est la réciproque qui est vraie.