# TD 28 : Séries numériques

## ▸ Études de convergence

**Exercice 28.1** Déterminer la nature des séries de terme général $u_n$ dans chacun des cas suivants : PD

1. $u_n = \dfrac{1}{n(n+\ln n)}$
2. $u_n = \sqrt{\dfrac{n+1}{n}} - 1$
3. $u_n = \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}\right)^n$
4. $u_n = \ln \dfrac{n^2+5n+1}{n^2+2n+1}$
5. $u_n = \dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$
6. $u_n = \dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$
7. $u_n = \dfrac{n^2}{(n-1)!}$
8. $u_n = \dfrac{\sin \frac{1}{n}}{\sqrt{n+1}}$
9. $u_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) + \alpha \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $\alpha \in \mathbf{R}$
10. $u_n = \dfrac{\sin(n^2)}{n^2}$
11. $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,dt$ pour $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbf{R})$

**Exercice 28.2** Soit $(u_n)$ une suite à valeurs dans $\mathbf{R}_+$ telle que $\sum u_n$ converge. F
Étudier la convergence des séries $\sum \dfrac{u_n}{1+u_n}$, $\sum u_n^2$ et $\sum \dfrac{\sqrt{u_n}}{n}$.

**Exercice 28.3** Discuter, suivant les valeurs de $(a,b) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$ la nature de la série de terme général $\dfrac{a^n}{1+b^n}$. PD

**Exercice 28.4** En fonction des valeurs de $p \in \mathbf{N}$, étudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+p)!}$. PD

**Exercice 28.5** Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}$, $\left(1+\sqrt{3}\right)^n + \left(1-\sqrt{3}\right)^n$ est un entier pair. En déduire la nature de $\sum \sin\left[\pi\left(1+\sqrt{3}\right)^n\right]$. AD

**Exercice 28.6** **(Banque CCINP 5)** AD

Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2+n))^2}$.

**Exercice 28.7** **Encore des convergences** AD
Déterminer dans chacun des cas suivants la nature de la série de terme général $u_n$.

1. $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln(n)^2-\ln(n)}{n\sqrt{n}}$
2. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+(-1)^n+1}$
3. $u_n = \dfrac{n^2\sin(n)}{3^{n+2}}$
4. $u_n = \operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/n}$
5. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$
6. $u_n = \operatorname{ch}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3n}}\right) - \sqrt{n}\operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$
7. ($\star$) $\operatorname{Arccos}\left(\dfrac{n^\alpha}{1+n^\alpha}\right)$, $\alpha > 0$.
8. $u_n = n^{\frac{1}{n^2}} - 1$
9. $u_n = \dfrac{1}{\binom{4n}{2n}}$

**Exercice 28.8** **Critère des séries alternées... ou pas** AD
Déterminer, dans chacun des cas suivants, la nature de la série de terme général $u_n$ :

1. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
2. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+(-1)^n}$
3. $u_n = \dfrac{(-1)^n\ln(n)}{\sqrt{n}}$
4. $u_n = \sqrt{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$
5. $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$

**Exercice 28.9** **(Banque CCINP 46)** AD
On pose, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1. Prouver que, $\pi\sqrt{n^2+n+1} \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\dfrac{\pi}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ où $\alpha$ est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que la série $\sum u_n$ converge.
3. La série $\sum u_n$ converge-t-elle absolument ?

## ▸ Calculs de sommes

**Exercice 28.10** On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. F

**Exercice 28.11** Étudier la convergence et, le cas échéant, calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$. PD

**Exercice 28.12** Prouver la convergence et calculer la somme de la série de terme général $\dfrac{\left\lfloor\sqrt{n+1}\right\rfloor - \left\lfloor\sqrt{n}\right\rfloor}{n}$. PD

**Exercice 28.13** Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$. AD

1. Déterminer les réels $a$ et $b$ tels que la série de terme général $u_n$ soit convergente.
2. Calculer alors la somme de cette série.

**Exercice 28.14 Série harmonique alternée et réarrangement** D

Dans tout l'exercice, pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

1. Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge, et que sa somme $S$ est strictement positive. S'agit-il d'une série absolument convergente ?
   *Nous pourrons prouver plus tard, quand nous disposerons de l'inégalité de Taylor-Lagrange, que $S = \ln(2)$.*
2. On définit une application $\sigma : \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ par $\sigma(n) = \begin{cases} 4k & \text{si } n = 3k \\ 2k+1 & \text{si } n = 3k+1 \\ 4k+2 & \text{si } n = 3k+2 \end{cases}$

   Montrer que $\sigma$ est une permutation de $\mathbf{N}^*$.
   *On a alors* $\displaystyle\sum_{n=1}^{3N+3} u_{\sigma(n)} = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2N-1} - \frac{1}{4N-2} - \frac{1}{4N}\right)$.
3. Montrer que $\sum u_{\sigma(n)}$ converge et calculer sa somme. Êtes-vous surpris ?

## ▸ Comparaison série/intégrale

**Exercice 28.15 Séries de Bertrand** AD

Montrer, à l'aide d'une comparaison série/intégrale que la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $(\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$.

**Exercice 28.16** Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}\right)^{\frac{1}{-2\ln(n)}}$. AD

## ▸ Divers

**Exercice 28.17 Existence de la constante d'Euler** AD

Étudier la nature de la série de terme général $\frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ et en déduire l'existence d'un réel $\gamma$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1).$$

**Exercice 28.18 Un produit infini** AD

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{\ln k}{k^2}\right)$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)$.

**Exercice 28.19 Équivalentes mais de natures différentes** PD

Pour $n \geqslant 1$, on pose $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $b_n = a_n + \dfrac{1}{n}$.

Montrer que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, mais que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont de natures différentes.

## Exercice 28.20 Reste d'une série alternée

AD

1. Déterminer le signe de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 8^n}{(2n)!}$.
2. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k^3+1}}$. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.
3. ($\star$) Même question avec $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$.

## Exercice 28.21 Application des séries à l'étude des suites (Oral Centrale)

AD

Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, soit $u_n = \frac{n!}{x^n} \prod_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)$.

1. Étudier la série de terme général $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.
   En déduire que la suite $(u_n)$ converge et préciser sa limite.
2. Établir l'existence de $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que la série de terme général $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) - \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ converge.
3. Montrer qu'il existe $A \in \mathbf{R}^*$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} An^\alpha$.

## Exercice 28.22 Séries semi-convergentes et théorème de réarrangement de Riemann (Oral ENS)

TD

1. Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. Montrer que $\forall \sigma \in \mathfrak{S}(\mathbf{N})$, $\sum u_{\sigma(n)}$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
2. Soit $\sum u_n$ une série réelle convergente mais non absolument convergente (on parle de série semi-convergente).
   Montrer que pour tout $\ell \in \mathbf{R}$, il existe $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbf{N})$ telle que $\sum u_{\sigma(n)}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \ell$.

## Exercice 28.23 Série des inverses des nombres premiers (Oral ENS)

TD

Soi $(p_n)_{n\geqslant 1}$ la suite croissante des nombres premiers. Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{p_n}$ diverge.

*Indication : étudier la nature de* $\sum -\ln\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$, *puis faire apparaître* $\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - p_i^{-1}}$.

# CORRECTION DES EXERCICES DU TD 28

## SOLUTION DE L'EXERCICE 28.1

**1.** On a, pour $n \geqslant 1$, $0 \leqslant \dfrac{1}{n(n+\ln(n))} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.
Puisque la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge[1], par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

[1] C'est une série de Riemann de paramètre $2 > 1$.

**2.** Il s'agit clairement d'une série à termes positifs. Et on a

$$u_n = \sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n} > 0.$$

Puisque la série de terme général $\frac{1}{2n}$ diverge, par critère de comparaison, il en est de même de la série de terme général $u_n$.

**Signe**

Rappelons que le critère à base d'équivalentes ne vaut que pour les séries de signe constant, et il est donc important de montrer à un moment qu'on s'est intéressé au(x) signe(s).

**3.** Pour $n \geqslant 3$, on a $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{5}{6}$ et donc $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$.
Mais la série géométrique $\sum \left(\frac{5}{6}\right)^n$ converge, donc il en est de même de $\sum u_n$.

**4.** On a $\dfrac{n^2+5n+1}{n^2+2n+1} = 1 + \dfrac{3n}{n^2+2n+1}$.
Donc $\ln\left(\dfrac{n^2+5n+1}{n^2+2n+1}\right) = \ln\left(1+\dfrac{3n}{n^2+2n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{3n}{n^2+2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{3}{n}$.
Et donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.

**5.** On a $\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$, et donc $n+(-1)^n\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. Donc par critère de comparaison pour les séries à termes positifs la série de terme général $u_n$ diverge.

**Positivité**

Il est évident que $\frac{1}{n}$ est positif, il n'est donc pas nécessaire de faire une étude du signe de $u_n$ : il est positif **à partir d'un certain rang**, ce qui nous suffit.

**6.** Il y a un vrai piège ici : nous ne sommes pas en présence d'une série de Riemann, car bien que $1+\frac{1}{n}$ soit toujours strictement supérieur à 1, ce n'est pas une constante.
Or les séries de Riemann sont celles de la forme $\frac{1}{n^\alpha}$, où $\alpha$ est **fixé**.
Mais on a $nu_n = \dfrac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = e^{-\frac{1}{n}\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$, et par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.

**7.** Notons que $n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} (n-1)(n-2)$, et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(n-1)(n-2)}{(n-1)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(n-3)!}$.
Mais la série de terme général $\dfrac{1}{(n-3)!}$ converge puisque $\sum \dfrac{1}{n!}$ converge.
Et donc par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

**Alternatives** : on pouvait aussi remarquer que $n^2u_n = \dfrac{n^4}{(n-2)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, si bien que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
Et donc par comparaison à une série de Riemann convergente, $\sum u_n$ converge.
On pouvait également s'en tirer avec le critère de d'Alembert.

**8.** Notons que pour $n \geqslant 1$, $\sin\frac{1}{n} \geqslant 0$, et donc $u_n \geqslant 0$.
On a alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$, et la série de terme général $\dfrac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann convergente.
Donc par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

**9.** Utilisons un développement limité : on a

$$\begin{aligned}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\alpha\sin\left(\frac{1}{n}\right) &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)+\alpha\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} (\alpha+1)\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Ainsi, pour $\alpha+1\neq 0$, c'est-à-dire lorsque $\alpha\neq -1$, on a $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+\alpha\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{\alpha+1}{n}$.
Mais alors, par critère de comparaison pour les séries à termes positifs $\sum u_n$ diverge.
En revanche, si $\alpha=-1$, alors $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\alpha\sin\left(\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{=}-\dfrac{1}{2n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\dfrac{1}{2n^2}$.
Et alors, par critère de comparaison pour les séries de signe constant, $\sum u_n$ converge.

**Rappel**
Une suite est équivalente au premier terme **non nul** de son développement limité.

**10.** Il ne s'agit pas ici d'une série dont le terme général est de signe constant, donc testons son absolue convergence.
On a $|u_n|\leqslant\dfrac{1}{n^2}$, si bien que la série[2] de terme général $|u_n|$ est convergente.
Donc $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

[2] À termes positifs.

**11.** Puisque $f$ est continue sur $[0,1]$, elle y est bornée[3] : soit donc $M>0$ tel que pour tout $t\in[0,1]$, $|f(t)|\leqslant M$.
Alors par inégalité triangulaire $0\leqslant|u_n|\leqslant\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 t^n|f(t)|\,dt\leqslant\dfrac{M}{n}\int_0^1 t^n\,dt\leqslant\dfrac{M}{n(n+1)}$.
Or la série de terme général $\dfrac{1}{n(n+1)}$ est convergente (on peut remarquer que $\frac{1}{n(n+1)}\sim\frac{1}{n^2}$, ou reconnaître une série télescopique convergente), donc $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

[3] C'est le théorème des bornes atteintes.

## Solution de l'exercice 28.2

On a $0\leqslant\dfrac{u_n}{1+u_n}\leqslant u_n$, et donc par critère de comparaison, $\sum\dfrac{u_n}{1+u_n}$ converge.

Puisque $u_n\to 0$, il existe $n_0\in\mathbf{N}$ tel que pour $n\geqslant n_0$, $0\leqslant u_n\leqslant 1$. On a donc, pour $n\geqslant n_0$, $0\leqslant u_n^2\leqslant u_n$, et alors puisque $\sum u_n$ converge, c'est également le cas de $\sum u_n^2$.

**$n\geqslant n_0$**
On a utilisé là ce qu'on a appelé en cours *l'indifférence des premiers termes*, qui stipule que la nature d'une série ne dépend que de ce qui se passe pour $n$ grand, et donc que la majoration ne soit vraie que pour $n\geqslant n_0$ n'empêche pas de conclure.

Enfin, rappelons que pour $(a,b)\in\mathbf{R}^2$, $ab\leqslant\dfrac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$ , et donc en particulier,

$$0\leqslant\frac{\sqrt{u_n}}{n}\leqslant\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{1}{n^2}\right).$$

**Astuce**
Cette inégalité vient tout simplement du fait que $(a-b)^2\geqslant 0$. Mais on peut aussi y voir un cas particulier de l'inégalité airthmético-géométrique.

Mais les séries de termes généraux $u_n$ et $\frac{1}{n^2}$ sont convergentes, donc par critère de domination pour les séries à termes positifs, il en est de même de $\sum\dfrac{\sqrt{u_n}}{n}$.

## Solution de l'exercice 28.3

Notons que pour $b>1$, $1+b^n\underset{n\to+\infty}{\sim}b^n$, et que pour $b<1$, $1+b^n\underset{n\to+\infty}{\sim}1$.
En revanche, pour $b=1$, on a $1+b^n=2$ pour tout $n$.

▸ Donc si $b>1$, $\dfrac{a^n}{1+b^n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$.
Or la série[4] de terme général $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ converge si et seulement si $\dfrac{a}{b}<1\Leftrightarrow a<b$.
Par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum\dfrac{a^n}{1+b^n}$ converge si et seulement si $a<b$.

[4] Géométrique.

▸ Si $b=1$, $\dfrac{a^n}{1+b^n}=\dfrac{a^n}{2}$ converge si et seulement si $a\in]0,1[$.
▸ Si $b\in]0,1[$, alors $\dfrac{a^n}{1+b^n}\underset{n\to+\infty}{\sim}a^n$. Et $\sum a^n$ converge si et seulement si $a\in]0,1[$, donc par critère de comparaison, il en est de même de $\sum\dfrac{a^n}{1+b^n}$.

En résumé, $\sum\dfrac{a^n}{1+b^n}$ converge si et seulement si $a\in]0,1[$ ou ($b>1$ **et** $a<b$).

## Solution de l'exercice 28.4

▸ Pour $p=0$, on a $u_n=1+\dfrac{1!+2!+\cdots+(n-1)!}{n!}\geqslant 1$, de sorte que $u_n\underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow}0$. Et donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.
▸ Pour $p=1$, $u_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1!+2!+\cdots+(n-1)!}{(n+1)!}\geqslant\dfrac{1}{n+1}$.
Or, $\dfrac{1}{n+1}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n}$, et donc par critère de comparaison pour les séries à termes positifs,

$\sum \frac{1}{n+1}$ diverge.
Et par conséquent, $\sum u_n$ diverge.
▶ Pour $p \geqslant 2$, on a $1! + 2! + \cdots + n! \leqslant (n-1) \times (n-1)! + n!$.
Et donc

$$u_n \leqslant \frac{(n-1)\times(n-1)!+n!}{(n+p)!} \leqslant \frac{(n-1)\times(n-1)!+n!}{(n+2)!} \leqslant \frac{n-1}{n(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Mais $\dfrac{n-1}{n(n+1)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$, de sorte que par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum \dfrac{n-1}{n(n+1)(n+2)}$ converge.
Et de même, $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$, donc $\sum \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ converge.
Ainsi, par somme de séries convergentes, $\sum \left( \dfrac{n-1}{n(n+1)(n+2)} + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$ converge, et donc par critère de comparaison pour séries à termes positifs[5], $\sum u_n$ converge.

[5] $u_n$ est clairement positif.

En résumé, $\sum u_n$ converge si et seulement si $p \geqslant 2$.

## SOLUTION DE L'EXERCICE 28.5

Par la formule du binôme, on a

$$(1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sqrt{3}^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-\sqrt{3})^k = 2 \sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} (\sqrt{3})^k = 2 \underbrace{\sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} 3^p}_{\in \mathbf{N}}$$

qui est bien un entier pair. Notons le $N_n$.
On a donc

$$u_n = \sin\left[\pi\left(1+\sqrt{3}\right)^n\right] = \sin\left[\pi N_n - \pi\left(1-\sqrt{3}\right)^n\right] = -\sin\left[\pi\left(1-\sqrt{3}\right)^n\right].$$

Mais puisque $-1 < 1-\sqrt{3} < 1$, $\left(1-\sqrt{3}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc

$$\sin\left[\pi\left(1-\sqrt{3}\right)^n\right] \underset{n\to+\infty}{\sim} \pi\left(1-\sqrt{3}\right)^n.$$

Et donc

$$\left|\sin\left[\pi\left(1-\sqrt{3}\right)^n\right]\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left|\pi\left(1-\sqrt{3}\right)^n\right| = \pi\left(\sqrt{3}-1\right)^n.$$

Or la série géométrique de terme général $\left(\sqrt{3}-1\right)^n$ est convergente, donc par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum |u_n|$ est convergente, donc $\sum u_n$ est absolument convergente, et par conséquent convergente.

**☠ Danger !**
Ne pas conclure trop vite à l'aide d'équivalents : il s'agit ici d'une série qui n'est pas de signe constant.

**Série géométrique**
Le même type de raisonnement prouve qu'une série géométrique, lorsqu'elle est convergente, est absolument convergente.

## SOLUTION DE L'EXERCICE 28.6

Voici un exercice qui n'a pas d'autre but que de tester votre habilité calculatoire, et qui ne s'en cache pas !
La clé est de ne pas paniquer face à l'apparente complexité de $u_n$ et de procéder méthodiquement.
Nous allons essayer de trouver un équivalent de $u_n$.
On a déjà $e^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc $e^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$.
Puisque $n^2 + n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$, et que ces deux suites tendent vers $+\infty$, on a

$$\ln(n^2+n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n^2) = 2\ln(n).$$

Donc le dénominateur de $u_n$ est équivalent à $4\ln(n)^2$.

**Rappel**
Si $(u_n)$ et $(v_n)$ sont deux suites positives, équivalentes, et qui tendent vers $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ avec $\ell \neq 1$, alors

$$\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n).$$

Reste donc

$$e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e - e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} e - e^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} e\left(1 - e^{-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}\right) \underset{n\to+\infty}{=} e\left(\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{2n}$$

$DL_2(0)$ de $\ln(1+x)$.

$e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$.

Et donc pour finir, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e}{8n\ln(n)^2}$. Puisque cet équivalent est positif, $u_n$ l'est aussi, au moins à partir d'un certain rang, et donc il nous suffit d'étudier la nature de la série de terme général $\frac{e}{8n\ln(n)^2}$.

À présent, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)^2}$ étant continue, décroissante et positive sur $[2,+\infty[$, par comparaison série/intégrale, nous savons que $\sum \dfrac{1}{n\ln(n)^2}$ converge si et seulement si la suite $\left(\displaystyle\int_2^n \frac{dt}{t(\ln t)^2}\right)_n$ converge.

Mais $\displaystyle\int_2^n \frac{dt}{t(\ln t)^2} = \left[-\frac{1}{\ln t}\right]_2^n = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\ln 2}$.

Et donc $\sum \dfrac{e}{8n\ln(n)^2}$ converge, donc par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, il en est de même de $\sum u_n$.

**Primitive**
Si on pose $u = \ln(t)$, alors
$$\frac{u'}{u^2} = \frac{1}{t\ln^2 t},$$
qui s'intègre en $-\frac{1}{u}$.

## Solution de l'exercice 28.7

**Méthode**
Pour les séries qui ne sont pas de signe constant, l'absolue convergence est à peu près tout ce dont on dispose, donc il faut commencer par là.

1. Puisqu'il ne s'agit pas d'une série de signe constant, étudions l'absolue convergence. On a alors $|u_n| = \dfrac{\ln(n)^2 - \ln(n)}{n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)^2}{n\sqrt{n}}$.
On a alors, $\ln(n)^2 \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^{1/4}\right)$, et donc $|u_n| \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^{3/2-1/4}}\right)$.
Puisque $\frac{5}{4} > 1$, par comparaison à une série de Riemann, $\sum |u_n|$ converge, et donc $\sum u_n$ converge.
**Alternative** : on peut aussi directement évoquer la règle $n^\alpha u_n$, et chercher s'il existe un $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Or $n^\alpha u_n = \dfrac{\ln^2 n}{n^{3/2-\alpha}}$, qui tend vers 0 si et seulement si $\alpha < \frac{3}{2}$.
Et donc en particulier, puisque $1 < \frac{5}{4} < \frac{3}{2}$ et que $n^{5/4}u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $\sum u_n$ converge.
2. On a $0 \leqslant |u_n| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.
Donc par comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum |u_n|$ converge, et donc $\sum u_n$ converge absolument, donc converge.
3. On a $0 \leqslant |u_n| \leqslant \dfrac{n^2}{3^{n+2}}$. Mais $\dfrac{n^2}{3^{n+2}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
Donc par comparaison à une série de Riemann, la série de terme général $\frac{n^2}{3^{n+2}}$ converge.
Et alors, $\sum |u_n|$ converge aussi, de sorte que $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

**Alternative**
On pourrait également prouver par exemple que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

4. Puisque $\operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right) \geqslant 1$, $u_n \geqslant 1$.
Et donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.
5. Étant donné que $u_n$ contient des puissances et des factorielles, le critère de d'Alembert est tout indiqué.
On a alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1} < 1$, et donc $\sum u_n$ converge.
6. Il s'agit de noter que les premiers termes des développements asymptotiques de $\operatorname{ch}\left(\frac{1}{3\sqrt{n}}\right)$ et $\sqrt{n}\operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right)$ sont égaux, donc se simplifient.
En effet, en utilisant des développements limités à l'ordre 2 pour ch et 3 pour sh,
$$\operatorname{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{3n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ et } \sqrt{n}\operatorname{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

De plus, les termes suivants sont nuls, donc pour obtenir un équivalent de $u_n$, il faudrait au minimum pousser les développements limités à l'ordre 4 pour ch et à l'ordre 5 pour sh. C'est faisable, mais peu désirable.
Notons plutôt que dans le développement limité à l'ordre 3 de ch en 0, le terme en $x^3$ (qui est nul ici, mais pas besoin de le savoir) et le reste en $o(x^3)$ peuvent tous deux être réunis dans un $O(x^3)$. Et alors

$$\operatorname{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{3n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{6n}+O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \text{ et de même } \operatorname{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{6n}+O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.
Puisque la série de terme général $\frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge, il en est de même de $\sum u_n$.

**Rédaction** Toutes ces étapes, y compris les calculs, ne sont bien entendu là que pour vous expliquer le raisonnement. Pour vous elles doivent se passer au brouillon.

**7.** Il y a ici un équivalent un peu délicat lorsqu'on ne l'a jamais vu.
Notons que $0 \leqslant \dfrac{n^\alpha}{1+n^\alpha} < 1$, donc $u_n$ est bien défini.
Et puisque $\dfrac{n^\alpha}{1+n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, il s'agit surtout de trouver un équivalent, lorsque $x \to 1$, de $\operatorname{Arccos}(x)$.
On a alors $\operatorname{Arccos} x \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$, et donc $\operatorname{Arccos}(x) \underset{x\to 1}{\sim} \sin(\operatorname{Arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
Enfin, $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1+x}\sqrt{1-x} \underset{x\to 1}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x}$.

**Attention !** La fonction Arccos n'étant pas dérivable en 1, elle n'a pas de DL à aucun ordre supérieur ou égal à 1. Donc ce n'est pas la peine d'essayer de calculer ce DL...

Donc ici, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-\dfrac{n^\alpha}{1+n^\alpha}} = \sqrt{2}\sqrt{\dfrac{1}{1+n^\alpha}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2}}{n^{\alpha/2}}$.
Et donc par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 2$.

**8.** On a $u_n = e^{\frac{1}{n^2}\ln n} - 1$.
Mais puisque $\dfrac{\ln n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $e^{\frac{\ln n}{n^2}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n^2}$.
Donc $n\sqrt{n}u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Donc par la règle $n^\alpha u_n$, $\sum u_n$ converge.

**9.** Utilisons la règle de d'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+1)!^2}{(4n+4)!}\,\frac{(4n)!}{(2n)!^2} = \frac{(2n+2)^2(2n+1)^2}{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{16} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{16} < 1.$$

Et donc on en déduit que $\sum u_n$ converge.

## SOLUTION DE L'EXERCICE 28.8

**1.** C'est directement le critère des séries alternées puisque $\frac{1}{\sqrt{n}}$ tend vers 0 en décroissant.

**2.** On pourrait prouver ici qu'il s'agit bien d'une série à laquelle le critère des séries alternées s'applique. Mais plus simplement : $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$, si bien que $\sum u_n$ converge absolument, donc converge.

**3.** Si on note $f$ la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, alors $f$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, avec $f' : x \mapsto \dfrac{1-\ln(x)/2}{x\sqrt{x}}$, si bien que $f$ est décroissante sur $[e^2, +\infty[$.
Notons que $e^2 \simeq 7{,}38$, information dont nous pourrions tout à fait nous passer[6]...
Puisque de plus $\dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on peut donc appliquer le critère des séries alternées à la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 8} \frac{(-1)^n \ln(n)}{\sqrt{n}}$, qui converge donc.
Par indifférence des premiers termes, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n}}$ converge également.

[6] En remplaçant $n \geqslant 8$ dans ce qui suit par $n \geqslant \lfloor e^2 \rfloor + 1$.

**4.** On a $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} - \dfrac{1}{8n} + O\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.
Par le critère de séries alternée, $\dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$ est le terme général d'une série convergente.

**Attention !** On ne se contente pas d'un équivalent car il ne s'agit pas d'une série de signe constant à partir d'un certain rang.

Il en est de même de $O\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

Et puisque $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, il en est de même de $\sum u_n$.

**5.** On a $\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = \sin\left(n\pi\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$.

Soit encore $\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) \underset{n\to+\infty}{=} (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{(-1)^n\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

Puisque la série de terme général $\dfrac{(-1)^n\pi}{2n}$ converge par application du critère des séries alternées, et que $\sum O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ converge, alors il en est de même de $\sum \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

> **Astuce**
> Puisque $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$, alors
> $$\cos(x+n\pi) = (-1)^n\cos(x).$$

## Solution de l'exercice 28.9

**1.** On a

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^2+n+1} &= n\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\\
&\underset{n\to+\infty}{=} n\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)+O\left(\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^3\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} n+\frac{1}{2}+\frac{3}{8n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

On obtient donc le résultat annoncé après multiplication par $\pi$, donc avec $\alpha = \dfrac{3}{8}$.

**2.** On en déduit donc que

$$\begin{aligned}
u_n &\underset{n\to+\infty}{=} (-1)^n\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\frac{\pi}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} (-1)^n\sin\left(\alpha\frac{\pi}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \alpha\frac{(-1)^n\pi}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

> **Détails**
> On a utilisé ici
> $$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x + O(x^2)$$
> et pas seulement $\sin(x) \underset{x\to0}{=} x + o(x)$, pour lequel il nous resterait un terme en $o\left(\frac{1}{n}\right)$ dont on ne peut rien dire.

Puisque la série de terme général $\alpha(-1)^n\frac{\pi}{n}$ converge par application du critère des séries alternées, et qu'il en est de même d'une série de terme général $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

**3.** Le calcul précédent prouve que $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha\frac{\pi}{n}$, qui est le terme général d'une série divergente.
Donc $\sum |u_n|$ diverge, si bien que $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente.

## Solution de l'exercice 28.10

Soit $N \in \mathbf{N}^*$. Alors

$$\sum_{n=1}^{2N+1}\frac{1}{n^2} = \sum_{\substack{n=1\\ n \text{ pair}}}^{2N+1}\frac{1}{n^2} + \sum_{\substack{n=1\\ n \text{ impair}}}^{2N+1}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Et donc

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{2N+1}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}.$$

> **Remarque**
> Ceci prouve directement la convergence de la série de terme général $\frac{1}{(2n+1)^2}$, convergence que l'on aurait par exemple pu établir à l'aide d'un équivalent.

Et alors, pour $N \in \mathbf{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{\substack{n=1\\ n \text{ pair}}}\frac{1}{n^2} - \sum_{\substack{n=1\\ n \text{ impair}}}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{N}{2}\rfloor}\frac{1}{(2n)^2} - \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{N-1}{2}\rfloor}\frac{1}{(2n+1)^2} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Donc $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

## SOLUTION DE L'EXERCICE 28.11

Il s'agit d'une série à termes négatifs puisque $1-\frac{1}{n^2}\leqslant 1$, et on a $\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\sim -\frac{1}{n^2}$, donc il s'agit bien d'une série convergente par comparaison à une série de Riemann convergente. De plus

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) &= \sum_{k=2}^{n}\ln\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right)\\ &= \sum_{k=2}^{n}(\ln(k-1)-\ln(k)) + \sum_{k=2}^{n}(\ln(k+1)-\ln(k))\\ &= -\ln 2-\ln n+\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln 2.\end{aligned}$$

On en déduit que la série de terme général $\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ converge, et que

$$\sum_{k=2}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = -\ln 2.$$

**Rappel** Le critère des équivalents ne fonctionne que pour les séries de signe constant (au moins à partir d'un certain rang).

## SOLUTION DE L'EXERCICE 28.12

Commençons par noter que $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leqslant 1$, et donc $\left\lfloor\sqrt{n+1}\right\rfloor - \left\lfloor\sqrt{n}\right\rfloor \in \{0,1\}$.

On aura alors $\left\lfloor\sqrt{n+1}\right\rfloor - \left\lfloor\sqrt{n}\right\rfloor = 1$ si et seulement si il existe $k$ tel que $\left\lfloor\sqrt{n+1}\right\rfloor = k$ et $\left\lfloor\sqrt{n}\right\rfloor = k-1$.
Soit si et seulement si

$$\begin{cases}\sqrt{n+1}\geqslant k\\ k-1\leqslant\sqrt{n}<k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}n+1\geqslant k^2\\ (k-1)^2\leqslant n<k^2\end{cases} \Leftrightarrow n=k^2-1.$$

Donc pour $N\in\mathbf{N}$, on a

$$\sum_{n=1}^{N^2-1}\frac{\left\lfloor\sqrt{n+1}\right\rfloor - \left\lfloor\sqrt{n}\right\rfloor}{n} = \sum_{k=2}^{N}\frac{1}{k^2-1}.$$

Mais une décomposition en éléments simples nous donne $\dfrac{1}{k^2-1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{k+1}$ de sorte que

$$\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{N}\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}\right).$$

Donc par passage à la limite, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=1}^{N^2-1}\frac{\left\lfloor\sqrt{n+1}\right\rfloor - \left\lfloor\sqrt{n}\right\rfloor}{n} = \frac{3}{4}$.

Mais remarquons que nous n'avons prouvé le résultat que pour des sommes partielles allant jusqu'à $N^2-1$, mais pas pour tout $N$.
À cet effet, notons que la série étant à termes positifs, la suite $(S_n)$ de ses sommes partielles est croissante.
Et donc pour tout $N\in\mathbf{N}$, $S_N\leqslant S_{N^2-1}\leqslant\dfrac{3}{4}$.
Donc la suite des sommes partielles est majorée, donc[7] la série converge.

[7] Rappelons que ceci ne vaut que pour les séries à termes positifs.

## SOLUTION DE L'EXERCICE 28.13

**1.** On a

$$\begin{aligned}u_n &= \ln(n) + a\left(\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) + b\left(\ln(n)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\right)\\ &= (1+a+b)\ln(n) + a\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + b\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= (1+a+b)\ln(n) + \frac{a+2b}{n} - \frac{a+4b}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Si $1+a+b \neq 0$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (1+a+b)\ln(n)$ et donc $\sum u_n$ diverge.
Une condition nécessaire pour que $\sum u_n$ converge est donc déjà $a+b=-1$.

Si c'est le cas et que $a+2b \neq 0$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{a+2b}{n}$ et donc[8] $\sum u_n$ diverge.
Il faut donc avoir de plus $a+2b=0$.
Or, $\begin{cases} a+b=-1 \\ a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases}$
Et alors, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{n^2}$, de sorte[9] que $\sum u_n$ converge.
Donc $\sum u_n$ converge si et seulement si $a=-2$ et $b=1$.

[8] Par comparaison à une série de Riemann.

[9] Toujours par comparaison à une série de Riemann.

**2.** On a alors, pour $N \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} u_k &= \sum_{k=1}^{N} \ln(k) - 2\sum_{k=1}^{N}\ln(k+1) + \sum_{k=1}^{N}\ln(k+2)\\ &= \sum_{k=1}^{N} \ln(k) - 2\sum_{k=2}^{N+1}\ln(k) + \sum_{k=3}^{N+2}\ln(k)\\ &= -\ln(N+1) - \ln(2) + \ln(N+2) = \ln\left(\frac{N+2}{N+1}\right) - \ln(2)\\ &\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln(2).\end{aligned}$$

Et donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = -\ln(2)$.

## Solution de l'exercice 28.14

**1.** La fonction $f$ est clairement de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$, et pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ et tout $x \in ]-1,+\infty[$,

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}.$$

En particulier, sur $[0,1]$, on a $|f^{(n+1)}| \leqslant n!$.
Et donc par l'inégalité de Taylor-Lagrange, appliquée entre 0 et 1,

$$\left| f(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(1-0)^k \right| \leqslant n!\frac{|1-0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Soit encore

$$\left|\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}\right| \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Et donc on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\ln(2) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2).$$

On en déduit donc[10] que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \ln(2)$.
Cette série n'est évidemment pas convergente puisque $|u_n| = \frac{1}{n}$.

[10] À la fois.

**Détails**
Je vais un peu vite ici, ceci a déjà été fait en début d'année : le plus simple est de calculer les première dérivées pour conjecturer une formule, puis la prouver par récurrence.

**2.** Soit $p \in \mathbf{N}^*$.

- ▶si $p$ est impair, alors un antécédent de $p$ est forcément congru à 1 modulo 3, et on a alors $\sigma(3k+1) = p \Leftrightarrow 2k+1 = p \Leftrightarrow k = \dfrac{p-1}{2} \in \mathbf{N}^*$. Donc $p$ admet un unique antécédent par $\sigma$, qui est $3\dfrac{p-1}{2}+1 \in \mathbf{N}^*$.
- ▶si $p$ est congru à 0 modulo 4, alors on prouve de même que son unique antécédent est $3\dfrac{p}{4}$.

►si $p$ est congru à 2 modulo 4, alors son unique antécédent par $\sigma$ est $3\frac{p-2}{4}+2$.
Donc tout entier $p \in \mathbf{N}^*$ possède un unique antécédent par $\sigma$, qui est donc une bijection de $\mathbf{N}^*$ dans lui-même.

**3.** Soit $N \in \mathbf{N}$. Alors, comme indiqué dans l'énoncé, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{3N+3} u_{\sigma(n)} &= \left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2N-1}-\frac{1}{4N-2}-\frac{1}{4N}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{N}\left(u_{\sigma(3k+1)}+u_{\sigma(3k+2)}+u_{\sigma(3k+3)}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{N}\left(u_{2k+1}+u_{4k+2}+u_{4k+4}\right) = \sum_{k=0}^{N}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{4k+2}-\frac{1}{4k+4}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{N}\left(\frac{1}{4k+2}-\frac{1}{4k+4}\right) = \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2(2k+1)(2k+2)}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N}\left(u_{2k+1}+u_{2k+2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2N+2} u_k \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\ln(2).
\end{aligned}$$

**Détails**
C'est le classique
$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}.$$

Par ailleurs, $\displaystyle\sum_{n=1}^{3N+4} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{3N+3} u_{\sigma(n)} + \frac{1}{2N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\ln(2)$ et

$$\sum_{n=1}^{3N+5} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{3N+3} u_{\sigma(n)} + \frac{1}{2N+1} - \frac{1}{4N+2} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\ln(2).$$

Donc en notant $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_{\sigma(k)}$, nous venons de prouver que les trois suites $(S_{3n})$, $(S_{3n+1})$ et $(S_{3n+2})$ convergent vers une même limite $\frac{1}{2}\ln(2)$, donc $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\ln(2)$.
On en déduit que la série de terme général $u_{\sigma(n)}$ converge vers $\dfrac{1}{2}\ln(2)$.

*Ce qui est vraiment remarquable, c'est que cette série contient exactement les mêmes termes que la série $\sum u_n$, tout ce qu'on a fait, c'est changer l'ordre des termes.*
*Mais cela a eu pour effet de changer la somme de la série, ce qui contredit totalement notre habitude des sommes finies, où, par commutativité de l'addition dans $\mathbf{R}$, l'ordre n'a aucune importance. Ceci est spécifique aux séries qui sont convergentes et non absolument convergentes.*

**Plus dur**
Les plus motivés pour consulter l'exercice (très difficile) sur le théorème de réarrangement de Riemann pour en savoir plus sur le sujet.

## SOLUTION DE L'EXERCICE 28.15

Commençons par les cas «faciles» : si $\alpha > 1$ et $\beta \leqslant 0$, alors pour $n \geqslant 3$, on a

$$0 \leqslant \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}.$$

Et donc par comparaison à une série de Riemann, $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ converge.
Pour $\alpha > 1$ et $\beta < 0$, le raisonnement ci-dessus ne vaut plus. Mais pour $\gamma \in ]1, \alpha[$, on a

$$n^\gamma \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta} = \frac{1}{n^{\alpha-\gamma}(\ln n)^\beta} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

**Détails**
Puisque $\alpha-\gamma > 0$, on a
$$(\ln n)^{-\beta} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^{\alpha-\gamma}\right).$$
C'est trivial si $\beta > 0$ (car $(\ln n)^{-\beta} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $n^{\alpha-\gamma} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$), c'est l'une des croissances comparées usuelles sinon.

Pour $\alpha < 1$, notons que $\ln(n)^\beta$ est négligeable devant toute puissance de $n$, et en particulier devant $n^{1-\alpha}$, de sorte que pour $n$ suffisamment grand, $\ln(n)^\beta \leqslant n^{1-\alpha}$.
Et alors pour $n$ suffisamment grand, $\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n^\alpha n^{1-\alpha}} \leqslant \dfrac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$, de sorte que $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$

diverge.

Reste donc à traiter le cas où $\alpha = 1$, et comme l'indique l'énoncé, faisons appel à une comparaison série/intégrale.
Le résultat du cours nous informe que $\sum \dfrac{1}{n\ln(n)^\beta}$ est de même nature que la **suite** $\left(\displaystyle\int_2^n \frac{dt}{t\ln(t)^\beta}\right)_n$ converge.
Mais $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)^\beta} = \dfrac{1}{t} \times \ln(t)^\beta$ est de la forme $u'u^{-\beta}$.
Donc nous savons en calculer une primitive : $\displaystyle\int_2^n \frac{dt}{t\ln(t)^\beta} = \left[\frac{1}{1-\beta}\ln(t)^{-\beta+1}\right]_2^n = \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{1}{\ln(n)^{\beta-1}} - \frac{1}{\ln(2)^{\beta-1}}\right)$.
Alors cette suite possède une limite finie si et seulement si $\beta - 1 > 0 \Leftrightarrow \beta > 1$.

En résumé, on a bien prouvé le critère annoncé, à savoir la convergence de la série si et seulement si $\alpha > 1$ ou si $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

**Remarque**

En particulier, $\sum \dfrac{1}{n\ln n}$ diverge.

## Solution de l'exercice 28.16

Nous savons que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car reste d'une série[11] convergente, il s'agit d'utiliser la comparaison série/intégrale pour obtenir une information sur la vitesse à la quelle a lieu cette convergence vers 0.
La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^3}$ est continue, positive et décroissante sur $[1;+\infty[$, donc pour tout $k \geqslant 2$,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^3}\,dt \leqslant \frac{1}{k^3} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^3}.$$

Et donc pour $n \geqslant 1$ et $p \geqslant n+1$, on a, en sommant ces relations

$$\int_{n+1}^{p+1} \frac{dt}{t^3} \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k^3} \leqslant \int_n^p \frac{dt}{t^3}.$$

Or, une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t^3}$ est $t \mapsto \frac{-1}{2t^2}$, de sorte que

$$\frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{2(p+1)^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k^3} \leqslant \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2p^2}.$$

En passant à la limite lorsque $p \to +\infty$, $\displaystyle\frac{1}{2(n+1)^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \leqslant \frac{1}{2n^2}$.

Et donc à l'aide du théorème des gendarmes, on prouve que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$.

Ainsi,

$$\frac{1}{-2\ln n}\ln\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^3}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\ln n}(\ln 2 + 2\ln n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Et donc il vient

$$\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^3}\right)^{\frac{1}{-2\ln(n)}} = e^{-\frac{1}{2\ln(n)}\ln\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e.$$

**☠ Danger !**

Rappelons qu'on n'a en général pas le droit de composer les équivalents à gauche. Sauf, comme on vient de le faire, pour des suites qui tendent vers autre chose que 1, si on les compose par ln.

## Solution de l'exercice 28.17

Posons donc $u_n = \dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.
Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$.
Et donc par le critère des équivalents pour les séries à termes positifs, et par comparaison à une série de Riemann convergente, $\sum u_n$ converge.

[11] De Riemann.

Notons alors $\gamma = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$, de sorte que

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} \gamma + o(1).$$

Rappel
$\gamma + o(1)$ signifie juste «tend vers $\gamma$.

Mais pour $n \geqslant 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1).$$

Reste à noter que $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$, si bien que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1).$$

## Solution de l'exercice 28.18

La solution pour l'étude des produits consiste souvent à passer par le logarithme, puisque celui-ci transforme les produits en sommes, pour lesquelles on dispose des outils relatifs à l'étude des séries.

Dans notre cas, on a, pour $n \geqslant 1$, $\ln(u_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{\ln k}{k^2}\right)$.

Étudions alors la convergence de la suite $(\ln(u_n))$.

On reconnaît alors que $\ln(u_n)$ est la somme partielle d'ordre $n$ de la série de terme général $\ln\left(1 + \frac{\ln k}{k^2}\right)$.

Encore une fois
Par **définition**, la série converge **si et seulement si** la suite de ses sommes partielles converge.

Il s'agit donc de déterminer si cette série converge ou non.

Nous savons par croissances comparées que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln k}{k^2} = 0$, et donc $\ln\left(1 + \frac{\ln k}{k^2}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{\ln k}{k^2}$.

Puisqu'il s'agit de séries à termes positifs et que leurs termes généraux sont équivalents, il suffit de déterminer la nature de la série de terme général $\frac{\ln k}{k^2}$.

Mais $k^{3/2}\frac{\ln k}{k^2} = \frac{\ln k}{\sqrt{k}} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, si bien que $\frac{\ln k}{k^2} \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)$.

Puisque la série de terme général $\frac{1}{k^{3/2}}$ converge, il en est de même de $\sum \frac{\ln k}{k^2}$.

Et donc la suite de ses sommes partielles, qui est $(\ln u_n)_n$ converge.

On en déduit, par continuité de l'exponentielle, que $(u_n)$ converge.

## Solution de l'exercice 28.19

Puisque $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, on a bien $b_n \underset{n\to+\infty}{=} a_n + o(a_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$.

Par application directe du critère des séries alternées, $\sum a_n$ converge.

En revanche, puisque $\sum a_n$ converge et que $\sum \frac{1}{n}$ diverge, alors $\sum b_n$ diverge.

## Solution de l'exercice 28.20

1. La suite de terme général $\frac{8^n}{(2n)!}$ n'est décroissante qu'à partir de 1. Comme elle est bien de limite nulle, le critère des séries alternées s'applique, et donc la somme est bien définie.
Les premiers termes de la somme de la série sont donc $1 - 4 + \frac{64}{24} - \frac{32}{45} + \dots$.
Mais pour une série alternée, nous savons que la valeur absolue du reste est majorée par la valeur absolue du premier terme de ce reste.
Ici, on a en particulier, $\left|\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{8^n}{(2n)!}\right| \leqslant \frac{64}{24} = \frac{8}{3} < 3$.
Or, $-3 = 1 - 4$, si bien que la somme cherchée est négative.

2. Le critère des séries alternées s'applique[12], et donc pour tout $n$, $|u_n| \leqslant \frac{1}{\sqrt{(n+1)^3+1}}$.
Puisque $\frac{1}{\sqrt{(n+1)^3+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{3/2}}$, il s'agit du terme général d'une série convergente, si bien que $\sum u_n$ converge absolument, et donc converge.

[12] Car $\frac{1}{k^3+1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ en décroissant.

**3.** Le même raisonnement que ci-dessus nous donne cette fois $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n+2}}$, qui ne suffit pas à conclure à la convergence absolue de $\sum u_n$ puisque $\dfrac{1}{\sqrt{n+2}}$ est le terme général d'une série divergente.

On a, pour tout $n$,

$$u_{n-1}+u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} + \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} = -\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k \left( \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right).$$

Une étude rapide[13] de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ prouve qu'elle est décroissante, et elle tend clairement vers 0 en $+\infty$.

Donc le critère de Leibniz s'applique à la série $\sum (-1)^k \left( \dfrac{1}{\sqrt{k}} - \dfrac{1}{\sqrt{k+1}} \right)$, qui est donc convergente.

Et par majoration du reste, on a donc

$$|u_{n-1}+u_n| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Mais

$$\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n\sqrt{n}}.$$

Donc $u_{n-1}+u_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

Par ailleurs, $u_n - u_{n-1} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, si bien que

$$2u_n = u_n + u_{n-1} + u_n - u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

Par le critère des séries alternées, $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, et par comparaison à une série de Riemann, $\sum O\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ converge.

Et donc $\sum u_n$ converge[14].

## Solution de l'exercice 28.21

**1.** On a

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{x}\ln\left(1+\frac{x}{n+1}\right)\right).$$

Mais $\ln\left(1+\dfrac{x}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{n+1}$, et donc $\dfrac{n+1}{x}\ln\left(1+\dfrac{x}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$.

Donc en utilisant l'équivalent classique $\ln(t) \underset{t\to1}{\sim} t-1$, il vient

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n+1}{x}\ln\left(1+\frac{x}{n+1}\right) - 1.$$

Mais $\dfrac{n+1}{x}\ln\left(1+\dfrac{x}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{n+1}{x}\left(\dfrac{x}{n+1} - \dfrac{x^2}{2(n+1)^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$.

On en déduit que $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} -\dfrac{x}{2(n+1)} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{x}{2n}$.

Mais alors, par critère de comparaison pour les séries de signe constant[15] la série de terme général $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ est divergente.

Puisque $-\frac{x}{2n} < 0$, il en est de même de $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ au moins à partir d'un certain rang. Donc la suite de ses sommes partielles est décroissante à partir de ce rang, et étant

[13] Essentiellement une dérivation.

[14] Mais pas absolument !

[15] Ici le signe est négatif. Mais rappelons que tous les résultats prouvés pour les séries à termes positifs restent valables pour les séries à termes négatifs.

divergente, elle tend vers $-\infty$.

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\ln(u_{k+1})-\ln(u_k)\right)=\ln(u_{n+1})-\ln(u_1)$.
On en déduit que la suite $\ln(u_n)$ tend vers $-\infty$.
Et donc $u_n = e^{\ln(u_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

**2.** L'idée est assez simple, puisque $\ln(u_{n+1})-\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{x}{2n}$, et que $\alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{n}$, pour que notre série converge, il va falloir que les termes en $\frac{1}{n}$ se compensent, et donc que $\alpha=-\frac{x}{2}$.
Seulement on ne peut pas s'en tirer aussi simplement faute de pouvoir sommer les équivalents.

Soyons donc un peu plus subtils dans nos développements limités, et pour simplifier les notations, notons $v_n=\frac{u_{n+1}}{u_n}-1$, de sorte que

$$\ln(u_{n+1})-\ln(u_n)=\ln(1+v_n).$$

Puisqu'il a déjà été dit que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

$$\ln(1+v_n) \underset{n\to+\infty}{=} v_n+O(v_n^2).$$

Et comme précédemment, mais avec un peu plus de précision[16]

$$v_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{n+1}{x}\left(\frac{x}{n+1}-\frac{x^2}{2(n+1)^2}+O\left(\frac{1}{(n+1)^3}\right)\right)-1 \underset{n\to+\infty}{=} \frac{-x}{2(n+1)}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

[16] Essentiellement on remplace un $o(x^2)$ par un $O(x^3)$ dans le développement de $\ln(1+x)$.

Notons que nous serions tentés de remplacer le terme en $\frac{1}{n+1}$ par un terme en $\frac{1}{n}$ puisque $\frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
Mais cela signifie que $\frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$, et on ne souhaite surtout pas introduire des termes en $o\left(\frac{1}{n}\right)$ dans une notre expression[17].
Donc gardons le $\frac{1}{n+1}$ pour l'instant.

[17] Puisqu'il nous empêcheraient de conclure quant à la nature de la série.

$$\begin{aligned}
\ln(u_{n+1})-\ln(u_n)+\frac{x}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) &\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{x}{2(n+1)}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)+\frac{x}{2}\left(\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{x}{2n}-\frac{x}{2(n+1)}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{x}{2n(n+1)}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Et donc pour $\alpha=-\frac{x}{2}$, la série de terme général $\ln(u_{n+1})-\ln(u_n)-\alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ converge.

**3.** Il s'agit de noter que $\displaystyle\sum\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ est encore une série télescopique puisqu'il s'agit de $\sum\left(\ln(n+1)-\ln(n)\right)$.
Dont la somme partielle d'ordre $n$ vaut $\ln(n+1)$.
Donc en notant $S$ la somme de la série de la question précédente, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\ln(u_{k+1}-\ln(u_k)-\alpha\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)=\ln(u_n)-\ln(u_1)-\alpha\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S.$$

Soit encore $\ln\left(\dfrac{u_n}{u_1 n^\alpha}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$.
Et donc en composant par l'exponentielle, et en posant $A=u_1e^S>0$,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n^\alpha}=A \text{ et donc } u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} An^\alpha.$$

## Solution de l'exercice 28.22

Rappelons que $\mathfrak{S}(\mathbf{N})$ désigne l'ensemble des bijections de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$.
Et si $\sigma$ est une telle bijection, alors la suite $(u_{\sigma(n)})$ contient les mêmes termes que $(u_n)$, mais tout simplement pas dans le même ordre.
La première question prouve donc que pour une série absolument convergente, réordonner les termes de la série ne change pas sa somme. Ce résultat nous semble trivial puisque c'est ce dont nous avons l'habitude pour les sommes finies où c'est une conséquence directe de la commutativité de la somme.
Bien plus surprenant est le résultat de la seconde question, qui prouve que ce résultat n'est plus valable pour une série qui serait convergente sans être absolument convergente.
Pire : cette seconde question prouve que par réarrangement des termes de la série, on peut obtenir une série dont la somme vaut n'importe quel réel !

1. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbf{N})$. Alors pour tout $N \in \mathbf{N}$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} |u_{\sigma(n)}| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

   Et donc $\sum u_{\sigma(n)}$ converge absolument[18].

   Soit $\varepsilon > 0$, et soit $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k| \leqslant \varepsilon$.

   Soit alors $n_1 = \displaystyle\max_{k\in[\![0,n_0]\!]} \sigma^{-1}(k)$.

   Pour $n \geqslant n_1$, on a donc $\sigma(n) > n_0$ et donc pour $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, il vient
$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant 2 \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} |u_k| \leqslant 2\varepsilon.$$
   Et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{n} u_k\right) = 0$.

   Puisque $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

   Donc $\sum u_{\sigma(k)}$ converge et sa somme est $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

**Détails**
Tous les $k$ tels que $\sigma(k) \leqslant n_0$ sont inférieurs à $n_1$ et donc à $n$.
Et donc les $u_{\sigma(k)}$ correspondants dans la première somme se trouvent aussi dans la seconde.
Le facteur 2 provient alors de l'inégalité triangulaire.

2. Contentons-nous des grandes lignes.
   Notons $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$, qui sont deux nombres positifs, pour lesquels on a $u_n = u_n^+ - u_n^-$ et $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$.
   Puisque $\sum |u_n|$ diverge, $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ ne peuvent pas converger toutes les deux, sinon ce serait aussi le cas de $\sum |u_n|$.
   Puisque $\sum u_n$ converge, $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ ne peuvent pas être de natures différentes.
   Et donc les deux séries à termes positifs $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ divergent. En particulier, leurs sommes partielles tendent vers $+\infty$.
   Notons alors $A = \{k \in \mathbf{N} \mid a_k \geqslant 0\}$ et $B = \{k \in \mathbf{N} \mid a_k < 0\}$, qui sont donc deux ensembles infinis[19].

   Soit à présent $\ell \in \mathbf{R}$. On construit par récurrence une permutation $\sigma$ de $\mathbf{N}$ en posant : $\sigma(0) = 0$, et pour tout $n \geqslant 1$ :

   - si $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_{\sigma(k)} < \ell$, alors $\sigma(n) = \min A \setminus \{\sigma(i), 0 \leqslant i \leqslant n-1\}$
   - sinon, on pose $\sigma(n) = \min B \setminus \{\sigma(i), 0 \leqslant i \leqslant n-1\}$.

   Cette définition a bien du sens puisque $A$ et $B$ étant infinis, on ne va jamais épuiser l'un des deux ensembles.
   Il faut travailler un peu plus pour prouver qu'on a bien une permutation de $\mathbf{N}$, mais l'idée est que les sommes partielles de $\sum u_n^+$ et de $\sum u_n^-$ tendant vers $+\infty$, les $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_{\sigma(k)}$ ne peuvent rester indéfiniment supérieurs ou inférieurs à $\ell$, et font toujours des «allers-retours» entre $]-\infty, \ell[$ et $]\ell, +\infty[$. Et donc $\sigma$ va faire des allers-retours entre $A$ et $B$, et donc finir par prendre une fois chaque valeur de $\mathbf{N}$.

**Détails**
Si $u_n \geqslant 0$, alors $u_n = u_n^+$ et $u_n^- = 0$.
Et si $u_n \leqslant 0$, alors $u_n^+ = 0$ et $u_n^- = -u_n$.

[18] Et donc converge.

[19] Sinon l'une des séries ci-dessus serait presque nulle, et donc convergente.

Enfin, il reste à prouver que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Soit alors $\varepsilon > 0$. Puisque $\sum a_n$ converge, $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|a_n| \leqslant \varepsilon$.
Et alors si $n_1 = \displaystyle\max_{k\in[\![0,n_0]\!]} \sigma^{-1}(k)$, alors pour $n \geqslant n_1$, $|a_{\sigma(n)}| \leqslant \varepsilon$.
Encore une fois sans donner tous les détails, on prouve alors qu'à chaque changement de signe de $u_{\sigma(n)}$, pour $n \geqslant n_1$, on a alors $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$.

**Chgt de signe** — Les changements de signe dont on parle sont les $k$ tels que $\sigma(k-1) \in A$ et $\sigma(k) \in B$ ou le contraire.

Et en travaillant encore un peu, pour tout $n \geqslant n_1$, $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$.

Et donc on a bien $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

## SOLUTION DE L'EXERCICE 28.23

Supposons par l'absurde que cette série converge. Alors il en est de même de la série de terme général $-\ln\left(1 - \dfrac{1}{p_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{p_n}$.

Mais les sommes partielles de cette série sont les $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} -\ln\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$, dont l'exponentielle est $\displaystyle\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{1-p_i^{-1}}$. Ainsi, $\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{1-p_i^{-1}}\right)_N$ doit converger.

Puisque $0 \leqslant p_i^{-1} < 1$, $\dfrac{1}{1-p_i^{-1}}$ est la somme de la série géométrique de raison $p_i^{-1}$, et donc[20] pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} p_i^{-k} = 1 + \frac{1}{p_i} + \cdots + \frac{1}{p_i^n} \leqslant \frac{1}{1-p_i^{-1}}.$$

[20] Pour une suite à termes positifs, les sommes partielles tendent vers la somme **en croissant.**

Et donc

$$\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{1-p_i^{-1}} \geqslant \prod_{i=1}^{N}\sum_{k=0}^{N} p_i^{-k} = \left(1 + \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_1^N}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{p_N} + \cdots + \frac{1}{p_N^N}\right).$$

Si on développe ce dernier produit, on obtient une somme d'inverses de nombres entiers. Plus précisément, on obtient la somme des inverses des entiers dont tous les facteurs premiers sont inférieurs ou égaux à $p_N$ et dont les valuations $p$-adiques sont toutes inférieures ou égales à $N$.
Mais en particulier on obtient ainsi les inverses de tous les entiers inférieurs ou égaux à $N$. En effet, $p_N > N$, et donc tous les entiers inférieurs à $N$ n'ont que des diviseurs premiers inférieurs strictement à $p_N$. Et de plus, le plus petit entiers dont une valuation dépasse $N$ est $2^{N+1}$, qui est (bien) plus grand que $N$.

Donc on a $\displaystyle\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{1-p_i^{-1}} \geqslant \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i}$, qui est la somme partielle d'ordre $N$ de la série harmonique.

**Rappel** — La série harmonique diverge, donc étant à termes positifs, c'est que ses sommes partielles tendent vers $+\infty$.

Donc $\displaystyle\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{1-p_i^{-1}} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Ceci contredit notre hypothèse de départ, donc $\sum \frac{1}{p_n}$ diverge.