TD 27 : Intégration

▸ Fonctions uniformément continues, fonctions en escalier, continues par morceaux

Exercice 27.1 Prouver que la fonction ln n'est pas uniformément continue sur $\mathbf{R}_+^*$. L'est-elle sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$, $a > 0$? PD

Exercice 27.2 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ uniformément continue. Prouver que si $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (la première limite étant une limite de suite, la seconde étant une limite de fonction). AD
Ce résultat est-il encore vrai si on remplace uniformément continue par continue ?

Exercice 27.3 Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b])$ positive sauf en un nombre fini de points. PD
Prouver que pour $x \in [a,b]$, si $f(x) < 0$, alors x appartient à toute subdivision adaptée à f.

Exercice 27.4 Montrer que $\mathscr{C}_m([a,b],\mathbf{R}) = \mathscr{C}([a,b],\mathbf{R}) + \mathscr{E}([a,b],\mathbf{R})$ (le + désignant la somme de sous-espaces vectoriels). AD

▸ Propriétés de l'intégrale, calculs

Exercice 27.5 Un peu de subtilité dans les inégalités PD
Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx$.

Exercice 27.6 Déterminer un équivalent, lorsque $x \to +\infty$, de $\displaystyle\int_0^x \lfloor t \rfloor\,dt$. PD

Exercice 27.7 Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire. PD
Soit $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbf{R})$. Prouver que $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt\right| = \displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt$ si et seulement si f est de signe constant sur $[a,b]$.

Exercice 27.8 Donner un équivalent lorsque $x \to +\infty$ de $\displaystyle\int_0^x |\sin t|\,dt$. PD

Exercice 27.9 Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, et telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}$. PD
Montrer que f possède un point fixe.

Exercice 27.10 Soit $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbf{R})$. Montrer que $g : x \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\sin(xt)\,dt$ est lipschitzienne sur $\mathbf{R}$. PD

Exercice 27.11 Soit $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbf{R})$, à valeurs positives. Prouver que AD

$$\|f\|_\infty = \lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f(t)^n\,dt\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 27.12 Première formule de la moyenne AD
Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbf{R}$, avec g positive.
Prouver qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$.

Exercice 27.13 Majoration de l'erreur dans la méthode du point milieu AD
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$. On pose $c = \frac{a+b}{2}$.
On pose $\varphi : x \mapsto f(c) + (x-c)f'(c)$. *Peut-être aurez-vous reconnu l'équation de la tangente à f au point d'abscisse c ?*
On note F une primitive de $f - \varphi$ sur $[a,b]$.

1. Montrer que $\forall x \in [a,b]$, $F(x) = F(c) + \displaystyle\int_c^x \frac{(x-t)^2}{2} f''(t)\,dt$.
2. Prouver alors que $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{24}\|f''\|_\infty$.
3. En déduire une majoration de l'erreur dans la méthode du point milieu.

Exercice 27.14 Lemme de Riemann-Lebesgue D

Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a,b]$. On souhaite prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(nt)\,dt = 0$.

1. Commencer par traiter le cas où f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$.
2. Traiter le cas d'une fonction en escaliers.
3. Traiter le cas général à l'aide du théorème d'approximation.

Exercice 27.15 Soit $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbf{R})$. D

1. On suppose que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = 0$. Prouver que f s'annule au moins une fois sur $[a,b]$.
2. On considère à présent $n \in \mathbf{N}$, et on suppose que $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\displaystyle\int_a^b t^k f(t)\,dt = 0$.
   Montrer par l'absurde que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $[a,b]$. On pourra notamment considérer des intégrales de la forme $\displaystyle\int_a^b f(t)Q(t)\,dt$ où Q est un polynôme de $\mathbf{R}_n[X]$ bien choisi.

► Fonctions définies par des intégrales

Exercice 27.16 Soit f continue sur $\mathbf{R}$. Montrer que la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_{2x}^{x^2} f(t)\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et donner sa dérivée. F

Même question pour $h : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t+x)\,dt$.

Exercice 27.17 Soit f continue sur $\mathbf{R}$ et g définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = f(x)\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$. AD

Montrer que si g est décroissante sur $\mathbf{R}$, alors f est nulle.

Exercice 27.18 Soit f continue sur $]-1,1[$ à valeurs réelles. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x tf(t)\,dt$. PD

Exercice 27.19 Un peu d'algèbre linéaire PD

Pour tout $f \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R})$, on définit une fonction $T(f)$ par $\forall x \in \mathbf{R}$, $T(f)(x) = x\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

1. Prouver que $T : f \mapsto T(f)$ est un endomorphisme de $\mathscr{C}^0(\mathbf{R})$.
2. Est-ce que T est injectif ? Surjectif ?

Exercice 27.20 Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ continue. On définit $F : [0,1] \to \mathbf{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \min(x,t)f(t)\,dt$. AD

1. Prouver que F est de classe $\mathscr{C}^2$ et calculer sa dérivée seconde.
2. En déduire que $\forall x \in [0,1]$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x \left(\int_u^1 f(t)\,dt\right)du$.

Exercice 27.21 Une intégrale à paramètre D

Pour $x \geqslant 0$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\sqrt{x+\cos t}\,dt$. Dans la suite, on fixe $x_0 > 0$.

1. Prouver que pour tout $t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\forall h \in \left[\frac{1-x_0}{2},\frac{x_0-1}{2}\right]$,

$$\left|\sqrt{x_0+h+\cos t}-\sqrt{x_0+\cos t}-\frac{h}{2\sqrt{x_0+\cos t}}\right| \leqslant \frac{h^2}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\left(\sqrt{1+x_0+2\cos t}\right)^3}.$$

2. En déduire que F est dérivable sur $]1,+\infty[$, et que

$$\forall x \in]1,+\infty[,\ F'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{2\sqrt{x+\cos t}}.$$

▸ Formules de Taylor

Exercice 27.22 Montrer que pour tout $x \in [0, \pi]$, $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$. F

Exercice 27.23 Un grand classique PD

Prouver que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|e^x - 1 - x| \leqslant \dfrac{x^2}{2} e^{|x|}$.

Exercice 27.24 Prouver que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\cos x = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!}$. PD

Exercice 27.25 Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$, telle que $\forall n \in \mathbf{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$. AD
On suppose de plus qu'il existe $A > 0$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $\sup\limits_{\mathbf{R}} |f^{(n)}| \leqslant A^n n!$.

Prouver que f est nulle sur $\left]-\dfrac{1}{A}, \dfrac{1}{A}\right[$, puis qu'elle est nulle sur $\mathbf{R}$.

Exercice 27.26 Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. Pour $n \geq 1$, on pose AD

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

Montrer que (u_n) converge vers $\exp\left(\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt\right)$.

▸ Sommes de Riemann

Exercice 27.27 Déterminer les limites des suites suivantes : PD

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2 + k^2}$
2. $u_n = \displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$
3. $u_n = \displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \left(e^{k+n}\right)^{\frac{1}{n}}$
4. $u_n = \dfrac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}$.

Exercice 27.28 Donner un équivalent de $u_n = \sqrt{1}\sqrt{n-1} + \sqrt{2}\sqrt{n-2} + \cdots + \sqrt{n-2}\sqrt{2} + \sqrt{n-1}\sqrt{1}$. AD

Exercice 27.29 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ définie par $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)$. PD

Exercice 27.30 Déterminer un équivalent simple de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$. AD

Exercice 27.31 Déterminer la limite lorsque $n \to +\infty$ de $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2n} = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$. PD

($\star$) Retrouver alors la limite de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Exercice 27.32 Intégrale de Poisson D

Déterminer les valeurs de a pour lesquelles $\displaystyle\int_0^\pi \ln\left(a^2 - 2a\cos(x) + 1\right) dx$ est bien définie, et calculer la valeur de cette intégrale en utilisant des sommes de Riemann.

Exercice 27.33 (Oral X) D

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, à valeurs strictement positives, et soit $n \in \mathbf{N}^*$.

1. Montrer qu'il existe une unique subdivision $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ de $[a, b]$ telle que $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$,
$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\, dt = \frac{1}{n} \int_a^b f(t)\, dt.$$
2. Déterminer alors la limite, lorsque $n \to +\infty$, de $\displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f(x_k)$.

Correction des exercices du TD 27

Solution de l'exercice 27.1

Soit $\varepsilon > 0$, et soit $x_0 \in \mathbf{R}_+^*$.
Cherchons pour quelles valeurs de $h \geqslant 0$ on a $|\ln(x_0+h) - \ln(x_0)| \leqslant \varepsilon$.
Pour $h \geqslant 0$, on a, par croissance de ln, $|\ln(x_0+h) - \ln(x_0)| = \left|\ln\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)\right| = \ln\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)$.
Et donc

$$\begin{aligned} |\ln(x_0+h) - \ln(x_0)| \leqslant \varepsilon &\Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right) \leqslant \varepsilon \\ &\Leftrightarrow 1+\frac{h}{x_0} \leqslant e^\varepsilon \\ &\Leftrightarrow h \leqslant x_0\left(e^\varepsilon - 1\right). \end{aligned}$$

Supposons par l'absurde que ln soit uniformément continue sur $\mathbf{R}_+^*$, et prenons donc $\varepsilon = \ln(2)$, de sorte que $e^\varepsilon - 1 = 1$.
Soit alors η tel que $\forall x, y \in \mathbf{R}_+^*$, $|x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |\ln(x) - \ln(y)| \leqslant \ln(2)$. Prenons alors $x_0 = \frac{\eta}{2}$.
Par le calcul conduit précédemment, avec $h = \eta$, on n'a pas $h \leqslant x_0$, donc $|\ln(x_0+h) - \ln(x_0)| > \varepsilon$.
Mais dans le même temps, $|(x_0+h) - x_0| \leqslant \eta$, si bien que $|\ln(x_0+h) - \ln(x_0)| \leqslant \varepsilon$. D'où une contradiction, et donc la fonction ln n'est pas uniformément continue sur $\mathbf{R}_+^*$.

Donnons un autre argument plus général : une fonction uniformément continue sur un intervalle **borné** doit y être bornée.
Ici, si $f = \ln$ était uniformément continue, alors il existerait $\eta > 0$ tel que $\forall (x,y) \in \mathbf{R}_+^*$, $|x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant 1$.
Alors, pour $x \in [1-\eta, 1]$, $|f(x) - f(1)| \leqslant 1$.
Pour $x \in [1-2\eta, 1]$, $|f(x) - f(1)| \leqslant |f(x) - f(1-\eta)| + |f(1-\eta) - f(1)| \leqslant 2$.
Et on prouve ainsi que pour tout $k \in \mathbf{N}$ tel que $1-k\eta > 0$, alors $\forall x \in \mathbf{R}_+^* \cap [1-(k+1)\eta, 1-k\eta]$, $|f(x) - f(1)| \leqslant k$.
En particulier, pour $k = \left\lceil \frac{1}{\eta} \right\rceil - 1$, c'est-à-dire si k est le plus petit entier tel que $1-(k+1)\eta \leqslant 0$, alors $\forall x \in]0,1]$, $|f(x) - f(1)| \leqslant k$.
Donc f serait bornée sur $]0,1]$, ce qui n'est pas le cas puisque $\ln(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$.

En revanche, sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$, la fonction ln est uniformément continue.
En effet, elle est dérivable, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$, qui est donc bornée par $\frac{1}{a}$.
Et donc[1] f est $\frac{1}{a}$-lipschitzienne, donc uniformément continue.

Détails — On a ici choisi (arbitrairement) $\varepsilon = 1$ dans la définition de l'uniforme continuité.

Idée — La formulation est un peu désagréable juste pour ne pas se retrouver à parler du logarithme d'un nombre négatif. Mais l'idée est juste qu'on peut recouvrir $]0,1]$ à l'aide d'un nombre fini d'intervalle de longueur η.

[1] C'est l'inégalité des accroissements finis.

Solution de l'exercice 27.2

Posons $\varepsilon = 1$. La fonction f étant uniformément continue, il existe $\eta > 0$ tel que pour $|x-y| \leqslant \eta$, $|f(x) - f(y)| \leqslant 1$.
Soit alors $k \in \mathbf{N}$ tel que $k\eta > 1$.
Pour $x \in \mathbf{R}$, notons alors $n = \lfloor x \rfloor$, $h = \frac{x-n}{k}$.
Alors on a

$$\begin{aligned} |f(n) - f(x)| &= |f(n) - f(n+h) + f(n+h) - f(n+2h) + \dots + f(x-(k-1)h) - f(x)| \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{k-1} |f(n+ih) - f(n+(i+1)h)| \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{k-1} 1 \leqslant k. \end{aligned}$$

Autrement dit — On peut recouvrir $[0,1]$ à l'aide de k segments de longueur η.

On coupe $[n,x]$ en k segments de même longueur.

On a $h \leqslant \frac{1}{k} < \eta$.

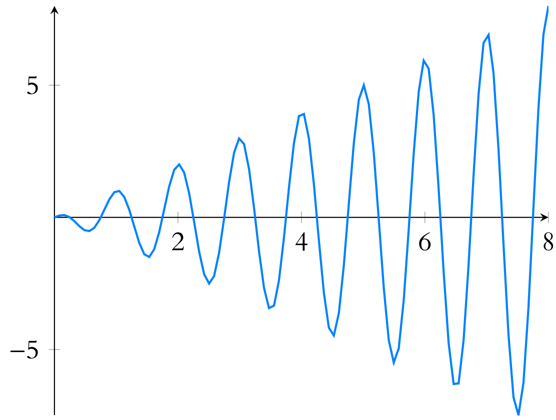
Et en particulier, $f(x) \geqslant f(n) - k$.

À présent, soit $A \geqslant 0$. Alors il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow f(n) \geqslant A + k.$$

Et alors, pour tout $x \geqslant n_0$, on aura $\lfloor x \rfloor \geqslant n_0$, et donc $f(x) \geqslant f(\lfloor x \rfloor) - k \geqslant A$.
On reconnaît bien là la définition de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Le résultat est faux pour des fonctions qui seraient uniquement continues. Par exemple la fonction $x \mapsto x\cos(2\pi x)$ est telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, mais pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f\left(n + \frac{1}{2}\right) = 0$, si bien que la fonction f n'a pas de limite en $+\infty$.



Solution de l'exercice 27.3

Supposons par l'absurde qu'il existe une subdivision σ : $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ adaptée à f et $x \notin \sigma$ tel que $f(x) < 0$.
Notons alors $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $x_k < x < x_{k+1}$.
Par continuité de f sur $]x_k, x_{k+1}[$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in]x_k, x_{k+1}[\cap]x-\eta, x+\eta[$, $f(t) < 0$.
Ceci contredit alors le fait que f est positive sauf en un nombre fini de points.
Donc tout réel tel que $f(x) < 0$ appartient forcément à toute subdivision adaptée à f.

Remarque
Un tel point est donc un point de discontinuité de f.

Solution de l'exercice 27.4

Puisque nous savons déjà que $\mathscr{C}_m([a,b],\mathbf{R})$ contient les deux sous-espaces vectoriels $\mathscr{C}([a,b],\mathbf{R})$ et $\mathscr{E}([a,b],\mathbf{R})$, il s'agit de prouver que $\mathscr{C}_m([a,b],\mathbf{R}) = \mathscr{C}([a,b],\mathbf{R}) + \mathscr{E}([a,b],\mathbf{R})$.

Rappel
Si F et G sont deux sev de E, alors $F+G$ est le plus petit sev de E qui contient à la fois F et G.

Autrement dit, il s'agit de prouver que toute fonction continue par morceaux est somme d'une fonction continue et d'une fonction en escalier.

Soit donc $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbf{R})$ une fonction continue par morceaux, et soit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f.
Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, notons f_k le prolongement par continuité[2] de $f_{|]x_k, x_{k+1}[}$ à $[x_k, x_{k+1}]$, qui est donc une fonction continue sur $[x_k, x_{k+1}]$.
On définit alors une fonction ψ sur $[a,b]$ de la manière suivante : pour $x \in [x_0, x_1]$, $\psi(x) = f_0(x)$.
Puis pour $x \in]x_1, x_2]$, $\psi(x) = f_1(x) - f_1(x_1) + f_0(x_1)$. Alors ψ est continue en x_1, puisque $\lim\limits_{x\to x_1^-} \psi(x) = \lim\limits_{x\to x_1^-} f_0(x) = f_0(x_1) = \psi(x_1)$ et que

$$\lim_{x\to x_1^+} \psi(x) = f_1(x_1) - f_1(x_1) + f_0(x_1) = \psi(x_1).$$

Pour $x \in]x_2, x_3[$, on pose alors $\psi(x) = f_2(x) - f_2(x_2) + f_1(x_2) - f_1(x_1) + f_0(x_1)$.
Et ainsi de suite : sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}]$, ψ est égale à f_k plus une constante, la constante étant choisie de manière à garantir la continuité de ψ en x_k.
Si vous voulez une formule générale, on a, pour tout $x \in]x_k, x_{k+1}[$,

$$\psi(x) = f_k(x) - f_k(x_k) + \sum_{i=1}^{k-1} \left(f_{i-1}(x_i) - f_i(x_i)\right).$$

Il est alors clair que ψ est continue sur $]x_k, x_{k+1}[$ car f_k l'est, et on a alors, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\lim_{x\to x_k^-} \psi(x) = f_{k-1}(x_k) - f_{k-1}(x_{k-1}) + \sum_{i=1}^{k-2}(f_{i-1}(x_i) - f_i(x_i)) = \sum_{i=1}^{k-1}(f_{i-1}(x_i) - f_i(x_i))$$

[2] Rappelons que ce prolongement par continuité existe par définition même d'une fonction en escalier.

et

$$\lim_{x \to x_k^+} \psi(x) = f_k(x_k) - f_k(x_k) + \sum_{i=1}^{k-1} (f_{i-1}(x_i) - f_i(x_i))$$

Posons alors $\varphi = f - \psi$. Puisque sur chacun des $]x_k, x_{k+1}[$, ψ est égale à f plus une constante[3], φ est constante sur $]x_k, x_{k+1}[$, et donc il s'agit bien d'une fonction en escaliers[4]

[3] Dépendant tout de même de k.
[4] Et la subdivision qui était adaptée à f se trouve alors également adaptée à φ.

Ainsi, nous venons bien de prouver que $f = \psi + \varphi \in \mathscr{C}([a,b],\mathbf{R}) + \mathscr{E}([a,b],\mathbf{R})$.

Solution de l'exercice 27.5

Pour $x \in [0,1]$, on a $\dfrac{x^n}{1+x^n} \leqslant x^n$, et donc par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx \leqslant \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}.$$

D'autre part, par positivité de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,d \geqslant 0$.

Donc par le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx = 0$.

Solution de l'exercice 27.6

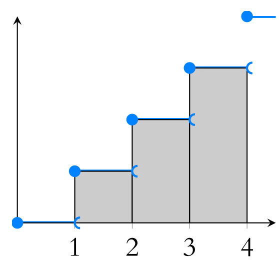
Commençons par noter que par la relation de Chasles,

$$\int_0^x \lfloor t \rfloor\,dt = \int_0^{\lfloor x \rfloor} \lfloor t \rfloor\,dt + \int_{\lfloor x \rfloor}^x \lfloor t \rfloor\,dt.$$

Le calcul de la première intégrale est sans difficulté[5] : pour $n \in \mathbf{N}$,

[5] Et s'interprète bien graphiquement.

$$\begin{aligned}\int_0^n \lfloor t \rfloor\,dt &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} \lfloor t \rfloor\,dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} k\,dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}.\end{aligned}$$



Donc $\displaystyle\int_0^{\lfloor x \rfloor} \lfloor t \rfloor\,dt = \frac{\lfloor x \rfloor(\lfloor x \rfloor - 1)}{2}$.

Notons que ceci équivaut, quand $x \to +\infty$ à $\dfrac{\lfloor x \rfloor^2}{2}$. Comme de plus il est classique[6] que $x \underset{x\to+\infty}{\sim} \lfloor x \rfloor$, c'est donc équivalent à $\dfrac{x^2}{2}$.

[6] Revenir à la définition de la partie entière pour le prouver.

Par ailleurs, la seconde intégrale vérifie

$$0 \leqslant \int_{\lfloor x \rfloor}^x \lfloor t \rfloor\,dt \leqslant \int_{\lfloor x \rfloor}^x \lfloor x \rfloor\,dt \leqslant \lfloor x \rfloor \underbrace{(x - \lfloor x \rfloor)}_{\leqslant 1} \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$

Et donc en particulier, $\displaystyle\int_{\lfloor x \rfloor}^x \lfloor t \rfloor\,dt \underset{x\to+\infty}{=} O(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{x^2}{2}\right)$.

Et donc au final,

$$\int_0^x \lfloor t \rfloor\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

Alternative : plutôt que de calculer directement l'intégrale, on peut noter que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $t - 1 < \lfloor t \rfloor \leqslant t$.
Et donc par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^x (t-1)\,dt \leqslant \int_0^x \lfloor t \rfloor\,dt \leqslant \int_0^x t\,dt$$

soit encore
$$\frac{x^2}{2} - x \leqslant \int_0^x \lfloor t \rfloor \, dt \leqslant \frac{x^2}{2}.$$
Et puisque $\frac{x^2}{2} - x \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^2}{2}$, on a donc bien
$$\int_0^x \lfloor t \rfloor \, dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

Solution de l'exercice 27.7

Vous aurez sans doute reconnu que ce résultat généralise le résultat sur le cas d'égalité[7] dans l'inégalité triangulaire classique, l'intégrale étant à voir comme une sorte de somme infinie.

[7] Lorsque tous les termes sont de même signe.

Si f est de signe constant, le résultat est évident.

Pour la réciproque, supposons $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \int_a^b |f(t)|\,dt$.

Supposons par exemple que $\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$.

Alors $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b |f(t)|\,dt \Leftrightarrow \int_a^b (|f(t)| - f(t))\,dt = 0$.
Mais la fonction $t \mapsto |f(t)| - f(t)$ est continue et positive sur $[a,b]$, donc son intégrale est nulle si et seulement si il s'agit de la fonction nulle. Soit si et seulement si $f = |f|$, ce qui est le cas si et seulement si f est positive.

On prouve de même que si $\int_a^b f(t)\,dt \leqslant 0$, alors $f = -|f|$ est négative.

Solution alternative : notons $f^+ = \dfrac{f+|f|}{2}$ et $f^- = \dfrac{|f|-f}{2}$, qui sont deux fonctions continues, à valeurs positives[8], telles que $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$.

[8] Car $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$.

On a alors, par croissance de l'intégrale, $\int_a^b f^+(t)\,dt \geqslant 0$ et $\int_a^b f^-(t)\,dt \geqslant 0$.

Si $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \int_a^b |f(t)|\,dt$, alors
$$\left|\int_a^b f^+(t)\,dt - \int_a^b f^-(t)\,dt\right| = \int_a^b f^+(t)\,dt + \int_a^b f^-(t)\,dt = \left|\int_a^b f^+(t)\,dt\right| + \left|\int_a^b f^-(t)\,dt\right|.$$

Et donc il y a égalité dans l'inégalité triangulaire, si bien que $\int_a^b f^+(t)\,dt$ et $-\int_a^b f^-(t)\,dt$ sont de même signe.
Ce n'est possible que si l'une des deux est nulle.

Détails
On a déjà dit que $\int_{[a,b]} f^+$ et $\int_{[a,b]} f^-$ sont positives.

- Si $\int_a^b f^+(t)\,dt = 0$, alors puisqu'il s'agit d'une fonction continue de signe constant, c'est la fonction nulle, si bien que $f = -f^-$ est à valeurs négatives.
- Si $\int_a^b f^-(t)\,dt = 0$, alors pour les mêmes raisons, $f^- = 0$, donc $f = f^+$ est positive sur $[a,b]$.

Solution de l'exercice 27.8

Notons que la fonction $t \mapsto |\sin t|$ est π-périodique car $|\sin(x+\pi)| = |-\sin(x)| = |\sin(x)|$.
Ainsi, pour tout $k \in \mathbf{N}$,
$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)|\,dt = \int_0^\pi |\sin t|\,dt = \int_0^\pi \sin t\,dt = 2.$$

Détails
Pour prouver la première égalité, on peut procéder au changement de variable $t = x - k\pi$.

Dans ce qui suit, l'idée est que $\int_0^x |\sin t|\,dt$ doit être environ égal à l'aire d'une arche, fois le nombre d'arches qui se trouvent entièrement entre 0 et x.

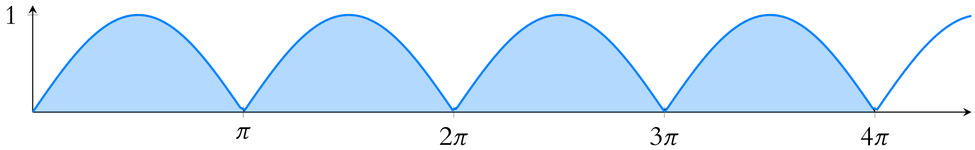


FIGURE 27.1 – Toutes les «arches» ont la même aire.

Soit donc $x \in \mathbf{R}$, et soit $k \in \mathbf{N}$ l'unique réel tel que $k\pi \leqslant x < (k+1)\pi$. Alors

$$\int_0^x |\sin t|\,dt = \sum_{i=0}^{k-1} \underbrace{\int_{i\pi}^{(i+1)\pi} |\sin t|\,dt}_{=2} + \int_{k\pi}^x |\sin t|\,dt = 2k + \int_{k\pi}^x |\sin t|\,dt.$$

Autrement dit
k est le nombre d'arches qui sont entièrement contenues entre les droites verticales d'abscisses 0 et x.

Mais, par croissance de l'intégrale,

$$0 \leqslant \int_{k\pi}^x |\sin t|\,dt \leqslant \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\,dt \leqslant 2.$$

Et donc

$$2k \leqslant \int_0^x |\sin t|\,dt \leqslant 2k+2.$$

Or, on a $\dfrac{x}{\pi} - 1 < k \leqslant \dfrac{x}{\pi}$, de sorte que

$$2\left(\frac{x}{\pi} - 1\right) \leqslant 2k \leqslant \int_0^x |\sin t|\,dt \leqslant 2k+2 \leqslant 2\frac{x}{\pi} + 2.$$

Remarque
Pour le dire autrement,
$$k = \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor.$$

En divisant par $\dfrac{2x}{\pi}$, il vient

$$1 - \frac{\pi}{x} \leqslant \frac{\pi}{2x}\int_0^x |\sin t|\,dt \leqslant 1 + \frac{\pi}{x}.$$

Par le théorème des gendarmes, on a donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi}{2x}\int_0^x |\sin t|\,dt = 1$ et donc

$$\int_0^x |\sin t| \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2x}{\pi}.$$

Généralisation *: ce résultat peut aisément se généraliser à toute fonction f qui soit continue et T-périodique, à condition que l'intégrale de f sur une période ne soit pas nulle*[9]*. On a alors*

$$\int_0^x f(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{T}\int_0^T f(t)\,dt.$$

[9] Faut de quoi l'équivalent qui suit serait un équivalent à 0.

SOLUTION DE L'EXERCICE 27.9

La fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ est continue sur $[0,1]$. Si elle ne s'annule pas, c'est-à-dire si f n'a pas de point fixe, elle est donc de signe constant.

Et par conséquent, $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt \neq 0$.

Rappel
L'intégrale d'une fonction de signe constant est nulle si et seulement si il s'agit de la fonction nulle.

Mais $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt - \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$, ce qui est absurde.
Donc g s'annule sur $[0,1]$, et donc f possède un[10] point fixe.

[10] Au moins un.

SOLUTION DE L'EXERCICE 27.10

Soit $(x,y) \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned}|g(x) - g(y)| &= \left|\int_a^b f(t)\sin(xt)\,dt - \int_a^b f(t)\sin(yt)\,dt\right| \\ &= \left|\int_a^b f(t)(\sin(xt) - \sin(yt))\,dt\right|\end{aligned}$$

Linéarité de l'intégrale.

$$\leqslant \int_a^b |f(t)(\sin(xt)-\sin(yt))|\,dt$$
$$\leqslant \int_a^b |f(t)|\cdot|\sin(xt)-\sin(yt)|\,dt$$
$$\leqslant \int_a^b |f(t)||xt-yt|\,dt$$
$$\leqslant |x-y|\int_a^b |tf(t)|\,dt.$$

Inégalité triangulaire.

Détails
La fonction sin est 1 - lipschitzienne. C'est une conséquence de l'inégalité des accroissements finis, puisque $|\sin'|\leqslant 1$.

Donc en notant $K=\displaystyle\int_a^b |tf(t)|\,dt$, qui est bien une constante indépendante de x et y, alors g est K-lipschitzienne sur $\mathbf{R}$.

Solution de l'exercice 27.11

Dans toute la suite, on note $M=\|f\|_\infty=\sup\limits_{[a,b]}|f|=\sup\limits_{[a,b]}f$. Notons que le cas $M=0$ correspondant à la fonction nulle[11], on peut supposer que $M>0$.
Puisque pour tout $t\in[a,b]$, $0\leqslant f(t)\leqslant\|f\|_\infty$, alors par croissance de l'intégrale,

$$0\leqslant\int_a^b f(t)^n\,dt\leqslant\int_a^b M^n\,dt\leqslant(b-a)M^n.$$

Et donc $0\leqslant\left(\displaystyle\int_a^b f(t)^n\,dt\right)^{1/n}\leqslant M(b-a)^{1/n}$.

⚠ Attention !
À ce stade, l'existence de la limite de $\left(\int_a^b f(t)^n\,dt\right)^{1/n}$ n'est pas encore prouvée.
Il n'est donc pas question de passer à la limite dans l'inégalité.

Puisque f est continue sur $[a,b]$, par le théorème des bornes atteintes, il existe $t_0\in[a,b]$ tel que $f(t_0)=M$.
Et en particulier, pour $\varepsilon>0$, il existe $\eta>0$ tel que pour tout $t\in[a,b]$,

$$|t-t_0|<\eta\Rightarrow|f(t)|\geqslant M-\varepsilon.$$

Notons alors $I=[a,b]\cap]t_0-\eta,t_0+\eta[$, et soit $\ell(I)>0$ sa longueur[12].
On a alors
$$\int_a^b f(t)^n\,dt\geqslant\int_I f(t)^n\,dt\geqslant\int_I(M-\varepsilon)^n\geqslant\ell(I)(M-\varepsilon)^n.$$

Et donc $\left(\displaystyle\int_a^b f(t)^n\,dt\right)^{1/n}\geqslant\ell(I)^{1/n}(M-\varepsilon)$.
Puisque $\ell(I)^{1/n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$, il existe $n_0\in\mathbf{N}^*$ tel que pour $n\geqslant n_0$, $\ell(I)^{1/n}\geqslant\dfrac{M-2\varepsilon}{M-\varepsilon}$.
Et donc pour $n\geqslant n_0$, $\left(\displaystyle\int_a^b f(t)^n\,dt\right)^{1/n}\geqslant M-2\varepsilon$.
Sur le même principe, $(b-a)^{1/n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$, donc il existe $n_1\in\mathbf{N}^*$ tel que pour $n\geqslant n_1$, $(b-a)^{1/n}\leqslant\dfrac{M+2\varepsilon}{M}$.
Et donc pour $n\geqslant\max(n_0,n_1)$,

$$M-2\varepsilon\leqslant\left(\int_a^b f(t)^n\,dt\right)^{1/n}\leqslant M+2\varepsilon.$$

Et donc nous reconnaissons bien là la définition d'une limite :

$$\|f\|_\infty=\left(\int_a^b f(t)^n\,dt\right)^{1/n}.$$

Terminologie
La quantité
$$\left(\int_a^b f(t)^p\,dt\right)^{1/p}$$
est appelée la «norme p», et le résultat de cet exercice justifie que l'on parle de «norme infinie» : c'est la limite lorsque $p\to+\infty$ des normes p.

Solution de l'exercice 27.12

Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt=0$, puisque g est continue et positive, c'est la fonction nulle. Et donc tout $c\in[a,b]$ convient.
On suppose donc que l'intégrale de g est non nulle.
La fonction f est continue sur le segment $[a,b]$, donc par le théorème des bornes atteintes,

[11] Pour laquelle le résultat est évidemment vrai, mais se passe de commentaires.

[12] Il s'agit encore bien d'un intervalle car intersection de deux intervalles.

elle possède un minimum m et un maximum M sur $[a,b]$.
Et alors[13], pour tout $t \in [a,b]$, $mg(t) \leqslant f(t)g(t) \leqslant Mg(t)$.
Donc par croissance de l'intégrale,

$$m\int_a^b g(t)\,dt \leqslant \int_a^b f(t)g(t)\,dt \leqslant M\int_a^b g(t)\,dt.$$

Et donc $m \leqslant \dfrac{\int_a^b f(t)g(t)\,dt}{\int_a^b g(t)\,dt} \leqslant M$.

Or m et M sont des valeurs atteintes[14] donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in [a,b]$ tel que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(t)g(t)\,dt}{\int_a^b g(t)\,dt} \Leftrightarrow \int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt.$$

[13] Et là la positivité de g est indispensable.

[14] Et pas seulement des minorants/majorants de f.

SOLUTION DE L'EXERCICE 27.13

1. Puisque f est $\mathscr{C}^2$, il en est de même de $f-\varphi$, et donc F est de classe $\mathscr{C}^3$.
Par la formule de Taylor avec reste intégral, on a donc pour tout $x \in [a,b]$,

$$F(x) = F(c) + F'(c)(x-c) + F''(c)(x-c) + \int_c^x F^{(3)}(t)\frac{(x-t)^2}{2}\,dt.$$

Mais $F'(c) = f(c) - \varphi(c) = 0$, et $F''(c) = f'(c) - \varphi'(c) = f'(c) - f'(c) = 0$.
Enfin, $F^{(3)} = f'' - \varphi''$, et φ étant affine[15], sa dérivée seconde est nulle.
On a donc bien la formule annoncée.

[15] C'est-à-dire polynomiale de degré 1.

2. On a

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,dt - (b-a)f(c) &= \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b \varphi(t)\,dt\\ &= \int_a^b (f-\varphi)(t)\,dt = F(b) - F(a)\\ &= \int_c^b \frac{(b-t)^2}{2}f''(t)\,dt - \int_c^a \frac{(a-t)^2}{2}f''(t)\,dt.\end{aligned}$$

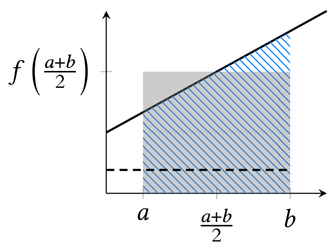


FIGURE 27.2– Pour une fonction affine, son intégrale sur un segment $[a,b]$ est égale à sa valeur en $\frac{a+b}{2}$ fois la longueur du segment. Si ceci peut se vérifier par le calcul, on le comprend bien graphiquement.

Mais on a

$$\left|\int_c^b \frac{(b-t)^2}{2}f''(t)\,dt\right| \leqslant \int_c^b \|f''\|_\infty \frac{(b-t)^2}{2}\,dt \leqslant \|f''\|_\infty\left[-\frac{(b-t)^3}{6}\right]_c^b \leqslant \|f''\|_\infty\frac{(b-a)^3}{48}.$$

Et de même, $\left|\int_c^a \frac{(a-t)^2}{2}f''(t)\,dt\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{48}\|f''\|_\infty$.
Et donc par inégalité triangulaire,

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leqslant \left|\int_c^b \frac{(b-t)^2}{2}f''(t)\,dt\right| + \left|\int_c^a \frac{(a-t)^2}{2}f''(t)\,dt\right| \leqslant \|f''\|_\infty\frac{(b-a)^3}{24}.$$

3. L'énoncé est un peu vague, et par méthode du point milieu, j'entends les sommes de Riemann associées à une subdivision pointée dont la subdivision est régulière, et où dans chaque petit intervalle on approche f par la la valeur qu'elle prend au point milieu de l'intervalle.
Il s'agit juste de noter que si $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ est la subdivision régulière de pas $\frac{b-a}{n}$, c'est-à-dire avec $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$, alors l'inégalité précédente vaut sur chacun des $[x_k, x_{k+1}]$ et donc

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\,dt - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt - (x_{k+1}-x_k)f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\right)\right|\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt - (x_{k+1}-x_k)f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\right|\end{aligned}$$

Inégalité triangulaire.

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x_{k+1}-x_k)^3}{24}\|f''\|_\infty$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^3}{24n^3}\|f''\|_\infty \leqslant \frac{(b-a)^3}{24n^2}\|f''\|_\infty.$$

Solution de l'exercice 27.14

1. Si f est de classe $\mathscr{C}^1$, alors on peut procéder à une intégration par parties : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\int_a^b f(t)\cos(nt)\,dt = \left[-f(t)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_a^b - \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\sin(nt)\,dt = \frac{f(a)\sin(na)-f(b)\sin(nb)}{n} - \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\sin(nt)\,dt.$$

Il est clair que $\dfrac{f(a)\sin(na)-f(b)\sin(nb)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et par ailleurs, puisque f' est continue sur $[a,b]$, elle y est bornée.
Notons M un majorant de $|f'|$ sur $[a,b]$. Alors

$$\left|\int_a^b f'(t)\sin(nt)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f'(t)\sin(nt)|\,dt \leqslant \int_a^b M\,dt \leqslant M(b-a).$$

Et donc en particulier, $\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_a^b f'(t)\sin(nt)\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On en déduit donc bien le résultat annoncé, à savoir que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt = 0$.

2. Commençons par le cas très particulier d'une fonction constante égale à λ : on a alors

$$\int_a^b \lambda\cos(nt)\,dt = \underbrace{\frac{\lambda}{n}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}\underbrace{(\sin(nb)-\sin(na))}_{\text{borné}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dans le cas d'une fonction en escalier f, notons $x_0 < x_1 < \cdots < x_k$ une subdivision adaptée à f, et soient $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ les réels tels que $\forall t \in]x_{i-1},x_i[,\ f(t)=\lambda_i$.

> **Remarque**
> Les valeurs de f aux x_i n'ayant aucune incidence sur la suite, nous ne prenons pas la peine de les nommer.

On a alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\cos(nt)\,dt = \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i}\lambda_i\cos(nt)\,dt$.

Or nous venons de prouver que chacune de ces intégrales tend vers 0, donc par somme de limites, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(nt)\,dt = 0$.

3. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe φ une fonction en escaliers telle que $\|f-\varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$. On a alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

> **Rappel**
> Cela signifie tout simplement que pour tout $t \in [a,b]$,
> $$|f(t)-\varphi(t)| \leqslant \varepsilon.$$

$$\int_a^b f(t)\cos(nt)\,dt = \int_a^b (\varphi(t)+f(t)-\varphi(t))\cos(nt)\,dt$$
$$= \int_a^b \varphi(t)\cos(nt)\,dt + \int_a^b (f(t)-\varphi(t))\cos(nt)\,dt.$$

Nous savons déjà, par la deuxième question, que la première intégrale est de limite nulle.

En particulier, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $\left|\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\cos(nt)\,dt\right| \leqslant \varepsilon$.

Par ailleurs, par inégalité triangulaire,

$$\left|\int_a^b (f(t)-\varphi(t))\cos(nt)\,dt\right| \leqslant \int_a^b \varepsilon\,dt \leqslant (b-a)\varepsilon.$$

Et donc pour $n \geqslant n_0$, $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\cos(nt)\,dt\right| \leqslant (b-a+1)\varepsilon$.

> **Remarque**
> Vous êtes grands maintenant, je n'explique plus pourquoi être inférieur à $(b-a+1)\varepsilon$ (alors que la définition de limite demande du ε) suffit. Assurez-vous tout de même que c'est clair pour vous, et sinon, demandez !

Et donc on a bien prouvé que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(nt)\,dt = 0$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 27.15

1. Supposons par l'absurde que f ne s'annule pas. Alors, étant continue, elle est de signe constant[16].
Or l'intégrale d'une fonction **continue** de signe constant est nulle si et seulement si il s'agit de la fonction nulle, ce qui est absurde ici.
Donc f s'annule au moins une fois.

[16] Rappelons qu'il s'agit là d'une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires.

2. Comme indiqué, procédons par l'absurde en supposant que f s'annule au plus n fois, en $x_1 < x_2 < \cdots < x_p$, avec $p \leqslant n$.
Alors f est de signe constant sur chacun des $]x_i, x_{i+1}[$. Quitte à enlever certains des x_i, supposons que f change de signe en chacun des x_i : le signe de f sur $]x_i, x_{i+1}[$ est l'opposé de celui du signe de f sur $]x_{i-1}, x_i[$ (avec également un changement de signe en x_1 et en x_p s'ils sont différents de a et b).

Considérons alors la fonction polynomiale $Q : x \mapsto \prod_{k=1}^{p}(x - x_k)$.
Elle ne s'annule qu'en les x_i, et et change de signe en tous les x_i, car ceux-ci sont de multiplicité 1.
Et donc $t \mapsto f(t)Q(t)$ est une fonction continue de signe constant, et donc son intégrale entre a et b est non nulle, du signe de $f(t)Q(t)$.

Détails
Un polynôme change de signe en une racine réelle α si et seulement si la multiplicité de α est impaire.

Mais par ailleurs, Q étant polynomiale de degré $p \leqslant n$, il existe des réels $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que $\forall t \in [a, b], Q(t) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k t^k$.
Et donc $\int_a^b f(t)Q(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \int_a^b t^k f(t)\,dt = 0$, ce qui est absurde.
Donc f s'annule au moins $n + 1$ fois sur $[a, b]$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 27.16

Soit $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$, qui par le théorème fondamental de l'analyse, est une primitive de f, et en particulier est de classe $\mathscr{C}^1$ puisque sa dérivée f est continue.
Alors par la relation de Chasles, $g(x) = F(x^2) - F(2x)$.
Par opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, il s'agit là d'une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, et sa dérivée est donnée par

$$g'(x) = 2xf(x^2) - 2f(2x).$$

Pour h, on ne peut s'en tirer directement de la même manière en raison de la présence du x à l'intérieur de l'intégrale.
En revanche, en commençant par un changement de variable affine, on a

$$h(x) = \int_x^{2x} f(u)\,du.$$

Et cette fois le même raisonnement s'applique, $h(x) = F(2x) - F(x)$, est de classe $\mathscr{C}^1$, avec $h'(x) = 2f(2x) - f(x)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 27.17

Notons $G(x) = \frac{1}{2}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2$.
Alors G est une fonction continue sur $\mathbf{R}$, dérivable, et de dérivée égale à g.
Notons qu'on a alors $g(0) = G(0) = 0$.
Supposons que g soit décroissante sur $\mathbf{R}$. Alors, pour $x \geqslant 0$, on a $g(x) \leqslant 0$, et donc G est décroissante sur $\mathbf{R}^+$. Or, $G(0) = 0$, donc $G(x) \leqslant 0$ pour $x \in \mathbf{R}_+$. Or, G est positive par définition, donc $G(x) = 0, \forall x \in \mathbf{R}_+$.
On en déduit que $\forall x \in \mathbf{R}_+, \int_0^x f(t)\,dt = 0$, et par dérivation[17], il vient $f(x) = 0, \forall x \in \mathbf{R}_+^*$, puis $f(0) = 0$ par continuité de f.

[17] C'est encore et toujours du théorème fondamental de l'analyse.

La même étude sur $\mathbf{R}_-$ permet d'arriver à la même conclusion, car on aura alors G croissante sur $\mathbf{R}_-$, avec $G(0) = 0$, donc $G = 0$ sur $\mathbf{R}_-$, et donc $f = 0$ sur $\mathbf{R}_-$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 27.18

Notons $F(x) = \displaystyle\int_0^x tf(t)\,dt$. Alors $F(0) = 0$, et par le théorème fondamental de l'analyse, F est une primitive de $x \mapsto xf(x)$ sur $]-1,1[$.
Puisque f est continue, elle possède un développement limité d'ordre 0 en 0 :

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{=} f(0) + o(1).$$

Et donc $xf(x) \underset{x\to 0^+}{=} f(0)x + o(x)$.

Mais par intégration de développement limité, $F(x) \underset{x\to 0}{=} F(0) + \dfrac{f(0)}{2}x^2 + o(x^2)$.

Puisque $F(0) = 0$, on a donc $\dfrac{F(x)}{x^2} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{f(0)}{2} + o(1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{f(0)}{2}$.

Solution de l'exercice 27.19

1. La linéarité ne pose pas de difficultés, mais il ne faut pas oublier de vérifier que $T(f)$ est bien un élément de $\mathscr{C}^0(\mathbf{R})$.
   Mais par le théorème fondamental de l'analyse, $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ est une primitive de f, et à ce titre est dérivable, donc continue.
   Puisque $x \mapsto x$ est encore continue, $T(f)$ est continue par produit de fonctions qui le sont.

Rappel
Un endomorphisme a, par définition, mêmes espaces de départ et d'arrivée.

2. Soit $f \in \operatorname{Ker} T$. Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = 0$.
   Et en particulier, pour tout $x \neq 0$, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = 0$.
   En particulier, en dérivant, la fonction $x \mapsto f(x)$ est nulle sur $\mathbf{R}^*$.
   Étant continue en 0, elle est également nulle en 0, et donc $f = 0$, si bien que f est injective.

   Le raisonnement tenu à la question 1 prouve que pour tout $f \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R})$, $T(f)$ est dérivable. Et donc si g est une fonction continue sur $\mathbf{R}$ et non dérivable[18], alors g ne possède pas d'antécédent par T, et donc T n'est pas surjective.

[18] Par exemple la fonction $x \mapsto |x|$

Solution de l'exercice 27.20

1. Par la relation de Chasles, on a

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_0^x \min(x,t)f(t)\,dt + \int_x^1 \min(x,t)f(t)\,dt = \int_0^x tf(t)\,dt + \int_x^1 xf(t)\,dt\\ &= \int_0^x tf(t)\,dt + x\int_x^1 f(t)\,dt.\end{aligned}$$

   Mais par le théorème fondamental de l'analyse, $x \mapsto \displaystyle\int_0^x tf(t)\,dt$ est une primitive[19]. de $x \mapsto xf(x)$.
   On prouve de même que $x \mapsto \displaystyle\int_x^1 f(t)\,dt = -\int_1^x f(t)\,dt$ est une primitive de $-f$.
   Donc déjà F est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et

$$F'(x) = xf(x) - xf(x) + \int_x^1 f(t)\,dt = \int_x^1 f(t)\,dt.$$

   Et donc par ce qui a été dit précédemment, F' est $\mathscr{C}^1$, et donc F est $\mathscr{C}^2$, avec $F''(x) = -f$.

[19] Nécessairement $\mathscr{C}^1$

2. On a $F(0) = \displaystyle\int_0^1 \min(0,t)f(t)\,dt = \int_0^1 0\,dt = 0$.
   Et donc

$$F(x) = F(0) + \int_0^x F'(u)\,du = \int_0^x \left(\int_u^1 f(t)\,dt\right) du.$$

Solution de l'exercice 27.21

1. Fixons $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et soit $f_t : x \mapsto \sqrt{x + \cos t}$.
   Alors f_t est $\mathscr{C}^2$ sur $]1,+\infty[$, avec $f_t'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+\cos t}}$ et $f_t''(x) = -\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{\sqrt{x+\cos t}^3}$.

En particulier, pour $h \in \left[\frac{1-x_0}{2}, \frac{x_0-1}{2}\right]$, alors $x_0 + h \geqslant \dfrac{1+x_0}{2}$, et un majorant de $|f''|$ sur $\left[\frac{1+x_0}{2}, +\infty\right[$ est

$$M = \frac{1}{4}\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1+x_0}{2}} + \cos t\right)^3} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\left(\sqrt{1+x_0+2\cos t}\right)^3}.$$

Et donc par l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée en x_0,

$$\left|f_t(x_0+h) - f_t(x_0) - hf_t'(x_0)\right| \leqslant \frac{|x_0+h-x_0|^2}{2}M$$

soit encore

$$\left|\sqrt{x_0+h+\cos t} - \sqrt{x_0+\cos t} - \frac{h}{2\sqrt{x_0+\cos t}}\right| \leqslant \frac{h^2}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\left(\sqrt{1+x_0+2\cos t}\right)^3}.$$

2. Pour prouver que F est dérivable, revenons au taux d'accroissement : soit $x_0 > 1$ fixé, et soit $h \in \left[\frac{1-x_0}{2}, \frac{x_0-1}{2}\right]$. Alors

$$\begin{aligned}\left|F(x_0+h) - F(x_0) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{h}{2\sqrt{x_0+\cos t}}\,dt\right| &\leqslant \int_0^{\pi/2} \left|\sqrt{x_0+h+\cos t} - \sqrt{x_0+\cos t} - \frac{h}{2\sqrt{x_0+\cos t}}\right| dt \\ &\leqslant \int_0^{\pi/2} \frac{h^2}{2\sqrt{2}}\frac{dt}{\left(\sqrt{1+x_0+2\cos t}\right)^3}.\end{aligned}$$

Et donc après division par $|h|$ pour $h \neq 0$, il reste

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - \int_0^{\pi/2}\frac{dt}{2\sqrt{x_0+\cos t}}\right| \leqslant \frac{h}{2\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\left(\sqrt{x_0+1+2\cos t}\right)^3}.$$

Notons que cette dernière intégrale ne dépend pas de h, donc lorsque $h \to 0$, il vient donc,

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \int_0^{\pi/2}\frac{dt}{2\sqrt{x_0+\cos t}}.$$

Donc F est dérivable en x_0, et $F'(x_0) = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{2\sqrt{x_0+\cos t}}$.
Et ceci étant vrai pour tout $x_0 \in]1, +\infty[$, on arrive bien à la conclusion annoncée par l'énoncé.

SOLUTION DE L'EXERCICE 27.22

Notons qu'il s'agit de déterminer si la courbe représentative de sin est située au dessus ou en dessous des courbes représentatives de ses développements limités d'ordre 3 et 5 en 0.
Les dérivées successives de sin sont données par $\sin' = \cos$, $\sin'' = -\sin$, $\sin^{(3)} = -\cos$, $\sin^{(4)} = \sin$, etc.
Et donc à l'ordre 3, on a, par la formule de Taylor avec reste intégral[20]

[20] Valable puisque le sin est une fonction $\mathscr{C}^\infty$.

$$\sin(x) - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) = \int_0^x \sin^{(4)}(t)\frac{(x-t)^3}{3!}\,dt = \int_0^x \sin(t)\frac{(x-t)^3}{3!}\,dt.$$

Mais pour $x \in [0, \pi]$ et $t \in [0, x]$, $\sin(t)\dfrac{(x-t)^3}{3!} \geqslant 0$, donc par croissance de l'intégrale, $\sin(x) - \left(x - \dfrac{x^3}{6}\right) \geqslant 0$.

À l'ordre 5, on a en revanche, $\sin(x) - \left(x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}\right) = \displaystyle\int_0^x \sin^{(6)}(t)\frac{(x-t)^5}{5!}\,dt = -\int_0^x \sin(t)\frac{(x-t)^5}{5!}\,dt$ qui est cette fois négatif.

Et donc $\sin(x) \leqslant x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$.

Solution de l'exercice 27.23

Notons $f(t) = e^t$, qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
Soit $x \in \mathbf{R}$. Par l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 appliquée entre 0 et x, si on note I le segment d'extrémités 0 et x et $M = \max_{t\in I} |f''(t)|$, il vient

$$|f(x) - f(0) - f'(0)x| \leqslant \frac{x^2}{2}M \Leftrightarrow |e^x - 1 - x| \leqslant \frac{x^2}{2}M.$$

Si $x \geqslant 0$, on a $M = e^x = e^{|x|}$, et donc l'inégalité souhaitée est démontrée.
Et si $x \leqslant 0$, alors le maximum de $f^{(2)}$ sur le segment $[x, 0]$ est $e^0 = 1$, et donc $M = 1 \leqslant e^{|x|}$, de sorte que

$$\forall x \in \mathbf{R},\ |e^x - 1 - x| \leqslant \frac{x^2}{2}e^{|x|}.$$

Danger !
Si $x \leqslant 0$, il ne s'agit pas réellement du segment $[0, x]$, mais plutôt du segment $[x, 0]$.
C'est l'une des subtilités de l'inégalité de Taylor-Lagrange, il faut prendre pour M un majorant de $f^{(n+1)}$ entre 0 et x.

Solution de l'exercice 27.24

Vous aurez bien évidemment reconnu que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$ est le $DL_{2n}(0)$ du cosinus.
Il s'agit donc de prouver que la différence entre $\cos(x)$ et ce développement limité tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
Or, par l'inégalité de Taylor-Lagrange, qui s'applique puisque cos est de classe $\mathscr{C}^{2n+1}$ pour tout n, on a, pour $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$,

$$\left|\cos(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right| \leqslant \sup_{t\in\mathbf{R}} |\cos^{2n+1}(t)|\frac{|x|^{2n}}{(2n)!} \leqslant \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}.$$

Mais par croissances comparées, ce majorant tend vers 0, et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \cos(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos(x).$$

Solution de l'exercice 27.25

Puisque f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, on peut utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange à tout ordre.
Soit donc $x \in \left]-\frac{1}{A}, \frac{1}{A}\right[$. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\left|f(x) - \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k}_{=0}\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}A^{n+1}(n+1)!}{(n+1)!} \leqslant (|x|A)^{n+1}.$$

Mais puisque $|x| < \frac{1}{A}$, la suite géométrique de raison $|x|A$ tend vers 0, et donc par passage à la limite, $|f(x)| = 0$, si bien que $f(x) = 0$.
Donc f est nulle sur $\left]-\frac{1}{A}, \frac{1}{A}\right[$.

La fonction f étant de classe $\mathscr{C}^\infty$, puisque toutes les $f^{(n)}$ sont nulles sur $\left]-\frac{1}{A}, \frac{1}{A}\right[$ et continues en $\frac{1}{A}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f^{(n)}\left(\frac{1}{A}\right) = 0$.
Considérons alors la fonction $g : x \mapsto f\left(x + \frac{1}{A}\right)$.
Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $g^{(n)}(0) = f^{(n)}\left(\frac{1}{A}\right) = 0$.
Et de plus, comme $g^{(n)}(x) = f^{(n)}\left(x + \frac{1}{A}\right)$, $\sup_{\mathbf{R}} |g^{(n)}| = \sup_{\mathbf{R}} |f^{(n)}| \leqslant A^n n!$.
Donc par ce qui a été dit précédemment, g est nulle sur $\left]-\frac{1}{A}, \frac{1}{A}\right[$, et par conséquent, f est nulle sur $\left]0, \frac{2}{A}\right[$.
De proche en proche on prouve ainsi que f est nulle sur tous les $\left]\frac{n}{A}, \frac{n+2}{A}\right[$. Et donc qu'elle est nulle sur $\mathbf{R}^+$.
Et de même, à l'aide de $x \mapsto f\left(x - \frac{1}{A}\right)$, on prouverait que f est nulle sur $\left]\frac{-2}{A}, 0\right[$, puis de proche en proche, sur $\mathbf{R}^-$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 27.26

Puisqu'on a un produit, commençons par passer au logarithme pour faire apparaître une somme :

$$\ln(u_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

Il y a toutefois un hic : ceci n'est possible que si tous les $1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ sont positifs.
Mais puisque f est continue sur $[0,1]$, par le théorème des bornes atteintes, il existe $M \in \mathbf{R}_+$ tel que pour tout $t \in [0,1]$, $|f(t)| \leqslant M$.
Et donc pour $n > M$ et tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\left|\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{1}{n}\frac{M}{n} < 1$.
Et donc tous les $1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ sont positifs.
Donc dans la suite on ne considère que n suffisamment grand, et on a alors

Autrement dit

Notre passage au logarithme ne vaut que pour les n suffisamment grand, mais par indifférence des premiers termes, ceci suffit pour déterminer la limite.

$$\ln(u_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

Il s'agit donc de prouver que ceci tend vers $\int_0^1 f(t)\,dt$.

On ne reconnaît pas directement une somme de Riemann, mais lorsque n est grand, $\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ doit être petit, et puisque $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on doit avoir $\ln\left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \simeq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.
Toutefois, on ne peut pas sommer les équivalents...

Méthode

Si on souhaite utiliser une formule de Taylor ici, c'est tout simplement car on souhaite «contrôler» (en l'occurrence ici majorer) l'écart entre $\ln(1+x)$ et son développement limité à l'ordre 1 (qui est x).
C'est précisément ce à quoi servent les formules de Taylor.

Utilisons plutôt l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 : pour tout $x \in [0,1]$, $|f(x)| \leq M$.

Alors la fonction $g : x \mapsto \ln(1+x)$ est $\mathscr{C}^2$ sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, avec $g'(x) = \frac{1}{1+x}$ et $g''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$.
Donc pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$,

$$\underbrace{|\,g(x) - g(0) - g'(0)x\,|}_{=\ln(1+x)-x} \leq \frac{(x-0)^2}{2!} \underbrace{\max_{-1/2\leq t\leq 1/2} \frac{1}{(1+t)^2}}_{=4} \leq 2x^2.$$

Remarque

On a alors
$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

Donc en particulier, pour n assez grand (pour que $\frac{M}{n} \leqslant \frac{1}{2}$), et pour $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\left|\ln\left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq 2\frac{1}{n^2} f\left(\frac{k}{n}\right)^2 \leqslant \frac{2M^2}{n^2}.$$

Et donc par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| &\leq \sum_{k=1}^{n} \left|\ln\left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{2M^2}{n^2} \\
&\leq \frac{2M^2}{n} \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = 0$.
Par ailleurs, on sait que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\,dt$. Donc par somme,

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + v_n = \int_0^1 f(t)\,dt.$$

Donc par continuité de l'exponentielle,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp\left(\int_0^1 f(t)\,dt\right).$$

Solution de l'exercice 27.27

1. On a $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$.

   On reconnaît alors des sommes de Riemann pour la fonction[21] $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ entre 0 et 1.

   Et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt = \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$.

2. On a directement une somme de Riemann, pour la fonction $x \mapsto \cos^2(\pi x)$, entre 0 et 1.
   Et donc
   $$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \cos^2(\pi t)\,dt = \int_0^1 \frac{1+\cos(2\pi t)}{2}\,dt = \frac{1}{2}.$$

3. On a $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}+1} = \frac{e^2}{n} + v_n$, où $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{1+\frac{k}{n}}$.
   On reconnaît là une somme de Riemann, de sorte que
   $$\lim_{n\to\infty} v_n = \int_0^1 e^{1+t}dt = e^2 - e.$$
   Puisque $\dfrac{e^2}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = e^2 - e$.

4. On a $u_n = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)}$ et donc
   $$\ln u_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1+\frac{i}{n}\right).$$
   On reconnaît alors une somme de Riemann, qui converge vers
   $$\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = \left[(1+x)\ln(1+x) - (1+x)\right]_0^1 = 2\ln 2 - 1.$$
   Et alors, par continuité de l'exponentielle, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = e^{2\ln 2-1} = \frac{4}{e}$.

[21] Continue.

Solution de l'exercice 27.28

On a
$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k}\sqrt{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{k}\sqrt{n-k} = n^2 \times \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n}}\sqrt{1-\frac{k}{n}}$$

On reconnaît alors une somme de Riemann : en posant $f : x \mapsto \sqrt{x}\sqrt{1-x}$, qui est continue sur $[0,1]$, on a $\dfrac{u_n}{n^2} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\,dt$.

Calculons donc cette intégrale :

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{4}-u^2}\,du$$
$$= 2\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{4}-u^2}du = \int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-(2u)^2}\,du.$$

Mise sous forme canonique suivie d'un changement de variable.

Intégrale d'une fonction paire.

Posons alors $v = 2u$, de sorte que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1-v^2}\,dv$. Le changement de variable $v = \sin t$ donne alors

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos(2t)+1)\,dt = \frac{\pi}{8}.$$

On en déduit que $\frac{u_n}{n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{8}$ et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi n^2}{8}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 27.29

Puisque nous avons un produit, préférons passer au logarithme : $\ln(u_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)$.

Et donc $\frac{1}{n}\ln(u_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)$ est une somme de Riemann pour la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x^2)$, continue sur $[0,1]$.

Donc $\frac{1}{n}\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx$.

Ne calculons pas cette intégrale, mais contentons-nous de remarquer qu'elle est strictement positive, car intégrale d'une fonction continue positive et non nulle[22].

[22] f s'annule uniquement en 0.

Et donc $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Par conséquent, en passant à l'exponentielle, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 27.30

On a $S_n = \sqrt{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} = n\sqrt{n}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$.

On reconnaît alors que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$ est une somme de Riemann pour la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ entre 0 et 1.

Donc $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \sqrt{t}\,dt = \left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$.

Et donc $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3}n\sqrt{n}$.

Remarque

Le résultat se généralise sans difficulté à $\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$, avec $\alpha > 0$.
Nous verrons d'autres moyens de le retrouver lorsque nous rencontrerons une méthode nommée «comparaison série/intégrale».

SOLUTION DE L'EXERCICE 27.31

On a $u_n = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$.

On reconnaît alors une somme de Riemann associée à la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ entre 0 et 1.

Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(2)$.

Notons $v_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, de sorte que $u_n = v_{2n} - v_n$.

Il est assez clair que (v_n) est croissante, et donc soit convergente, soit de limite égale à $+\infty$.
Si elle était convergente de limite ℓ, alors on aurait $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell - \ell = 0$, ce qui n'est pas le cas.
Donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 27.32

Cette intégrale (notons la $I(a)$ dans la suite) est bien définie lorsque $x \mapsto a^2 - 2a\cos(x)+1$ est strictement positif sur $[0,\pi]$.
Pour $x \in [0,\pi]$, notons $P_x : a \mapsto a^2 - 2a\cos(x) + 1$ qui est un polynôme du second degré en a. Son discriminant est $\Delta_x = 4\cos^2(x) - 4 = 4(\cos^2(x)-1)$, qui est négatif, de sorte que P_x est de signe constant. Et puisque son coefficient dominant est positif, il est positif.
Mieux : Δ_x est strictement négatif, et donc P_x ne s'annule pas, sauf pour $x = 0$ et $x = \pi$, auquel cas P_x possède une unique racine, qui est 1 (lorsque $x = 0$) ou -1 (lorsque $x = \pi$).
Donc l'intégrale $I(a)$ existe dès que $a \neq \pm 1$.

On a alors

$$I(a) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(a^2 - 2a\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right) = \frac{\pi}{n}\ln\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(a^2-2a\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right)\right).$$

Or les racines complexes du polynôme (en a) $a^2 - 2a\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1$ sont $e^{i\frac{k\pi}{n}}$ et $e^{-i\frac{k\pi}{n}}$.

Et donc
$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(a^2-2a\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right)=\prod_{k=0}^{n-1}\left(a-e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)\left(a-e^{-i\frac{k\pi}{n}}\right).$$
Il s'agit donc d'un polynôme de degré $2n$, qui possède 1 comme racine double[23] et dont les autres racines, toutes de multiplicité 1, sont les $e^{i\frac{k\pi}{n}}$ et $e^{-i\frac{k\pi}{n}}$, pour $k\in[\![1,n-1]\!]$.
On reconnaît alors toutes les racines $2n^{\text{èmes}}$ de l'unité, à l'exception de -1.
D'autre part, nous savons que
$$\prod_{\zeta\in\mathbf{U}_{2n}}(a-\zeta)=a^{2n}-1.$$
Et donc puisque $a\neq\pm1$,
$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(a^2-2a\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right)=\frac{a-1}{a+1}\prod_{\zeta\in\mathbf{U}_{2n}}(a-\zeta)=\frac{a-1}{a+1}(a^{2n}-1).$$
Et donc
$$I(a)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\left(a^{2n}-1\right)\right).$$
Donc déjà, si $|a|<1$, $a^{2n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et donc $\dfrac{a-1}{a+1}\left(a^{2n}-1\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\dfrac{1-a}{a+1}>0$ et donc $I(a)=0$.
En revanche, si $|a|>1$, alors $a^{2n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ et alors
$$\ln\left(a^{2n}-1\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln\left(a^{2n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}n\ln\left(a^2\right).$$
Puisque par ailleurs, $\ln\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)\underset{n\to+\infty}{=}o\left(n\ln\left(a^2\right)\right)$, on a
$$\ln\left(\frac{a-1}{a+1}(a^{2n}-1)\right)=\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right)+\ln\left(a^{2n}-1\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}n\ln\left(a^2\right).$$
Et donc
$$I(a)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\left(a^{2n}-1\right)\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\ln\left(a^{2n}-1\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}n\ln\left(a^2\right)=\pi\ln\left(a^2\right).$$
Au final, on a donc prouvé que
$$\int_0^{\pi}\ln\left(a^2-2a\cos(x)+1\right)dx=\begin{cases}0 & \text{si } |a|<1\\ \pi\ln\left(a^2\right) & \text{si } |a|>1\end{cases}$$

[23] C'est le cas $k=0$.

Remarque

Notons que l'existence de ces limites est automatique, puisque nous sommes partis de sommes de Riemann, qui possèdent nécessairement une limite.

Rappel

Si $u_n\sim v_n$ et $u_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$, alors $\ln(u_n)\sim\ln(v_n)$.

Solution de l'exercice 27.33

1. Soit $F:x\mapsto\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ l'unique primitive de f qui s'annule en a.
Il s'agit bien évidemment d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ puisque f est continue.
Et puisque f est à valeurs strictement positives, $F'=f>0$, et donc F est strictement croissante.
Puisque $F(b)=\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$, que $F(a)=0$, et que
$$0\leqslant\frac{1}{n}\int_a^b f(t)\,dt\leqslant\int_a^b f(t)\,dt$$
par le théorème de la bijection, il existe un unique $x_1\in[a,b]$ tel que
$$F(x_1)=\frac{1}{n}\int_a^b f(t)\,dt\Leftrightarrow\int_a^{x_1}f(t)\,dt=\frac{1}{n}\int_a^b f(t)\,dt.$$
Puis de même, il existe un unique $x_2\in[x_1,b]$ tel que
$$F(x_2)=\frac{2}{n}\int_a^b f(t)\,dt\Leftrightarrow\int_{x_1}^{x_2}f(t)\,dt=\frac{1}{n}\int_a^b f(t)\,dt.$$
De proche en proche, on prouve ainsi, que pour tout $k\in[\![1,n-1]\!]$, il existe un unique x_k tel que $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(t)\,dt=\frac{1}{n}\int_a^b f(t)\,dt$.

2. Notons $A = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

La question précédente nous indique que $x_k = F^{-1}\left(\frac{k}{n}A\right)$.

Et donc $f(x_k) = f\left(F^{-1}\left(\frac{k}{n}A\right)\right)$.

Par conséquent,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(f\circ F^{-1})\left(\frac{k}{n}A\right).$$

On reconnaît alors, à une constante multiplicative près[24], des sommes de Riemann pour la fonction $f\circ F^{-1}$, entre 0 et A.

Plus précisément, il vient, puisque $f\circ F^{-1}$ est continue

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \frac{1}{A}\frac{A}{n}\sum_{k=1}^{n}(f\circ F^{-1})\left(\frac{k}{n}A\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{A}\int_0^A (f\circ F^{-1})(t)\,dt.$$

Nous pourrions nous arrêter ici, mais avec le changement de variable $x = F^{-1}(t)$, légitime car F^{-1} est $\mathscr{C}^1$ il vient

$$\int_0^A (f\circ F^{-1})(t)\,dt = \int_a^b f(x)f(x)\,dx = \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Et donc

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\displaystyle\int_a^b f^2(t)\,dt}{\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt}.$$

[24] Le fameux $\frac{b-a}{n}$ devant la somme de Riemann.

Détails

F est $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante, avec une dérivée (f) qui ne s'annule pas, donc F^{-1} est également $\mathscr{C}^1$.