# TD 27 : Probabilités (I)

## ▶ Généralités, obtention de probas par dénombrement (équiprobabilité)

**Exercice 27.1** On tire trois cartes dans un jeu de 32 cartes. Dans chacun des cas suivants, préciser l'univers modélisant l'expérience, et calculer la probabilité d'obtenir 3 cartes de même couleur. F

1. Si les cartes sont tirées simultanément.
2. Si les cartes sont tirées successivement et sans remise.
3. Si les cartes sont tirées successivement et avec remise.

**Exercice 27.2** On lance 6 fois un dé équilibré. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une fois chaque face ? PD

**Exercice 27.3** Soient $A$ et $B$ deux événements d'un espace probabilisé fini. On note alors $C$ l'événement «un et un seul des événements $A$ ou $B$ est réalisé». PD

1. Exprimer $C$ en fonction de $A$ et $B$.
2. Prouver que $\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - 2\mathbf{P}(A \cap B)$.

**Exercice 27.4** On lance $2n$ fois une pièce qui tombe sur pile avec probabilité $p \in ]0,1[$. Déterminer la probabilité que chaque lancer donne un résultat contraire du lancer précédent. PD

**Exercice 27.5** Montrer que si $A$ et $B$ sont indépendants, alors les événements $A$ et $\overline{B}$ sont indépendants, de même que $\overline{A}$ et $B$, et $\overline{A}$ et $\overline{B}$. PD

**Exercice 27.6** Soient $A$ et $B$ deux événements d'un espace probabilisé. Montrer que $|\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| \leqslant \frac{1}{4}$. PD

**Exercice 27.7** Une loterie a lieu une fois par semaine. Chaque semaine, sur 100 billets mis en jeu, $n$ sont gagnants, avec $n \leqslant 90$. Chaque billet coûte un euro, et on dispose de 10 euros. PD
Parmi les deux stratégies suivantes :

1. acheter 10 billets la même semaine
2. acheter un billet par semaine durant 10 semaines

Laquelle permet de maximiser les chances de gagner au moins une fois ?

**Exercice 27.8** **Paradoxe des anniversaires** PD
Dans un groupe de $n$ personnes, on considère que chaque personne a autant de chance d'être née chacun des 365 jours de l'année.
Quelle est la probabilité que deux personnes aient leur anniversaire le même jour ?
*Un calcul numérique prouve que pour $n \geqslant 23$, cette probabilité est supérieure à $1/2$, et c'est ce que l'on nomme paradoxe des anniversaires. Ce n'est pas un vrai paradoxe, mais cela contredit l'intuition, car on pourrait s'attendre à ce qu'il faille bien davantage de personnes.*
*Pour $n = 39$, cette probabilité vaut environ 0.88, et votre classe ne déroge pas à la règle : vous êtes bien deux à être nés le même jour !*

**Exercice 27.9** On place deux amis dans une file d'attente de $n$ personnes ($n \geqslant 3$). Quelle est la probabilité qu'il y ait $r$ personnes ($0 \leqslant r \leqslant n-2$) entre les deux amis ? AD
Quel est le nombre de personnes le plus probable entre les deux ?
Mêmes questions si cette fois les deux amis sont placés sur une table ronde, et que l'on compte le nombre de personnes entre les deux dans le sens le plus direct.

**Exercice 27.10** On lance $n$ fois une pièce de monnaie, qui tombe sur *pile* avec probabilité $p \in ]0,1[$. PD

1. Quelle est la probabilité que le premier pile arrive au $n^{\text{ème}}$ lancer ?
2. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, quelle est la probabilité d'obtenir le $k^{\text{ème}}$ pile au $n^{\text{ème}}$ lancer ?

**Exercice 27.11** **(Oral X PC)** D
On place aléatoirement $n \geqslant 3$ boules dans $n$ urnes. Quelle est la probabilité qu'une et une seule urne reste vide ? Donner un équivalent simple de cette probabilité lorsque $n \to +\infty$.

## Exercice 27.12 Formule du crible et application

D

1. Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements d'un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbf{P})$. On souhaite prouver que
$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})\right). \qquad (\star)$$
On rappelle à cet effet que pour toute partie $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbf{P}(\{\omega\})$.
Si l'on applique ceci à tous les termes du membre de droite de $(\star)$, on obtient une combinaison linéaire des $\mathbf{P}(\{\omega\})$, $\omega \in \Omega$.
   (a) Soit $\omega \in \Omega$ un élément qui appartient à exactement $p$ événements parmi $A_1, \dots, A_n$. Montrer que le coefficient devant $\mathbf{P}(\{\omega\})$ dans le membre de droite de $(\star)$ est $\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}\binom{p}{k}$.
   (b) Conclure.
2. $n$ personnes laissent leurs chapeaux au vestiaire. Pour les récupérer, chacune prend un chapeau au hasard. Quelle est la probabilité que personne n'ait repris son chapeau ?

## Exercice 27.13 Problème du scrutin (Oral X PC)

TD

Lors d'une élection, $a$ électeurs votent pour $A$ et $b$ votent pour $B$ $(a > b)$. Quelle est la probabilité que, pendant le dépouillement, $A$ soit toujours strictement en tête ?

# ▶ Formules des probabilités composées/totales/de Bayes. Indépendance

## Exercice 27.14 (Oral Centrale PC)

AD

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Une urne contient $2n$ boules, $n$ blanches et $n$ noires. On tire les boules deux par deux jusqu'à vider l'urne. Quelle est la probabilité qu'à chaque tirage on ait obtenu une boule blanche et une boule noire ?

## Exercice 27.15

PD

Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements indépendants. Montrer que la probabilité qu'aucun des événements $A_1, \dots, A_n$ ne soit réalisé est majorée par $\exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)\right)$.

## Exercice 27.16 Le concierge alcoolique

AD

Un concierge possède 10 clés sur son trousseau, dont une seule ouvre la porte devant laquelle il se trouve.
On considère également $N$ un entier strictement supérieur à 10.
Pour $k \in [\![1, N]\!]$, on note $A_k$ l'événement «la $k^{\text{ème}}$ clé essayée par le concierge est la première à ouvrir la porte».

1. Le concierge essaie les clés sans remise, calculer $\mathbf{P}(A_k)$ pour $1 \leqslant k \leqslant 10$.
2. Le concierge essaie les clés avec remise, calculer $\mathbf{P}(A_k)$ pour $1 \leqslant k \leqslant N$.
3. Le concierge est ivre un jour sur trois. Lorsqu'il est sobre, il essaie les clés sans remise, et s'il est ivre il est les essaie avec remise. Si au bout de $N$ essais (où $N > 10$) il n'a toujours pas ouvert la porte, il s'endort devant la porte.
   (a) Pour $k \in [\![1, N]\!]$, calculer $\mathbf{P}(A_k)$.
   (b) Quelle est la probabilité que le concierge dorme dehors ?
   (c) Aujourd'hui, il a fallu 6 essais au concierge pour ouvrir sa porte. Quelle est la probabilité qu'il soit ivre ? Même question avec 11 essais.

## Exercice 27.17 (Banque CCINP)

AD

On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.

1. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé $n$ fois et on obtient $n$ fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité $p_n$ que ce dé soit pipé ?
3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

## Exercice 27.18

PD

On dispose de deux dés équilibrés : le dé A possède quatre faces rouges et deux faces noires, le dé B possède quatre faces noires et deux faces rouges.
On lance une pièce de monnaie truquée, qui tombe sur pile avec probabilité $\frac{1}{3}$. Si la pièce tombe sur pile, alors on ne joue qu'avec le dé $A$, si la pièce de monnaie tombe sur face, on ne joue qu'avec le dé $B$.
On note $R_i$ l'événement «le $i^{\text{ème}}$ lancer de dé donne une face rouge».

1. Calculer $\mathbf{P}(R_1)$, $\mathbf{P}(R_2)$, puis $\mathbf{P}(R_1 \cap R_2)$. Les événements $R_1$ et $R_2$ sont-ils indépendants ?
2. On a obtenu «rouge» aux deux premiers lancers. Calculer la probabilité d'obtenir «rouge» au troisième.
3. On a obtenu «rouge» aux $n$ premiers lancers. Calculer la probabilité qu'on joue avec le dé $A$.

**Exercice 27.19** On dispose de $n$ urnes $U_1, U_2, \dots, U_n$, et on dispose 3 boules dans chaque urne. **AD**
Dans l'ensemble des $3n$ boules, une seule est bleue, les autres sont rouges.
Sachant que l'on a tiré sans remise deux boules rouges dans l'urne $U_1$, quelle est la probabilité que la boule bleue se trouve dans l'urne $U_2$ ?

**Exercice 27.20 Loi de succession de Laplace** **AD**
On dispose de $N$ urnes numérotées de 1 à $N$. L'urne numéro $i$ contient $i$ boules blanches et $N - i$ boules noires.
On choisit une urne au hasard, sans connaître son numéro, et on effectue une série de tirages dans cette urne, avec remise entre les tirages.

1. Sachant que les $n$ premiers tirages ont tous donné une boule blanche, quelle est la probabilité que le tirage suivant donne encore une boule blanche ?
2. Déterminer la limite lorsque $N \to +\infty$ de la probabilité calculée à la question précédente.

## ▶ Variables aléatoires

**Exercice 27.21** Soit $X$ une variable aléatoire qui suit la loi $\mathscr{B}(n, p)$. Déterminer la loi de $Y = n - X$. **F**

**Exercice 27.22** Un (excellent) biathlète affiche 90% de réussite au tir. **PD**
Une course comporte 20 tirs, et une saison comporte 18 courses à 20 tirs.
On note $X$ le nombre de 20/20 réalisés par le biathlète au cours d'une saison. Déterminer la loi de $X$.
Notre biathlète passe 10 ans sur le circuit mondial, et on note $Y$ la variable aléatoire égale au nombre de saisons où il a réalisé au moins un 20/20. Déterminer la loi de $Y$.

**Exercice 27.23 Urne de Polya** **AD**
Une urne contient au départ une boule blanche et une boule noire.
On répète indéfiniment l'expérience suivante : on tire une boule, on la remet dans l'urne, et on ajoute une autre boule de la même couleur.
Ainsi, à l'issue de la $k^{\text{ème}}$ répétition de l'expérience, l'urne contient $k + 2$ boules.
Pour $k \in \mathbf{N}^*$, on note $X_k$ la variable aléatoire correspondant au nombre de boules blanches dans l'urne à l'issue du $k^{\text{ème}}$ tirage.
Montrer par récurrence sur $k$ que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $X_k$ suit la loi uniforme sur $[\![1, k+1]\!]$.

**Exercice 27.24** On choisit au hasard (et de manière équiprobable) une permutation $\sigma$ de $[\![1, n]\!]$. **AD**
On note alors $N$ le plus grand entier $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(k)$.
Déterminer la loi de la variable aléatoire $N$.

**Exercice 27.25** Une urne contient $b$ boules blanches et $b$ boules rouges. On y effectue une suite de tirages de la manière suivante : on replace dans l'urne la boule obtenue, en rajoutant $b$ boules de la même couleur. **AD**
Soit $X_n$ la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des $n$ premiers tirages.

1. Déterminer les lois de $X_1$ et $X_2$.
2. Montrer que $X_n$ suit la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

**Exercice 27.26** Une urne contient $n$ boules numérotées de 1 à $n$. On tire avec remise des boules dans cette urne jusqu'à ce qu'une boule ait été tirée deux fois. **D**
On note alors $T$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages qui ont été nécessaires.

1. Propose un espace probabilisé $(\Omega, \mathbf{P})$ modélisant cette expérience et déterminer le support de $T$.
2. Calculer $\mathbf{P}(T = 2)$.
3. Soit $k \in T(\Omega)$. Exprimer $\mathbf{P}_{[T>k-1]}(T > k)$.
4. En déduire $\mathbf{P}(T = k)$ pour tout $k \in T(\Omega)$.

**Exercice 27.27** On considère $n \geqslant 2$ joueurs, numérotés de 1 à $n$, qui jouent à se lancer une balle. Au départ, c'est le joueur 1 qui a la balle, et à chaque tour, celui qui possède la balle la lance, de manière équiprobable à l'un des autres joueurs. **D**
Pour tout $k \geqslant 1$, on note $X_k$ la variable égale au numéro du joueur possédant la balle après $k$ échanges, et on note $X_0$ la variable certaine égale à 1.
Pour tout $k \in \mathbf{N}$, déterminer la loi de $X_k$.

**Exercice 27.28** On dispose de $N$ urnes contenant chacune $n$ boules numérotées de 1 à $n$. On tire au hasard une boule dans chaque urne et on note $Z_n$ la variable aléatoire égale au plus grand numéro obtenu. **PD**
Déterminer $\mathbf{P}(Z_n \leqslant k)$, et en déduire la loi de $Z_n$.

# CORRECTION DES EXERCICES DU TD 27

## SOLUTION DE L'EXERCICE 27.1

Dans les 3 cas, notons $A$ l'événement «obtenir 3 cartes de même couleur», en gardant à l'esprit que les univers $\Omega$ étant différents, $A$ n'est pas toujours égal au même ensemble.

**1.** Les issues possibles de l'expérience sont donc les mains des 3 cartes. Autrement dit, les parties à 3 éléments de l'ensemble des 32 cartes.
Soit encore ce que nous avons nommé les 3-combinaisons de l'ensemble des cartes.
Donc l'univers $\Omega$ est[1] l'ensemble des 3-combinaisons de l'ensemble des 32 cartes.
Nous savons alors $\operatorname{Card}\Omega = \binom{32}{3} = \frac{32 \times 31 \times 30}{6} = 5 \times 32 \times 31$.
Et le nombre de mains de même couleur est $4 \times \binom{8}{3} = 4 \times 8 \times 7$, 4 étant le nombre de couleurs, et $\binom{8}{3}$ étant, une fois la couleur choisie, le nombre de manières de choisir 3 cartes parmi les 8 de cette couleur.
Donc la probabilité d'obtenir 3 cartes de même couleur est

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\operatorname{Card}(A)}{\operatorname{Card}(\Omega)} = \frac{4 \times 8 \times 7}{32 \times 31 \times 5} = \frac{7}{155}.$$

**2.** Cette fois l'ordre des tirages a une importance[2], et donc les issues possibles de l'expérience sont des triplets (donc ordonnés) de cartes, ne comportant pas deux fois la même carte[3].
Autrement dit, ce sont des arrangements de 3 cartes parmi les 32 possibles.
Donc $\Omega$ est l'ensemble des tels arrangements, de sorte que $\operatorname{Card}(\Omega) = 32 \times 31 \times 30$.
Et alors $A$ est de cardinal $4 \times 8 \times 7 \times 6$. Encore une fois 4 correspond au nombre de couleurs possibles, et $8 \times 7 \times 6$ est le nombre de 3-arrangements de cartes d'une couleur fixée.
Et donc $\mathbf{P}(A) = \frac{\operatorname{Card}(A)}{\operatorname{Card}(\Omega)} = \frac{4 \times 6 \times 7 \times 8}{32 \times 31 \times 30} = \frac{7}{155}$.
***Remarque importante*** *: nous trouvons bien la même probabilité que précédemment. C'est complètement intuitif, et vous serez d'accord pour dire que la probabilité d'obtenir 3 cartes de même couleur est la même qu'on tire les cartes simultanément ou bien une par une.*
*C'est un fait qu'il est bon d'avoir à l'esprit : si les événements que l'on considère ne tiennent pas en compte l'ordre (ici on ne regarde pas la couleur de la première/de la deuxième/de la troisième carte), modéliser une expérience par des tirages successifs* ***sans remise*** *ou par des tirages simultanés conduit au même résultat.*

**3.** Cette fois, les tirages étant avec remise, il est possible d'obtenir plusieurs fois la même carte, et donc une issue de l'expérience est un triplet de cartes.
Donc $\Omega = \left(\left\{\boxed{7\spadesuit}\,\boxed{7\diamondsuit}\,\dots,\boxed{A\clubsuit}\,\boxed{A\heartsuit}\right\}\right)^3$.
Et donc $\operatorname{Card}(\Omega) = 32^3$.
Pour chaque couleur, il y a $8^3$ triplets de cartes de cette couleur.
Et donc $\mathbf{P}(A) = \frac{4 \times 8^3}{32^3} = \frac{1}{16}$.

## SOLUTION DE L'EXERCICE 27.2

Comme souvent, la difficulté réside dans la manière dont on modélise l'épreuve.
Si on commence à distinguer les résultats des différents lancers, les calculs et les notations vont vite devenir inextricables. Il sera facile de dire «le second lancer donne un résultat différent du premier», mais au moment d'écrire que les 4 premiers sont différents, cela va se corser...
Notons qu'on peut ici prendre $\Omega = [\![1, 6]\!]^6$, muni de sa probabilité uniforme[4].
Et donc une issue qui réalise l'événement $A$ : «les 6 numéros sont sortis» est la donnée d'un 6-arrangement de $[\![1, 6]\!]$ (ou si vous préférez d'une permutation de $[\![1, 6]\!]$).
Il y a 6! tels arrangements, et donc

$$\mathbf{P}(A) = \frac{6!}{6^6} = \frac{5}{324}.$$

## SOLUTION DE L'EXERCICE 27.3

[1] Ou du moins peut-être pris tel quel, on pourrait imaginer d'autres possibilités.

[2] Pas forcément sur la probabilité que nous obtiendrons, mais en tous cas dans la description de l'expérience.

[3] Car les tirages sont sans remise.

[4] Car le dé est équilibré.

1. On a donc $C = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, si bien que $A \cup B = C \cup (A \cap B)$, avec $C$ et $(A \cap B)$ incompatibles. L'ensemble $C$ est ce que dans le TD de théorie des ensembles nous avions nommé *différence symétrique de A et B* et noté $A\Delta B$.
2. Puisque $C$ et $A \cap B$ sont incompatibles, $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(C) + \mathbf{P}(A \cap B)$.
Et donc

$$\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(A\cup B)-\mathbf{P}(A\cap B) = \mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(A\cap B)-\mathbf{P}(A\cap B) = \mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)-2\mathbf{P}(A\cap B).$$

**Incompatibilité**
Cette incompatibilité se comprend encore mieux quand on le dit en français : $C$ est l'événement «un seul des 2 événements $A$ et $B$ est réalisé» quand $A \cap B$ est l'événement «$A$ **et** $B$ sont réalisés».
Il est alors clair que $C$ et $A \cap B$ ne peuvent pas être simultanément réalisés.

## Solution de l'exercice 27.4

Notons $P_i$ (resp. $F_i$) l'événement «le $i^{\text{ème}}$ lancer donne pile (resp. face)».
Et soit alors $A$ l'événement dont la probabilité est cherchée, à savoir : «chaque lancer donne un résultat différent du précédent».
Puisque $\{F_1, P_1\}$ est un système complet d'événements, par la formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \cap F_1) + \mathbf{P}(A \cap P_1).$$

Mais $A \cap F_1 = F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap \cdots \cap F_{2n-1} \cap P_{2n}$, de sorte que par indépendance des lancers,

$$\mathbf{P}(A \cap F_1) = \mathbf{P}(F_1)\mathbf{P}(P_2)\cdots\mathbf{P}(F_{2n-1})\mathbf{P}(P_{2n}) = (p(1-p))^n.$$

De même, $\mathbf{P}(A \cap P_1) = (p(1-p))^n$ et donc $\mathbf{P}(A) = 2(p(1-p))^n$.

## Solution de l'exercice 27.5

On a $\mathbf{P}(\overline{B}) = 1 - \mathbf{P}(B)$, et donc

$$\mathbf{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)(1-\mathbf{P}(B)) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(\overline{B}).$$

De même $\overline{A}$ et $B$ sont indépendants. Et on peut donc en déduire que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

## Solution de l'exercice 27.6

Le point important ici, et souvent utile en probas est que $\forall x \in [0,1],\ 0 \leqslant x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$.
Ceci se retrouve soit à l'aide d'un tableau de variations, soit à l'aide d'un résultat bien connu[5] sur le sommet d'une parabole.

[5] $-\frac{b}{2a}\ldots$

D'une part, on a $\mathbf{P}(A) \geqslant \mathbf{P}(A\cap B)$ et de même $\mathbf{P}(B) \geqslant \mathbf{P}(A\cap B)$, si bien que $\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) \geqslant \mathbf{P}(A \cap B)^2$, et donc

$$\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) \leqslant \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A \cap B)^2 \leqslant \mathbf{P}(A \cap B)\left(1-\mathbf{P}(A \cap B)\right) \leqslant \frac{1}{4}.$$

Pour l'autre inégalité, notons que $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap \overline{B})$ et donc

$$\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap \overline{B}) - \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(\overline{B}) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(\overline{B}) - \mathbf{P}(A \cap \overline{B}).$$

**Détails**
La formule donnée pour $\mathbf{P}(A \cap B)$ vient du fait que

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}).$$

Mais alors en appliquant le même raisonnement que pour la première inégalité, en changeant $B$ en $\overline{B}$, on obtient

$$\mathbf{P}(A \cap \overline{B}) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(\overline{B}) \leqslant \frac{1}{4} \Leftrightarrow \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(\overline{B}) - \mathbf{P}(A \cap \overline{B}) \geqslant -\frac{1}{4}.$$

Et donc il vient bien $|\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| \leqslant \dfrac{1}{4}$.

## Solution de l'exercice 27.7

Notons $G$ l'événement «l'un des billets achetés est gagnant».
Avec la première stratégie, la probabilité d'obtenir uniquement des billets perdants est :

$$\mathbf{P}\left(\overline{G}\right) = \frac{\binom{100-n}{10}}{\binom{100}{10}} = \frac{(100-n)!90!}{(90-n)!100!} = \frac{(100-n)(99-n)\cdot(91-n)}{100\cdot 99\cdots 91} = \prod_{k=91}^{100}\frac{k-n}{k}.$$

**$G$ ou $\overline{G}$ ?**
Si nous avons ici choisi de calculer $\mathbf{P}(\overline{G})$ et pas directement $\mathbf{P}(G)$, c'est car il est plus facile d'exprimer l'événement «tous les billets sont perdants» que son contraire, qui nécessiterait peut-être de distinguer le cas où un seul billet est gagnant du cas où deux billets sont gagnants, etc

Donc

$$\mathbf{P}(G) = 1 - \prod_{k=91}^{100}\frac{k-n}{k}$$

Avec la seconde stratégie, notons $G_i$ l'événement : «le joueur gagne la $i^{\text{ème}}$ semaine». Alors $\mathbf{P}(\overline{G_i}) = \dfrac{100-n}{100}$.

Par indépendance des événements $G_1, \dots, G_{10}$, et puisque $\overline{G} = \bigcap_{i=1}^{10} \overline{G_i}$, on a

$$\mathbf{P}(\overline{G}) = \prod_{i=1}^{10} \mathbf{P}(\overline{G_i}) = \left(\frac{100-n}{100}\right)^{10}.$$

Et donc il vient

$$\mathbf{P}(G) = 1 - \left(\frac{100-n}{100}\right)^{10}$$

On prouve facilement que pour $k \in [\![91, 100]\!]$, on a $\dfrac{k-n}{k} \leqslant \dfrac{100-n}{100}$.
On en déduit que

$$\prod_{k=91}^{100} \frac{k-n}{k} \leqslant \left(\frac{100-n}{100}\right)^{10}$$

On en déduit que la probabilité de gagner est plus grande avec la première stratégie.

## SOLUTION DE L'EXERCICE 27.8

Prenons pour $\Omega$ l'ensemble $[\![1, 365]\!]^n$ des $n$-uplets d'éléments de $[\![1, 365]\!]$, le $i^{\text{ème}}$ élément correspondant au jour de naissance de la $i^{\text{ème}}$ personne.
Cherchons alors la probabilité de l'événement contraire, à savoir que les $n$ dates de naissances soient deux à deux distinctes.
Alors les événements élémentaires réalisant cet événement sont les $n$-uplets sans répétitions : ce sont précisément les $n$-arrangements de $[\![1, 365]\!]$.
Si $n \geqslant 366$, il n'y en a pas[6], et sinon, il sont au nombre de $\dfrac{365!}{(365-n)!}$.
Et donc au final, la probabilité que deux personnes soient nées le même jour est $1 - \dfrac{365!}{(365-n)!365^n}$.

[6] Mais on n'a probablement pas besoin d'un calcul pour répondre au problème posé si $n \geqslant 366$...

## SOLUTION DE L'EXERCICE 27.9

1. Puisque seules comptent les places occupées par les deux amis (appelons-les Laurel et Hardy), il s'agit de dénombrer les manières de placer ces deux comparses.
Il y a $n(n-1)$ tels choix (nombre de 2-arrangements de $[\![1, n]\!]$).
Il y aura alors $r$ places entre les deux si Laurel se trouve en place $i$ et Hardy en place $i+r+1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-r-1$, ou le contraire.
Ce qui fait $2(n-r-1)$ possibilités.
Et donc la probabilité cherchée est $\dfrac{2(n-r-1)}{n(n-1)}$.
**Remarque** : au lieu de choisir comme ci-dessus un univers ne prenant compte que des positions de Laurel et Hardy, on peut également modéliser une file d'attente par un $n$-arrangement des $n$ personnes. Et il y a $n!$ tels arrangements.
Et pour choisir un arrangement laissant $r$ places entre Laurel et Hardy, il faut choisir les positions de Laurel et Hardy (donc comme expliqué ci-dessus, il y a $2(n-r-1)$ choix possibles), puis choisir une permutation des $(n-2)$ personnes restantes (il y en a $(n-2)!$).
Et alors on trouve la même probabilité : $\frac{2(n-r-1)(n-2)!}{n!} = \frac{2(n-r-1)}{n(n-1)}$.
2. Cette probabilité décroit clairement lorsque $r$ augmente, donc est maximale pour $r = 0$ : le plus probable[7] est que Laurel et Hardy soient voisins.
3. Si la table est ronde, alors une modélisation possible de l'expérience est de commencer par placer Laurel sur la première chaise (peu importe laquelle, seules les positions relatives nous intéressent), puis de placer les autres personnes dans le sens direct à partir de Laurel.
Il y a donc $(n-1)!$ manières de placer ces personnes.
Mais pour $1 \leqslant r \leqslant \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor - 1$, seules deux positions pour Hardy placeront $r$ personnes entre Laurel et lui : s'il est sur la chaise $r+1$ (où la chaise de Laurel porte le numéro 0), ou sur la chaise $n-r-1$. Et il y a $(n-2)!$ dispositions réalisant chacune de ces possibilités.
Donc la probabilité que Laurel et Hardy soient à distance $r$ est $\dfrac{2(n-2)!}{(n-1)!} = \dfrac{2}{n-1}$.

[7] Attention, je n'ai pas dit qu'il y a avait plus de 50% de chances que ceci se produise, mais juste que c'est plus probable que n'importe quelle autre distance.

Avec une exception dans le cas où $n$ est pair et $r = \dfrac{n}{2} - 1$, auquel cas les positions $r+1$ et $n-1-r$ sont les mêmes, et donc la probabilité cherchée est $\dfrac{1}{n-1}$.

**Remarque**
Ce cas est précisément celui où Laurel et Hardy se font face.

### Solution de l'exercice 27.10

Notons $P_i$ et $F_i$ les événements correspondants aux résultat du $i^{\text{ème}}$ lancer, et notons $q = 1-p$ la probabilité d'obtenir face à chaque lancer.

1. L'événement «le $1^{\text{er}}$ pile arrive au $n^{\text{ème}}$ lancer est
$$A = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap P_n$$
qui, par indépendance des différents lancers, a pour probabilité
$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(F_1)\mathbf{P}(F_2)\cdots\mathbf{P}(F_{n-1})\mathbf{P}(P_n) = q^{n-1}p.$$

2. Si le $k^{\text{ème}}$ pile se produit au $n^{\text{ème}}$ lancer, c'est que ce dernier lancer donne pile, et que $k-1$ parmi les $n-1$ premiers ont déjà donné un pile.
Or, si l'on choisit $k-1$ lancers parmi les $n-1$ premiers, la probabilité d'obtenir pile exactement à ces tirages ainsi qu'au $n^{\text{ème}}$ est $p^k q^{n-k}$.
Puisqu'il y a $\dbinom{n-1}{k-1}$ manières de choisir ces positions, la probabilité cherchée est $\dbinom{n-1}{k-1}p^k q^{n-k}$.

**Détails**
La raison pour laquelle il suffit de multiplier par $\dbinom{n-1}{k-1}$ est que les événements que l'on compte sont 2 à deux disjoints.

**Alternative** : si vraiment on a besoin de nommer les événements alors l'événement que nous cherchons est
$$\bigcup_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_{k-1}\leqslant n-1}\left(\bigcap_{i\in\{i_1,\dots,i_{k-1}\}} P_i \cap \bigcap_{j\notin\{i_1,\dots,i_{k-1}\}} F_j \cap P_n\right).$$
C'est franchement indigeste, et ça conduira au même raisonnement : chacun des événements dans l'union est de probabilité $p^k q^{n-k}$, et il faudra quand même dénombrer le nombre d'événements dans l'union.
Bref, on n'y gagne rien... si ce n'est que c'est un peu plus rigoureux !

### Solution de l'exercice 27.11

Choisir la position des boules dans les urnes, c'est choisir une fonction de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ : à chaque boule on associe une urne.
Tous les placements étant équiprobables, nous voici donc ramenés à un problème de dénombrement.
Il y a $n^n$ applications de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même, et on cherche donc combien de ces applications ont une image de cardinal égal à $n-1$ (puisque $n-1$ urnes doivent contenir au moins une boule, et la dernière doit rester vide).

Pour choisir une telle application, il faut commencer par choisir son image, et il y a $\dbinom{n}{n-1} = n$ parties de $[\![1,n]\!]$ de cardinal $n-1$.
Puis une fois l'image $A$ choisie, on choisit quel élément $x$ de $A$ aura deux antécédents (il y a $n-1$ choix possibles), puis on choisit les deux antécédents $a$ et $b$ de $x$ (et il y a $\dbinom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ choix possibles), et reste alors à choisir une bijection de $[\![1,n]\!] \setminus \{a,b\}$ sur $A \setminus \{x\}$ (et il y a $(n-2)!$ choix).
Donc au final, la probabilité cherchée est
$$p_n = \frac{n^2(n-1)^2}{2}\frac{(n-2)!}{n^n} = \frac{(n-1)}{2}\frac{n!}{n^{n-1}}.$$
Pour en donner un équivalent, utilisons la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.
On a donc
$$p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\frac{n}{2n^{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n}n^{5/2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

### Solution de l'exercice 27.12

**1.a.** En écrivant
$$\mathbf{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}) = \sum_{\tau\in A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}} \mathbf{P}(\{\tau\})$$
la somme ne contiendra un terme $\mathbf{P}(\{\omega\})$ que si $\omega$ est dans tous les $A_{i_j}$.
Donc dans la somme du membre de droite de $(\star)$, à $k$ fixé, il y aura autant de $\mathbf{P}(\{\omega\})$ que de parties à $k$ éléments de l'ensemble des indices[8] $i$ tels que $\omega\in A_i$.

Il y a $\binom{p}{k}$ telles parties, et donc le coefficient devant $\mathbf{P}(\{\omega\})$ est $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{p}{k} = \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}\binom{p}{k}$.

[8] Que l'on a supposé de cardinal exactement $p$.

**1.b.** Ce coefficient vaut donc $\displaystyle -\sum_{k=1}^{p}(-1)^k\binom{p}{k} = -\left((1-1)^p-1\right) = 1$ si $p\geqslant 1$, et $0$ sinon.
Donc le membre de droite de $(\star)$ est la somme des $\mathbf{P}(\{\omega\})$ pour $\omega$ apparaissant dans l'un au moins des $A_i$.

Autrement dit, c'est $\displaystyle\sum_{\omega\in A_1\cup\cdots\cup A_n}\mathbf{P}(\{\omega\}) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)$.

**2.** Notons $A_i$ l'événement «la $i^{\text{ème}}$ personne a récupéré son chapeau».

Alors nous cherchons la probabilité de $B = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i} = \overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}$.

Par la formule précédente, on a
$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k+1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}\mathbf{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})\right).$$

Pour $k$ fixé, et $1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n$ fixés, on a $\mathbf{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}) = \dfrac{(n-k)!}{n!}$.
En effet, il s'agit de choisir, parmi les $n!$ permutations possibles des $n$ chapeaux, une permutation des chapeaux autres que ceux de $i_1,\dots,i_k$.
Donc
$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\frac{(n-k)!}{n!}.$$

Mais, toujours à $k$ fixé, il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir une partie à $k$ éléments $\{i_1,\dots,i_k\}$ de $[\![1,n]\!]$.

**Remarque**
Une fois la partie choisie, il n'y a qu'une seule manière de l'ordonner.

Donc la somme intérieure comporte $\binom{n}{k}$ termes, tous égaux, et donc
$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k!}.$$

Et donc enfin, $\mathbf{P}(B) = 1-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$.

***Remarques*** *: ► nous aurons bientôt des arguments pour prouver que cette probabilité tend vers* $e^{-1}$.
*► Notons au passage que nous avons (quasiment) déterminé le nombre de permutations sans points fixes (appelées dérangements) de* $[\![1,n]\!]$.

## SOLUTION DE L'EXERCICE 27.13

*Il s'agit bien évidemment d'un exercice dur, puisqu'oral de l'X. Entendons-nous bien : en 20/30 minutes l'examinateur ne va pas nécessairement attendre que vous ayez* **la** *bonne idée qui va plier l'exercice. Au contraire, on va vouloir évaluer votre capacité à explorer des pistes, et plus encore, votre capacité à réagir à des indications partielles.*
*D'ailleurs, le problème posé a mis une dizaine d'années avant d'avoir une solution, et c'est Joseph Bertrand, probabiliste célèbre (et accessoirement major de l'X) qui le premier en a apporté une réponse, qui n'est pas celle que nous présentons ici.*

Commençons par noter qu'un dépouillement est entièrement, et uniquement caractérisé par les positions des bulletins $A$.

Il y a donc $\binom{a+b}{a}$ dépouillements possibles.

Notons $D$ l'ensemble de ces dépouillements, $D_f$ l'ensemble des dépouillements favorables, c'est-à-dire pour lesquels $A$ est toujours strictement en tête, et $D_d$ l'ensemble des dépouillements défavorables.
Notons également $D_+$ l'ensemble des dépouillements (favorables ou non) qui commencent par un bulletin $A$, et $D_-$ ceux qui commencent par un $B$ (tous défavorables), de sorte que $D_+ \cup D_- = D$, l'union étant disjointe.
On peut se représenter graphiquement la situation par des chemins à coordonnées entières, qui commencent à $(0,0)$ et terminent à $(a+b, a-b)$, par exemple :

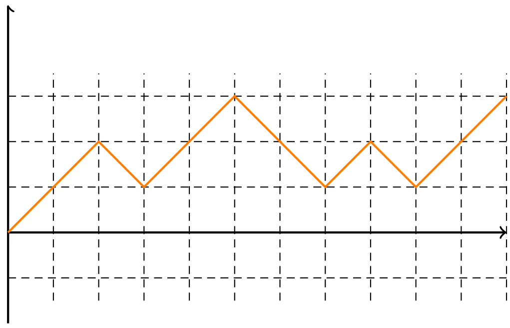

Figure 27.1 – Un dépouillement favorable : le chemin reste au dessus de l'axe des abscisses sans jamais le toucher, donc $A$ est toujours strictement en tête.

Si vous souhaitez formaliser davantage, c'est possible, mais ça ne me semble pas nécessaire...
On peut identifier un chemin à un élément de $\left\{(v_1, \dots, v_{a+b}) \in \{-1,1\}^{a+b} \mid \sum_{i=1}^{a+b} v_i = a-b\right\}$.
Un chemin[9] favorable est un $(v_1, \dots, v_{a+b})$ tel que pour tout $k \in [\![1, a+b]\!]$, $\sum_{i=1}^{k} v_i > 0$.

[9] Ou dépouillement.

Alors il y a autant de dépouillements défavorables commençant par un bulletin $A$ que de dépouillements (tous défavorables) commençant par un $B$.
En effet, si un dépouillement défavorable commence par un bulletin $A$ (c'est-à-dire est un élément de $D_d \cap D_+$), alors nécessairement il existe un moment où les deux candidats sont à égalité. Autrement dit, le chemin associé coupe l'axe des abscisses[10].
En effectuant une réflexion par rapport à l'axe des abscisses de la partie du chemin d'abscisses comprises entre 0 et le premier point d'intersection avec l'axe des abscisses, on obtient un élément[11] de $D_-$.
On vérifie aisément qu'on définit ainsi une bijection (et même une involution) de $D_+ \cap D_d$ sur $D_-$. Par conséquent, ces deux ensembles ont même cardinal.
Ce raisonnement est souvent appelé *principe de réflexion.*

[10] Sans nécessairement le traverser.

[11] Ou plutôt un chemin correspondant à un élément de $D_-$.

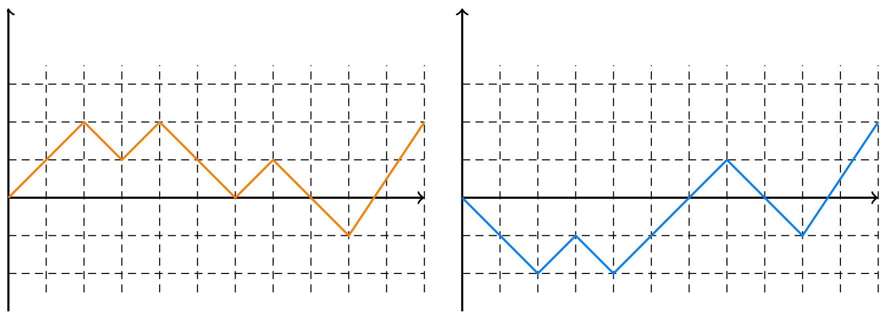

Figure 27.2 – Un élément de $D_d \cap D_+$ et l'élément de $D_-$ obtenu par réflexion.

Or les éléments de $D_-$ sont faciles à dénombrer : ils commencent tous par un bulletin $B$, donc il reste à choisir la position des $a$ bulletins $A$ parmi les $a+b-1$ places restantes. Donc $\mathrm{Card}(D_-) = \binom{a+b-1}{a}$.

On a donc $D = D_f \cup (D_d \cap D_+) \cup D_-$, et cette union est disjointe, de sorte que

$$\mathrm{Card}(D) = \mathrm{Card}(D_f) + \mathrm{Card}(D_d \cap D_+) + \mathrm{Card}(D_-) = \mathrm{Card}(D_f) + 2\mathrm{Card}(D_-).$$

Et donc $\mathrm{Card}(D_f) = \mathrm{Card}(D) - 2\mathrm{Card}(D_-) = \binom{a+b}{a} - 2\binom{a+b-1}{a}$.
Et donc pour finir, par équiprobabilité des dépouillements, la probabilité cherchée est

$$\frac{\mathrm{Card}(D_f)}{\mathrm{Card}(D)} = 1 - 2\frac{\binom{a+b-1}{a}}{\binom{a+b}{a}} = 1 - 2\frac{b}{a+b} = \frac{a-b}{a+b}.$$

## SOLUTION DE L'EXERCICE 27.14

Notons $A_i$ l'événement «les deux boules obtenues lors du $i^{\text{ème}}$ tirage sont de couleurs différentes».

Alors l'événement dont nous cherchons la probabilité est $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

Méthode
La formule des probabilités composées doit être un réflexe dans ce type de situation de tirage sans remise.

On a alors, par la formule des probabilités composées,

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(A_2)\cdots\mathbf{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n).$$

Lors du premier tirage, il y a $\binom{2n}{2}$ tirages possibles. Parmi ceux-ci, $\binom{n}{2}$ sont formés de deux boules blanches et $\binom{n}{2}$ de boules noires, et donc $2\binom{n}{2}$ réalisent $\overline{A_1}$.

Donc $\mathbf{P}(A_1) = 1 - \frac{2\binom{n}{2}}{\binom{2n}{2}} = \frac{n}{2n-1}$.

Mais si $A_1$ est réalisé, l'urne contient $n-1$ boules blanches et $n-1$ boules noires, donc un raisonnement analogue[12] à celui que nous venons de tenir pour $n$ boules prouve que $\mathbf{P}_{A_1}(A_2) = \frac{n-1}{2n-3}$.

Et plus généralement, pour $k \in [\![1,n]\!]$, si $A_1, A_2, \dots, A_{k-1}$ sont réalisés, alors lors du $k^{\text{ème}}$ tirage, l'urne contient $n-k$ boules de chaque couleur.

Et donc pour $k \leqslant n$, $\mathbf{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{k-1}}(A_k) = \frac{n-k+1}{2n-2k+1}$.

Donc au final,

$$\mathbf{P}(A) = \frac{n}{2n-1}\frac{n-1}{2n-3}\cdots\frac{2}{3}\frac{1}{1} = \frac{n!}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}.$$

Et alors en procédant aux simplifications usuelles,

$$1\times 3\times\cdots\times(2n-1) = \frac{(2n)!}{2\times 4\times\cdots\times 2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

de sorte que $\mathbf{P}(A) = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$.

[12] C'est en fait exactement la même situation, avec $n-1$ boules de chaque couleur au lieu de $n$.

## SOLUTION DE L'EXERCICE 27.15

Il s'agit donc de majorer $\mathbf{P}(\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_n})$.

Puisque les $A_i$ sont indépendants, les $\overline{A_i}$ le sont aussi.

On a donc $\mathbf{P}(\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_n}) = \prod_{i=1}^{n}\mathbf{P}(\overline{A_i}) = \prod_{i=1}^{n}(1-\mathbf{P}(A_i))$.

Mais une inégalité de convexité classique nous informe que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $1+x \leqslant e^x$, et donc en appliquant cette inégalité à $x = -\mathbf{P}(A_i)$, il vient

$$\mathbf{P}\left(\overline{A_1}\cap\dots\overline{A_n}\right) \leqslant \prod_{i=1}^{n} e^{-\mathbf{P}(A_i)} = \exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(A_i)\right).$$

## SOLUTION DE L'EXERCICE 27.16

Pour $k \in \mathbf{N}$, notons $B_k$ l'événement «la $k^{\text{ème}}$ clé n'ouvre pas la porte».

**1.** On a $A_k = \bigcap_{i=1}^{k-1} B_i \cap \overline{B_k}$.
Et donc par la formule des probabilités composées,

$$\mathbf{P}(A_k) = \mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}_{B_1}(B_2)\cdots\mathbf{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{k-2}}(B_{k-1})\mathbf{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}}(\overline{B_k}) = \frac{9}{10}\frac{8}{9}\cdots\frac{9-(k-2)}{10-(k-2)}\frac{1}{10-(k-1)}$$
$$= \frac{1}{10}.$$

Le résultat, éventuellement[13] surprenant au premier abord se comprend finalement assez bien en termes de dénombrement.
On peut imaginer que notre concierge décide dès le début dans quel ordre il va essayer les 10 clés.
Et alors la bonne a autant de chances d'être en première position, en seconde, ..., en dernière.

[13] À vous de voir...

**2.** On a toujours $A_k = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} B_i\right) \cap \overline{B_k}$, mais cette fois, par indépendance des différents essais

$$\mathbf{P}(A_k) = \prod_{i=1}^{k-1}\mathbf{P}(B_i) \times \mathbf{P}(\overline{B_k}) = \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}\frac{1}{10} = \frac{9^{k-1}}{10^k}.$$

**Méthode**
L'indépendance est ici garantie par les remises. Il n'y a pas moyen de la prouver mathématiquement, elle se comprend de la situation décrite.

**3.a.** Notons $I$ l'événement «le concierge est ivre», de sorte que $\mathbf{P}(I) = \frac{1}{3}$.
Alors $\{I, \overline{I}\}$ est un système complet d'événements, donc par la formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}(A_k) = \mathbf{P}(I)\mathbf{P}_I(A_k) + \mathbf{P}(\overline{I})\mathbf{P}_{\overline{I}}(A_k).$$

Mais ces probabilités conditionnelles ont en fait été calculées aux questions précédentes : sachant qu'il y a/qu'il n'y a pas remise, on connaît la probabilité d'avoir besoin de $k$ essais.

On a $\mathbf{P}_I(A_k) = \dfrac{9^{k-1}}{10^k}$ et $\mathbf{P}_{\overline{I}}(A_k) = \begin{cases} \dfrac{1}{10} & \text{si } 1 \leqslant k \leqslant 10 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Et donc

$$\mathbf{P}(A_k) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{3}\dfrac{9^{k-1}}{10^k} & \text{si } 1 \leq k \leq 10 \\ \dfrac{1}{3}\dfrac{9^{k-1}}{10^k} & \text{si } k \geq 11 \end{cases}$$

**Danger !**
Les notations sont complètement trompeuses : chaque fois qu'on a changé d'expérience : avec remise/sans remise/avec apéro, on a changé l'univers et donc par conséquent $A_k$, mais aussi la probabilité $\mathbf{P}$. Pourtant, nous continuons de noter $\mathbf{P}(A_k)$ pour des situations différentes...

**3.b.** L'événement «le concierge dort dehors» est donc $C = \overline{\bigcup_{1\leqslant k\leqslant N} A_i}$, dont la probabilité est

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(C) &= 1 - \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{N} A_i\right) = 1 - \sum_{k=1}^{N}\mathbf{P}(A_i) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{10}\frac{2}{3}\frac{1}{10} - \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{3}\frac{9^{k-1}}{10^k} \\
&= 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{30}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{30}\frac{1-\left(\frac{9}{10}\right)^N}{1-\frac{9}{10}} \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{9}{10}\right)^N\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{9}{10}\right)^N.
\end{aligned}$$

Les $A_i$ sont deux à deux incompatibles.

Notons que ce résultat se comprend bien : le seul moyen que le concierge dorme dehors c'est qu'il soit ivre (ce qui se produit avec proba $1/3$) et qu'il tire $N$ fois une mauvaise clé, ce qui se produit avec proba $\left(\frac{9}{10}\right)^N$.

**3.c.** C'est le cas typique de la formule de Bayes, on veut connaître «les probas des causes en connaissant celles des conséquences».
Il vient donc

$$\mathbf{P}_{A_6}(I) = \frac{\mathbf{P}_I(A_6)\mathbf{P}(I)}{\mathbf{P}(A_6)} = \frac{\frac{1}{3}\frac{9^5}{10^6}}{\frac{2}{30} + \frac{9^5}{3\cdot 10^6}} \frac{9^5}{9^5 + 2\cdot 10^5} \simeq 0.227.$$

Pour la seconde partie de la question, on peut faire un calcul[14], ou se dire que c'est du bon sens : s'il a eu besoin de strictement plus de 10 essais, le concierge est ivre.
Et donc $\mathbf{P}_{A_{11}}(I) = 1$.

[14] Qui mènera évidemment au même résultat.

## SOLUTION DE L'EXERCICE 27.17

Notons $A$ l'événement «le dé est pipé» et $B_i$ l'événement «on obtient un 6 au $i^{\text{ème}}$ tirage».

**1.** On cherche alors $\mathbf{P}_{B_1}(A)$. Mais par la formule de Bayes, on a $\mathbf{P}_B(A) = \dfrac{\mathbf{P}_A(B_1)\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B_1)}$.
Pour obtenir $\mathbf{P}(B_1)$, il suffit d'appliquer la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{A, \overline{A}\}$ :

$$\mathbf{P}(B_1) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}_A(B_1) + \mathbf{P}(\overline{A})\mathbf{P}_{\overline{A}}(B_1) = \frac{1}{4}\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\frac{1}{6} = \frac{1}{4}.$$

Et puisque $\mathbf{P}_A(B_1) = \dfrac{1}{2}$, il vient $\mathbf{P}_{B_1}(A) = \dfrac{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$.

**2.** On cherche donc $\mathbf{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_n}(A)$.
Par la formule de Bayes,

$$\mathbf{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_n}(A) = \frac{\mathbf{P}_A(B_1\cap\cdots\cap B_n)\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B_1\cap\cdots\cap B_n)}.$$

Mais une fois le dé choisi, les résultats des différents lancers sont indépendants.
Autrement dit, $B_1, \dots, B_n$ sont indépendants pour la probabilité $\mathbf{P}_A$.
Et donc $\mathbf{P}_A(B_1\cap\cdots\cap B_n) = \mathbf{P}_A(B_1)\mathbf{P}_A(B_2)\cdots\mathbf{P}_A(B_n) = \dfrac{1}{2^n}$.
De même, par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{A, \overline{A}\}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(B_1\cap\cdots\cap B_n) &= \mathbf{P}(A)\mathbf{P}_A(B_1\cap\cdots\cap B_n) + \mathbf{P}(\overline{A})\mathbf{P}_{\overline{A}}(B_1\cap\cdots\cap B_n)\\ &= \mathbf{P}(A)\mathbf{P}_A(B_1)\cdots\mathbf{P}_A(B_n) + \mathbf{P}(\overline{A})\mathbf{P}_{\overline{A}}(B_1)\cdots\mathbf{P}_{\overline{A}}(B_n)\\ &= \frac{1}{4}\frac{1}{2^n} + \frac{3}{4}\frac{1}{6^n}.\end{aligned}$$

Et donc

$$\mathbf{P}_{B_n}(A) = \frac{\mathbf{P}_A(B_n)\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}_A(B_n) + \mathbf{P}(\overline{A})\mathbf{P}_{\overline{A}}(B_n)} = \frac{\frac{1}{2^{n+2}}}{\frac{1}{2^{n+2}} + \frac{3}{4}\frac{1}{6^n}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3^{n-1}}}.$$

**Danger !**
L'indépendance dépend de la probabilité choisie sur $\Omega$.
Quand on dit juste «$B_1, B_2$ sont indépendants», c'est sous-entendu pour la probabilité $\mathbf{P}$ (ce qui est faux ici), mais sur le même espace, il est possible de mettre d'autres probabilités, par exemple $\mathbf{P}_A$ et $\mathbf{P}_{\overline{A}}$.

Les événements $B_1, \dots, B_n$ sont indépendants **une fois le dé choisi.**

**3.** On a $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 1$.
L'intuition là derrière est que si on lance le dé une fois et qu'on fait un 6, on ne peut rien en conclure. Si on le lance 2 fois et qu'on fait un 6, on ne peut rien en conclure non plus, mais il y a déjà plus de chances qu'il soit pipé (mais après tout, avec un dé équilibré on a tout de même une chance sur 36 de faire deux 6 d'affilée).
Si on lancer 100 fois le dé et qu'on obtient 100 fois un 6... on ne peut toujours rien en conclure, mais c'est franchement suspect, et il y a de très grandes chances que le dé soit pipé (et tout de même une toute petite chance qu'on ait eu beaucoup beaucoup beaucoup de chance avec un dé équilibré).

## SOLUTION DE L'EXERCICE 27.18

Notons $A$ l'événement : «on joue avec le dé A» et $B$ l'événement «on joue avec le dé B».
On a donc $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{3}$ et $\mathbf{P}(B) = \frac{2}{3}$.

1. Par la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $\{A, B\}$, on a
$$\mathbf{P}(R_1) = \mathbf{P}_A(R_1)\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}_B(R_1)\mathbf{P}(B) = \frac{2}{3}\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{1}{3} = \frac{4}{9}.$$
Le même calcul nous donne également $\mathbf{P}(R_2) = \frac{4}{9}$.
Enfin, toujours par la formule des probabilités totales,
$$\mathbf{P}(R_1 \cap R_2) = \mathbf{P}_A(R_1 \cap R_2)\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}_B(R_1 \cap R_2)\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}_A(R_1)\mathbf{P}_A(R_2) + \mathbf{P}(B)\mathbf{P}_B(R_1)\mathbf{P}_B(R_2)$$
$$= \frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{6}{27}.$$
On constate que $\mathbf{P}(R_1 \cap R_2) \neq \mathbf{P}(R_1)\mathbf{P}(R_2)$, et donc $R_1$ et $R_2$ ne sont pas indépendants.
Bien que ceci soit plutôt surprenant au premier abord, il y a une explication simple : si on obtient une face rouge lors du premier lancer, il est plus probable que nous soyons en train de jouer avec le dé $A$.
Et donc il est plus probable d'obtenir encore une face rouge au second lancer.
Alors qu'au contraire, si le premier lancer a donné une face noire, il est plus probable qu'on joue avec $B$, et donc qu'on obtienne encore une face noire au second lancer.
Il en serait autrement si on choisissait (toujours au hasard) un nouveau dé à chaque lancer.

**Indépendance**
Les lancers sont indépendants, une fois le dé choisi. Autrement dit, $R_1$ et $R_2$ sont indépendants pour les probabilités $\mathbf{P}_A$ et $\mathbf{P}_B$.
Cela ne signifie pas pour autant qu'ils sont indépendants pour $\mathbf{P}$.

2. Nous cherchons $\mathbf{P}_{R_1 \cap R_2}(R_3)$. Par définition, on a
$$\mathbf{P}_{R_1 \cap R_2}(R_3) = \frac{\mathbf{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3)}{\mathbf{P}(R_1 \cap R_2)}$$
Or, nous savons déjà que $\mathbf{P}(R_1 \cap R_2) = \frac{6}{27}$.
Comme à la question précédente, on prouve[15] que $\mathbf{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{10}{81}$.
On en déduit que $\mathbf{P}_{R_1 \cap R_2}(R_3) = \frac{5}{9}$.

[15] À l'aide de la formule des probabilités totales.

3. Par la formule de Bayes, on a
$$\mathbf{P}_{R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n}(A) = \frac{\mathbf{P}_A(R_1 \cap \cdots \cap R_n)\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(R_1 \cap \cdots \cap R_n)} = \frac{\mathbf{P}_A(R_1 \cap \cdots \cap R_n)\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}_A(R_1 \cap \cdots \cap R_n) + \mathbf{P}(B)\mathbf{P}_B(R_1 \cap \cdots \cap R_n)}$$
$$= \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{\frac{2^n}{3^{n+1}}}{\frac{2^n+2}{3^{n+1}}} = \frac{2^n}{2^n+2}.$$

## Solution de l'exercice 27.19

Notons $B_i$ l'événement «la boule bleue est dans l'urne $U_i$.»
Notons $R_1$ (resp. $R_2$) l'événement «la première (resp. deuxième) boule tirée dans l'urne $U_1$ est rouge».
La probabilité demandée est alors $\mathbf{P}_{R_1 \cap R_2}(B_2)$.
Par la formule de Bayes, on a
$$\mathbf{P}_{R_1 \cap R_2}(B_2) = \frac{\mathbf{P}_{B_2}(R_1 \cap R_2)\mathbf{P}(B_2)}{\mathbf{P}(R_1 \cap R_2)}.$$
Mais, sachant que la boule bleue est dans l'urne $U_2$, l'urne $U_1$ ne contient que des boules rouges, et donc $\mathbf{P}_{B_2}(R_1 \cap R_2) = 1$.
D'autre part, on a $\mathbf{P}(B_2) = \frac{1}{n}$, puisque la boule bleue a autant de chances de se trouver dans chaque urne.
Reste donc à calculer $\mathbf{P}(R_1 \cap R_2)$.
Pour cela, appliquons la formule des probabilités totales au système complet d'événements $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ :
$$\mathbf{P}(R_1 \cap R_2) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(B_i)\mathbf{P}_{B_i}(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_{B_i}(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{n}\left(\mathbf{P}_{B_1}(R_1 \cap R_2) + n - 1\right).$$

**Détails**
Le $n-1$ vient du fait que pour $i \in [\![2, n]\!]$,
$$\mathbf{P}_{B_i}(R_1 \cap R_2) = 1.$$

Mais on a alors

$$\mathbf{P}_{B_1}(R_1\cap R_2) = \frac{\mathbf{P}(B_1\cap R_1\cap R_2)}{\mathbf{P}(B_1)} = \frac{\mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}_{B_1}(R_1)\mathbf{P}_{B_1\cap R_1}(R_2)}{\mathbf{P}(B_1)} = \mathbf{P}_{B_1}(R_1)\mathbf{P}_{B_1\cap R_1}(R_2) = \frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

**Remarque**

Nous venons de prouver que

$$\mathbf{P}_{B_1}(R_1\cap R_2) = \mathbf{P}_{B_1}(R_1)\mathbf{P}_{B_1\cap R_1}(R_2).$$

Il s'agit en fait de la formule des probabilités composées, mais appliquée à la probabilité $\mathbf{P}_{B_1}$ et non à la probabilité $\mathbf{P}$.
En effet, on a alors

$$\left(\mathbf{P}_{R_1}\right)_{B_1}(R_2) = \mathbf{P}_{R_1\cap B_1}(R_2),$$

ce qui est relativement intuitif : la probabilité sachant $B_1$, sachant $R_1$ est la probabilité sachant $R_1\cap B_1$.

**Alternative** : une autre option pour obtenir $\mathbf{P}_{B_1}(R_1\cap R_2)$ est de se dire qu'on fait des tirages dans une urne contenant 2 boules rouges et une bleue.
Il y a $\binom{3}{2} = 3$ tirages possibles de deux boules, dont un seul formé de deux boules rouges.

Et donc on en déduit que

$$\mathbf{P}(R_1\cap R_2) = \frac{1}{n}\left(\mathbf{P}_{B_1}(R_1)\mathbf{P}_{B_1\cap R_1}(R_2) + n - 1\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\frac{1}{2} + n - 1\right) = 1 - \frac{3n-2}{3n}.$$

Il vient alors

$$\mathbf{P}_{R_1\cap R_2}(B_2) = \frac{1}{n}\frac{3n}{3n-2} = \frac{3}{3n-2}.$$

## SOLUTION DE L'EXERCICE 27.20

**1.** Notons $B_k$, $N_k$ les événement «obtenir une boule blanche (resp. noire) au $k^{\text{ème}}$ tirage».
On cherche donc $\mathbf{P}_{B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_n}(B_{n+1}) = \dfrac{\mathbf{P}(B_1\cap\cdots\cap B_{n+1})}{\mathbf{P}(B_1\cap\cdots\cap B_n)}$.

Utilisons la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{U_1, U_2, \dots, U_N\}$, où $U_i$ est l'événement «les tirages ont lieu dans l'urne numéro $i$».

**Danger !**

Qui dit proba conditionnelle ne dit pas forcément Bayes ! Cette formule n'a d'intérêt que si vous savez calculer la probabilité conditionnelle «dans l'autre sens».

D'une part, on a

$$\mathbf{P}(B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_n) = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{P}(U_i)\mathbf{P}_{U_i}(B_1\cap\cdots\cap B_n).$$

Puisqu'une fois le choix de l'urne effectué les tirages ont lieu avec remise, les événements $B_1, \dots, B_n$ sont mutuellement indépendants pour la probabilité $\mathbf{P}_{U_i}$.
Et donc $\mathbf{P}_{U_i}(B_1\cap\cdots\cap B_n) = \left(\dfrac{i}{N}\right)^n$.

On en déduit que $\mathbf{P}(B_1\cap\cdots\cap B_n) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{i}{N}\right)^n$.

Et sur le même principe, $\mathbf{P}(B_1\cap\cdots\cap B_{n+1}) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{i}{N}\right)^{n+1}$.

La probabilité cherchée est donc

$$\mathbf{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_n}(B_{n+1}) = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{i}{N}\right)^n}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{i}{N}\right)^{n+1}}.$$

**2.** Reprenons chacune des probabilités précédentes : $\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{i}{N}\right)^n$ est une somme de Riemann pour la fonction $x\mapsto x^n$.

Donc $\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{i}{N}\right)^n \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1}$.

Et de la même manière, $\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{i}{N}\right)^{n+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{n+2}$.

Et donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\mathbf{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_n}(B_{n+1}) = \frac{n+1}{n+2}$.

*Ce type de calcul a été abordé par Pierre-Simon de LAPLACE en essayant de répondre à la question «quelle est la probabilité que le soleil se lève demain ?».*
*Ou plutôt «sachant que le soleil s'est levé tous les jours les 10/100/10 000 derniers jours, quelle est la probabilité qu'il se lève demain ?».*

## Solution de l'exercice 27.21

Il suffit de noter que $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$, et que $\forall k \in Y(\Omega)$,

$$\mathbf{P}(Y = k) = \mathbf{P}(n-X = k) = \mathbf{P}(X = n-k) = \binom{n}{n-k} p^{n-k}(1-p)^{n-(n-k)} = \binom{n}{k}(1-p)^k(1-(1-p))^{n-k}.$$

Donc $Y \sim \mathscr{B}(n, 1-p)$.
**Intuitivement** : si $X$ désigne le nombre de succès lors de la répétition de $n$ épreuves de Bernoulli indépendantes de proba de succès égale à $p$, alors $Y = n - X$ représente le nombre d'échecs lors de la répétition de ces $n$ épreuves.
Mais l'échec se produit avec probabilité $1 - p$, donc logiquement, $Y \sim \mathscr{B}(n, 1-p)$.
Toutefois, ce raisonnement, qui doit guider l'intuition, ne peut suffire : si l'énoncé nous dit juste que $X$ est une variable aléatoire, il n'y a pas derrière de notion de succès, d'échec ou de répétitions.

## Solution de l'exercice 27.22

Notons $p = 0.9$.
Pour chacune des courses, la probabilité de réaliser un 20/20 est $p^{20}$ (qui vaut environ 0.12). Et donc par indépendance des 18 courses, $X$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}(18, p^{20})$.

Pour chaque saison, la probabilité de n'avoir aucun 20/20 est $\mathbf{P}(X = 0) = \binom{18}{0}\left(p^{20}\right)^0\left(1 - p^{20}\right)^{18}$.

Et donc la probabilité d'obtenir au moins un 20/20 est $1 - \mathbf{P}(X = 0) = 1 - \left(1 - p^{20}\right)^{18}$ (qui vaut environ 0.096).
Par indépendance des saisons[16], $Y$ suit donc la loi $\mathscr{B}\left(10, 1 - \left(1 - p^{20}\right)^{18}\right)$.

[16] Ce qui est plutôt légitime si les tirs sont déjà supposés indépendants.

## Solution de l'exercice 27.23

Il s'agit donc de prouver que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, et tout $i \in [\![1, k+1]\!]$, $\mathbf{P}(X_k = i) = \dfrac{1}{k+1}$.

Pour $k = 1$, c'est assez évident, à l'issue du premier tirage, il y a une chance sur deux pour qu'il y ait une seule boule blanche, et une chance sur deux qu'il y en ait deux.
Soit $k \in \mathbf{N}$ tel que $X_k \sim \mathscr{U}([\![1, k+1]\!])$. Notons alors $A_{k+1}$ l'événement «le $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage a donné une boule blanche».
On a alors, par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{A_{k+1}, \overline{A_{k+1}}\}$, pour tout $i \in [\![1, k+2]\!]$,

$$\mathbf{P}(X_{k+1} = i) = \mathbf{P}(A_{k+1} \cap [X_{k+1} = i]) + \mathbf{P}(\overline{A_{k+1}} \cap [X_{k+1} = i]).$$

Or, $A_{k+1} \cap [X_{k+1} = i] = A_{k+1} \cap [X_k = i-1]$ et de même $\overline{A_{k+1}} \cap [X_{k+1} = i] = \overline{A_{k+1}} \cap [X_k = i]$.
On a alors

$$\mathbf{P}\left(A_{k+1} \cap [X_{k+1} = i]\right) = \mathbf{P}\left(A_{k+1} \cap [X_k = i-1]\right) = \mathbf{P}(X_k = i-1)\mathbf{P}_{[X_k = i-1]}(A_{k+1}) = \frac{1}{k+1}\frac{i-1}{k+2}$$

**Remarque**
Cette formule reste valable pour $i = 1$, avec $\mathbf{P}(X_k = 0) = 0$.

Et de même,

$$\mathbf{P}\left(\overline{A_{k+1}} \cap [X_{k+1} = i]\right) = \mathbf{P}\left(\overline{A_{k+1}} \cap [X_k = i]\right) = \mathbf{P}(X_k = i)\mathbf{P}_{[X_k = i]}(\overline{A_{k+1}}) = \frac{1}{k+1}\frac{k+2-i}{k+2}.$$

Et donc il vient bien $\mathbf{P}([X_{k+1} = i]) = \dfrac{1}{k+2}$.
On conclut alors par le principe de récurrence.

**Alternative** : voici une autre solution, avec un autre système complet d'événements. Ni moins bonne, ni meilleure, elle vise surtout à vous montrer qu'il peut y avoir plusieurs systèmes complets d'événements intéressants.
On sait que $\{[X_k = j], 1 \leqslant j \leqslant k+1\}$ est un système complet d'événements.
Donc par la formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}(X_{k+1} = i) = \sum_{j=1}^{k+1} \mathbf{P}([X_{k+1} = i] \cap X_k = j).$$

Mais puisqu'au tirage numéro $k+1$ on a soit ajouté une boule blanche, soit aucune, on a donc $[X_{k+1} = i] \cap [X_k = j] = \emptyset$ si $j \notin \{i, i-1\}$.

Et donc $\mathbf{P}(X_{k+1}=i)=\mathbf{P}([X_{k+1}=i]\cap[X_k=i-1])+\mathbf{P}([X_{k+1}=i]\cap[X_k=i])$.
Mais $[X_{k+1}=i]\cap[X_k=i-1]$ signifie qu'on avait $i-1$ boules blanches après le $k^{\text{ème}}$ tirage et qu'on a eu une blanche au $(k+1)^{\text{ème}}$. Et donc $[X_{k+1}=i]\cap[X_k=i-1]=[X_k=i-1]\cap A_{k+1}$.
De même, $[X_{k+1}=i]\cap[X_k=i]=[X_k=i]\cap\overline{A_{k+1}}$.
Et donc on retrouve bien

$$\mathbf{P}(X_{k+1}=i)=\mathbf{P}([X_k=i-1]\cap A_{k+1})+\mathbf{P}([X_k=i]\cap\overline{A_{k+1}}).$$

## Solution de l'exercice 27.24

Il est évident que $N$ est à valeurs dans $[\![1,n]\!]$.
Il y a en tout $n!$ permutations de $[\![1,n]\!]$, il s'agit donc de trouver combien parmi elles réalisent $[N=k]$.

Mais lorsqu'on essaie de le faire, on réalise assez vite que c'est plutôt difficile, car pour choisir une permutation réalisant $[N=k]$, il faut choisir la valeur de $\sigma(k)$, choisir toutes les valeurs de $\sigma(1),\dots,\sigma(k-1)$ dans l'ordre croissant, mais surtout aller ensuite choisir $\sigma(k+1)$ inférieur à $\sigma(k)$, mais pas égaux aux précédents[17].

[17] Faute de quoi on n'a plus une permutation.

Dénombrons plutôt les issues réalisant $[N\geqslant k]$.
Pour cela il suffit de choisir les $k$ premiers éléments ordonnés par ordre croissant, et une permutation des autres.
Mais une fois choisis les $k$ premiers éléments (et il y a $\binom{n}{k}$ manières de le faire), il n'y a qu'une manière de les ordonner par ordre croissant, et il y a $(n-k)!$ manières de choisir le $(n-k)$-uplet $(\sigma(k+1),\dots,\sigma(n))$.

Donc $\mathbf{P}(N\geqslant k)=\dfrac{n!(n-k)!}{k!(n-k)!}\dfrac{1}{n!}=\dfrac{1}{k!}$.

Et puisque $N$ est à valeurs entières, on a $[N\geqslant k]=[N=k]\cap[N\geqslant k+1]$, si bien que

$$\mathbf{P}(N\geqslant k)=\mathbf{P}(N=k)+\mathbf{P}(N\geqslant k+1)\Leftrightarrow\mathbf{P}(N=k)=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}=\frac{k}{(k+1)!}.$$

Sauf dans le cas où $k=n$, puisqu'alors $\mathbf{P}(N\geqslant n+1)$ est nul, et donc
$\mathbf{P}(N=n)=\mathbf{P}(N\geqslant n)=\dfrac{1}{n!}$.

## Solution de l'exercice 27.25

1. Il est évident que $X_1\sim\mathscr{B}\left(\frac12\right)$ : on avait une chance sur deux d'obtenir une boule blanche au premier tirage.
2. Considérons le système complet d'événements $\{[X_1=0],[X_1=1]\}$.
Alors, $X_2$ prend ses valeurs dans $[\![0,2]\!]$, et

$$\mathbf{P}(X_2=0)=\mathbf{P}_{[X_1=0]}(X_2=0)\mathbf{P}(X_1=0)+\underbrace{\mathbf{P}_{[X_1=1]}(X_2=0)}_{=0}\mathbf{P}(X_1=1)=\frac{2}{3}\frac{1}{2}=\frac{1}{3}.$$

De même, puisque l'événement $[X_2=2]\cap[X_1=0]$ est impossible, on a

$$\mathbf{P}(X_2=2)=\mathbf{P}_{[X_1=1]}(X_2=2)\mathbf{P}(X_1=1)=\frac{2}{3}\frac{1}{2}=\frac{1}{3}.$$

On pourrait de même faire le calcul pour $\mathbf{P}(X_2=1)$, mais si nous sommes convaincus que $X_2$ prend ses valeurs dans $[\![0,2]\!]$, alors il est évident que

$$\mathbf{P}(X_2=1)=1-\mathbf{P}(X_2=0)-\mathbf{P}(X_2=2)=\frac{1}{3}.$$

3. Montrons le résultat par récurrence sur $n$. Nous venons d'initialiser la récurrence pour $n=1$ et $n=2$.
Supposons donc que $X_n\sim\mathscr{U}([\![0,n]\!])$, et donc que $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\mathbf{P}(X_n=k)=\dfrac{1}{n+1}$.
Si $X_n=k$, alors l'urne contient, à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage $b+kb=b(k+1)$ boules blanches, et

au total $2b + nb = b(n+2)$ boules.
Ainsi, $\mathbf{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k+1) = \dfrac{k+1}{n+2}$ et $\mathbf{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k) = \dfrac{n-k+1}{n+2}$.
Et évidemment, pour $i \notin \{k, k+1\}$, $\mathbf{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} = i) = 0$.
Puisque $\{[X_n = i], i \in [\![0, n]\!]\}$ forme un système complet d'événements, on a $\forall k \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_{n+1} = k) &= \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}(X_n = i)\mathbf{P}_{[X_n=i]}(X_{n+1} = k)\\ &= \mathbf{P}(X_{n+1} = k) = \mathbf{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k)\mathbf{P}(X_n = k) + \mathbf{P}_{[X_n=k-1]}(X_{n+1} = k)\\ &= \frac{n-k+1}{n+2}\frac{1}{n+1} + \frac{k}{n+2}\frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+2}.\end{aligned}$$

Enfin, le même raisonnement reste valable pour $\mathbf{P}(X_{n+1} = 0)$ et $\mathbf{P}(X_{n+1} = n+1)$ :

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = 0) = \mathbf{P}_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 0)\mathbf{P}(X_n = 0) = \frac{n+1}{n+2}\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+2}.$$
$$\mathbf{P}(X_{n+1} = n+1) = \mathbf{P}_{[X_n=n]}(X_{n+1} = n+1)\mathbf{P}(X_n = n) = \frac{n+1}{n+2}\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+2}.$$

En conclusion, $\forall k \in [\![0, n+1]\!]$,

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = k) = \frac{1}{n+2}.$$

On en déduit que $X_{n+1}$ suit la loi uniforme sur $[\![0, n+1]\!]$.
*Commentaires : cet exercice est une très légère variation de l'exercice 14 du TD28, où c'est essentiellement la formulation qui a changé. Je vous laisse en revanche constater que les calculs sont exactement les mêmes dans ces deux exercices.*

> **⚠ Attention !**
> Un système complet d'événements doit recouvrir $\Omega$ tout entier. Donc ici, il est hors de question de se limiter à $[X_n = k], [X_n = k-1]$, même si vous sentez bien qu'eux seuls sont pertinents pour la suite, **ils ne forment pas un système complet d'événements.**

> **Pourquoi les séparer ?**
> Ces cas sont traités à part pour ne pas avoir eu à écrire par exemple $\mathbf{P}_{[X_n=-1]}(X_{n+1} = 0)$. L'événement $[X_n = -1]$ étant de probabilité nulle, on ne peut pas l'utiliser pour conditionner des probas.

## Solution de l'exercice 27.26

**1.** Puisqu'on a la certitude qu'au bout de $n+1$ tirages, au moins deux boules auront été identiques, on peut par exemple considérer que l'expérience revient à tirer $n+1$ boules dans l'urne.
Et alors on peut prendre $\Omega = [\![1, n]\!]^{n+1}$, muni de la probabilité uniforme.
On a évidemment $T(\Omega) = [\![2, n+1]\!]$.

**2.** Pour $i \in [\![1, n]\!]$, notons $X_i$ la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée lors du $i^{\text{ème}}$ tirage, de sorte que $X_i \sim \mathcal{U}([\![1, n]\!])$.
On a donc $\mathbf{P}(T = 2) = \mathbf{P}(X_1 = X_2)$.
En utilisant le système complet d'événements $\{[X_1 = k], 1 \leqslant k \leqslant n\}$, la formule des probabilités totales nous donne

$$\mathbf{P}(T = 2) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X_1 = k)\mathbf{P}_{[X_1=k]}(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X_1 = k)\mathbf{P}_{[X_1=k]}(X_2 = k).$$

Mais puisqu'il y a remise, les événements $[X_1 = k]$ et $[X_2 = k]$ sont indépendants, si bien que

$$\mathbf{P}(T = 2) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X_1 = k)\mathbf{P}(X_2 = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

**3.** L'événements $[T > k-1]$ signifie que lors des $k-1$ premiers tirages, on a obtenu $k-1$ numéros différents.
Et $[T > k]$ signifie que lors des $k$ premiers tirages, on a obtenu $k$ numéros différents.
Sachant $[T > k-1]$, ceci se produit si et seulement si lors du $k^{\text{ème}}$ tirage, on obtient l'une des $n-(k-1)$ boules qui n'étaient pas sorties lors des précédents tirages.
Donc $\mathbf{P}_{[T>k-1]}(T > k) = \dfrac{n-k+1}{n}$.

**4.** On a donc $\mathbf{P}_{[T>k-1]}(T > k) = \dfrac{\mathbf{P}([T > k-1] \cap [T > k])}{\mathbf{P}(T > k-1)} = \dfrac{\mathbf{P}(T > k)}{\mathbf{P}(T > k-1)}$.
Et donc

$$\mathbf{P}(T > k) = \frac{n-k+1}{n}\mathbf{P}(T > k-1) = \frac{n-k+1}{n}\frac{n-k+2}{n}\mathbf{P}(T > k-2)$$

$$= \cdots = \frac{n-k+1}{n}\frac{n-k+2}{n}\cdots\frac{n-1}{n}\underbrace{\mathbf{P}(T>1)}_{=1} = \frac{n!}{(n-k)!n^k}.$$

Et alors, pour $k \in T(\Omega)$, puisque $T$ est à valeurs entières,

$$[T > k-1] = [T = k] \cup [T > k]$$

ces deux événements étant incompatibles.
Donc $\mathbf{P}(T > k-1) = \mathbf{P}(T = k) + \mathbf{P}(T > k)$ et donc

$$\mathbf{P}(T=k) = \mathbf{P}(T>k-1) - \mathbf{P}(T>k) = \frac{n!}{(n-k+1)!n^{k-1}} - \frac{n!}{(n-k)!n^k} = \frac{n!(n-(n-k+1))}{(n-k+1)!n^k} = \frac{(k-}{(n-k}$$

**Astuce**

Une vérification facile : pour $k = 2$, on retrouve bien

$$\mathbf{P}(T=2) = \frac{1}{n}.$$

## SOLUTION DE L'EXERCICE 27.27

Il est clair que $X_0$ suit la loi certaine égale à 1 (c'est-à-dire que $\mathbf{P}(X_0 = 1) = 1$), et que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathbf{P}(X_1 = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 1 \\ \frac{1}{n-1} & \text{si } k \geqslant 2 \end{cases}$$

Il semble assez évident que pour tout $k \geqslant 1$, les $\mathbf{P}(X_k = i)$, pour $i \geqslant 2$ sont tous égaux, puisque tous les joueurs semblent jouer des rôles symétriques, à l'exception du joueur 1, qui a la balle au premier tour.
Admettons donc temporairement ceci, et notons $p_k = \mathbf{P}(X_k = 2)$, de sorte que $\mathbf{P}(X_k = 3) = \cdots = \mathbf{P}(X_k = n) = p_k$, et donc

$$\mathbf{P}(X_k = 1) = 1 - \sum_{i=2}^{n}\mathbf{P}(X_k = i) = 1 - (n-1)p_k.$$

Alors pour tout $k \geqslant 0$, et tout $j \in [\![1, n]\!]$, en appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $\{[X_k = i],\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$, il vient

$$\mathbf{P}(X_{k+1} = j) = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(X_k = i)\mathbf{P}_{[X_k = i]}(X_{k+1} = j).$$

Mais puisqu'à chaque étape le ballon est lancé avec équiprobabilité à l'un des joueurs autre que celui qui l'a déjà,

$$\mathbf{P}_{[X_k=i]}(X_{k+1} = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \frac{1}{n-1} & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

En particulier,

$$\mathbf{P}(X_{k+1} = 2) = \frac{1}{n-1}\mathbf{P}(X_k = 1) + \sum_{j=3}^{n}\frac{1}{n-1}\mathbf{P}(X_k = j) = \frac{1}{n-1}\left(1-(n-1)p_k + (n-2)p_k\right) = \frac{1-p_k}{n-1}.$$

**⊕ Rigoureusement**

Une récurrence montrerait, sans avoir besoin de connaître leur valeur, que tous les $\mathbf{P}(X_k = j), j \geqslant 2$ sont égaux.

Il est clair que le même raisonnement prouverait qu'on obtient le même résultat pour $\mathbf{P}(X_{k+1} = 3), \dots, \mathbf{P}(X_{k+1} = n)$, prouvant le résultat admis précédemment.
Donc au final, pour tout $k \geqslant 0$,

$$p_{k+1} = \frac{1}{n-1} - \frac{p_k}{n-1}.$$

Donc la suite $(p_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite arithmético-géométrique de raison $-\frac{1}{n-1}$.
L'unique solution de l'équation $x = -\frac{1}{n-1}x + \frac{1}{n-1}$ est $x = \frac{1}{n}$, si bien qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $p_k = \lambda\left(-\frac{1}{n-1}\right)^k + \frac{1}{n}$.
En utilisant $p_0 = 0$, on arrive donc à $\lambda = -\frac{1}{n}$, et donc

$$\forall k \in \mathbf{N},\ p_k = \frac{1}{n}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{(n-1)^k} + 1\right).$$

Et donc en définitive, pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathbf{P}(X_k = i) = \begin{cases} \frac{1}{n} + \frac{(-1)^k}{n(n-1)^{k-1}} & \text{si } i = 1 \\ \frac{1}{n}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{(n-1)^k} + 1\right) & \text{si } i \geqslant 2 \end{cases}$$

$$1 - \frac{n-1}{n}\left(1 + \frac{(-1)^{k+1}}{(n-1)^k}\right).$$

## Solution de l'exercice 27.28

Commençons tout de suite par noter que $Z_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
L'événement $[Z_n \leqslant k]$ est réalisé si et seulement si dans chaque urne on a obtenu une boule portant un numéro inférieur ou égal à $k$, ce qui se produit avec probabilité $\frac{k}{n}$.

Et les tirages dans les différentes urnes étant indépendants, on a donc $\mathbf{P}(Z_n \leqslant k) = \left(\frac{k}{n}\right)^N$.

Mais $Z_n$ étant à valeurs entières, $[Z_n \leqslant k] = [Z_n \leqslant k-1] \cup [Z_n = k]$, ces deux événements étant incompatibles.
Donc $\mathbf{P}(Z_n \leqslant k) = \mathbf{P}(Z_n \leqslant k-1) + \mathbf{P}(Z_n = k) \Leftrightarrow \mathbf{P}(Z_n = k) = \mathbf{P}(Z_n \leqslant k) - \mathbf{P}(Z_n \leqslant k-1)$.

Ensuite, pour tout $k \in Z_n(\Omega)$

$$\mathbf{P}(Z_n = k) = \mathbf{P}(Z_n \leqslant k) - \mathbf{P}(Z_n \leqslant k-1) = \left(\frac{k}{n}\right)^N - \left(\frac{k-1}{n}\right)^N.$$

cer. Et donc un peu plus de chance de l'avoir à l'issue du deuxième, donc un peu moins de chance de l'avoir à issue du troisième etc.
La formule que nous venons d'obtenir va bien dans ce sens là en raison de la présence du $(-1)^k$.
Enfin, notons que lorsque $k \to +\infty$, cette dissymétrie entre les joueurs s... per puisque

**Méthode**

Une question du type «déterminer la loi de $X$» doit nécessairement commencer par la détermination du support de $X$, afin de savoir pour quelles valeurs de $k$ on aura besoin de calculer $\mathbf{P}(X = x)$. C'est de plus souvent un moyen de détecter des erreurs grossières.

**Astuce**

Cette formule sert régulièrement pour déterminer la loi de variables pour lesquelles il est plus facile d'obtenir $\mathbf{P}(X \leqslant k)$ que $\mathbf{P}(X = k)$. Elle ne vaut que pour des variables à valeurs entières (qui ne peuvent prendre aucune valeur entre $k-1$ et $k$).