

# TD 27 : SÉRIES NUMÉRIQUES

## ► Études de convergence

**EXERCICE 27.1** Déterminer la nature des séries de terme général  $u_n$  dans chacun des cas suivants :

PD

$$1. u_n = \frac{1}{n(n + \ln n)}$$

$$5. u_n = \frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$$

$$9. u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \alpha \sin\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\alpha \in \mathbf{R}$$

$$2. u_n = \sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1$$

$$6. u_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$$

$$10. u_n = \frac{\sin(n^2)}{n^2}$$

$$3. u_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$7. u_n = \frac{n^2}{(n-1)!}$$

$$11. u_n = \frac{1}{n} \int_0^1 t^n f(t) dt \text{ pour}$$

$$f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$$

$$4. u_n = \ln \frac{n^2 + 5n + 1}{n^2 + 2n + 1}$$

$$8. u_n = \frac{\sin \frac{1}{n}}{\sqrt{n+1}}$$

**EXERCICE 27.2** Soit  $(u_n)$  une suite à valeurs dans  $\mathbf{R}_+$  telle que  $\sum u_n$  converge.

F

Étudier la convergence des séries  $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ ,  $\sum u_n^2$  et  $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ .

**EXERCICE 27.3** Discuter, suivant les valeurs de  $(a, b) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$  la nature de la série de terme général  $\frac{a^n}{1+b^n}$ .

PD

**EXERCICE 27.4** En fonction des valeurs de  $p \in \mathbf{N}$ , étudier la nature de la série de terme général  $u_n = \frac{1! + 2! + \dots + n!}{(n+p)!}$ .

PD

**EXERCICE 27.5** Montrer que :  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $(1 + \sqrt{3})^n + (1 - \sqrt{3})^n$  est un entier pair. En déduire la nature de  $\sum \sin[\pi(1 + \sqrt{3})^n]$ .

AD

**EXERCICE 27.6 (Banque CCP 5)**

AD

Étudier la nature de la série de terme général  $u_n = \frac{(e - (1 + \frac{1}{n})^n) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2 + n))^2}$ .

**EXERCICE 27.7 Encore des convergences**

AD

Déterminer dans chacun des cas suivants la nature de la série de terme général  $u_n$ .

$$1. u_n = (-1)^n \frac{\ln(n)^2 - \ln(n)}{n\sqrt{n}}$$

$$4. u_n = \operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/n}$$

$$7. (\star) \operatorname{Arccos}\left(\frac{n^\alpha}{1+n^\alpha}\right), \alpha > 0.$$

$$2. u_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + (-1)^n + 1}$$

$$5. u_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$8. u_n = n^{\frac{1}{n^2}} - 1$$

$$3. u_n = \frac{n^2 \sin(n)}{3^{n+2}}$$

$$6. u_n = \operatorname{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{3n}}\right) - \sqrt{n} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$9. u_n = \frac{1}{\binom{4n}{2n}}$$

**EXERCICE 27.8 Critère des séries alternées... ou pas**

AD

Déterminer, dans chacun des cas suivants, la nature de la série de terme général  $u_n$  :

$$1. u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

$$4. u_n = \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$$

$$2. u_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + (-1)^n}$$

$$5. u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2 + 1})$$

$$3. u_n = \frac{(-1)^n \ln(n)}{\sqrt{n}}$$

**EXERCICE 27.9 (Banque CCP 46)**

AD

On pose, pour  $n \geq 1$ ,  $u_n = \cos(\pi\sqrt{n^2 + n + 1})$ .

1. Prouver que,  $\pi\sqrt{n^2 + n + 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  où  $\alpha$  est un réel que l'on déterminera.

2. En déduire que la série  $\sum u_n$  converge.

3. La série  $\sum u_n$  converge-t-elle absolument ?

## ► Calculs de sommes

**EXERCICE 27.10** On admet que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ . Calculer alors  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$  et  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ . F

**EXERCICE 27.11** Étudier la convergence et, le cas échéant, calculer la somme de la série  $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ . PD

**EXERCICE 27.12** Prouver la convergence et calculer la somme de la série de terme général  $\frac{\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor - \lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n}$ . PD

**EXERCICE 27.13** Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose  $u_n = \ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)$ . AD

- Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que la série de terme général  $u_n$  soit convergente.
- Calculer alors la somme de cette série.

**EXERCICE 27.14** Série harmonique alternée et réarrangement D

Dans tout l'exercice, pour  $n \geq 1$ , on pose  $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ .

- À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction  $f : x \mapsto \ln(1+x)$ , prouver que  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge et que sa somme vaut  $\ln(2)$ . S'agit-il d'une série absolument convergente ?

- On définit une application  $\sigma : \mathbf{N}^* \rightarrow \mathbf{N}^*$  par  $\sigma(n) = \begin{cases} 4k & \text{si } n = 3k \\ 2k+1 & \text{si } n = 3k+1 \\ 4k+2 & \text{si } n = 3k+2 \end{cases}$

Montrer que  $\sigma$  est une permutation de  $\mathbf{N}^*$ .

On a alors  $\sum_{n=1}^{3N+3} u_{\sigma(n)} = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2N-1} - \frac{1}{4N-2} - \frac{1}{4N}\right)$ .

- Montrer que  $\sum u_{\sigma(n)}$  converge et calculer sa somme. Êtes-vous surpris ?

## ► Comparaison série/intégrale

**EXERCICE 27.15** Séries de Bertrand AD

Montrer, à l'aide d'une comparaison série/intégrale que la série de terme général  $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$  ou ( $\alpha = 1$  et  $\beta > 1$ ).

**EXERCICE 27.16** Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \right)^{\frac{1}{-2 \ln(n)}}$ . AD

## ► Divers

**EXERCICE 27.17** Un produit infini AD

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{\ln k}{k^2}\right)$ . Étudier la convergence de la suite  $(u_n)$ .

**EXERCICE 27.18** Équivalentes mais de natures différentes PD

Pour  $n \geq 1$ , on pose  $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  et  $b_n = a_n + \frac{1}{n}$ .

Montrer que  $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$ , mais que les séries  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  sont de natures différentes.

**EXERCICE 27.19** Reste d'une série alternée AD

- Déterminer le signe de  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 8^n}{(2n)!}$ .

2. Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on pose  $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$ . Déterminer la nature de la série  $\sum u_n$ .

**EXERCICE 27.20** Application des séries à l'étude des suites (Oral Centrale)

AD

Soit  $x \in \mathbf{R}_+^*$ . Pour  $n \in \mathbf{N}^*$ , soit  $u_n = \frac{n!}{x^n} \prod_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)$ .

1. Étudier la série de terme général  $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ .  
En déduire que la suite  $(u_n)$  converge et préciser sa limite.
2. Établir l'existence de  $\alpha \in \mathbf{R}$  tel que la série de terme général  $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) - \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$  converge.
3. Montrer qu'il existe  $A \in \mathbf{R}^*$  tel que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} An^\alpha$ .

**EXERCICE 27.21** Séries semi-convergentes et théorème de réarrangement de Riemann (Oral ENS)

TD

1. Soit  $\sum u_n$  une série absolument convergente. Montrer que  $\forall \sigma \in \mathfrak{S}(\mathbf{N})$ ,  $\sum u_{\sigma(n)}$  converge et que  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ .
2. Soit  $\sum u_n$  une série réelle convergente mais non absolument convergente (on parle de série semi-convergente).  
Montrer que pour tout  $\ell \in \mathbf{R}$ , il existe  $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbf{N})$  telle que  $\sum u_{\sigma(n)}$  converge et  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \ell$ .

**EXERCICE 27.22** Série des inverses des nombres premiers (Oral ENS)

TD

Soi  $(p_n)_{n \geq 1}$  la suite croissante des nombres premiers. Montrer que  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n}$  diverge.

*Indication* : étudier la nature de  $\sum -\ln\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$ , puis faire apparaître  $\prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - p_i^{-1}}$ .

## CORRECTION DES EXERCICES DU TD 27

## SOLUTION DE L'EXERCICE 27.1

1. On a, pour  $n \geq 1$ ,  $0 \leq \frac{1}{n(n + \ln(n))} \leq \frac{1}{n^2}$ .

Puisque la série de terme général  $\frac{1}{n^2}$  converge<sup>1</sup>, par critère de comparaison pour les séries à termes positifs,  $\sum u_n$  converge.

<sup>1</sup> C'est une série de Riemann de paramètre  $2 > 1$ .

2. Il s'agit clairement d'une série à termes positifs. Et on a

$$u_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

Puisque la série de terme général  $\frac{1}{2n}$  diverge, par critère de comparaison, il en est de même de la série de terme général  $u_n$ .

3. Pour  $n \geq 3$ , on a  $\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \leq \frac{5}{6}$  et donc  $0 \leq u_n \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$ .

Mais la série géométrique  $\sum \left(\frac{5}{6}\right)^n$  converge, donc il en est de même de  $\sum u_n$ .

4. On a  $\frac{n^2 + 5n + 1}{n^2 + 2n + 1} = 1 + \frac{3n}{n^2 + 2n + 1}$ .

Donc  $\ln \frac{n^2 + 5n + 1}{n^2 + 2n + 1} = \ln \left(1 + \frac{3n}{n^2 + 2n + 1}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3n}{n^2 + 2n + 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{n}$ .

Et donc par comparaison des séries à termes positifs,  $\sum u_n$  diverge.

5. On a  $\sqrt[n]{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$ , et donc  $n + (-1)^n \sqrt[n]{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$ .

Donc  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ . Donc par critère de comparaison pour les séries à termes positifs la série de terme général  $u_n$  diverge.

6. Il y a un vrai piège ici : nous ne sommes pas en présence d'une série de Riemann, car bien que  $1 + \frac{1}{n}$  soit toujours strictement supérieur à 1, ce n'est pas une constante. Or les séries de Riemann sont celles de la forme  $\frac{1}{n^\alpha}$ , où  $\alpha$  est fixé.

Mais on a  $nu_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = e^{-\frac{1}{n} \ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .

Donc  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ , et par critère de comparaison pour les séries à termes positifs,  $\sum u_n$  converge.

7. Notons que  $n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (n-1)(n-2)$ , et donc  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(n-1)(n-2)}{(n-1)!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(n-3)!}$ .

Mais la série de terme général  $\frac{1}{(n-3)!}$  converge puisque  $\sum \frac{1}{n!}$  converge.

Et donc par critère de comparaison pour les séries à termes positifs,  $\sum u_n$  converge.

8. Notons que pour  $n \geq 1$ ,  $\sin \frac{1}{n} \geq 0$ , et donc  $u_n \geq 0$ .

On a alors  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ , et la série de terme général  $\frac{1}{n^{3/2}}$  est une série de Riemann convergente.

Donc par critère de comparaison pour les séries à termes positifs,  $\sum u_n$  converge.

9. Utilisons un développement limité : on a

$$\begin{aligned} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \alpha \sin \left(\frac{1}{n}\right) &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \alpha \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} (\alpha + 1)\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Ainsi, pour  $\alpha + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq -1$ , on a  $\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \alpha \sin \left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha + 1}{n}$ .

Mais alors, par critère de comparaison pour les séries à termes positifs  $\sum u_n$  diverge.

En revanche, si  $\alpha = -1$ , alors  $\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \alpha \sin \left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$ .

Et alors, par critère de comparaison pour les séries de signe constant,  $\sum u_n$  converge.

## Positivité

Il est évident que  $\frac{1}{n}$  est positif, il n'est donc pas nécessaire de faire une étude du signe de  $u_n$  : il est positif à partir d'un certain rang, ce qui nous suffit.

## Rappel

Une suite est équivalente au premier terme **non nul** de son développement limité.

10. Il ne s'agit pas ici d'une série dont le terme général est de signe constant, donc testons son absolue convergence.

On a  $|u_n| \leq \frac{1}{n^2}$ , si bien que la série<sup>2</sup> de terme général  $|u_n|$  est convergente.

<sup>2</sup> À termes positifs.

Donc  $\sum u_n$  est absolument convergente, donc convergente.

11. Puisque  $f$  est continue sur  $[0, 1]$ , elle y est bornée : soit donc  $M > 0$  tel que pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $|f(t)| \leq M$ .

Alors par inégalité triangulaire  $0 \leq |u_n| \leq \frac{1}{n} \int_0^1 t^n |f(t)| dt \leq \frac{M}{n} \int_0^1 t^n dt \leq \frac{M}{n(n+1)}$ .

Or la série de terme général  $\frac{1}{n(n+1)}$  est convergente (on peut remarquer que  $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$ , ou reconnaître une série télescopique convergente), donc  $\sum u_n$  est absolument convergente, donc convergente.

### SOLUTION DE L'EXERCICE 27.2

On a  $0 \leq \frac{u_n}{1+u_n} \leq u_n$ , et donc par critère de comparaison,  $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$  converge.

Puisque  $u_n \rightarrow 0$ , il existe  $n_0 \in \mathbf{N}$  tel que pour  $n \geq n_0$ ,  $0 \leq u_n \leq 1$ . On a donc, pour  $n \geq n_0$   $0 \leq u_n^2 \leq u_n$ , et alors puisque  $\sum u_n$  converge, c'est également le cas de  $\sum u_n^2$ .

Enfin, rappelons que pour  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ ,  $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ , et donc en particulier,

$$0 \leq \frac{\sqrt{u_n}}{n} \leq \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{1}{n^2} \right).$$

Mais les séries de termes généraux  $u_n$  et  $\frac{1}{n^2}$  sont convergentes, donc par critère de domination pour les séries à termes positifs, il en est de même de  $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ .

### SOLUTION DE L'EXERCICE 27.3

Notons que pour  $b > 1$ ,  $1 + b^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b^n$ , et que pour  $b < 1$ ,  $1 + b^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$ .

En revanche, pour  $b = 1$ , on a  $1 + b^n = 2$  pour tout  $n$ .

► Donc si  $b > 1$ ,  $\frac{a^n}{1+b^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{a}{b}\right)^n$ .

Or la série<sup>3</sup> de terme général  $\left(\frac{a}{b}\right)^n$  converge si et seulement si  $\frac{a}{b} < 1 \Leftrightarrow a < b$ .

<sup>3</sup> Géométrique.

Par critère de comparaison pour les séries à termes positifs,  $\sum \frac{a^n}{1+b^n}$  converge si et seulement si  $a < b$ .

► Si  $b = 1$ ,  $\frac{a^n}{1+b^n} = \frac{a^n}{2}$  converge si et seulement si  $a \in ]0, 1[$ .

► Si  $b \in ]0, 1[$ , alors  $\frac{a^n}{1+b^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a^n$ . Et  $\sum a^n$  converge si et seulement si  $a \in ]0, 1[$ , donc par critère de comparaison, il en est de même de  $\sum \frac{a^n}{1+b^n}$ .

En résumé,  $\sum \frac{a^n}{1+b^n}$  converge si et seulement si  $a \in ]0, 1[$  ou  $(b > 1$  ou  $a < b)$ .

### SOLUTION DE L'EXERCICE 27.4

► Pour  $p = 0$ , on a  $u_n = 1 + \frac{1! + 2! + \dots + (n-1)!}{n!} \geq 1$ , de sorte que  $u_n \not\rightarrow 0$  sur  $n \rightarrow +\infty$ . Et donc  $\sum u_n$  diverge grossièrement.

► Pour  $p = 1$ ,  $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1! + 2! + \dots + (n-1)!}{(n+1)!} \geq \frac{1}{n+1}$ .

Or,  $\frac{1}{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ , et donc par critère de comparaison pour les séries à termes positifs,  $\sum \frac{1}{n+1}$  diverge.

On en déduit, par critère de comparaison que  $\sum u_n$  diverge.

► Pour  $p \geq 2$ , on a  $1! + 2! + \dots + n! \leq (n-1) \times (n-1)! + n!$ .

Et donc

$$u_n \leq \frac{(n-1) \times (n-1)! + n!}{(n+p)!} \leq \frac{(n-1) \times (n-1)! + n!}{(n+2)!} \leq \frac{n-1}{n(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

$n \geq n_0$

On a utilisé là ce qu'on a appelé en cours *l'indifférence des premiers termes*, qui stipule que la nature d'une série ne dépend que de ce qui se passe pour  $n$  grand, et donc que la majoration ne soit vraie que pour  $n \geq n_0$  n'empêche pas de conclure.

**Astuce**

Cette inégalité vient tout simplement du fait que  $(a-b)^2 \geq 0$ .

Mais  $\frac{n-1}{n(n+1)(n+2)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ , de sorte que par critère de comparaison pour les séries à termes positifs,  $\sum \frac{n-1}{n(n+1)(n+2)}$  converge.

Et de même,  $\frac{1}{(n+1)(n+2)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ , donc  $\sum \frac{1}{(n+1)(n+2)}$  converge.

Ainsi, par somme de séries convergentes,  $\sum \left( \frac{n-1}{n(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$  converge, et donc par critère de comparaison pour séries à termes positifs<sup>4</sup>,  $\sum u_n$  converge.

<sup>4</sup>  $u_n$  est clairement positif.

En résumé,  $\sum u_n$  converge si et seulement si  $p \geq 2$ .

### SOLUTION DE L'EXERCICE 27.5

Par la formule du binôme, on a

$$(1 + \sqrt{3})^n + (1 - \sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sqrt{3}^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\sqrt{3})^k = 2 \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} (-\sqrt{3})^k = 2 \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} 3^p$$

qui est bien un entier pair. Notons le  $N_n$ .

On a donc

$$u_n = \sin [\pi (1 + \sqrt{3})^n] = \sin [\pi N_n - \pi (1 - \sqrt{3})^n] = -\sin [\pi (1 - \sqrt{3})^n].$$

Mais puisque  $-1 < 1 - \sqrt{3} < 1$ ,  $(1 - \sqrt{3})^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , et donc

$$\sin [\pi (1 - \sqrt{3})^n] \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \pi (1 - \sqrt{3})^n.$$

Et donc

$$|\sin [\pi (1 - \sqrt{3})^n]| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |\pi (1 - \sqrt{3})^n| = \pi (\sqrt{3} - 1)^n.$$

Or la série géométrique de terme général  $(\sqrt{3} - 1)^n$  est convergente, donc par critère de comparaison pour les séries à termes positifs,  $\sum |u_n|$  est convergente, donc  $\sum u_n$  est absolument convergente, et par conséquent convergente.

### SOLUTION DE L'EXERCICE 27.6

Voici un exercice qui n'a pas d'autre but que de tester votre habileté calculatoire, et qui ne s'en cache pas !

La clé est de ne pas paniquer face à l'apparent complexité de  $u_n$  et de procéder méthodiquement.

Nous allons essayer de trouver un équivalent de  $u_n$ .

On a déjà  $e^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$  et donc  $e^{\frac{1}{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$ .

Puisque  $n^2 + n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2$ , et que ces deux suites tendent vers  $+\infty$ , on a

$$\ln(n^2 + n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n^2) = 2 \ln(n).$$

Donc le dénominateur de  $u_n$  est équivalent à  $4 \ln(n)^2$ .

Reste donc

$$\begin{aligned} e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= e - e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} e - e^{1 - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} e \left(1 - e^{-\frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e \left(\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e}{2n} \end{aligned}$$

Et donc pour finir,  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e}{8n \ln(n)^2}$ . Puisque cet équivalent est positif,  $u_n$  l'est aussi, au moins à partir d'un certain rang, et donc il nous suffit d'étudier la nature de la série de

#### Danger !

Ne pas conclure trop vite à l'aide d'équivalents : il s'agit ici d'une série qui n'est pas de signe constant.

#### Série géométrique

Le même type de raisonnement prouve qu'une série géométrique, lorsqu'elle est convergente, est absolument convergente.

#### Rappel

Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites positives, équivalentes, et qui tendent vers  $\ell \in \mathbb{R}$  avec  $\ell \neq 1$ , alors

$$\ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(v_n).$$

DL<sub>2</sub>(0) de  $\ln(1+x)$ .

$$e^u - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u.$$

terme général  $\frac{e}{8n \ln(n)^2}$ .

À présent, la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t \ln(t)^2}$  étant continue, décroissante et positive sur  $[2, +\infty[$ , par comparaison série/intégrale, nous savons que  $\sum \frac{1}{n \ln(n)^2}$  converge si et seulement si la

suite  $\left(\int_2^n \frac{dt}{t(\ln t)^2}\right)_n$  converge.

Mais  $\int_2^n \frac{dt}{t(\ln t)^2} = \left[-\frac{1}{\ln t}\right]_2^n = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln 2}$ .

Et donc  $\sum \frac{e}{8n \ln(n)^2}$  converge, donc par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, il en est de même de  $\sum u_n$ .

### SOLUTION DE L'EXERCICE 27.7

1. Puisqu'il ne s'agit pas d'une série de signe constant, étudions l'absolue convergence. On a

$$\text{alors } |u_n| = \frac{\ln(n)^2 - \ln(n)}{n\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)^2}{n\sqrt{n}}.$$

On a alors,  $\ln(n)^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n^{1/4})$ , et donc  $|u_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2-1/4}}\right)$ .

Puisque  $\frac{5}{4} > 1$ , par comparaison à une série de Riemann,  $\sum |u_n|$  converge, et donc  $\sum u_n$  converge.

2. On a  $0 \leq |u_n| \leq \frac{1}{n^2}$ .

Donc par comparaison pour les séries à termes positifs,  $\sum |u_n|$  converge, et donc  $\sum u_n$  converge absolument, donc converge.

3. On a  $0 \leq |u_n| \leq \frac{n^2}{3^{n+2}}$ . Mais  $\frac{n^2}{3^{n+2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

Donc par comparaison à une série de Riemann, la série de terme général  $\frac{n^2}{3^{n+2}}$  converge. Et alors,  $\sum |u_n|$  converge aussi, de sorte que  $\sum u_n$  est absolument convergente, donc convergente.

4. Puisque  $\text{ch}\left(\frac{1}{n}\right) \geq 1$ ,  $u_n \geq 1$ .

Et donc  $\sum u_n$  diverge grossièrement.

5. Étant donné que  $u_n$  contient des puissances et des factorielles, le critère de d'Alembert est tout indiqué.

On a alors  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1} < 1$ , et donc  $\sum u_n$  converge.

6. Il s'agit de noter que les premiers termes des développements asymptotiques de  $\text{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{3n}}\right)$

et  $\sqrt{n} \text{sh}\left(\frac{1}{n}\right)$  sont égaux, donc se simplifient.

En effet, en utilisant des développements limités à l'ordre 2 pour  $\text{ch}$  et 3 pour  $\text{sh}$ ,

$$\text{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{3n}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ et } \sqrt{n} \text{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

De plus, les termes suivants sont nuls, donc pour obtenir un équivalent de  $u_n$ , il faudrait au minimum pousser les développements limités à l'ordre 4 pour  $\text{ch}$  et à l'ordre 5 pour  $\text{sh}$ .

C'est faisable, mais peu désirable.

Notons plutôt que dans le développement limité à l'ordre 3 de  $\text{ch}$  en 0, le terme en  $x^3$  (qui est nul ici, mais pas besoin de le savoir) et le reste en  $o(x^3)$  peuvent tous deux être réunis dans un  $O(x^3)$ . Et alors

$$\text{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{3n}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{6n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \text{ et de même } \text{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{6n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

Donc  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ .

Puisque la série de terme général  $\frac{1}{n\sqrt{n}}$  converge, il en est de même de  $\sum u_n$ .

#### Méthode

Pour les séries qui ne sont pas de signe constant, l'absolue convergence est à peu près tout ce dont on dispose, donc il faut commencer par là.

#### Alternative

On pourrait également prouver par exemple que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{2^n}\right)$ .

#### Rédaction

Toutes ces étapes ne sont bien entendu là que pour vous expliquer le raisonnement. Pour vous elles doivent se passer au brouillon.

7. Il y a ici un équivalent un peu délicat lorsqu'on ne l'a jamais vu.

Notons que  $0 \leq \frac{n^\alpha}{1+n^\alpha} < 1$ , donc  $u_n$  est bien défini.

Et puisque  $\frac{n^\alpha}{1+n^\alpha} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ , il s'agit surtout de trouver un équivalent, lorsque  $x \rightarrow 1$ , de  $\text{Arccos}(x)$ .

On a alors  $\text{Arccos } x \xrightarrow[x \rightarrow 1]{} 0$ , et donc  $\text{Arccos}(x) \sim \sin(\text{Arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2}$ .

Enfin,  $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1+x}\sqrt{1-x} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x}$ .

Donc ici, on a  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-\frac{n^\alpha}{1+n^\alpha}} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{1+n^\alpha}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{n^{\alpha/2}}$ .

Et donc par critère de comparaison pour les séries à termes positifs,  $\sum u_n$  converge si et seulement si  $\alpha > 2$ .

8. On a  $u_n = e^{\frac{1}{n^2} \ln n} - 1$ .

Mais puisque  $\frac{\ln n}{n^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , alors  $e^{\frac{\ln n}{n^2}} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n^2}$ .

Donc  $n\sqrt{n}u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

Donc par la règle  $n^\alpha u_n$ ,  $\sum u_n$  converge.

9. Utilisons la règle de d'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+1)! (4n)!}{(4n+4)! (2n)!^2} = \frac{(2n+2)^2(2n+1)^2}{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{16} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{16}$$

Et donc on en déduit que  $\sum u_n$  converge.

### SOLUTION DE L'EXERCICE 27.8

1. C'est directement le critère des séries alternées puisque  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  tend vers 0 en décroissant.  
 2. On pourrait prouver ici qu'il s'agit bien d'une série à laquelle le critère des séries alternées s'applique. Mais plus simplement :  $|u_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ , si bien que  $\sum u_n$  converge absolument, donc converge.

3. Si on note  $f$  la fonction  $x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ , alors  $f$  est dérivable sur  $\mathbf{R}_+^*$ , avec  $f' : x \mapsto \frac{1 - \ln(x)/2}{x\sqrt{x}}$ ,

si bien que  $f$  est décroissante sur  $[e^2, +\infty[$ .

Notons que  $e^2 \simeq 7,38$ , information dont nous pourrions tout à fait nous passer... Puisque

de plus  $\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , on peut donc appliquer le critère des séries alternées à la série

$\sum_{n \geq 8} \frac{(-1)^n \ln(n)}{\sqrt{n}}$ , qui converge donc.

Par indifférence des premiers termes,  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n}}$  converge également.

4. On a  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{8n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ .

Par le critère de séries alternées,  $\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$  est le terme général d'une série convergente.

Il en est de même de  $O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ .

Et puisque  $\sum \frac{1}{n}$  diverge, il en est de même de  $\sum u_n$ .

5. On a  $\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = \sin\left(n\pi\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$ .

Soit encore  $\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^n \pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ .

Puisque la série de terme général  $\frac{(-1)^n \pi}{2n}$  converge par application du critère des séries alternées, et que  $\sum O\left(\frac{1}{n^3}\right)$  converge, alors il en est de même de  $\sum \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ .

### SOLUTION DE L'EXERCICE 27.9

⚠ Attention !  
 On ne se contente pas d'un équivalent car il ne s'agit pas d'une série de signe constant à partir d'un certain rang.



1. On a

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2 + n + 1} &= n\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^2 + O\left(\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^3\right)\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} n + \frac{1}{2} + \frac{3}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

On obtient donc le résultat annoncé après multiplication par  $\pi$ , donc avec  $\alpha = \frac{3}{8}$ .

2. On en déduit donc que

$$\begin{aligned}u_n &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} (-1)^n \sin\left(\alpha \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \alpha \frac{(-1)^n \pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

Puisque la série de terme général  $\alpha(-1)^n \frac{\pi}{n}$  converge par application du critère des séries alternées, et qu'il en est de même d'une série de terme général  $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

3. Le calcul précédent prouve que  $|u_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha \frac{\pi}{n}$ , qui est le terme général d'une série divergente.

Donc  $\sum |u_n|$  diverge, si bien que  $\sum u_n$  n'est pas absolument convergente.

### SOLUTION DE L'EXERCICE 27.10

Soit  $N \in \mathbf{N}^*$ . Alors

$$\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{2N+1} \frac{1}{n^2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^N \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Et donc

$$\sum_{n=0}^N \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Et alors, pour  $N \in \mathbf{N}^*$ ,

$$\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^N \frac{1}{n^2} - \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^N \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \frac{1}{(2n)^2} - \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \frac{1}{(2n+1)^2} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Donc  $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$  converge et  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$ .

### SOLUTION DE L'EXERCICE 27.11

Il s'agit d'une série à termes négatifs puisque  $1 - \frac{1}{n^2} \leq 1$ , et on a  $\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{n^2}$ , donc il s'agit bien d'une série convergente par comparaison à une série de Riemann convergente. De plus

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right) \\ &= \sum_{k=2}^n (\ln(k-1) - \ln(k)) + \sum_{k=2}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) \\ &= -\ln 2 - \ln n + \ln(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\ln 2.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = -\ln 2.$$

#### Détails

On a utilisé ici

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + O(x^2)$$

et pas seulement  $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$ , pour lequel il nous resterait un terme en  $o\left(\frac{1}{n}\right)$  dont on ne peut rien dire.

#### Remarque

Ceci prouve directement la convergence de la série de terme général  $\frac{1}{(2n+1)^2}$ , convergence que l'on aurait par exemple pu établir à l'aide d'un équivalent.

**SOLUTION DE L'EXERCICE 27.12**

Commençons par noter que  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq 1$ , et donc  $\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor - \lfloor \sqrt{n} \rfloor \in \{0, 1\}$ .

On aura alors  $\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor - \lfloor \sqrt{n} \rfloor = 1$  si et seulement si il existe  $k$  tel que  $\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor = k$  et  $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = k - 1$ .

Soit si et seulement si

$$\begin{cases} \sqrt{n+1} \geq k \\ k-1 \leq \sqrt{n} < k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+1 \geq k^2 \\ (k-1)^2 \leq n < k^2 \end{cases} \Leftrightarrow n = k^2 - 1.$$

Donc pour  $N \in \mathbf{N}$ , on a

$$\sum_{n=1}^{N^2-1} \frac{\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor - \lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n} = \sum_{k=2}^N \frac{1}{k^2 - 1}.$$

Mais une décomposition en éléments simples nous donne  $\frac{1}{k^2 - 1} = \frac{1}{2} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{k+1}$  de sorte que

$$\sum_{k=2}^N \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=2}^N \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^N \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right).$$

Donc par passage à la limite,  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{N^2-1} \frac{\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor - \lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n} = \frac{3}{4}$ .

Mais remarquons que nous n'avons prouvé le résultat que pour des sommes partielles allant jusqu'à  $N^2 - 1$ , mais pas pour tout  $N$ .

À cet effet, notons que la série étant à termes positifs, la suite  $(S_n)$  de ses sommes partielles est croissante.

Et donc pour tout  $N \in \mathbf{N}$ ,  $S_N \leq S_{N^2-1} \leq \frac{3}{4}$ .

Donc la suite des sommes partielles est majorée, donc<sup>5</sup> la série converge.

<sup>5</sup> Rappelons que ceci ne vaut que pour les séries à termes positifs.

**SOLUTION DE L'EXERCICE 27.13**

1. On a

$$\begin{aligned} u_n &= \ln(n) + a \left( \ln(n) + \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right) + b \left( \ln(n) + \ln \left( 1 + \frac{2}{n} \right) \right) \\ &= (1+a+b) \ln(n) + a \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n^2} \right) \right) + b \left( \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n^2} \right) \right) \\ &= (1+a+b) \ln(n) + \frac{a+2b}{n} - \frac{a+4b}{2n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n^2} \right). \end{aligned}$$

Si  $1+a+b \neq 0$ , alors  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (1+a+b) \ln(n)$  et donc  $\sum u_n$  diverge.

Une condition nécessaire pour que  $\sum u_n$  converge est donc déjà  $a+b = -1$ .

Si c'est le cas et que  $a+2b \neq 0$ , alors  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a+2b}{n}$  et donc<sup>6</sup>  $\sum u_n$  diverge.

<sup>6</sup> Par comparaison à une série de Riemann.

Il faut donc avoir de plus  $a+2b = 0$ .

$$\text{Or, } \begin{cases} a+b = -1 \\ a+2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases}$$

Et alors, on a  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-1}{n^2}$ , de sorte<sup>7</sup> que  $\sum u_n$  converge.

<sup>7</sup> Toujours par comparaison à une série de Riemann.

Donc  $\sum u_n$  converge si et seulement si  $a = -2$  et  $b = 1$ .

2. On a alors, pour  $N \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N u_k &= \sum_{k=1}^N \ln(k) - 2 \sum_{k=1}^N \ln(k+1) + \sum_{k=1}^N \ln(k+2) \\ &= \sum_{k=1}^N \ln(k) - 2 \sum_{k=2}^{N+1} \ln(k) + \sum_{k=3}^{N+2} \ln(k) \end{aligned}$$

$$= -\ln(N+1) - \ln(2) + \ln(N+2) = \ln\left(\frac{N+2}{N+1}\right) - \ln(2)$$

$$\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} -\ln(2).$$

Et donc  $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = -\ln(2)$ .

### SOLUTION DE L'EXERCICE 27.14

1. La fonction  $f$  est clairement de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -1, +\infty[$ , et pour tout  $k \in \mathbf{N}^*$  et tout  $x \in ] -1, +\infty[$ ,

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}.$$

En particulier, sur  $[0, 1]$ , on a  $|f^{(n+1)}| \leq n!$ .

Et donc par l'inégalité de Taylor-Lagrange, appliquée entre 0 et 1,

$$\left| f(1) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (1-0)^k \right| \leq n! \frac{|1-0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Soit encore

$$\left| \ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!} \right| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Et donc on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2).$$

On en déduit donc<sup>8</sup> que  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge et que  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \ln(2)$ .

Cette série n'est évidemment pas convergente puisque  $|u_n| = \frac{1}{n}$ .

2. Soit  $p \in \mathbf{N}^*$ .

► si  $p$  est impair, alors un antécédent de  $p$  est forcément congru à 1 modulo 3, et on a alors  $\sigma(3k+1) = p \Leftrightarrow 2k+1 = p \Leftrightarrow k = \frac{p-1}{2} \in \mathbf{N}^*$ . Donc  $p$  admet un unique antécédent par  $\sigma$ , qui est  $3\frac{p-1}{2} + 1 \in \mathbf{N}^*$ .

► si  $p$  est congru à 0 modulo 4, alors on prouve de même que son unique antécédent est  $3\frac{p}{4}$ .

► si  $p$  est congru à 2 modulo 4, alors son unique antécédent par  $\sigma$  est  $3\frac{p-2}{4} + 2$ .

Donc tout entier  $p \in \mathbf{N}^*$  possède un unique antécédent par  $\sigma$ , qui est donc une bijection de  $\mathbf{N}^*$  dans lui-même.

3. Soit  $N \in \mathbf{N}$ . Alors, comme indiqué dans l'énoncé, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{3N+3} u_{\sigma(n)} &= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2N-1} - \frac{1}{4N-2} - \frac{1}{4N}\right) \\ &= \sum_{k=0}^N (u_{\sigma(3k+1)} + u_{\sigma(3k+2)} + u_{\sigma(3k+3)}) \\ &= \sum_{k=0}^N (u_{2k+1} + u_{4k+2} + u_{4k+4}) = \sum_{k=0}^N \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+2}\right) \\ &= \sum_{k=0}^N \left(\frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+4}\right) \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{2k(4k-2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}\right) \end{aligned}$$

#### Détails

Je vais un peu vite ici, ceci a déjà été fait en début d'année : le plus simple est de calculer les premières dérivées pour conjecturer une formule, puis la prouver par récurrence.

<sup>8</sup> À la fois.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N (u_{2k+1} + u_{2k+2}) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2N+2} u_k \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln(2).
 \end{aligned}$$

Par ailleurs,  $\sum_{n=1}^{3N+4} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{3N+3} u_{\sigma(n)} + \frac{1}{2N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln(2)$  et

$$\sum_{n=1}^{3N+5} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{3N+3} u_{\sigma(n)} + \frac{1}{2N+1} - \frac{1}{4N+2} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln(2).$$

Donc en notant  $S_n = \sum_{k=1}^n u_{\sigma(k)}$ , nous venons de prouver que les trois suites  $(S_{3n})$ ,  $(S_{3n+1})$  et

$(S_{3n+2})$  convergent vers une même limite  $\frac{1}{2} \ln(2)$ , donc  $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln(2)$ .

On en déduit que la série de terme général  $u_{\sigma(n)}$  converge vers  $\frac{1}{2} \ln(2)$ .

*Ce qui est vraiment remarquable, c'est que cette série contient exactement les mêmes termes que la série  $\sum u_n$ , tout ce qu'on a fait, c'est changer l'ordre des termes.*

*Mais cela a eu pour effet de changer la somme de la série, ce qui contredit totalement notre habitude des sommes finies, où, par commutativité de l'addition dans  $\mathbf{R}$ , l'ordre n'a aucune importance. Ceci est spécifique aux séries qui sont convergentes et non absolument convergentes.*

### SOLUTION DE L'EXERCICE 27.15

Commençons par les cas «faciles» : si  $\alpha > 1$  et  $\beta \leq 0$ , alors pour  $n \geq 3$ , on a  $0 \leq \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \leq \frac{1}{n^\alpha}$ .

Et donc par comparaison à une série de Riemann,  $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$  converge.

Pour  $\alpha > 1$  et  $\beta < 0$ , le raisonnement ci-dessus ne vaut plus. Mais pour  $\gamma \in ]1, \alpha[$ , on a

$$n^\gamma \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = \frac{1}{n^{\alpha-\gamma} (\ln n)^\beta} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Pour  $\alpha < 1$ , notons que  $\ln(n)^\beta$  est négligeable devant toute puissance de  $n$ , et en particulier devant  $n^{1-\alpha}$ , de sorte que pour  $n$  suffisamment grand,  $\ln(n)^\beta \leq n^{1-\alpha}$ .

Et alors pour  $n$  suffisamment grand,  $\frac{1}{n} = \frac{1}{n^\alpha n^{1-\alpha}} \leq \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ , de sorte que  $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$  diverge.

Reste donc à traiter le cas où  $\alpha = 1$ , et comme l'indique l'énoncé, faisons appel à une comparaison série/intégrale.

Le résultat du cours nous informe que  $\sum \frac{1}{n \ln(n)^\beta}$  est de même nature que la suite

$$\left( \int_2^n \frac{dt}{t \ln(t)^\beta} \right)_n \text{ converge.}$$

Mais  $t \mapsto \frac{1}{t \ln(t)^\beta} = \frac{1}{t} \times \ln(t)^\beta$  est de la forme  $u' u^{-\beta}$ .

Donc nous savons en calculer une primitive :  $\int_2^n \frac{dt}{t \ln(t)^\beta} = \left[ \frac{1}{1-\beta} \ln(t)^{-\beta+1} \right]_2^n = \frac{1}{1-\beta} \left( \frac{1}{\ln(n)^{\beta-1}} - \frac{1}{\ln(2)^{\beta-1}} \right)$ .

Alors cette suite possède une limite finie si et seulement si  $\beta - 1 > 0 \Leftrightarrow \beta > 1$ .

En résumé, on a bien prouvé le critère annoncé, à savoir la convergence de la série si et seulement si  $\alpha > 1$  ou si  $\alpha = 1$  et  $\beta > 1$ .

### SOLUTION DE L'EXERCICE 27.16

La fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^3}$  est continue, positive et décroissante sur  $[1; +\infty[$ , donc  $\forall p \geq n+1$ , on a

$$\int_{n+1}^{p+1} \frac{dt}{t^3} \leq \sum_{k=n+1}^p \frac{1}{k^3} \leq \int_n^p \frac{dt}{t^3}$$

#### Plus dur

Les plus motivés pour consulter l'exercice (très difficile) sur le théorème de réarrangement de Riemann pour en savoir plus sur le sujet.

#### Détails

Puisque  $\alpha - \gamma > 0$ , on a

$$(\ln n)^{-\beta} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n^{\alpha-\gamma}).$$

C'est trivial si  $\beta > 0$  (car  $(\ln n)^{-\beta} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et  $n^{\alpha-\gamma} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ ), c'est l'une des croissances comparées usuelles sinon.

#### Remarque

En particulier,  $\sum \frac{1}{n \ln n}$  diverge.

Or, une primitive de  $t \mapsto \frac{1}{t^3}$  est  $t \mapsto \frac{-1}{2t^2}$ , de sorte que

$$\frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{2(p+1)^2} \leq \sum_{k=n+1}^p \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2p^2}.$$

En passant à la limite lorsque  $p \rightarrow +\infty$ ,  $\frac{1}{2(n+1)^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{2n^2}$ .

Et donc à l'aide du théorème des gendarmes, on prouve que  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$ .

Ainsi,

$$\frac{1}{-2 \ln n} \ln \left( \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2 \ln n} (\ln 2 + 2 \ln n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Et donc il vient

$$\left( \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \right)^{-\frac{1}{2 \ln(n)}} = e^{-\frac{1}{2 \ln(n)} \ln \left( \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \right)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e.$$

### SOLUTION DE L'EXERCICE 27.17

La solution pour l'étude des produits consiste souvent à passer par le logarithme, puisque celui-ci transforme les produits en sommes, pour lesquelles on dispose des outils relatifs à l'étude des séries.

Dans notre cas, on a, pour  $n \geq 1$ ,  $\ln(u_n) = \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{\ln k}{k^2} \right)$ .

Étudions alors la convergence de la suite  $(\ln(u_n))$ .

On reconnaît alors que  $\ln(u_n)$  est la somme partielle d'ordre  $n$  de la série de terme général  $\ln \left( 1 + \frac{\ln k}{k^2} \right)$ .

Il s'agit donc de déterminer si cette série converge ou non.

Nous savons par croissances comparées que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln k}{k^2} = 0$ , et donc  $\ln \left( 1 + \frac{\ln k}{k^2} \right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln k}{k^2}$ .

Puisqu'il s'agit de séries à termes positifs et que leurs termes généraux sont équivalents, il suffit de déterminer la nature de la série de terme général  $\frac{\ln k}{k^2}$ .

Mais puisque  $\frac{\ln k}{\sqrt{k}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ , il existe  $k_0 \in \mathbf{N}^*$  tel que pour  $k \geq k_0$ ,  $\frac{\ln k}{\sqrt{k}} \leq 1 \Leftrightarrow \ln(k) \leq \sqrt{k}$ .

Et alors pour  $k \geq k_0$ ,  $0 \leq \frac{\ln k}{k^2} \leq \frac{\sqrt{k}}{k^2} \leq \frac{1}{k\sqrt{k}}$ .

Puisque la série de Riemann  $\sum \frac{1}{k\sqrt{k}}$  converge, il en est de même de la série de terme général  $\ln \left( 1 + \frac{\ln k}{k^2} \right)$ .

Et donc la suite de ses sommes partielles, qui est  $(\ln u_n)$  converge.

On en déduit, par continuité de l'exponentielle, que  $(u_n)$  converge.

### SOLUTION DE L'EXERCICE 27.18

Puisque  $\frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ , on a bien  $b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} a_n + o(a_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$ .

Par application directe du critère des séries alternées,  $\sum a_n$  converge.

En revanche, puisque  $\sum a_n$  converge et que  $\sum \frac{1}{n}$  diverge, alors  $\sum b_n$  diverge.

### SOLUTION DE L'EXERCICE 27.19

- La suite de terme général  $\frac{8^n}{(2n)!}$  n'est décroissante qu'à partir de 1. Comme elle est bien de limite nulle, le critère des séries alternées s'applique, et donc la somme est bien définie. Les premiers termes de la somme de la série sont donc  $1 - 4 + \frac{64}{24} - \frac{32}{45} + \dots$ . Mais pour une série alternée, nous savons que la valeur absolue du reste est majorée par la valeur absolue du premier terme de ce reste.

Ici, on a en particulier,  $\left| \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{8^n}{(2n)!} \right| \leq \frac{64}{24} = \frac{8}{3} < 3$ .

Or,  $-3 = 1 - 4$ , si bien que la somme cherchée est négative.

#### Danger !

Rappelons qu'on n'a en général pas le droit de composer les équivalents à gauche. Sauf, comme on vient de le faire, pour des suites qui ne tendent pas vers 1, si on les compose par ln.

#### Encore une fois

Par **définition**, la série converge **si et seulement si** la suite de ses sommes partielles converge.

2. Une erreur d'énoncé s'est glissée ici, et je voulais plutôt la nature de la série de terme

$$\text{général } u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k^3+1}}.$$

Le critère des séries alternées s'applique, et pour tout  $n$ ,  $|u_n| \leq \frac{1}{\sqrt{(n+1)^3+1}}$ .

Puisque  $\frac{1}{\sqrt{(n+1)^3+1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{3/2}}$ , il s'agit du terme général d'une série convergente, si bien que  $\sum u_n$  converge absolument, et donc converge.

Essayons tout de même de traiter la question<sup>9</sup> qui figurait dans l'énoncé, avec  $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$ .

<sup>9</sup> Nettement plus difficile.

Le même raisonnement que ci-dessus nous donne cette fois  $|u_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n+2}}$ , qui ne suffit pas à conclure à la convergence absolue de  $\sum u_n$  puisque  $\frac{1}{\sqrt{n+2}}$  est le terme général d'une série divergente.

On a, pour tout  $n$ ,

$$u_n + u_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} = - \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \left( \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right).$$

Une étude rapide<sup>10</sup> de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}$  prouve qu'elle est décroissante, et elle tend clairement vers 0 en  $+\infty$ .

<sup>10</sup> Essentiellement une dérivation.

Donc le critère de Leibniz s'applique à la série  $\sum (-1)^k \left( \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right)$ , qui est donc convergente.

Et par majoration du reste, on a donc

$$|u_{n-1} + u_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Mais

$$\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n\sqrt{n}}.$$

Donc  $u_{n-1} + u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ .

Par ailleurs,  $u_n - u_{n-1} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ , si bien que

$$2u_n = u_n + u_{n-1} + u_n - u_{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

Par le critère des séries alternées,  $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  converge, et par comparaison à une série de

Riemann,  $\sum O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$  converge.

Et donc  $\sum u_n$  converge<sup>11</sup>.

<sup>11</sup> Mais pas absolument !

### SOLUTION DE L'EXERCICE 27.20

1. On a

$$\begin{aligned} \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) &= \ln((n+1)!) - (n+1)\ln(x) + \sum_{k=1}^{n+1} \ln \ln \left( 1 + \frac{x}{k} \right) - \ln(n!) + n\ln(x) - \sum_{k=1}^n \ln \ln \left( 1 + \frac{x}{k} \right) \\ &= \ln(n+1) - \ln(x) + \ln \ln \left( 1 + \frac{x}{n+1} \right) \end{aligned}$$

$$= \ln \left( \frac{n+1}{x} \ln \left( 1 + \frac{x}{n+1} \right) \right)$$

Mais  $\ln \left( 1 + \frac{x}{n+1} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{n+1}$ , et donc  $\frac{n+1}{x} \ln \left( 1 + \frac{x}{n+1} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$ .  
Donc en utilisant l'équivalent classique  $\ln(t) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} t - 1$ , il vient

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n+1}{x} \ln \left( 1 + \frac{x}{n+1} \right) - 1.$$

$$\text{Mais } \frac{n+1}{x} \ln \left( 1 + \frac{x}{n+1} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{n+1}{x} \left( \frac{x}{n+1} - \frac{x^2}{2(n+1)^2} + o \left( \frac{1}{n^2} \right) \right).$$

$$\text{On en déduit que } \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{x}{2(n+1)} + o \left( \frac{1}{n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{x}{2n}.$$

Mais alors, par critère de comparaison pour les séries de signe constant<sup>12</sup> la série de terme général  $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$  est divergente.

Puisqu'il s'agit d'une série à termes négatifs, c'est donc que ses sommes partielles tendent vers  $-\infty$ .

$$\text{Or } \sum_{k=1}^n (\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_1).$$

On en déduit que la suite  $\ln(u_n)$  tend vers  $-\infty$ .

Et donc  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

2. Reprenons le développement limité précédent, mais en le poussant un ordre plus loin. Pour n'avoir pas besoin d'explicitier le terme en  $\frac{1}{n^2}$  (qui provient du terme en  $x^3$  du développement limité de  $\ln(1+x)$ ), utilisons un  $O$  plutôt qu'un  $o$ , de sorte que

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + O(x^3).$$

Et donc

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) - \alpha \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{x}{2n} + O \left( \frac{x}{n^2} \right) - \frac{\alpha}{n} + O \left( \frac{1}{n^2} \right).$$

Pour  $\alpha = -\frac{x}{2}$ , on arrive donc à

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) - \alpha \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O \left( \frac{1}{n^2} \right).$$

Puisque  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge, il en est de même de la série de terme général  $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) - \alpha \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$ .

**Commentaire** : il est important ici de bien saisir pourquoi on ne pouvait arrêter le calcul avec des  $o \left( \frac{1}{n} \right)$  : en choisissant correctement la valeur de  $\alpha$  pour annuler les termes en  $\frac{1}{n}$ ,

on aurait seulement eu  $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) - \alpha \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o \left( \frac{1}{n} \right)$ , ce qui ne permet pas directement de conclure quant à la nature de la série.

Pour bien comprendre le temps que nous fait gagner l'usage du  $O$ , je vous invite à faire une fois le calcul avec des  $o \left( \frac{1}{n^2} \right)$ , et à comparer le résultat à ce que nous venons d'obtenir.

3. Il s'agit de noter que  $\sum \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$  est encore une série télescopique puisqu'il s'agit de  $\sum (\ln(n+1) - \ln(n))$ .

Dont la somme partielle d'ordre  $n$  vaut  $\ln(n+1)$ .

Donc en notant  $S$  la somme de la série de la question précédente, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left( \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) - \alpha \ln \left( 1 + \frac{1}{k} \right) \right) = \ln(u_n) - \ln(u_1) - \alpha \ln(n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} S.$$

$$\text{Soit encore } \ln \left( \frac{u_n}{u_1 n^\alpha} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} S.$$

Et donc en composant par l'exponentielle, et en posant  $A = u_1 e^S > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n^\alpha} = A \Leftrightarrow u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} A n^\alpha.$$

<sup>12</sup> Ici le signe est négatif. Mais rappelons que tous les résultats prouvés pour les séries à termes positifs restent valables pour les séries à termes négatifs.

#### Astuce

Voici une astuce qui permet parfois d'alléger un peu les calculs : dans un  $DL_n$ , le terme de degré  $n$  et le reste en  $o(x^n)$  peuvent se regrouper en un seul terme de la forme  $O(x^n)$ .

### SOLUTION DE L'EXERCICE 27.21

Rappelons que  $\mathfrak{S}(\mathbf{N})$  désigne l'ensemble des bijections de  $\mathbf{N}$  dans  $\mathbf{N}$ .

Et si  $\sigma$  est une telle bijection, alors la suite  $(u_{\sigma(n)})$  contient les mêmes termes que  $(u_n)$ , mais tout simplement pas dans le même ordre.

La première question prouve donc que pour une série absolument convergente, réordonner les termes de la série ne change pas sa somme. Ce résultat nous semble trivial puisque c'est ce dont nous avons l'habitude pour les sommes finies où c'est une conséquence directe de la commutativité de la somme.

Bien plus surprenant est le résultat de la seconde question, qui prouve que ce résultat n'est plus valable pour une série qui serait convergente sans être absolument convergente.

Pire : cette seconde question prouve que par réarrangement des termes de la série, on peut obtenir une série dont la somme vaut n'importe quel réel !

1. Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbf{N})$ . Alors pour tout  $N \in \mathbf{N}$ , on a  $\sum_{n=0}^N |u_{\sigma(n)}| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ .

Et donc  $\sum u_{\sigma(n)}$  converge absolument<sup>13</sup>.

<sup>13</sup> Et donc converge.

Soit  $\varepsilon > 0$ , et soit  $n_0 \in \mathbf{N}$  tel que pour  $n \geq n_0$ ,  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k| \leq \varepsilon$ .

Soit alors  $n_1 = \max_{k \in \llbracket 0, n_0 \rrbracket} \sigma^{-1}(k)$ .

Pour  $n \geq n_1$ , on a donc  $\sigma(n) > n_0$  et donc pour  $n \geq \max(n_0, n_1)$ , il vient

$$\left| \sum_{k=0}^n u_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq 2 \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} |u_k| \leq 2\varepsilon.$$

Et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=0}^n u_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^n u_k \right) = 0$ .

Puisque  $\sum_{k=0}^n u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ , on en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_{\sigma(k)} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ .

Donc  $\sum u_{\sigma(k)}$  converge et sa somme est  $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ .

2. Contentons-nous des grandes lignes.

Notons  $u_n^+ = \max(u_n, 0)$  et  $u_n^- = \max(-u_n, 0)$ , qui sont deux nombres positifs, pour lesquels on a  $u_n = u_n^+ - u_n^-$  et  $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$ .

Puisque  $\sum |u_n|$  diverge,  $\sum u_n^+$  et  $\sum u_n^-$  ne peuvent pas converger toutes les deux, sinon ce serait aussi le cas de  $\sum |u_n|$ .

Puisque  $\sum u_n$  converge,  $\sum u_n^+$  et  $\sum u_n^-$  ne peuvent pas être de natures différentes.

Et donc les deux séries à termes positifs  $\sum u_n^+$  et  $\sum u_n^-$  divergent. En particulier, leurs sommes partielles tendent vers  $+\infty$ .

Notons alors  $A = \{k \in \mathbf{N} \mid a_k \geq 0\}$  et  $B = \{k \in \mathbf{N} \mid a_k < 0\}$ , qui sont donc deux ensembles infinis<sup>14</sup>.

Soit à présent  $\ell \in \mathbf{R}$ . On construit par récurrence une permutation  $\sigma$  de  $\mathbf{N}$  en posant :  $\sigma(0) = 0$ , et pour tout  $n \geq 1$  :

► si  $\sum_{k=0}^{n-1} u_{\sigma(k)} < \ell$ , alors  $\sigma(n) = \min A \setminus \{\sigma(i), 0 \leq i \leq n-1\}$

► sinon, on pose  $\sigma(n) = \min B \setminus \{\sigma(i), 0 \leq i \leq n-1\}$ .

Cette définition a bien du sens puisque  $A$  et  $B$  étant infinis, on ne va jamais épuiser l'un des deux ensembles.

Il faut travailler un peu plus pour prouver qu'on a bien une permutation de  $\mathbf{N}$ , mais l'idée

est que les sommes partielles de  $\sum u_n^+$  et de  $\sum u_n^-$  tendant vers  $+\infty$ , les  $\sum_{k=0}^{n-1} u_{\sigma(k)}$  ne peuvent

rester indéfiniment supérieurs ou inférieurs à  $\ell$ , et font toujours des «allers-retours» entre  $] -\infty, \ell[$  et  $]\ell, +\infty[$ . Et donc  $\sigma$  va faire des allers-retours entre  $A$  et  $B$ , et donc finir par prendre une fois chaque valeur de  $\mathbf{N}$ .

#### Détails

Tous les  $k$  tels que  $\sigma(k) \leq n_0$  sont inférieurs à  $n_1$  et donc à  $n$ .  
Et donc les  $u_{\sigma(k)}$  correspondants dans la première somme se trouvent aussi dans la seconde.  
Le facteur 2 provient alors de l'inégalité triangulaire.

#### Détails

Si  $u_n \geq 0$ , alors  $u_n = u_n^+$  et  $u_n^- = 0$ .  
Et si  $u_n \leq 0$ , alors  $u_n^+ = 0$  et  $u_n^- = -u_n$ .

<sup>14</sup> Sinon l'une des séries ci-dessus serait presque nulle, et donc convergente.



Enfin, il reste à prouver que  $\sum_{k=0}^n a_{\sigma(k)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ . Soit alors  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $\sum a_n$  converge,  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , et donc il existe  $n_0 \in \mathbf{N}$  tel que pour  $n \geq n_0$ ,  $|a_n| \leq \varepsilon$ .

Et alors si  $n_1 = \max_{k \in \llbracket 0, n_0 \rrbracket} \sigma^{-1}(k)$ , alors pour  $n \geq n_1$ ,  $|a_{\sigma(n)}| \leq \varepsilon$ .

Encore une fois sans donner tous les détails, on prouve alors qu'à chaque changement de signe de  $u_{\sigma(n)}$ , pour  $n \geq n_1$ , on a alors  $\left| \sum_{k=0}^n u_{\sigma(k)} - \ell \right| \leq \varepsilon$ .

Et en travaillant encore un peu, pour tout  $n \geq n_1$ ,  $\left| \sum_{k=0}^n u_{\sigma(k)} - \ell \right| \leq \varepsilon$ .

Et donc on a bien  $\sum_{k=0}^n a_{\sigma(k)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ .

### SOLUTION DE L'EXERCICE 27.22

Supposons par l'absurde que cette série converge. Alors il en est de même de la série de terme général  $-\ln\left(1 - \frac{1}{p_n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{p_n}$ .

Mais les sommes partielles de cette série sont les  $\sum_{i=1}^N -\ln\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$ , dont l'exponentielle est

$\prod_{i=1}^N \frac{1}{1 - p_i^{-1}}$ . Ainsi,  $\left(\prod_{i=1}^N \frac{1}{1 - p_i^{-1}}\right)_N$  doit converger.

Puisque  $0 \leq p_i^{-1} < 1$ ,  $\frac{1}{1 - p_i^{-1}}$  est la somme de la série géométrique de raison  $p_i^{-1}$ , et donc<sup>15</sup> pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$\sum_{k=0}^n p_i^{-k} = 1 + \frac{1}{p_i} + \dots + \frac{1}{p_i^n} \leq \frac{1}{1 - p_i^{-1}}.$$

Et donc

$$\prod_{i=1}^N \frac{1}{1 - p_i^{-1}} \geq \prod_{i=1}^N \sum_{k=0}^N p_i^{-k} = \left(1 + \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_1^N}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{p_N} + \dots + \frac{1}{p_N^N}\right).$$

Si on développe ce dernier produit, on obtient une somme d'inverses de nombres entiers. Plus précisément, on obtient la somme des inverses des entiers dont tous les facteurs premiers sont inférieurs ou égaux à  $p_N$  et dont les valuations  $p$ -adiques sont toutes inférieures ou égales à  $N$ .

Mais en particulier on obtient ainsi les inverses de tous les entiers inférieurs ou égaux à  $N$ . En effet,  $p_N > N$ , et donc tous les entiers inférieurs à  $N$  n'ont que des diviseurs premiers inférieurs strictement à  $p_N$ . Et de plus, le plus petit entiers dont une valuation dépasse  $N$  est  $2^{N+1}$ , qui est (bien) plus grand que  $N$ .

Donc on a  $\prod_{i=1}^N \frac{1}{1 - p_i^{-1}} \geq \sum_{i=1}^N \frac{1}{i}$ , qui est la somme partielle d'ordre  $N$  de la série harmonique.

Donc  $\prod_{i=1}^N \frac{1}{1 - p_i^{-1}} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$ .

Ceci contredit notre hypothèse de départ, donc  $\sum \frac{1}{p_n}$  diverge.

### Chgt de signe

Les changements de signe dont on parle sont les  $k$  tels que  $\sigma(k-1) \in A$  et  $\sigma(k) \in B$  ou le contraire.

<sup>15</sup> Pour une suite à termes positifs, les sommes partielles tendent vers la somme en croissant.

### Rappel

La série harmonique diverge, donc étant à termes positifs, c'est que ses sommes partielles tendent vers  $+\infty$ .