TD 26 : Représentations matricielles

▶ Matrice d'une application linéaire

Exercice 26.1 Déterminer les matrices des applications suivantes, dans les bases canoniques : F

1. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x-y, y+3x, x+y+z) \end{array} \right.$
2. $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & XP' + (X+1)P'' \end{array} \right.$
3. $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ P & \longmapsto & \left(P'(1), \int_0^1 P(t)\,dt\right) \end{array} \right.$

Exercice 26.2 Soit $f : \mathbf{R}_3[X] \to \mathbf{R}_3[X]$ défini par $f(P) = P(X+2) + P(X) - 2P(X+1)$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{R}_3[X]$.
3. En déduire l'image et le noyau de f.
4. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}_3[X]$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 26.3 Soit E l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto (ax^2+bx+c)e^x$, avec $(a,b,c) \in \mathbf{R}$. PD

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$ et en déterminer une base $\mathcal{B}$.
2. Soit φ l'application définie sur E par $\varphi(f) = f'$. Montrer que φ est un endomorphisme de E, et déterminer sa matrice A dans la base $\mathcal{B}$.
3. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}. Qu'en déduit-on sur φ ?
4. En utilisant la matrice A, déterminer une primitive de $x \mapsto (x^2+x+1)e^x$.

Exercice 26.4 Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $\mathcal{B}$ et $\mathscr{C}$ des bases respectives de E et F, et $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathscr{C}}(f)$. F
Si l'on considère la matrice obtenue en ne gardant que les r premières colonnes de M ($1 \leqslant r \leqslant \dim E$), quelle application linéaire représente-t-elle ?

Exercice 26.5 Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. F

1. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$, et prouver qu'ils sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.
2. Déterminer une base adaptée à la somme directe $\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$ et donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 26.6 Soit n un entier naturel non nul, soit $E = \mathbf{R}_n[X]$, et soit $\alpha \in \mathbf{R}$ non nul. On considère l'application $f : E \to E$ définie par $f(P) = P(X+\alpha)$. PD

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de E. Déterminer $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
3. Montrer que A est inversible, et déterminer A^{-1}.
4. ($\star$) Montrer que pour tout $(p,q) \in [\![0,n]\!]^2$, si $p < q$, alors $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} (-1)^k \binom{k}{p}\binom{q}{k} = 0$.

Exercice 26.7 En utilisant des endomorphismes, proposer une preuve rapide d'un résultat prouvé dans le chapitre sur les matrices : une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est inversible si et seulement si $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, $AX = 0 \Rightarrow X = 0$. PD

Exercice 26.8 Soit φ l'endomorphisme de $\mathbf{R}_3[X]$ défini par $\varphi(P) = (3X+1)P + (1-X^2)P'$. PD

1. Montrer qu'il s'agit bien d'un endomorphisme de $\mathbf{R}_3[X]$.
2. Donner la matrice de φ dans la base canonique.
3. En utilisant cette matrice, déterminer une base de $\operatorname{Ker}\varphi$ et une base de $\operatorname{Im}\varphi$.

Exercice 26.9 Drapeaux et endomorphismes trigonalisables D
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure si et seulement si il existe une suite strictement croissante $F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n$ de sous-espaces vectoriels de E stables par f (une telle suite est appelée un drapeau).

▶ Rang d'une matrice

Exercice 26.10 Que dire du rang d'une matrice diagonale de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$? **F**

Exercice 26.11 Déterminer le rang des matrices suivantes. **F**

$$A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&3&-1\\-2&3&-2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\2&0&-2&4\\-2&0&2&-4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&1&0\\-2&-1&2\\2&4&4\\-4&-3&2\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}2&2&0\\0&2&-2\\4&4&2\end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix}1&i&-i&1\\i&-i&1&1\\0&1+i&0&1+i\end{pmatrix}.$$

Exercice 26.12 Soit $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbf{R}^n$ non nul. Déterminer le rang des matrices **F**

$$M=\begin{pmatrix}x_1&x_2&\dots&x_n&0\\0&0&&0&x_1\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\dots&0&x_n\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{n+1}(\mathbf{R})\text{ et }N=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&\dots&x_n\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R}).$$

Exercice 26.13 Déterminer, suivant la valeur de $a,b\in\mathbf{C}$, le rang des matrices suivantes : **PD**

$$A=\begin{pmatrix}1&a&a^2\\a&a^2&1\\a^2&1&a\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}a&b&0&\dots&0\\0&\ddots&b&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&0\\0&&\ddots&\ddots&b\\b&0&\dots&0&a\end{pmatrix}.$$

Exercice 26.14 Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ telles que $AB=0_3$. Montrer que l'une au moins de ces matrices est de rang inférieur ou égal à 1. **AD**

Exercice 26.15 **Rang d'un produit** **AD**
Montrer que pour $A\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $B\in\mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ on a $\mathrm{rg}(AB)\leqslant\min(\mathrm{rg}(A),\mathrm{rg}(B))$.

Exercice 26.16 Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que $\mathrm{rg}(A-I_n)+\mathrm{rg}(A+I_n)\geqslant n$, et qu'il y a égalité si et seulement si $A^2=I_n$. **AD**

▶ Changement de base

Exercice 26.17 À l'aide de techniques matricielles, prouver que $(X^3+2X+1, X^3-2X^2+2, X^3-2X^2+1, X^3+X)$ est une base de $\mathbf{R}_3[X]$. **F**

Exercice 26.18 **Formule de changement de base** **F**

Soit $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ une base de $\mathbf{R}^3$, et soit $f\in\mathscr{L}(\mathbf{R}^3)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)=A=\begin{pmatrix}-1&13&-16\\0&7&-10\\0&5&-7\end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathscr{B}'=(e_1, 5e_1+3e_2+2e_3, 2e_1+e_2+e_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$. En déduire la valeur de A^4.

Exercice 26.19 **Existence de vecteurs possédant les mêmes coordonnées dans deux bases** **AD**

1. Soit $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ une base de $\mathbf{R}^3$, et soit $\mathscr{B}'=(e_1+e_2, 2e_2+e_3, 3e_3)$.
   Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbf{R}^3$. Existe-t-il un vecteur non nul de $\mathbf{R}^3$, ayant les mêmes coordonnées dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$?
2. Plus généralement, si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases d'un espace vectoriel E de dimension n, montrer qu'il existe un vecteur non nul de E ayant les mêmes coordonnées dans ces deux bases si et seulement si $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}-I_n$ n'est pas inversible.

Exercice 26.20 **Matrice d'un projecteur/d'une symétrie** **PD**
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E, et soit $p\in\mathscr{L}(E)$ la projection sur F parallèlement à G.

1. Montrer que dans toute base adaptée à la somme $E = F \oplus G$, la matrice de p est une matrice diagonale que l'on précisera.
2. En déduire que $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.
3. Dans $\mathbf{R}^3$, on pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x + 2y - z = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}(-1, 1, 1)$.
   Déterminer les matrice, dans la base canonique de :
   (a) la projection p sur F parallèlement à G
   (b) la projection q sur G parallèlement à F
   (c) la symétrie s par rapport à F parallèlement à G.

▸ Similitude et équivalence des matrices

Exercice 26.21 Dans chaque cas, déterminer si les matrices A et B sont semblables : PD

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 26.22 Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ tel que $u^2 \neq 0$ et $u^3 = 0$. PD

Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^3$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 26.23 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{tr}(f) = 1$. AD
Montrer que f est un projecteur.

Exercice 26.24 Trace d'un projecteur/d'une symétrie AD

1. Montrer que si $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur d'un espace vectoriel de dimension finie, alors $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.
2. Si s est une symétrie d'un espace de dimension finie, déterminer $\mathrm{tr}(s)$ en fonction de $\dim \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ et $\dim \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.
3. **Application** : en considérant l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ défini par $f : M \mapsto M^T$, retrouver les dimensions de $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$.

Exercice 26.25 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. AD

1. Montrer que A est semblable à T, et déterminer $P \in GL_3(\mathbf{R})$ telle que $A = P^{-1}TP$.
2. Pour $n \in \mathbf{N}$, calculer T^n, puis en déduire A^n.

Exercice 26.26 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer que si A et B sont semblables, alors pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) = \mathrm{rg}(B - \lambda I_n)$. PD
Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Exercice 26.27 Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telle que $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. AD

1. Montrer que $\mathrm{Ker}\, M = \mathrm{Ker}\, M^2$, puis que $\mathrm{Im}\, M = \mathrm{Im}\, M^2$.
2. En déduire que la première colonne et la dernière ligne de M sont nulles, puis arriver à une contradiction.

Exercice 26.28 Vers la diagonalisation D

1. Soit $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale. Montrer que pour $\lambda \in \mathbf{K}$, $D - \lambda I_n$ est non inversible si et seulement si $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ est un coefficient diagonal de D.
2. Montrer qu'il existe une base de $\mathbf{R}_2[X]$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme $P \mapsto (X^2 + 2)P'' + (X + 1)P' + P$ est diagonale.

Exercice 26.29 Fonctions multiplicatives sur $\mathcal{M}_n(\mathrm{K})$ et inversibilité (Oral X) TD
Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \to \mathbf{K}$ une application non constante telle que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$, $f(AB) = f(A)f(B)$.
Prouver que $f(A) = 0$ si et seulement si A est non inversible.
Indication : une matrice non inversible est équivalente à une matrice nilpotente.

► Systèmes linéaires

Exercice 26.30 Déterminer les triplets $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ pour lesquels le système $\begin{cases} x + y + 2z = a \\ x + z = b \\ 2x + y + 3z = c \end{cases}$ possède des solutions. PD

Combien en possède-t-il alors ?

Exercice 26.31 Soient a, b, c trois complexes distincts. On note $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C}^3 & \longrightarrow & \mathbf{C}_2[X] \\ (x, y, z) & \longmapsto & x + yX + zX^2 \end{array} \right.$. AD

1. Justifier sans calculs que φ est un isomorphisme.
2. Soient (u_1, u_2, u_3) et (x, y, z) deux éléments de $\mathbf{C}^3$. Exprimer à l'aide de $P_{x,y,z} = \varphi(x, y, z)$ le fait que (x, y, z) soit solution de
$$(\mathscr{S}) : \begin{cases} x + ay + a^2 z = u_1 \\ x + by + b^2 z = u_2 \\ x + cy + c^2 z = u_3 \end{cases}$$
3. En déduire que $(\mathscr{S})$ possède une unique solution que l'on déterminera. *Indication : penser à l'interpolation de Lagrange.*

CORRECTION DES EXERCICES DU TD 26

SOLUTION DE L'EXERCICE 26.1

1. Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
On a alors

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1,0,0) = (2,3,1) = 2e_1 + 3e_2 + 1e_3 \\ f(e_2) &= f(0,1,0) = (-1,1,1) = -e_1 + e_2 + e_3 \\ f(e_3) &= f(0,0,1) = (0,0,1) = e_3 \end{aligned}$$

et donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

2. De même, si $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$, alors $g(1) = 0, g(X) = X$ et $g(X^2) = 2 + 2X + 2X^2$.

Et donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} g(1) & g(X) & g(X^2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \end{array}$.

3. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on a $h(X^k) = \left(k, \frac{1}{k+1}\right)$, et donc en notant $\mathcal{B}_n$ la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$ et $\mathcal{B}_2$ celle de $\mathbf{R}^2$, il vient

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_2}(h) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} h(1) & h(X) & h(X^2) & \dots & h(X^n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ (1,0) \\ (0,1) \end{array} \in \mathcal{M}_{2,n+1}(\mathbf{R}).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 26.2

1. Sans difficultés.

2. Notons $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbf{R}_3[X]$. Alors

$$f(1) = 0, f(X) = X + 2 + X - 2(X+1) = 0, f(X^2) = (X+2)^2 + X^2 - 2(X+1)^2 = 2$$

$f(X^3) = (X+2)^3 + X^3 - 2(X+1)^3 = X^3 + 6X^2 + 12X + 8 + X^3 - 2X^3 - 6X^2 - 6X - 2 = 6X + 6.$

Donc la matrice de f est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(1) & f(X) & f(X^2) & f(X^3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{array}.$$

3. La matrice ci-dessus est échelonnée, donc elle est de rang 2, et donc $\mathrm{rg}(f) = 2$.
Par le théorème du rang, on en déduit que $\dim \mathrm{Ker}\, f = 2$.
Puisqu'on a déjà 1 et X dans le noyau[1] on a donc $\mathrm{Vect}(1, X) = \mathbf{R}_1[X] \subset \mathrm{Ker}\, f$, et par égalité des dimensions, $\mathrm{Ker}\, f = \mathbf{R}_1[X]$.
Enfin, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(X^2), f(X^3)) = \mathrm{Vect}(2, 6X + 6)$. Mais il est facile de voir que cette famille est une base de $\mathbf{R}_1[X]$, si bien que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f) = \mathbf{R}_1[X]$.

[1] Ce qui se voit sur les deux premières colonnes de la matrice.

4. Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de $\mathbf{R}_3[X]$.

Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & f(e_4) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} f(e_1) = f(e_2) = 0 \\ f(e_3) = e_1 \\ f(e_4) = e_2 \end{cases}$ Il s'agit donc

de justifier de l'existence d'une base dont les vecteurs satisfont aux relations ci-dessus.
Mais si on prend $e_1 = 1$ et $e_2 = X$, qui sont tous deux à la fois dans $\operatorname{Im} f$ et dans $\operatorname{Ker} f$, et qu'on prend pour e_3 un antécédent de e_1 par f et pour e_4 un antécédent de e_2 par f, alors les 4 contraintes devraient être satisfaites.
Avec un peu de calcul, on constate qu'on peut choisir $e_3 = \frac{1}{2}X^2$ et $e_4 = \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{2}X^2$.
Reste tout de même à constater que $\left(1, X, \frac{1}{2}X^2, \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{2}X^2\right)$ est bien une base de $\mathbf{R}_3[X]$ puisque formée de polynômes de degrés deux à deux distincts (et donc libre) et de cardinal $4 = \dim \mathbf{R}_3[X]$.
Et puisqu'on a alors bien $f(1) = f(X) = 0, f\left(\frac{1}{2}X^2\right) = 1$ $f\left(\frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{2}X^2\right) = X$, alors la matrice de f dans cette base est bien de la forme souhaitée.

Unicité — On notera qu'il n'y a absolument pas unicité d'une telle base, et on aurait pu notamment choisir $e_4 = X^3$, $e_3 = X^2, e_2 = 6X + 6, e_1 = 2$.

Solution de l'exercice 26.3

1. Notons $f_i : x \mapsto x^{i-1}e^x$. Alors il est clair que (f_1, f_2, f_3) est génératrice de E.
Elle est libre car si $af_1 + bf_2 + cf_3 : x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^x$ est nulle, alors la fonction polynomiale $x \mapsto ax^2 + bx + c$ est nulle, et donc $a = b = c = 0$.
Donc (f_1, f_2, f_3) est une base de $E = \operatorname{Vect}(f_1, f_2, f_3)$.
2. la linéarité est évidente puisqu'elle découle de la linéarité de la dérivation.
Pour vérifier que φ est bien à valeurs dans E, on peut se contenter[2] de vérifier que les images de f_1, f_2, f_3 sont bien dans E.
Or on a $\varphi(f_1) = f_1$, $\varphi(f_2) = f_1 + f_2$ et $\varphi(f_3) = 2f_2 + f_3$.
Ceci nous garantit donc que φ est un endomorphisme de E et alors
$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \varphi(f_1) & \varphi(f_2) & \varphi(f_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array}.$$
3. Les méthodes habituelles d'étude de matrice prouvent que A est inversible et que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On en déduit que f est un automorphisme de E.
4. Un antécédent de $x \mapsto (x^2 + x + 1)e^x$ par φ est donc le vecteur de E dont les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ sont $A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $2f_1 - f_2 + f_3 : x \mapsto (x^2 - x + 2)e^x$.

[2] Car on a déjà la linéarité.

Solution de l'exercice 26.4

Notons $e_1, \dots, e_n$ les vecteurs de $\mathscr{B}$.
Alors $\operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_r)$ est un sous-espace vectoriel H de E, qui a pour base[3] $(e_1, \dots, e_r)$.
Notons $g \in \mathscr{L}(H, F)$ l'application dont la matrice dans les bases $(e_1, \dots, e_r)$ et $\mathscr{C}$ est la matrice obtenue en ne gardant que les r premières colonnes de M.
Puisqu'on a précisément gardé les mêmes colonnes, il vient
$$g(e_1) = f(e_1), g(e_2) = f(e_2), \dots, g(e_r) = f(e_r).$$
Et donc pour tout $x \in \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_r)$, $f(x) = g(x)$.
Autrement dit, g est la restriction de f à $\operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_r)$.

[3] C'est une sous-famille d'une base de E, donc libre.

Rappel — Deux applications qui coïncident sur une base sont égales.

Solution de l'exercice 26.6

1. Il est clair que $f(P)$ est un polynôme de même degré que P, et donc dans E.
De plus, si $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, alors
$$f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(X + \alpha) = \lambda P(X + \alpha) + Q(X + \alpha) = \lambda f(P) + f(Q).$$
Donc f est linéaire et est donc un endomorphisme de E.
2. La base canonique de E est $(1, X, \dots, X^n)$. Or, pour $k \in [\![0, n]\!]$, on a
$$f(X^k) = (X + \alpha)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i \alpha^{k-i}.$$

Vérification — L'énoncé nous dit que f est à valeurs dans E, mais mieux vaut s'assurer que c'est bien le cas.

Et donc la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$, qui est une matrice de $\mathscr{M}_{n+1}(\mathbf{R})$ est donnée par

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(1) & f(X) & f(X^2) & & f(X^n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \dots & \alpha^n \\ 0 & 1 & \binom{2}{1}\alpha & \dots & \binom{n}{1}\alpha^{n-1} \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \binom{n}{n-1}\alpha \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ \\ \\ X^n \end{array}$$

3. Il est clair que A est inversible car elle est diagonale supérieure, et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls (ils sont tous égaux à 1).
Pour calculer l'inverse de A, notons que l'inverse de f est l'application $P \mapsto P(X-\alpha)$.
Et donc, sur le même principe qu'à la question précédente, à l'aide du binôme de Newton, on montre que

> **Précision**
> En fait l'inverse de f est la même application, en remplaçant α par $-\alpha$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^{-1}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(1) & f(X) & f(X^2) & & f(X^n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & \alpha^2 & \dots & (-1)^n\alpha^n \\ 0 & 1 & -\binom{2}{1}\alpha & \dots & (-1)^{n-1}\binom{n}{1}\alpha^{n-1} \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -\binom{n}{n-1}\alpha \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ \vdots \\ X^{n-1} \\ X^n \end{array}.$$

4. Prenons $\alpha = 1$. Alors si on note $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$ et $A^{-1} = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$, on a

$$a_{i,j} = \binom{j-1}{i-1} \text{ et } b_{i,j} = (-1)^{j-i}\binom{j-1}{i-1}.$$

> **Subtilité**
> Le k-ième élément de la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$ n'est pas X^k mais X^{k-1}, ce qui oblige toujours à faire attention aux décalages d'indices dans les formules (et qui explique ici les $i-1$.)

Le coefficient $(p+1, q+1)$ de $AA^{-1} = I_{n+1}$ est nul (car $p \neq q$), et donc

$$0 = \sum_{k=1}^{n+1}[A]_{p+1,k}\left[A^{-1}\right]_{k,q+1} = \sum_{k=1}^{n+1}\binom{k-1}{p}(-1)^{q+1-k}\binom{q}{k-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{k}{p}(-1)^{q-k}\binom{q}{k}.$$

Et puisque $\binom{k}{p}$ est nul si $k \leqslant p$, et de même $\binom{q}{k} = 0$ si $k \geqslant q$, il reste donc

$$\sum_{k=p}^{q}(-1)^{q-k}\binom{k}{p}\binom{q}{k} = 0$$

et donc $\displaystyle\sum_{k=p}^{q}(-1)^k\binom{k}{p}\binom{q}{k} = 0$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 26.7

Notons $f \in \mathscr{L}(\mathbf{K}^n)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A.
Alors A est inversible si et seulement si f est un isomorphisme. Mais f étant un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, c'est le cas si et seulement si f est injectif.
Soit si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbf{K}^n}\}$. Soit encore si et seulement si $f(x) = 0_{\mathbf{K}^n} \Rightarrow x = 0_{\mathbf{K}^n}$.
Ce qui matriciellement se traduit par $AX = 0_{n,1} \Rightarrow AX = 0_{n,1}$.

De manière un peu plus détaillée : si A est inversible, alors f est injectif. Et donc si $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ vérifie $AX = 0_{n,1}$, notons $x \in \mathbf{K}^n$ l'unique vecteur tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(x) = X$.
On a donc $AX = 0_{n,1}$, soit encore $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(f)\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(x) = 0_{n,1}$, et donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(f(x)) = 0_{n,1}$, de sorte que $f(x) = 0_{\mathbf{K}^n}$.
Donc $x \in \operatorname{Ker} f$, si bien que $x = 0_{\mathbf{K}^n}$, et donc $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(0_{\mathbf{K}^n}) = 0_{n,1}$.

> **Détails**
> Puisqu'on travaille ici dans la base canonique, si $X = \begin{pmatrix}\lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix}$, alors $x = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Inversement, si pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, $AX = 0_{n,1} \Rightarrow X = 0_{n,1}$, montrons que f est bijective, ce qui garantira l'inversibilité de A.
Soit donc $x \in \operatorname{Ker} f$, et notons $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(x) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

Puisque $f(x) = 0_{\mathbf{K}^n}$, alors $AX = 0_{n,1}$, et donc $X = 0_{n,1}$, si bien que $x = 0_{\mathbf{K}^n}$.
Nous venons donc de prouver que $\operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbf{K}^n}\}$, si bien que f est injective.
Mais puisqu'il s'agit d'un endomorphisme d'un espace vectoriel **de dimension finie**, f est donc bijective, si bien que A est inversible.

Solution de l'exercice 26.8

1. La linéarité ne pose pas de difficultés.
De plus, si $\deg P \leqslant 3$, alors $\deg((3X+1)P) \leqslant 4$ et $\deg(1-X^2)P' \leqslant 4$, si bien que $\deg \varphi(P) \leqslant 4$.
Plus précisément, $\deg \varphi(P) \leqslant \deg P + 1$.
Donc déjà $\varphi(1), \varphi(X)$ et $\varphi(X^2)$ sont dans $\mathbf{R}_3[X]$. Par ailleurs,

$$\varphi(X^3) = (3X+1)X^3 + 3(1-X^2)X^2 = X^3 - 3X^2 \in \mathbf{R}_3[X].$$

Donc par linéarité, pour tout $P \in \mathbf{R}_3[X]$, $\varphi(P) \in \mathbf{R}_3[X]$ si bien que φ est bien un endomorphisme de $\mathbf{R}_3[X]$.

2. On a $\varphi(1) = 3X+1$, $\varphi(X) = 3X^2+X+(1-X^2) = 2X^2+X+1$, $\varphi(X^2) = 3X^3+X^2+2X(1-X^2) = X^3+X^2+2X$, et enfin $\varphi(X^3) = X^3+3X^2$.

Donc la matrice de φ dans la base canonique est $\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) & \varphi(X^3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{array} \end{array}$.

3. Un polynôme $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ est dans $\operatorname{Ker} \varphi$ si et seulement si

$$\varphi(P) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(\varphi)\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(P) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \operatorname{Ker} A \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soit si et seulement si $\begin{cases} d + c = 0 \\ 3d + c + 2b = 0 \\ 2c + b + 3a = 0 \\ b + a = 0 \end{cases}$

Les solutions de ce système sont de la forme $(a,b,c,d) = (a, -a, -a, a)$, et donc $P \in \operatorname{Ker} \varphi \Leftrightarrow P = a\left(X^3 - X^2 - X - 1\right)$.
Et donc $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Vect}(X^3 - X^2 - X + 1)$.

Méthode
Une fois le système résolu, nous avons le quadruplet des coefficients de P dans la base canonique, il ne faut pas oublier de le retraduire en un polynôme de $\mathbf{R}_3[X]$, le noyau de φ étant formé de polynômes, et pas de quadruplets de réels.

Notons alors $\dim \operatorname{Ker} \varphi = 1$, donc par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Im} \varphi = 4 - 1 = 3$.
Or, on a $\varphi(X^3 - X^2 - X + 1) = 0$ si bien que $\varphi(X^3) - \varphi(X^2) - \varphi(X) + \varphi(1) = 0$.
Donc $\varphi(X^3) \in \operatorname{Vect}(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2))$, et par conséquent,

$$\operatorname{Im} \varphi = \operatorname{Vect}(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2), \varphi(X^3)) = \operatorname{Vect}(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2)).$$

Et donc étant génératrice et de cardinal $3 = \dim \operatorname{Im} \varphi$, la famille $\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2)$ est une base de $\operatorname{Im} \varphi$.

Solution de l'exercice 26.9

Notons tout de suite qu'une suite strictement croissante (sous-entendu, pour l'inclusion) $F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n$ de sous-espaces vectoriels de E vérifie forcément $\dim F_i = i$.
En effet, on doit avoir pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\dim F_{k+1} > \dim F_k$.
Donc déjà $\dim F_i \geqslant i$.
Et si on avait $\dim F_i > i$, alors $\dim F_n > i + (n-i) = n$, ce qui est impossible pour un sous-espace vectoriel de E.

Supposons donc qu'une telle suite de sous-espaces stables par f existe.
Alors $\dim F_1 = 1$. Soit donc e_1 un vecteur non nul de F_1, qui forme donc une base de F_1.
La famille formée du seul vecteur e_1 étant une famille libre de F_2, on peut la compléter en une base (e_1, e_2) de F_2.
Puis (e_1, e_2) est une famille libre de F_3, qu'on peut compléter en une base (e_1, e_2, e_3) de F_3.

De proche en proche, on construit ainsi des vecteurs $e_1 \in F_1, e_2 \in F_2, \dots, e_n \in F_n$ tels que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $(e_1, e_2, \dots, e_i)$ est une base de F_i.
Et en particulier, $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $F_n = E$.

Alors $f(e_1) \in F_1$, donc il existe $a_{1,1} \in \mathbf{K}$ tel que $f(e_1) = a_{1,1}e_1$.
Puis par stabilité de F_2, $f(e_2) \in F_2$ et donc il existe deux scalaires $a_{1,2}, a_{2,2}$ tels que $f(e_2) = a_{1,2}e_1 + a_{1,2}e_2$.
Plus généralement, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, puisque $f(e_j) \in F_j$, il existe des scalaires $a_{1,j}, \dots, a_{j,j}$ tels que $f(e_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}e_i$.
Si de plus on pose $a_{i,j} = 0$ lorsque $i > j$, alors la matrice de f dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ est $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, qui est donc triangulaire supérieure[4].

[4] Car $a_{i,j} = 0$ pour $i > j$: c'est la **définition** de matrice triangulaire

Inversement, soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E dans laquelle la matrice de f, notons la $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, est triangulaire supérieure.
Posons alors $F_0 = \{0_E\}$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $F_i = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i)$.
On a alors bien une suite strictement croissante de sous-espaces vectoriels de E.
Reste à prouver que ceux-ci sont stables par f.
Soit donc $i \in [\![1, n]\!]$ et soit $j \in [\![1, i]\!]$.
Alors $f(e_j) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,j}e_i = \sum_{k=1}^{j} a_{i,j}e_i \in F_i$.
Et donc par linéarité de f, pour tout $x \in F_i$, $f(x) \in F_i$, si bien que F_i est stable par f.

SOLUTION DE L'EXERCICE 26.10

C'est le nombre de ses coefficient diagonaux non nuls.
En effet, si D est une matrice diagonale dont tous les coefficients sont non nuls, alors nous savons qu'elle est inversible, et donc de rang n.

En revanche, si elle possède r coefficients nuls, par échanges de lignes, on peut les amener sur les dernières lignes, de manière à obtenir une matrice échelonnée , qui aura donc $n - r$ pivots.

> ☠ Danger !
> La matrice échelonnée ainsi obtenue n'est pas nécessairement diagonale.

Peut-être plus convaincant : soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base[5] de $\mathbf{K}^n$ et soit $f \in \mathscr{L}(\mathbf{K}^n)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
Alors $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \mathrm{Vect}(\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_n e_n) = \mathrm{Vect}(\lambda_i e_i \mid \lambda_i \neq 0)$.
Or, la famille des $\lambda_i e_i$, $\lambda_i \neq 0$ est libre puisque la famille des e_i l'est aussi.
Donc le rang de f est le nombre de coefficients diagonaux non nuls de D.

[5] Disons la base canonique.

SOLUTION DE L'EXERCICE 26.11

Nous ne détaillons pas les calculs, qui sont toujours effectués grâce à la méthode du pivot.

1. A est de rang 3.
2. B est non nulle, et toutes ses colonnes sont colinéaires, donc $\mathrm{rg}(B) = 1$.
3. C est de rang 2. Notons qu'on a pas nécessairement besoin de faire un pivot pour cela : les deux dernières colonnes de C ne sont pas colinéaires, donc le rang de C est supérieur ou égal à 2, et la première colonne est égale à la seconde moins la moitié de la troisième, donc la famille des vecteurs colonnes de C est liée, et donc $\mathrm{rg}(C) < 3$.
4. D est de rang 3.
5. À l'aide de l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - iL_1$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & i & -i & 1 \\ 0 & 1-i & 0 & 1-i \\ 0 & 1+i & 0 & 1+i \end{pmatrix}$, qui n'est pas échelonnée[6], mais qui est clairement de rang 2.
   Donc E est de rang 2.

[6] Même s'il n'y aurait qu'une opération à faire pour y arriver.

SOLUTION DE L'EXERCICE 26.12

Notons $C_1, \dots, C_{n+1}$ les colonnes de M.
Puisque $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ est non nul, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_i \neq 0$.
Alors l'espace engendré par les n premières colonnes de M est une droite vectorielle de $\mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbf{R})$, engendrée par C_i. En effet, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a $C_j = \frac{x_j}{x_i} C_i$.
Par conséquent, l'espace vectoriel engendré par les n premières colonnes de M est de

> Définition
> Ici pas de pivot, mais un retour à la définition du rang de M : c'est le rang de la famille des vecteurs colonnes de M.

dimension 1.
De plus, la dernière colonne n'est pas dans cet espace vectoriel car elle n'est pas colinéaire à C_i.
On en déduit que la $i^{\text{ème}}$ colonne de M et sa dernière colonne forment une famille libre, et donc une base de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de M. Ainsi, $\text{rg}(M) = 2$.

Notons que $N = \begin{pmatrix} x_1x_1 & x_1x_2 & \dots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2x_2 & \dots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \dots & x_nx_n \end{pmatrix}$.

En particulier, toutes les colonnes de N sont colinéaires à $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ qui n'est pas nul. Alors N est non nulle à son tour, car si $x_i \neq 0$, alors le coefficient (i,i) de N, qui est x_i^2 est non nul.

Rédaction ✎
Rappelons qu'une matrice dont toutes les colonnes sont proportionnelles est de rang 1 **si elle est non nulle.** Il n'est donc pas inutile de préciser que N est non nulle.

Solution de l'exercice 26.13

1. Échelonnons A par opérations sur les lignes :

$$A \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - a^2L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1-a^3 \\ 0 & 1-a^3 & a-a^4 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1-a^3 & a-a^4 \\ 0 & 0 & 1-a^3 \end{pmatrix}.$$

Donc déjà, si $a^3 \neq 1$, A est échelonnée, avec trois pivots non nuls, donc de rang 3.
En revanche, si $a^3 = 1$, alors l'un de ses coefficient diagonaux est nul, donc A n'est pas inversible, et donc de rang inférieur ou égal à 2.
Et si $a^3 = 1$, c'est-à-dire si $a \in \mathbf{U}_3$, alors la matrice échelonnée obtenue ci-dessus est $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc A est de rang 1.

Alternative
Les trois colonnes sont proportionnelles :
$C_2 = aC_1, \; C_3 = aC_2 = a^2C_1$.

2. ▸ Si $a = b = 0$, $B = 0$, et donc $\text{rg}(B) = 0$.
▸ Si $b = 0$ et $a \neq 0$, alors $B = aI_n$ est de rang n.
▸ Si $b \neq 0$ et $a = 0$, alors en faisant «remonter» la dernière ligne, c'est-à-dire en réalisant successivement les opérations $L_n \leftrightarrow L_{n-1}$, $L_{n-1} \leftrightarrow L_{n-2}$, etc, on obtient λI_n, qui est de rang n, donc $\text{rg}(B) = n$.
▸ Enfin, si $ab \neq 0$. Alors, en réalisant successivement les opérations

$$L_n \leftarrow aL_n - bL_1, L_n \leftarrow aL_n + b^2L_2, \dots, L_n \leftarrow aL_n + (-1)^{n-1}b^{n-1}L_{n-1}$$

on obtient la matrice $\begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & b \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a^n - (-1)^n b^n \end{pmatrix}$.
Cette dernière matrice étant échelonnée, il suffit de compter le nombre de pivots[7] Donc si $a^n = (-1)^n b^n$, $\text{rg}(B) = n - 1$ et sinon $\text{rg}(B) = n$.

[7] Et on sait déjà que les $n-1$ premiers, tous égaux à a sont non nuls.

Solution de l'exercice 26.14

Choisissons de travailler plutôt avec des endomorphismes, et soient donc f et g les endomorphismes de $\mathbf{R}^3$ dont les matrices respectives dans la base canonique sont A et B.
Alors $AB = 0_3 \Leftrightarrow f \circ g = 0_{\mathscr{L}(\mathbf{R}^3)}$.
Donc en particulier, $\text{Im}\, g \subset \text{Ker}\, f$.
Si $\text{rg}\, B = \text{rg}\, g \leqslant 1$, il n'y a rien à dire.
Si $\text{rg}\, B = \text{rg}\, g \geqslant 2$, alors $\dim \text{Ker}\, f \geqslant 2$.
Et donc par le théorème du rang, $\text{rg}(A) = \text{rg}(f) = 3 - \dim \text{Ker}\, f \leqslant 1$.
Dans tous les cas, on a bien l'un des deux rangs qui est inférieur ou égal à 1

Solution de l'exercice 26.15

Voici une propriété qui est bien plus facile à comprendre en termes d'applications linéaires.
Soient donc $f \in \mathscr{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$ et $g \in \mathscr{L}(\mathbf{K}^q, \mathbf{K}^p)$ les applications linéaires dont les matrices dans les bases canoniques sont A et B.

Alors AB est la matrice de $f \circ g$ dans les bases canoniques de $\mathbf{K}^q$ et $\mathbf{K}^n$.
Puisque $\operatorname{Im} f \circ g \subset \operatorname{Im} f$, on a $rg(AB) = \operatorname{rg}(f \circ g) \leqslant \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg}(A)$.

Par ailleurs, une application linéaire ne peut pas augmenter la dimension[8], et on a $\operatorname{Im}(g \circ f) = g(\operatorname{Im} f)$.
Et donc $\operatorname{rg}(g \circ f) = \dim g(\operatorname{Im} f) \leqslant \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg}(f)$.

[8] Car l'image d'une base est une famille génératrice de l'image.

Solution de l'exercice 26.16

La solution suivante passe par le noyau des matrices. Si cette notion ne vous plait pas, il faut calquer le même raisonnement en travaillant avec des endomorphismes, par exemple avec l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associé à A.
Par le théorème du rang, cela revient à prouver que $\dim \operatorname{Ker}(A - I_n) + \dim \operatorname{Ker}(A + I_n) \leqslant n$.
Prouvons alors que $\operatorname{Ker}(A - I_n)$ et $\operatorname{Ker}(A + I_n)$ sont en somme directe.
Soit $X \in \operatorname{Ker}(A - I_n) \cap \operatorname{Ker}(A + I_n)$. Alors $AX - X = 0_{n,1}$ et $AX + X = 0_{n,1}$, soit encore $AX = X$ et $AX = -X$, donc $X - X$ et donc $X = 0_{n,1}$.
Ainsi $\operatorname{Ker}(A - I_n)$ et $\operatorname{Ker}(A + I_n)$ sont bien en somme directe.

Par conséquent, $\dim \operatorname{Ker}(A - I_n) + \dim \operatorname{Ker}(A + I_n) \leqslant \dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) = n$.

Il y a égalité si et seulement si $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) = \operatorname{Ker}(A + I_n) \oplus \operatorname{Ker}(A - I_n)$.
Mais alors pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, il existe $X_1 \in \operatorname{Ker}(A - I_n)$ et $X_2 \in \operatorname{Ker}(A + I_n)$ tels que $X = X_1 + X_2$.
Et alors $AX = AX_1 + AX_2 = X_1 - X_2$, si bien que $A^2X = X_1 + X_2 = X$.
Autrement dit, l'application $X \mapsto A^2X$ est l'identité de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, si bien que sa matrice dans la base canonique est I_n.
Or cette matrice est A^2, donc $A^2 = I_n$.

Solution de l'exercice 26.17

Écrivons la matrice de cette famille dans la base canonique de $\mathbf{R}_3[X]$. Il s'agit de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Échelonnons alors cette matrice :

$$A \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftrightarrow L_1}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_2}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_3}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est de rang 4, donc A aussi.
Et par conséquent, A est inversible, et donc la famille considérée est une base de $\mathbf{R}_3[X]$.

Solution de l'exercice 26.18

1. Écrivons la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$. Il s'agit de $P = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$.

   On vérifie aisément que cette matrice est inversible, donc $\mathcal{B}'$ est une base et P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ (c'est-à-dire $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$).
   De plus, $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

   Danger ! Attention au sens : on a écrit les vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$, on a donc la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

2. D'après la formule de changement de base, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est

$$M = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On constate que $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et donc $M^4 = I_3$.
On en déduit[9] que $A^4 = PM^4P^{-1} = PP^{-1} = I_3$.

[9] Sans faire le calcul : on sait que A^4 est semblable à $M^4 = I_3$, et la seule matrice semblable à I_3 est I_3 elle-même.

Solution de l'exercice 26.19

1. La matrice de la famille $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$ est $M = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Elle est triangulaire inférieure, à coefficients diagonaux non nuls, donc inversible. On en déduit que $\mathscr{B}'$ est une base et alors $M = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$.

Soit à présent $x = ae_1 + be_2 + ce_3 \in \mathbf{R}^3$. Alors les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$ sont $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$, et elles sont égales aux coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ si et seulement si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$.

Donc si et seulement si

$$M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = a \\ a + 2b = b \\ b + 3c = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (a, b, c) \in \operatorname{Vect}(1, -1, 2).$$

Donc il existe bien de tels vecteurs, et ce sont tous les $\lambda(e_1 - e_2 + 2e_3)$.

2. Sur le même principe, un tel vecteur existe si et seulement si il existe $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \setminus \{0_{n,1}\}$

tel que $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow (P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} - I_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0_{n,1}$.

Donc si et seulement si $\operatorname{Ker}(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} - I_n) \neq \{0_{n,1}\}$.

Par le théorème du rang matriciel[10], c'est le cas si et seulement si $\operatorname{rg}(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} - I_n) < n$, soit si et seulement si $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} - I_n$ n'est pas inversible.

[10] Une alternative serait d'évoquer la caractérisation de l'inversibilité par le noyau : il existe un vecteur colonne X non nul tel que $AX = 0$ si et seulement si A n'est pas inversible.

Solution de l'exercice 26.20

1. Une base adaptée à la somme directe est, par définition, une base de la forme $(e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_{n-r})$ où $(e_1, \dots, e_r)$ est une base de F (avec $r = \dim F$) et $(f_1, \dots, f_{n-r})$ est une base de G (où $n = \dim E$).

Puisque e_1 est dans F, $p(e_1) = e_1$. et plus généralement $p(e_i) = e_i$, $\forall i \in [\![1, r]\!]$.

Et puisque $G = \operatorname{Ker} p$, $p(f_1) = \dots = p(f_{n-r}) = 0_E$.

Donc la matrice de p dans la base $(e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_{n-r})$ est

Détails

Les éléments de $F = \operatorname{Im} p$ sont précisément les points fixes de p.

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} p(e_1) & \dots & p(e_r) & p(f_1) & \dots & p(f_{n-r}) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & & & \vdots \\ & & 1 & & & \vdots \\ & & & 0 & & \vdots \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_r \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{n-r} \end{array} = J_r = \operatorname{Diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{r \text{ fois}}, 0, \dots, 0)$$

2. La trace de p est la trace de sa matrice dans n'importe quelle base. En particulier, la trace de sa matrice dans une base adaptée à la somme directe, c'est-à-dire la trace de J_r, qui vaut r.

Or, le rang de p est égal à $\dim \operatorname{Im} p = \dim F = r$.

Donc $\operatorname{tr}(p) = r = \operatorname{rg}(p)$.

3.a. Il est clair que F est un hyperplan[11] de $\mathbf{R}^3$, donc de dimension 2, et que G est de dimension 1.

Puisque $(-1, 1, 1)$ n'est pas dans F, $F \cap G = \{0\}$ et donc F et G sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.

On sait que dans une base adaptée à la somme directe, la matrice de p est $\operatorname{Diag}(1, 1, 0)$.

Après calculs, une base de F est $(1, 0, 2), (0, 1, 2)$.

[11] Car noyau d'une forme linéaire non nulle.

Donc une base adaptée à la somme directe est $\mathscr{C} = (1,0,2), (0,1,2), (-1,1,1)$.
On a alors la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{C}$

$$P_{\mathscr{B}_{can}}^{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Par la formule de changement de base

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(p) = P_{\mathscr{B}_{can}}^{\mathscr{C}} \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(p) P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}_{can}} = P_{\mathscr{B}_{can}}^{\mathscr{C}} \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(p) \left(P_{\mathscr{B}_{can}}^{\mathscr{C}}\right)^{-1}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vérification
Un bon moyen de vérifier son résultat est de s'assurer que cette matrice vérifie $A^2 = A$, signe que c'est bien une matrice de projecteur !

3.b. On sait ensuite que $q = \mathrm{id}_{\mathbf{R}^3} - p$, donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(q) = I_3 - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(p) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.c. On sait que $s = p - q$, ou $s = 2p - \mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}$. Et donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(s) = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

On notera qu'en utilisant la relation $s = 2p - \mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}$, on prouverait aussi que la matrice de s dans la base $\mathscr{C}$ est très simple : c'est $\mathrm{Diag}(1,1,-1)$. Ceci sera réexpliqué dans l'exercice 24.

⚠ Attention !
Deux matrices semblables ont même rang et même trace, mais si elles ont même rang et même trace, cela ne suffit pas à garantir qu'elles sont semblables !

SOLUTION DE L'EXERCICE 26.21

1. A et B n'ont pas même trace, donc ne peuvent être semblables.
2. A et B ont même trace (2) et même rang (2). Soit donc f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est A.
Posons alors $e_1 = (1/2, 0)$ et $e_2 = (0,1)$. La famille (e_1, e_2) est libre (car formée de deux éléments non colinéaires) et donc est une base de $\mathbf{R}^2$.
On a $f(e_1) = f(1/2, 0) = \frac{1}{2}f(1,0) = \frac{1}{2}(1,0) = e_1$. Et $f(e_2) = f(0,1) = (1,1) = 2e_1 + e_2$.
Donc la matrice de f dans la base (e_1, e_2) est B.
Par conséquent, A et B représentent toutes deux f dans deux bases différentes : elles sont semblables.
3. A et B ont même rang, mais n'ont pas la même trace : elles ne sont donc pas semblables.
4. A et B ont même trace et même rang. Toutefois, $A = 2I_3$, et donc la seule matrice semblable à A est A. On en déduit que A et B ne sont pas semblables.

Précision
Si P est la matrice de passage de la base canonique à la base (e_1, e_2), alors, par la formule de changement de base, on a

$$B = P^{-1}AP.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 26.22

Analysons un peu la situation : nous voulons prouver l'existence d'une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}.$$

Soit telle que $u(e_1) = e_2$, $u(e_2) = e_3$, et $e_3 \in \mathrm{Ker}\, u$.
En particulier, on doit avoir $u^2(e_1) \neq 0_E$.

Prenons donc e_1 un vecteur tel que $u^2(e_1) \neq 0_E$, et notons $e_2 = u(e_1)$ et $e_3 = u^2(e_1)$.
Alors il est classique[12] que (e_1, e_2, e_3) est libre, et donc est une base de E.
La matrice de u dans cette base est alors bien la matrice cherchée.

SOLUTION DE L'EXERCICE 26.23

Si f est de rang 1, par le théorème du rang, son noyau est de dimension $n-1$.
Soit donc $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de $\mathrm{Ker}\, f$, et complétons-la[13] à l'aide d'un vecteur e_n en

[12] Voir l'exercice 13 du TD22.

[13] C'est le théorème de la base incomplète qui nous garantit que c'est possible puisque $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est libre.

une base de E.
Alors la matrice de f dans cette base est de la forme

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} f(e_1) & \dots & f(e_{n-1}) & f(e_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \alpha_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ e_n \end{array} \end{array}.$$

Mais puisque $\operatorname{tr}(f) = \operatorname{tr}(A) = 1$, alors $\alpha_n = 1$.
Et il vient alors

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \alpha_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \alpha_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \alpha_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

Donc $f^2 = f$, de sorte que f est un projecteur.

Solution de l'exercice 26.24

1. Voir l'exercice 20 : dans toute base adaptée à la somme directe $\operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$, la matrice de p est $\operatorname{Diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{\operatorname{rg}(p) \text{ fois}}, 0, \dots, 0)$.
2. Rappelons que si s est une symétrie, alors $E = \operatorname{Ker}(s - \operatorname{id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(s + \operatorname{id}_E)$.
Mais un vecteur x est dans $\operatorname{Ker}(s - \operatorname{id}_E)$ si et seulement si $(s - \operatorname{id}_E)(x) = 0_E$, soit encore si et seulement si $s(x) = x$.
Et de même, $\operatorname{Ker}(s + \operatorname{id}_E) = \{x \in E \mid s(x) = -x\}$.

   Donc si on note r la dimension de $\operatorname{Ker}(s - \operatorname{id}_E)$, alors dans toute base adaptée à la somme directe $\operatorname{Ker}(s - \operatorname{id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(s + \operatorname{id}_E)$, la matrice de s est de la forme $\operatorname{Diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{r \text{ fois}}, -1, \dots, -1)$.

   Donc sa trace est $\operatorname{tr}(s) = \underbrace{1 + \dots + 1}_{r \text{ fois}} - (\underbrace{1 + \dots + 1}_{\dim E - r \text{ fois}})$.
Mais notons qu'alors $\dim E - r = \dim E - \dim \operatorname{Ker}(s - \operatorname{id}_E) = \dim \operatorname{Ker}(s + \operatorname{id}_E)$.
Et donc $\operatorname{tr}(s) = \dim \operatorname{Ker}(s - \operatorname{id}_E) - \dim(s + \operatorname{id}_E)$.
3. Il est clair que f est une symétrie, puisque $f^2 = \operatorname{id}$.
De plus, on a

$$\operatorname{Ker}(f - \operatorname{id}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \mid f(A) - A = 0\} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \mid A^\top = A\} = \mathcal{S}_n(\mathbf{K}).$$

   Et de même, on a $\operatorname{Ker}(f + \operatorname{id}) = \mathcal{A}_n(\mathbf{K})$, l'ensemble des matrices antisymétriques.
Donc nous savons que $\operatorname{tr}(f) = \dim \mathcal{S}_n(\mathbf{K}) - \dim \mathcal{A}_n(\mathbf{K})$.

   Pour calculer la trace de f, il nous faudrait sa matrice dans une base de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Mais nous connaissons une telle base : il s'agit de la base canonique $\mathcal{B} = (E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
Pour $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, on a $f(E_{i,j}) = E_{j,i}$.
Par conséquent, la coordonnée de $f(E_{i,j})$ suivant $E_{i,j}$ vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon.
Autrement dit, le coefficient diagonal de $\mathcal{B}$ dans sa colonne correspondant à $f(E_{i,j})$ vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon.
Et donc $\operatorname{tr}(f) = n$.
Puisque de plus $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ sont supplémentaires, il vient

$$\begin{cases} \dim \mathcal{S}_n(\mathbf{K}) + \dim \mathcal{A}_n(\mathbf{K}) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) = n^2 \\ \dim \mathcal{S}_n(\mathbf{K}) - \dim \mathcal{A}_n(\mathbf{K}) = n \end{cases}$$

   ce qui après résolution nous donne

$$\dim \mathcal{S}_n(\mathbf{K}) = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } \dim \mathcal{A}_n(\mathbf{K}) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Détails

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors les coefficients $a_{i,j}$ de $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ sont définis par

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i.$$

Et donc le coefficient diagonal $a_{i,i}$ est la coordonnée suivant e_i de l'écriture de $f(e_i)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Notons qu'on pourrait sans doutes essayer d'écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Il y a alors deux difficultés :

- *puisque* $\dim \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) = n^2$, *la matrice de f est une matrice de taille $n^2 \times n^2$, donc plutôt grande.*
- *pour écrire la matrice de f dans la base canonique, il faut décider comment on ordonne cette base canonique... et il n'y a pas de moyen standard de le faire. Si on veut réussir à écrire correctement la matrice de f (modulo des pointillés), il ne faut pas faire n'importe quel choix d'ordre des vecteurs de la base*[14].

[14] Et il vaut mieux faire un choix où $E_{i,j}$ et $E_{j,i}$ sont proches. Nous en reparlerons dans le TD de déterminants.

SOLUTION DE L'EXERCICE 26.25

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A.
Alors si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = T$, on doit avoir

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

Il nous faut donc trouver trois vecteurs e_1, e_2 et e_3 tels que $f(e_1) = 2e_1, f(e_2) = e_2$ et $f(e_3) = e_2 + e_3$.
Or pour $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, $f(x, y, z) = 2(x, y, z)$ si et seulement si

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y - z = 2x \\ x + y = 2y \\ -x - 3y = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y + z \\ x = y \\ x + 3y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = -2y \end{cases}$$

Ainsi, on peut prendre $e_1 = (1, 1, -2)$.

De même, la résolution de $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ nous montre qu'on peut prendre $e_2 = (0, 1, -3)$.

Et alors, on a $f(x, y, z) = (x, y, z) + e_2$ si et seulement si

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ x + y = y + 1 \\ -x - 3y = z - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ z = 2 - 3y \end{cases}$$

On peut par exemple prendre $e_3 = (1, 1, -1)$.

Il reste donc à vérifier que (e_1, e_2, e_3) forme bien une base de $\mathbf{R}^3$. Pour cela, utilisons la matrice de (e_1, e_2, e_3) dans la base canonique, qui est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(e_1, e_2, e_3) = \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_3 & e_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Un calcul de pivot prouve que cette matrice est inversible, d'inverse $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

En particulier, (e_1, e_2, e_3) est une base $\mathcal{B}$, et alors, par construction

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} .$$

Les matrices A et T représentant toutes les deux l'endomorphisme f dans deux bases de $\mathbf{R}^3$, elles sont semblables.
Plus précisément, par la formule de changement de base,

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(f) = P_{\mathscr{B}_{can}}^{\mathscr{B}} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(f) \left(P_{\mathscr{B}_{can}}^{\mathscr{B}}\right)^{-1}.$$

De plus, $P_{\mathscr{B}_{can}}^{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ et $\left(P_{\mathscr{B}_{can}}^{\mathscr{B}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Notons que $T = D + N$ où $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On a alors $DN = DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Puisque D et N commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$T^n = (N+D)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k}.$$

Or on a $N^2 = 0$, et donc $N^k = 0$ pour tout $k \geqslant 2$. Il ne reste donc que les termes correspondants à $k = 0$ et $k = 1$ dans la somme, de sorte que

$$T^n = \binom{n}{0} N^0 D^n + \binom{n}{1} N D^{n-1} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et alors

$$\begin{aligned} A^n &= (PTP^{-1})^n = PT^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 3(1-2^n) & 1 - 2^n \\ 2^{n+1} - n - 2 & 3n + 4 - 3 \cdot 2^n & n + 1 - 2^n \\ -2^{n+2} + 4 + 3n & 3(2^{n+1} - 3n - 2) & 2^{n+1} - 3n - 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alternative
Ici, étant donnée la forme assez simple de T^n, si vous aviez commencé par calculer les premières puissances, il n'était pas trop dur d'émettre une conjecture et de la prouver par récurrence.

Solution de l'exercice 26.26

Soient A et B deux matrices semblables, et soit $P \in GL_n(\mathbf{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$.
Alors pour $\lambda \in \mathbf{K}$, on a

$$A - \lambda I_n = P^{-1}BP - \lambda I_n = P^{-1}BP - P^{-1}\lambda I_n P = P^{-1}(B - \lambda I_n)P.$$

Donc $A - \lambda I_n$ et $B - \lambda I_n$ sont semblables , et par conséquent ont même rang.

Mieux
Non seulement elles sont semblables, mais on peut prendre la même matrice de passage P que pour la relation de similitude entre A et B.

Pour $\lambda = 1$, on a $A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui est de rang 1.

Alors que $B - I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ qui est de rang 2. Donc A et B ne sont pas semblables[15].

[15] Et ce alors qu'elles ont même trace et même rang.

Solution de l'exercice 26.27

1. La matrice M ne peut être inversible, puisque sinon M^2 le serait[16], ce qui n'est pas le cas.
Donc $\dim \operatorname{Ker} M \geqslant 1$. Or, $\operatorname{Ker} M \subset \operatorname{Ker} M^2$, et puisque M^2 est de rang 2, par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} M^2 = 1$.
Donc $1 \leqslant \dim \operatorname{Ker} M \leqslant \dim \operatorname{Ker} M^2 = 1$, de sorte que nécessairement $\dim \operatorname{Ker} M = 1$.
Puisque $\operatorname{Ker} M \subset \operatorname{Ker} M^2$ et que ces espaces ont même dimension, ils sont égaux.
Par le théorème du rang, on a alors $\dim \operatorname{Im} M = \dim \operatorname{Im} M^2$.
Or $\operatorname{Im} M^2 \subset \operatorname{Im} M$, d'où l'égalité.

[16] Car produit de matrices inversibles.

2. On a clairement $\operatorname{Ker} M^2 = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, donc $\operatorname{Ker} M = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

   Or, pour toute matrice 3×3, $M\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ n'est rien d'autre que la première colonne de M.
   Donc la première colonne de M est nulle.
   De même, $\operatorname{Im} M = \operatorname{Im} M^2 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$, l'ensemble des vecteurs colonnes dont la dernière coordonnée est nulle.
   Donc toutes les colonnes de M sont dans cet espace, et donc ont leur dernière coordonnée nulle.
   Donc la dernière ligne de M est nulle.
   Par conséquent, M est de la forme $\begin{pmatrix}0 & a & b\\0 & c & d\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.
   Mais alors $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} = M^2 = \begin{pmatrix}0 & ac & ad\\0 & c^2 & cd\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.
   Donc $c = 0$, et alors $ac = 1$ n'est pas possible.
   En conclusion, il n'existe pas de matrice M comme indiqué.

Im M
Rappelons que l'image d'une matrice est l'espace engendré par ses colonnes.

Remarque
Ce résultat a été prouvé directement sur les matrices, mais vous il n'est pas inintéressant d'essayer de le réinterpréter en termes d'endomorphismes.

SOLUTION DE L'EXERCICE 26.28

1. Pour $\lambda \in \mathbf{K}$, $D - \lambda I_n = \operatorname{Diag}(\lambda_1 - \lambda, \dots, \lambda_n - \lambda)$.
   Elle est non inversible si et seulement si elle possède un coefficient diagonal nul.
   Soit si et seulement si l'un des $\lambda_i - \lambda$ est nul.
2. Matriciellement, il s'agit de prouver que la matrice de f dans la base canonique[17] est semblable à une matrice diagonale.
   Notons A cette matrice : après calculs, on a

$$A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(f) = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1\\ X\\ X^2 \end{array} \end{array}.$$

   Supposons que D soit la matrice de f dans une autre base $\mathscr{B}$, alors quel que soit le réel λ, $D - \lambda I_3$ est la matrice de $f - \lambda\mathrm{id}$ dans la base $\mathscr{B}$.
   Et donc est semblable à $A - \lambda I_3$ qui est la matrice de $f - \lambda\mathrm{id}$ dans la base canonique.
   Donc $A - \lambda I_3$ est inversible si et seulement si $D - \lambda I_3$ l'est.
   Or, un raisonnement similaire à la première question[18] prouve que $A - \lambda I_3$ n'est **pas inversible** si et seulement si $\lambda \in \{1, 2, 5\}$.
   Donc les coefficients diagonaux de D sont nécessairement parmi $1, 2$ et 5.
   Or, si $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$, $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ si et seulement si pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, $f(e_i) = \lambda_i e_i$.
   Cherchons donc s'il existe des vecteurs tels que $f(x) = x$, $f(x) = 2x$ ou $f(x) = 5x$.
   Soit donc $P = a + bX + cX^2 \in \mathbf{R}_2[X]$. Alors

$$f(P) = P \Leftrightarrow A\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + 4c = a\\ 2b + 2c = b\\ 6c = c \end{cases} \Leftrightarrow b = c = 0 \Leftrightarrow P \in \operatorname{Vect}(1).$$

   De même, on prouve que $f(P) = 2P \Leftrightarrow P \in \operatorname{Vect}(X - 1)$ et

$$f(P) = 5P \Leftrightarrow P \in \operatorname{Vect}(7 + 4X + 6X^2).$$

   Posons donc $P_1 = 1$, $P_2 = X - 1$ et $P_3 = 6X^2 + 4X + 7$, de sorte que (P_1, P_2, P_3) est libre car formée de polynômes de degrés deux à deux distincts, et donc par cardinal, est une base de $\mathbf{R}_2[X]$.
   Alors la matrice de f dans cette base est $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 5\end{pmatrix}$, qui est bien une matrice diagonale.

[17] Ou en fait dans n'importe quelle base.

[18] Le critère d'inversibilité est le même pour les triangulaires et les diagonales.

Vers la spé
Les λ tels que $A - \lambda I_n$ ne soit pas inversible sont appelés valeurs propres de A et seront intensivement étudiés en spé.
Le raisonnement que nous venons de tenir prouve que pour une matrice triangulaire, les valeurs propres sont les coefficients diagonaux.

Alternative : plus théorique[19]
Puisque $A-\lambda I_3$ n'est pas inversible pour $\lambda\in\{1,2,5\}$, le noyau de $f-\lambda\mathrm{id}$ n'est pas réduit au vecteur nul.
Et donc il existe $P\in\mathbf{R}_2[X]$ tel que $f(P)-\lambda P=0\Leftrightarrow f(P)=\lambda P$.
Autrement dit, sans faire de calculs, et sans avoir de système à résoudre, on a l'existence d'une famille (P_1,P_2,P_3) de polynômes non nuls tels que $f(P_1)=P_1$, $f(P_2)=2P_3$ et $f(P_3)=5P_3$.
Reste à prouver qu'une telle famille est libre.
Soient donc α,β,γ des réels tels que $\alpha P_1+\beta P_2+\gamma P_3=0$.
Alors en appliquant f, il vient $\alpha P_1+2\beta P_2+5\gamma P_3=0$.
Par soustraction de ces deux relations, $\beta P_2+4\gamma P_3=0$.
En appliquant de nouveau f, $2\beta P_2+20\gamma P_3=0$, ce qui combinée à la relation $\beta P_2=-4\gamma P_3$ nous donne $\gamma P_3=0$, et donc[20] $\gamma=0$.
Puis en remontant, on arrive à $\beta=\alpha=0$.
La conclusion est la même que dans la première solution : on a une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.

[19] Et plus proche de ce qui se fera en spé.

[20] Et là il était important d'avoir $P_3\neq 0$.

Solution de l'exercice 26.29

Commençons par noter que vous connaissez déjà une telle application dans le cas $n=2$, il s'agit du déterminant.
Et dans ce cas, on retrouve un résultat déjà prouvé dans le chapitre de matrices : une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Patience...
Nous généraliserons bientôt le déterminant à des matrices $n\times n$.

Remarquons que $I_n^2=I_n$, et donc $f(I_n)=f(I_n^2)=f(I_n)f(I_n)=f(I_n)^2$.
Donc $f(I_n)^2-f(I_n)=0$, autrement dit, $f(I_n)$ est une racine de X^2-X.
Mais ce polynôme possède 0 et 1 comme racines, et étant de degré 2, ce sont les seules.
Donc $f(I_n)=0$ ou $f(I_n)=1$.
Si on avait $f(I_n)=0$, alors pour tout $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $f(A)=f(AI_n)=f(A)\times 0=0$, contredisant le fait que f est non constante.
Donc $f(I_n)=1$.
De même, $f(0_n)\in\{0,1\}$, et si on avait $f(0_n)=1$, alors pour tout $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$,

$$f(0_n)=f(A\times 0_n)=f(A)f(0_n)=f(A)$$

donc f serait constante égale à 1. Donc $f(0_n)=0$.

Remarque
Je ne parle de polynôme que pour insister sur le fait que $x^2=x\Leftrightarrow x\in\{0,1\}$ est valable dans tout corps ! Dans $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$ vous le savez bien.

Si A est inversible, alors $f(A)f(A^{-1})=f(AA^{-1})=f(I_n)=1$, et donc $f(A)$ est inversible[21].

[21] D'inverse $f(A^{-1})$.

Inversement, si A n'est pas inversible, alors elle est de rang $r\in[\![0,n-1]\!]$.
Et on sait alors que A est équivalente à toute matrice de rang r.
► Si $r=n-1$, considérons alors

$$J=\begin{pmatrix}0&1&0&\dots&\dots&0\\0&\ddots&\ddots&\ddots&&\vdots\\\vdots&\ddots&&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&&&&\ddots&0\\\vdots&&&\ddots&\ddots&1\\0&\dots&\dots&\dots&0&0\end{pmatrix}.$$

Alors J est échelonnée, de rang $n-1$, et on constate facilement que

$$J^2=\begin{pmatrix}0&0&1&\dots&\dots&0\\0&\ddots&\ddots&\ddots&&\vdots\\\vdots&\ddots&&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&&&&\ddots&1\\\vdots&&&\ddots&\ddots&0\\0&\dots&\dots&\dots&0&0\end{pmatrix}$$

Puis en calculant J^3, la «sur-diagonale» de 1 se décale encore d'un cran vers le haut, etc, jusqu'à J^{n-1} qui possède seulement son coefficient en haut à droite non nul, et donc $J^n=0_n$.

> **Classique**
> J est l'archétype de la matrice nilpotente, et si vous avez un jour besoin d'une matrice nilpotente, il est bon de penser à celle-ci.
> En fait, toute matrice triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux nuls est nilpotente.

Normalement le fait de faire le produit «à la main» doit vous en convaincre.
Si cela ne suffit pas, il est possible d'introduire l'endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ canoniquement associé à J.
Si on note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{K}^n$, alors on a

$$f(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 1 \\ e_{i-1} & \text{si } i > 1 \end{cases}$$

On prouve alors[22] que pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, f^k est donné par

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ f^k(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leqslant k \\ e_{i-k} & \text{sinon} \end{cases}$$

Et donc en particulier, pour tout i, $f^n(e_i) = 0$, et donc $f^n = 0$, de sorte que $J^n = 0$.

Anyway : J est nilpotente, avec $J^n = 0_n$.
Donc $0 = f(J^n) = f(J)^n$, et par conséquent $f(J) = 0$.
Or A est équivalente à J, donc il existe $P, Q \in GL_n(\mathbf{K})$ telles que $A = PJQ$. Et donc $f(A) = f(P)f(J)f(Q) = 0$.
▶ Le cas général s'en déduit facilement, en notant que J^k est de rang $n-1-k$. Et en particulier, J^{n-1-r} est nilpotente de rang r.
Par conséquent, elle est équivalente à A, et donc $f(A) = f(P)f(J)^{n-1-r}f(Q) = 0$.
Donc si A n'est pas inversible, $f(A) = 0$.

Nous avons donc bien prouvé l'équivalence A est inversible si et seulement si $f(A) \neq 0$.
Remarques : comme l'indication le laissait penser, l'essentiel est de prouver l'existence d'une matrice nilpotente de rang k, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ fixé.
Mais cela revient à prouver l'existence d'un endomorphisme d'un espace de dimension n, nilpotent et de rang k.
Or l'endomoprhisme nilpotent que l'on rencontre le plus souvent est probablement la dérivation des polynômes, qui est nilpotent sur $\mathbf{K}_{n-1}[X]$, puisque chaque dérivation diminue le degré d'une unité.

> **Limitation**
> Cette preuve ne marche pas telle quelle sur un corps quelconque : sur certains corps (et une fois encore, je pense notamment aux $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$) la dérivation peut baisser le degré de plus d'une unité à la fois.
> Disons que notre preuve fonctionne au moins pour tous les corps inclus dans $\mathbf{C}$.

Plus précisément, notons $D : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}_{n-1}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$.
Alors $\operatorname{Im} D = \mathbf{K}_{n-2}[X]$. Mais alors $\operatorname{Im} D^2 = \mathbf{K}_{n-3}[X]$ et plus généralement, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\operatorname{Im} D^{n-k} = \mathbf{K}_{n-1-(n-k)}[X] = \mathbf{K}_{k-1}[X]$, qui est de dimension k.
Donc D^{n-k} est nilpotent de rang k, si bien que sa matrice dans n'importe quelle base de $\mathbf{K}_{n-1}[X]$ est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, nilpotente et de rang k.

SOLUTION DE L'EXERCICE 26.30

Le système possède des solutions si et seulement si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est dans $\operatorname{Im}(A)$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
Il est aisé de constater que A est de rang 2 puisque sa dernière colonne est la somme des deux autres.
Donc $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

On a alors $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \operatorname{Im}(A)$ si et seulement si il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ tels que

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \lambda + \mu \\ b = \lambda \\ c = 2\lambda + \mu \end{cases}$$

Soit si et seulement si ce dernier système[23] possède des solutions. Mais en utilisant la méthode du pivot, on arrive au système échelonné suivant :

$$\begin{cases} \lambda = b \\ \mu = a - b \\ 0 = c - a - b \end{cases}$$

[22] Par récurrence sur k.

[23] D'inconnues λ et μ.

Donc le système possède des solutions si et seulement si $c - a - b = 0$.
Dans ce cas, les solutions sont une infinité, et mieux : $\operatorname{Ker} A$, l'ensemble des solutions du système homogène associé est de dimension 1.
Commentaires *: nous dirons bientôt que l'ensemble des solutions, quand il est non vide, est un sous-espace affine de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$, de dimension 1.*
Cela signifie grosso modo que les solutions ne vont dépendre que d'un seul paramètre.

Remarque : Nous venons donc de trouver une équation de l'hyperplan $\operatorname{Im}(A)$ de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.

Solution de l'exercice 26.31

1. Il est clair que φ est injectif, et $\mathbf{C}^3$ et $\mathbf{C}_2[X]$ ayant mêmes dimensions, φ est un isomorphisme.
2. La première équation s'écrit encore $P_{x,y,z}(a) = u_1$, la seconde $P_{x,y,z} = u_2$ et la dernière $P_{x,y,z}(c) = u_3$.

   Donc (x, y, z) est solution de $(\mathscr{S})$ si et seulement si $\begin{cases} P_{x,y,z}(a) = u_1 \\ P_{x,y,z}(b) = u_2 \\ P_{x,y,z}(c) = u_3 \end{cases}$.
3. Puisque a, b, c sont deux à deux distincts, les résultats sur l'interpolation de Lagrange garantissent qu'il existe un unique polynôme de degré au plus 2 qui prend respectivement les valeurs u_1, u_2, u_3 en a, b, c.
   Et ce polynôme est

$$u_1 \frac{(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)} + u_2 \frac{(X-a)(X-c)}{(b-a)(b-c)} + u_3 \frac{(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

   En développant, et en identifiant les coefficients (x est le coefficient constant, y le coefficient en X, etc), on obtient comme unique solution de $(\mathscr{S})$

$$\begin{aligned} x &= \frac{u_1 bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{u_2 ac}{(b-a)(b-c)} + \frac{u_3 ab}{(c-a)(c-b)} \\ y &= \frac{-u_1(b+c)}{(a-b)(a-c)} - \frac{u_2(a+c)}{(b-a)(b-c)} - \frac{u_3(a+b)}{(c-a)(c-b)} \\ z &= \frac{u_1}{(a-b)(a-c)} + \frac{u_2}{(b-a)(b-c)} + \frac{u_3}{(c-a)(c-b)}. \end{aligned}$$

   En théorie il était possible d'obtenir cette solution en résolvant le système classiquement, par la méthode du pivot. Ne vous privez pas si ça vous fait envie, mais je passe mon tour !

Remarque : Et ceci est vrai sans condition sur (u_1, u_2, u_3).