

TD 25 : FONCTIONS CONVEXES

► Généralités

EXERCICE 25.1 Soient f et g deux fonctions convexes sur I . Prouver que $f + g$ est convexe, et que pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $(1 - \lambda)f + \lambda g$ est encore convexe. F

EXERCICE 25.2 Soient $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, convexes, avec g croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe. PD

EXERCICE 25.3 Soient I et J deux intervalles ouverts de \mathbf{R} et $f : I \rightarrow J$ une bijection convexe. Que dire de la convexité de f^{-1} ? PD

EXERCICE 25.4 PD

1. Soit I un intervalle, et soient f_1, \dots, f_n des fonctions convexes sur I . Montrer que la fonction $g = \max(f_1, \dots, f_n)$ est convexe sur I .
2. En déduire que la fonction valeur absolue est convexe sur \mathbf{R} .

EXERCICE 25.5 Soit $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ dérivable, concave et telle que $f(0) \geq 0$. Prouver que pour tous $x, y \in \mathbf{R}_+$, $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$. PD

EXERCICE 25.6 Montrer qu'une fonction convexe et majorée sur \mathbf{R} est constante. AD

EXERCICE 25.7 Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ de degré impair. À quelle condition $x \mapsto P(x)$ est-elle convexe sur \mathbf{R} ? F

► Inégalités de convexité

EXERCICE 25.8 Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$. F

EXERCICE 25.9 Inégalité arithmético-harmonique
Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}_+$. Prouver que PD

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

EXERCICE 25.10 Montrer que pour tous $(x, y) \in]1, +\infty[^2$, $\sqrt{\ln x \ln y} \leq \ln \frac{x+y}{2}$. PD

EXERCICE 25.11 Soient α, β, γ les angles (non orientés) d'un triangle. Montrer que AD

$$\frac{1}{1 + \sin \alpha} + \frac{1}{1 + \sin \beta} + \frac{1}{1 + \sin \gamma} \geq \frac{6}{2 + \sqrt{3}}.$$

EXERCICE 25.12 AD

1. Étudier la convexité de $f : x \mapsto \ln(1 + e^x)$ sur \mathbf{R} .

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}_+$, $1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k)\right)^{1/n}$.

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour tous $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbf{R}_+$,

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^n (a_k + b_k)\right)^{1/n}.$$

EXERCICE 25.13 Inégalité de Cauchy-Schwarz AD

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ des réels strictement positifs. Prouver que $\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right)$, puis que la même inégalité reste valable pour $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ des réels (non nécessairement positifs).

► Comportement des fonctions convexes

EXERCICE 25.14 Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe sur un intervalle I , et soient $a < b$ deux points de I . Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leq \max(f(a), f(b))$.
Autrement dit, sur tout segment $[a, b]$ inclus dans I , f possède un maximum sur $[a, b]$, atteint en l'une de ses bornes.

PD

EXERCICE 25.15 Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ convexe.

PD

1. On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Montrer que f est à valeurs positives.
2. On suppose que \mathcal{C}_f possède une asymptote D au voisinage de $+\infty$. Déterminer la position relative de \mathcal{C}_f et D .

EXERCICE 25.16

AD

1. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe strictement croissante.
Prouver que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
2. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe et majorée. Montrer que f est constante.

EXERCICE 25.17

PD

1. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe et positive. Montrer que si $f(a) = f(b) = 0$, alors f est identiquement nulle.
2. En déduire qu'une fonction convexe qui possède un minimum atteint ce minimum soit en un seul point, soit en une infinité de points.
3. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ convexe et périodique. Montrer que f est constante.

EXERCICE 25.18 Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe, avec I un intervalle ouvert. Montrer que si f admet un minimum local en $a \in I$, alors il s'agit en fait d'un minimum global.

PD

EXERCICE 25.19 Soit $f : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe admettant une limite finie en $+\infty$.

AD

1. Montrer que f est décroissante.
2. On suppose de plus f dérivable.
 - (a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.
 - (b) Justifier que le résultat n'est plus valable si on enlève l'hypothèse de convexité, c'est-à-dire qu'une fonction dérivable sur \mathbf{R}_+^* , possédant une limite finie en $+\infty$ n'a pas forcément une dérivée de limite nulle en $+\infty$.

EXERCICE 25.20 Soit I un intervalle de \mathbf{R} et soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ continue. Prouver que f est convexe si et seulement si pour tout $(x, y) \in I^2$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

D

EXERCICE 25.21 (Oral X PC)

D

Soit f une fonction convexe sur \mathbf{R} . On suppose que f n'est pas affine. Prouver que pour tout $a \in \mathbf{R}$, $f(x)+f(a-x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

CORRECTION DES EXERCICES DU TD 25

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.1

Pour tout $a, b \in I$ et tout $\lambda \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}(f + g)((1 - \lambda)a + \lambda b) &= f((1 - \lambda)a + \lambda b) + g((1 - \lambda)a + \lambda b) \\ &\leq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b) + (1 - \lambda)g(a) + \lambda g(b) \leq (1 - \lambda)(f + g)(a) + \lambda(f + g)(b).\end{aligned}$$

Et donc $f + g$ est encore convexe.

On prouve sans difficultés que pour tout $\lambda \geq 0$, λf est encore convexe.

Et donc pour $\lambda \in [0, 1]$, $1 - \lambda \geq 0$, si bien que $(1 - \lambda)f$ et λg sont convexes, donc $(1 - \lambda)f + \lambda g$ est convexe.

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.2

Soient $x < y$ deux réels, et soit $\lambda \in [0, 1]$.

Alors $f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$.

Et donc

$$\begin{aligned}g(f((1 - \lambda)x + \lambda y)) &\leq g((1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)) \\ &\leq (1 - \lambda)g(f(x)) + \lambda g(f(y)).\end{aligned}$$

Donc $g \circ f$ est convexe.

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.3

Puisque I est ouvert et que f est convexe, elle est continue sur I .

Et donc elle est strictement monotone.

Si elle est strictement croissante, considérons $x, y \in J$ et $\lambda \in [0, 1]$. Alors

$$f((1 - \lambda)f^{-1}(x) + \lambda f^{-1}(y)) \leq (1 - \lambda)f(f^{-1}(x)) + \lambda f(f^{-1}(y)) \leq (1 - \lambda)x + \lambda y.$$

Et donc par stricte croissance de f^{-1} ,

$$(1 - \lambda)f^{-1}(x) + \lambda f^{-1}(y) \leq f^{-1}((1 - \lambda)x + \lambda y).$$

Donc f^{-1} est concave.

Le raisonnement est le même si f est strictement décroissante, sauf qu'alors f^{-1} est strictement décroissante, et donc

$$(1 - \lambda)f^{-1}(x) + \lambda f^{-1}(y) \geq f^{-1}((1 - \lambda)x + \lambda y)$$

si bien que f^{-1} est également convexe.

Un exemple de ces deux cas est $x \mapsto e^x$, qui est convexe et croissante, et dont la bijection réciproque \ln est donc concave.

Et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est convexe et décroissante, dont la bijection réciproque $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est encore convexe.

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.4

1. Soient $a, b \in I$ et $\lambda \in [0, 1]$.

Alors il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $g((1 - \lambda)a + \lambda b) = f_i((1 - \lambda)a + \lambda b)$.

Par convexité de f_i , $f_i((1 - \lambda)a + \lambda b) \leq (1 - \lambda)f_i(a) + \lambda f_i(b)$.

Mais $f_i(a) \leq g(a)$, si bien que $(1 - \lambda)f_i(a) \leq (1 - \lambda)g(a)$. Et de même $\lambda f_i(b) \leq \lambda g(b)$, et donc

$$g((1 - \lambda)a + \lambda b) \leq (1 - \lambda)g(a) + \lambda g(b).$$

Donc g est convexe.

2. On a, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|x| = \max(-x, x)$.

Or les deux fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$ sont affines, donc convexes.

Et donc par la question précédente, $x \mapsto |x|$ est convexe.

⚠ Danger !

Ceci est faux si $\lambda < 0$, car on change alors le sens de l'inégalité.

Croissance de g .

Convexité de g .

Rappel

Une fonction continue sur un intervalle est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

⚠ Attention !

Le i considéré dépend de a, b et λ , il n'est pas automatique qu'il existe i tel que $g = f_i$ sur I tout entier.

Remarque

Bien entendu, la convexité de $x \mapsto |x|$ peut se montrer directement à l'aide de l'inégalité triangulaire.

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.5

Pour x fixé, posons $\varphi(y) = f(x+y) - f(x) - f(y)$.

Alors φ est dérivable et $\varphi'(y) = f'(x+y) - f'(y) \leq 0$ puisque par concavité de f , f' est décroissante.

Donc φ est décroissante, et $\varphi(0) = -f(0) \leq 0$, si bien que pour tout $y \in \mathbf{R}_+$,

$$\varphi(y) \leq 0 \text{ et donc } f(x+y) \leq f(x) + f(y).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.6

Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ convexe et majorée.

Soient alors $a < b$ deux réels. Par l'inégalité des pentes, pour $x < a$ et $y > b$, on a

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(y) - f(b)}{y - b}.$$

Supposons $f(b) > f(a)$, de sorte que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$.

Alors pour $y > b$, on a $f(y) \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(y - b) + f(b) \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} +\infty$, contredisant le fait que f est majorée.

Et si $f(a) > f(b)$, alors pour $x < a$, on a

$$f(a) - f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - x) \Leftrightarrow f(x) \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$$

contredisant là aussi le fait que f est majorée.

Et donc pour tous $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, $f(a) = f(b)$, si bien que f est constante.

Alternative : si on se souvient qu'en dehors de $[a, b]$, \mathcal{C}_f est au-dessus de la corde $\Delta_{a,b}$, on peut redire plus simplement ce qui précède.

Si f n'est pas constante, considérons $a < b \in \mathbf{R}$ tels que $f(a) \neq f(b)$, de sorte que $\tau(a, b) \neq 0$.

Si $\tau(a, b) > 0$, alors pour $x > b$, on a $f(x) \geq \tau(a, b)(x - b) + f(b)$ si bien que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Et inversement, si $\tau(a, b) < 0$, alors pour $x < a$, $f(x) \geq \tau(a, b)(x - a) + f(a) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$.

Dans les deux cas, ceci contredit le fait que f soit majorée.

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.7

Si $\deg P \geq 3$ alors P'' est de degré impair, et donc n'est pas de signe constant¹.

Et donc P n'est pas convexe.

Et si $\deg P = 1$, alors bien entendu, P est convexe, comme toute fonctions affine.

Donc P est convexe si et seulement si elle est affine.

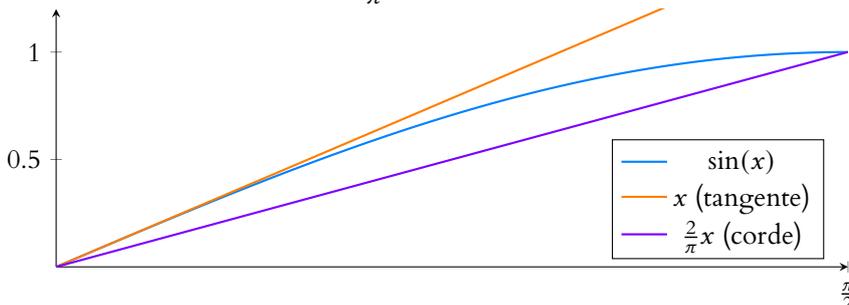
SOLUTION DE L'EXERCICE 25.8

La fonction \sin est concave² sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ puisque sa dérivée seconde y est négative.

L'équation de sa tangente en 0 est $y = x$, si bien que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin x \leq x$.

Et par ailleurs, la corde joignant les points de \mathcal{C}_f d'abscisses 0 et $\frac{\pi}{2}$ a pour équation $y = \frac{2}{\pi}x$,

si bien que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x$.



¹ Les limites en $\pm\infty$ sont de signes opposés.

⚠ Attention !

Ceci ne vaut plus pour les fonctions polynomiales de degré pair, comme le montrent $x \mapsto x^2$ ou $x \mapsto x^4$.

² Et donc en dessous de ses tangentes et au dessus de ses cordes.

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.9

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est convexe sur \mathbf{R}_+^* , puisque sa dérivée, $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ y est croissante.
Donc par l'inégalité de Jensen³

$$f\left(\frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)\right) \leq \frac{1}{n}f(x_1) + \dots + \frac{1}{n}f(x_n) \Leftrightarrow \frac{n}{x_1 + \dots + x_n} \leq \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}\right).$$

En passant à l'inverse, il vient donc

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.10

Par concavité de la fonction \ln , on a, pour tout $x, y > 1$,

$$\ln \frac{x+y}{2} \geq \frac{1}{2} \ln(x) + \frac{1}{2} \ln(y).$$

Mais pour tous réels positifs α et β , on a $2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} \leq \alpha + \beta$.

Et donc $\sqrt{\ln x \ln y} \leq \frac{1}{2}(\ln x + \ln y) \leq \ln \frac{x+y}{2}$.

Alternative : la fonction $x \mapsto \ln(\ln(x))$ est concave sur $]1, +\infty[$ puisque sa dérivée est $x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$ qui est décroissante.

Donc pour $x, y \in]1, +\infty[$,

$$\ln\left(\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \geq \frac{1}{2} \ln(\ln(x)) + \frac{1}{2} \ln(\ln(y)).$$

Par croissance de l'exponentielle,

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq e^{\frac{1}{2} \ln(\ln(x) + \ln(y))} \geq e^{\ln(\sqrt{\ln x}) + \ln(\sqrt{\ln y})} \geq \sqrt{\ln(x) \ln(y)}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.11

Soit f la fonction définie sur $[0, \pi[$ par $f(x) = \frac{1}{1 + \sin x}$.

Alors f est deux fois dérivable⁴, et

$$\forall x \in [0, \pi[, f'(x) = -\frac{\cos x}{(1 + \sin x)^2} \quad f''(x) = \frac{\sin(x)(1 + \sin x)^2 + 2 \cos^2(x)(1 + \sin x)}{(1 + \sin(x))^4} \geq 0.$$

Donc f est convexe sur $[0, \pi[$.

Alors l'inégalité de Jensen, appliquée aux trois points α, β, γ , avec $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$,

$$f\left(\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{3}\gamma\right) \leq \frac{1}{3}f(\alpha) + \frac{1}{3}f(\beta) + \frac{1}{3}f(\gamma).$$

Mais α, β, γ étant les trois angles d'un même triangle, leur somme vaut π et donc $\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} = \frac{\pi}{3}$.
Ainsi

$$\frac{1}{1 + \sin \frac{\pi}{3}} \leq \frac{1}{3} \frac{1}{1 + \sin \alpha} + \frac{1}{3} \frac{1}{1 + \sin \beta} + \frac{1}{3} \frac{1}{1 + \sin \gamma}.$$

Soit encore

$$\frac{3}{1 + \sin \frac{\pi}{3}} = \frac{6}{2 + \sqrt{3}} \leq \frac{1}{1 + \sin \alpha} + \frac{1}{1 + \sin \beta} + \frac{1}{1 + \sin \gamma}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.12

- f est dérivable, avec $f' : x \mapsto \frac{e^x}{1 + e^x} = 1 - \frac{1}{1 + e^x}$ qui est donc croissante.
Donc f est convexe.
- Par l'inégalité de Jensen, toujours en prenant $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$, il vient

$$f\left(\frac{\ln(x_1) + \dots + \ln(x_n)}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\ln(x_k)).$$

³ Appliquée avec

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}.$$

Rappel

Cette inégalité classique découle de

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0.$$

Mais c'est aussi un cas particulier de l'inégalité arithmético-géométrique.

⁴ Car inverse d'une fonction qui l'est

Détails

C'est Jensen appliquée aux réels $\ln(x_k)$, et non directement aux x_k .

Soit encore

$$\ln \left(1 + e^{\frac{1}{n}(\ln(x_1) + \dots + \ln(x_n))} \right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + e^{\ln(x_k)} \right).$$

Donc

$$\ln \left(1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{1/n} \right) \leq \frac{1}{n} \ln \left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \right).$$

Par croissance de l'exponentielle, on a donc

$$1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \right)^{1/n}.$$

3. Appliquons l'inégalité précédente aux $x_k = \frac{b_k}{a_k}$. Il vient alors

$$1 + \left(\prod_{k=1}^n \frac{b_k}{a_k} \right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{b_k}{a_k} \right) \right)^{1/n}.$$

En multipliant les deux membres de l'inégalité par $\left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{1/n}$, il vient

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n b_k \right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^n (a_k + b_k) \right)^{1/n}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.13

La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe sur \mathbf{R}_+^* .

Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ des réels strictement positifs.

Posons alors, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_i = \frac{x_i^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, si bien que les λ_i sont positifs et que

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1.$$

Posons également $z_i = \frac{y_i}{x_i}$.

On a donc, par l'inégalité de Jensen, appliquée à z_1, \dots, z_n ,

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i z_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i^2.$$

Soit encore

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{y_i x_i}{x_1^2 + \dots + x_n^2} \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2} \frac{y_i^2}{x_i^2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x_1^2 + \dots + x_n^2} \right)^2 \left(\sum_{i=1}^n y_i x_i \right)^2 \leq \left(\frac{1}{x_1^2 + \dots + x_n^2} \right) \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

Après multiplication par $\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^2$, il vient $\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)$.

Si $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ sont positifs, mais que certains des x_i ou des y_i sont nuls, quitte à renuméroter, on peut supposer que pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $x_i y_i \neq 0$, et que pour $i \in \llbracket p+1, n \rrbracket$, $x_i = 0$ ou $y_i = 0$. Alors

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^p x_i y_i \right)^2 \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^p x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^p y_i^2 \right) \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right). \end{aligned}$$

C'est le cas traité précédemment.

Dans le cas où $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ sont des réels de signe quelconque, mais non nul, on a⁵

⁵ Par l'inégalité triangulaire.

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| |y_i|$$

si bien que

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i| |y_i| \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^2 \right) \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.14

Le résultat est graphiquement assez intuitif : sur $[a, b]$, \mathcal{C}_f est en dessous de $\Delta_{a,b}$ la corde joignant a à b .

La fonction affine correspondante possède un maximum atteint soit en a soit en b (suivant que sa pente $\tau(a, b)$ soit positive ou négative), et f coïncide avec cette fonction affine en ces deux points. Donc nécessairement f possède un maximum en a ou en b .

Il y a plusieurs moyens de formaliser ceci. **Première option** : directement avec la définition de la convexité.

Soit $x \in [a, b]$, et soit donc $\lambda \in [0, 1]$ tel que $x = (1 - \lambda)a + \lambda b$. Alors

$$f(x) = f((1-\lambda)a + \lambda b) \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b) \leq (1-\lambda) \max(f(a), f(b)) + \lambda \max(f(a), f(b)) \leq \max(f(a), f(b)).$$

Deuxième option : par l'absurde.

Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) > f(a)$ et $f(x) > f(b)$.

Alors $\tau(a, x) > 0$ et $\tau(b, x) < 0$.

Mais la fonction τ_x étant croissante, on a $\tau(a, x) \leq \tau(b, x)$, ce qui contredit l'inégalité ci-dessus.

Troisième option : avec l'inégalité des pentes.

Supposons que $f(a) \leq f(b)$, et soit $x \in]a, b[$.

$$\text{Alors par l'inégalité des pentes, } 0 \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

Et donc en particulier, $f(b) - f(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(b) \geq f(x)$, ce qui prouve bien l'inégalité voulue.

Et si $f(b) \leq f(a)$, toujours par l'inégalité des pentes,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq 0$$

et donc $f(x) - f(a) \leq 0$ si bien que $f(x) \leq f(a)$.

Dans les deux cas, pour tout $x \in]a, b[$, $f(x) \leq \max(f(a), f(b))$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.15

1. Soient $a < b$ deux réels. Alors pour tout $x > b$, par l'inégalité des pentes on a

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Mais lorsque $x \rightarrow +\infty$, $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \rightarrow 0$.

On en déduit que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq 0$, et donc $f(b) \leq f(a)$.

Ainsi, f est décroissante. Et donc nécessairement, si elle tend vers 0, alors elle reste positive.

Alternative : supposons par l'absurde qu'il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $f(a) < 0$. Puisque $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, il existe nécessairement $b > a$ tel que $f(b) \geq f(a)$.

Mais alors $\tau(a, b) > 0$. Or pour $x > b$,

$$f(x) \geq \tau(a, b)(x - a) + f(a).$$

Et alors par passage à la limite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, ce qui est absurde.

On notera en passant qu'on a prouvé bien mieux qu'annoncé : si une fonction convexe sur \mathbf{R} possède un seul taux d'accroissement positif, alors elle tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Rappel

Une fonction décroissante

Détails

S'il n'existait pas de tel b , alors pour tout $x \geq a$, on a $f(x) \leq f(a)$, et par

Rappel

Cette inégalité est juste celle qui dit qu'en dehors de $[a, b]$, \mathcal{C}_f est au dessus de $\Delta_{a,b}$.

2. Notons $y = ax + b$ une équation de D .

Alors $g : x \mapsto f(x) - (ax + b)$ est encore convexe, puisque somme⁶ de fonctions convexes (en effet, une fonction affine est toujours convexe).

Par définition d'une asymptote, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, si bien que g est à valeurs positives par la question 1 : pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) \geq ax + b$, donc \mathcal{C}_f est au dessus de D .

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.16

1. Soit $x > 1$. Alors par convexité de f on a $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \geq \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$, soit encore

$$f(x) \geq x(f(1) - f(0)) + f(0).$$

Puisque $f(1) - f(0) > 0$ par stricte croissance de f , on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. Supposons par l'absurde f non constante. Alors il existe $a < b$ tels que $f(a) \neq f(b)$.

► Si $f(b) > f(a)$: alors comme à la question précédente, pour $x > b$, on a

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Leftrightarrow f(x) \geq (x - a) \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}_{>0} + f(a)$$

si bien que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, contredisant le fait que f est majorée.

► Si $f(b) < f(a)$: alors pour $x < a$, on a

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Leftrightarrow f(x) \geq (x - a) \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}_{<0} + f(a)$$

si bien que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, contredisant le fait que f est majorée.

Et donc une fonction convexe sur \mathbf{R} et majorée est nécessairement constante.

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.17

1. Soit $c \in [a, b]$. Alors il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que $c = (1 - \lambda)a + \lambda b$.

Et alors $0 \leq f(c) = f((1 - \lambda)a + \lambda b) \leq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b) = 0$.

Et donc $f(c) = 0$. Ceci étant vrai pour tout $c \in [a, b]$, f est la fonction nulle sur $[a, b]$.

2. Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe sur un intervalle I possédant un minimum m .

Supposons qu'il existe deux réels distincts $a < b$ tels que $f(a) = f(b) = m$.

Alors la fonction g définie sur $[a, b]$ par $g(x) = f(x) - m$ est positive, toujours convexe, et $g(a) = g(b) = 0$.

Donc elle est nulle sur $[a, b]$, si bien que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) = m$.

Et ainsi, le minimum de f est atteint en tous les points du segment $[a, b]$, qui sont donc en nombre infini.

3. Si f est convexe et T -périodique sur \mathbf{R} , alors elle est continue, car \mathbf{R} est un intervalle ouvert. Donc elle possède un minimum m .

Soit alors $a \in \mathbf{R}$ tel que $f(a) = m$. Alors pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $g(a - kT) = g(a + kT) = 0$, si bien que comme à la question précédente, g est constante égale à m sur $[a - kT, a + kT]$.

Et ceci étant vrai pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, g est nulle sur $\mathbf{R} = \bigcup_{k \in \mathbf{N}^*} [a - kT, a + kT]$.

Et donc f est constante égale à m .

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.18

Supposons donc que f possède un minimum local en a , et soit $\eta > 0$ tel que $[a - \eta, a + \eta] \subset I$ et $\forall x \in [a - \eta, a + \eta]$, $f(x) \geq f(a)$.

Soit alors $x > a + \eta$. Puisque \mathcal{C}_f est au-dessus de $\Delta_{a, a+\eta}$ sur $[a + \eta, +\infty[$, on a donc

$$f(x) \geq \underbrace{\tau(a, a + \eta)}_{\geq 0} (x - a) + f(a) \geq f(a).$$

Et de même, pour $x < a - \eta$, alors

$$f(x) \geq \underbrace{\tau(a, a - \eta)}_{\leq 0} \underbrace{(x - a)}_{\leq 0} + f(a) \geq f(a).$$

Et donc pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(a)$, donc f possède un minimum global en a .

⁶ Voir l'exercice 1.

Remarque

Cette inégalité signifie juste que sur $]1, +\infty[$, \mathcal{C}_f est au-dessus de $\Delta_{0,1}$.

⚠ Attention !

Ici $x - a < 0$, donc le sens de l'inégalité a changé.

Géométriquement

La corde $\Delta_{a,b}$ est égale à l'axe des abscisses, et donc \mathcal{C}_f est au-dessus de l'axe des

Autrement dit

On suppose que f atteint son minimum en deux points au moins.

Mieux

En fait la question 1 montre que l'ensemble des points où f atteint son minimum est un intervalle de \mathbf{R} . S'il est non vide, il est soit réduit à un point, soit infini.

Remarque

Le fait que I soit ouvert garanti qu'on puisse trouver η suffisamment petit pour que $]a - \eta, a + \eta[\subset I$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.19

1. Soient $x < y$ deux réels strictement positifs, et soit $z \geq y$.
Alors par l'inégalité des pentes,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Mais lorsque $z \rightarrow +\infty$, $f(z) - f(y)$ admet une limite finie, et $z - y$ tend vers $+\infty$, si bien que par passage à la limite dans l'inégalité précédente,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 0 \Leftrightarrow f(y) - f(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(y) \leq f(x).$$

Et donc f est décroissante.

- 2.a. Puisque f est décroissante, sa dérivée est négative sur \mathbf{R}_+^* .
Par ailleurs, par convexité de f , cette dérivée est croissante. Et donc étant croissante et majorée, par le théorème de la limite monotone, elle admet une limite finie $\ell \leq 0$ en $+\infty$.
Alors pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f'(x) \leq \ell$.
D'autre part, pour $x < y$ deux réels strictement positifs, par le théorème des accroissements finis, il existe $c_{x,y} \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c_{x,y}) \leq \ell$.

Mais lorsque $y \rightarrow +\infty$, par le même raisonnement que précédemment, $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = 0$.
Et donc $0 \leq \ell$. Puisque nous savons déjà que $\ell \leq 0$, nécessairement $\ell = 0$.

- 2.b. La fonction $f : x \mapsto \frac{\cos(x^3)}{x}$ est un contre-exemple.

En effet, elle tend bien vers 0 en $+\infty$, car produit d'une fonction bornée par une fonction de limite nulle.

Mais sa dérivée, qui est $f' : x \mapsto -3x \sin(x^3) - \frac{\cos(x^3)}{x^2}$ n'admet pas de limite puisque $x \sin(x^3)$ n'a pas de limite en $+\infty$ alors que $\frac{\cos(x^3)}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

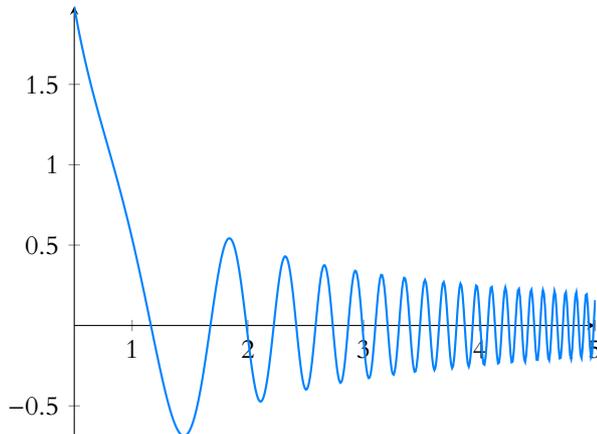


FIGURE 25.1 – La fonction $x \mapsto \frac{\cos(x^3)}{x}$ tend vers 0, mais les oscillations étant de «plus en plus rapides», la dérivée n'a pas de limite.

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.20

Un sens est clair, si f est convexe, alors pour $x, y \in I$ et $\lambda = \frac{1}{2}$,

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) = f\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Pour la réciproque, notons que pour $x, y, z, t \in I$, on a

$$f\left(\frac{x + y + z + t}{4}\right) = f\left(\frac{1}{2} \frac{x + y}{2} + \frac{1}{2} \frac{z + t}{2}\right) \leq \frac{1}{2} f\left(\frac{x + y}{2}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{z + t}{2}\right) \leq \frac{1}{4} (f(x) + f(y) + f(z) + f(t)).$$

Graphiquement

Le théorème des accroissements finis nous dit que la pente d'une corde est une valeur prise par la dérivée, donc a même coefficient directeur qu'une tangente.

Une récurrence sans difficultés prouve que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, quels que soient les réels $x_1, \dots, x_{2^n} \in I$,

$$f\left(\frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{2^n} x_i\right) \leq \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{2^n} f(x_i).$$

En particulier, pour $x, y \in I$, et $p \in \llbracket 0, 2^n \rrbracket$, en prenant $x_1 = \dots = x_p = x$ et $x_{p+1} = \dots = x_{2^n} = y$, on obtient

$$f\left(\frac{p}{2^n}x + \frac{2^n - p}{2^n}y\right) \leq \frac{p}{2^n}f(x) + \left(1 - \frac{p}{2^n}\right)f(y).$$

Autrement dit, c'est bien la définition de fonction convexe, mais seulement pour $\lambda \in E = \left\{\frac{p}{2^n}, n \in \mathbf{N}, p \in \llbracket 0, 2^n \rrbracket\right\}$.

C'est là qu'entre en jeu la continuité de f , puisque E est dense dans $[0, 1]$.

En effet, si $\lambda \in [0, 1]$, posons $u_n = \frac{\lfloor \lambda 2^n \rfloor}{2^n}$, qui est bien un élément de E .

Alors $2^n \lambda - 1 < \lfloor 2^n \lambda \rfloor \leq 2^n \lambda$, si bien que $\lambda - \frac{1}{2^n} < u_n \leq \lambda$, et donc par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lambda$.

Soient donc $x, y \in I$, et $\lambda \in [0, 1]$, avec (u_n) comme ci-dessus.

On a alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(u_n x + (1 - u_n)y) \leq u_n f(x) + (1 - u_n)f(y)$.

Mais puisque $u_n x + (1 - u_n)y \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (1 - \lambda)x + \lambda y$, par caractérisation séquentielle de la continuité,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n x + (1 - u_n)y).$$

Et donc par passage à la limite,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Et donc f est convexe.

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.21

Soit $a \in \mathbf{R}$ fixé.

Puisque f est convexe, alors τ_a est croissante, et puisque f n'est pas affine, τ_a n'est pas constante.

Donc il existe $u < v$ tels que $\tau_a(u) < \tau_a(v)$.

Par ailleurs, pour x suffisamment grand, on a à la fois $x \geq v$ et $a - x \leq u$.

On a alors $\tau_a(a - x) \leq \tau_a(u)$ et $\tau_a(v) \leq \tau_a(x)$.

Ce qui s'écrit encore $\frac{f(a) - f(a - x)}{x} \leq \tau_a(u) \Leftrightarrow f(a - x) \geq f(a) - x\tau_a(u)$.

Et $f(x) \geq (x - a)\tau_a(v) + f(a)$.

Si on somme ces deux inégalités, il reste donc

$$f(x) + f(a - x) \geq \underbrace{x(\tau_a(v) - \tau_a(u))}_{>0} + 2f(a) - a\tau_a(v) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Terminologie

De tels nombres sont appelés des entiers dyadiques.