TD 25 : Représentations matricielles

▸ Matrice d'une application linéaire

Exercice 25.1 Déterminer les matrices des applications suivantes, dans les bases canoniques : F

1. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x - y, y + 3x, x + y + z) \end{array} \right.$
2. $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & XP' + (X+1)P'' \end{array} \right.$
3. $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ P & \longmapsto & \left(P'(1), \displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt\right) \end{array} \right.$

Exercice 25.2 Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ des bases respectives de E et F, et $M = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$. F
Si l'on considère la matrice obtenue en ne gardant que les r premières colonnes de M ($1 \leqslant r \leqslant \dim E$), quelle application linéaire représente-t-elle ?

Exercice 25.3 Soit n un entier naturel non nul, soit $E = \mathbf{R}_n[X]$, et soit $\alpha \in \mathbf{R}$ non nul. On considère l'application $f : E \to E$ définie par $f(P) = P(X + \alpha)$. PD

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de E. Déterminer $A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.
3. Montrer que A est inversible, et déterminer A^{-1}.
4. ($\star$) Montrer que pour tout $(p, q) \in [\![0, n]\!]^2$, si $p < q$, alors $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} (-1)^k \binom{k}{p}\binom{q}{k} = 0$.

Exercice 25.4 En utilisant des endomorphismes, proposer une preuve rapide d'un résultat prouvé dans le chapitre sur les matrices : une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est inversible si et seulement si $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, $AX = 0 \Rightarrow X = 0$. PD

Exercice 25.5 Soit φ l'endomorphisme de $\mathbf{R}_3[X]$ défini par $\varphi(P) = (3X + 1)P + (1 - X^2)P'$. PD

1. Montrer qu'il s'agit bien d'un endomorphisme de $\mathbf{R}_3[X]$.
2. Donner la matrice de φ dans la base canonique.
3. En utilisant cette matrice, déterminer une base de $\operatorname{Ker}\varphi$ et une base de $\operatorname{Im}\varphi$.

Exercice 25.6 Drapeaux et endomorphismes trigonalisables D
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure si et seulement si il existe une suite strictement croissante $F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n$ de sous-espaces vectoriels de E stables par f (une telle suite est appelée un drapeau).

▸ Rang d'une matrice

Exercice 25.7 Que dire du rang d'une matrice diagonale de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$? F

Exercice 25.8 Déterminer le rang des matrices suivantes. F

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & i & -i & 1 \\ i & -i & 1 & 1 \\ 0 & 1+i & 0 & 1+i \end{pmatrix}.$$

Exercice 25.9 Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ non nul. Déterminer le rang des matrices F

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & x_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbf{R}) \text{ et } N = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}).$$

Exercice 25.10 Déterminer, suivant la valeur de $a, b \in \mathbf{C}$, le rang des matrices suivantes : PD

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & a^2 & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & b \\ b & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 25.11 Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telles que $AB = 0_3$. Montrer que l'une au moins de ces matrices est de rang inférieur ou égal à 1. AD

Exercice 25.12 Rang d'un produit AD
Montrer que pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ on a $\operatorname{rg}(AB) \leqslant \min(\operatorname{rg}(A), \operatorname{rg}(B))$.

▸ Changement de base

Exercice 25.13 À l'aide de techniques matricielles, prouver que $(X^3 + 2X + 1, X^3 - 2X^2 + 2, X^3 - 2X^2 + 1, X^3 + X)$ est une base de $\mathbf{R}_3[X]$. F

Exercice 25.14 Formule de changement de base F

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbf{R}^3$, et soit $f \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^3)$ tel que $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = A = \begin{pmatrix} -1 & 13 & -16 \\ 0 & 7 & -10 \\ 0 & 5 & -7 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathscr{B}' = (e_1, 5e_1 + 3e_2 + 2e_3, 2e_1 + e_2 + e_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$. En déduire la valeur de A^4.

Exercice 25.15 Existence de vecteurs possédant les mêmes coordonnées dans deux bases AD

1. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbf{R}^3$, et soit $\mathscr{B}' = (e_1 + e_2, 2e_2 + e_3, 3e_3)$.
   Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbf{R}^3$. Existe-t-il un vecteur non nul de $\mathbf{R}^3$, ayant les mêmes coordonnées dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$?
2. Plus généralement, si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases d'un espace vectoriel E de dimension n, montrer qu'il existe un vecteur non nul de E ayant les mêmes coordonnées dans ces deux bases si et seulement si $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} - I_n$ n'est pas inversible.

Exercice 25.16 Matrice d'un projecteur/d'une symétrie PD
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E, et soit $p \in \mathscr{L}(E)$ la projection sur F parallèlement à G.

1. Montrer que dans toute base adaptée à la somme $E = F \oplus G$, la matrice de p est une matrice diagonale que l'on précisera.
2. En déduire que $\operatorname{tr}(p) = \operatorname{rg}(p)$.
3. Dans $\mathbf{R}^3$, on pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x + 2y - z = 0\}$ et $G = \operatorname{Vect}(-1, 1, 1)$.
   Déterminer les matrice, dans la base canonique de :
   (a) la projection p sur F parallèlement à G
   (b) la projection q sur G parallèlement à F
   (c) la symétrie s par rapport à F parallèlement à G.

▸ Similitude et équivalence des matrices

Exercice 25.17 Dans chaque cas, déterminer si les matrices A et B sont semblables : PD

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 25.18 Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^3)$ tel que $u^2 \neq 0$ et $u^3 = 0$. **PD**

Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbf{R}^3$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 25.19 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{tr}(f) = 1$. **AD**
Montrer que f est un projecteur.

Exercice 25.20 **Trace d'un projecteur/d'une symétrie** **AD**

1. Montrer que si $p \in \mathscr{L}(E)$ est un projecteur d'un espace vectoriel de dimension finie, alors $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.
2. Si s est une symétrie d'un espace de dimension finie, déterminer $\mathrm{tr}(s)$ en fonction de $\dim \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ et $\dim \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.
3. **Application** : en considérant l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ défini par $f : M \mapsto {}^tM$, retrouver les dimensions de $\mathscr{S}_n(\mathbf{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbf{K})$.

Exercice 25.21 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **AD**

1. Montrer que A est semblable à T, et déterminer $P \in GL_3(\mathbf{R})$ telle que $A = P^{-1}TP$.
2. Pour $n \in \mathbf{N}$, calculer T^n, puis en déduire A^n.

Exercice 25.22 Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer que si A et B sont semblables, alors pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) = \mathrm{rg}(B - \lambda I_n)$. **PD**
Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Exercice 25.23 Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ telle que $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **AD**

1. Montrer que $\mathrm{Ker}\, M = \mathrm{Ker}\, M^2$, puis que $\mathrm{Im}\, M = \mathrm{Im}\, M^2$.
2. En déduire que la première colonne et la dernière ligne de M sont nulles, puis arriver à une contradiction.

Exercice 25.24 **Vers la diagonalisation** **D**

1. Soit $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale. Montrer que pour $\lambda \in \mathbf{K}$, $D - \lambda I_n$ est non inversible si et seulement si $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ est un coefficient diagonal de D.
2. Montrer qu'il existe une base de $\mathbf{R}_2[X]$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme $P \mapsto (X^2+2)P'' + (X+1)P' + P$ est diagonale.

Exercice 25.25 **Fonctions multiplicatives sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et inversibilité (Oral X)** **TD**
Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \to \mathbf{K}$ une application non constante telle que $\forall (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})^2$, $f(AB) = f(A)f(B)$.
Prouver que $f(A) = 0$ si et seulement si A est non inversible.
Indication : une matrice non inversible est équivalente à une matrice nilpotente.

▸ Systèmes linéaires

Exercice 25.26 Déterminer les triplets $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ pour lesquels le système $\begin{cases} x + y + 2z = a \\ x + z = b \\ 2x + y + 3z = c \end{cases}$ possède des solutions. **PD**

Combien en possède-t-il alors ?

Exercice 25.27 Soient a, b, c trois complexes distincts. On note $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C}^3 & \longrightarrow & \mathbf{C}_2[X] \\ (x,y,z) & \longmapsto & x + yX + zX^2 \end{array} \right.$. **AD**

1. Justifier sans calculs que φ est un isomorphisme.
2. Soient (u_1, u_2, u_3) et (x, y, z) deux éléments de $\mathbf{C}^3$. Exprimer à l'aide de $P_{x,y,z} = \varphi(x, y, z)$ le fait que (x, y, z) soit solution de
$$(\mathscr{S}) : \begin{cases} x + ay + a^2 z = u_1 \\ x + by + b^2 z = u_2 \\ x + cy + c^2 z = u_3 \end{cases}$$
3. En déduire que $(\mathscr{S})$ possède une unique solution que l'on déterminera. *Indication : penser à l'interpolation de Lagrange.*

CORRECTION DES EXERCICES DU TD 25

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.1

1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{n+1} & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,n+1}(\mathbf{R})$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.2

Notons $e_1, \dots, e_n$ les vecteurs de $\mathcal{B}$.
Alors $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r)$ est un sous-espace vectoriel de E, qui a pour base[1] $(e_1, \dots, e_r)$.
Notons g l'application dont la matrice dans les bases $(e_1, \dots, e_r)$ et $\mathcal{C}$ est la matrice obtenue en ne gardant que les r premières colonnes de M.
Puisqu'on a précisément gardé les mêmes colonnes, il vient $g(e_1) = f(e_1), g(e_2) = f(e_2), \dots, g(e_r) = f(e_r)$.
Et donc pour tout $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r)$, $f(x) = g(x)$.
Autrement dit, g est la restriction de f à $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r)$.

[1] C'est une sous-famille d'une base de E, donc libre.

Rappel
Deux applications qui coïncident sur une base sont égales.

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.3

1. Il est clair que $f(P)$ est de même degré que P, et donc dans E.
De plus, si $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, alors

$$f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(X+\alpha) = \lambda P(X+\alpha) + Q(X+\alpha) = \lambda f(P) + f(Q).$$

Donc f est linéaire et est donc un endomorphisme de E.

Vérification
L'énoncé nous dit que f est à valeurs dans E, mais mieux vaut s'assurer que c'est bien le cas.

2. La base canonique de E est $(1, X, \dots, X^n)$. Or, pour $k \in [\![0, n]\!]$, on a

$$f(X^k) = (X+\alpha)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i \alpha^{k-i}.$$

Et donc la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(1) & f(X) & f(X^2) & & f(X^n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \dots & \alpha^n \\ 0 & 1 & \binom{2}{1}\alpha & \dots & \binom{n}{1}\alpha^{n-1} \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \binom{n}{n-1}\alpha \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ \\ \\ X^n \end{array}$$

3. Il est clair que A est inversible car elle est diagonale supérieure, et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls (ils sont tous égaux à 1).
Pour calculer l'inverse de A, notons que l'inverse de f est l'application $P \mapsto P(X-\alpha)$.
Et donc, sur le même principe qu'à la question précédente, à l'aide du binôme de Newton, on montre que

Précision
En fait l'inverse de f est la même application, en remplaçant α par $-\alpha$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(1) & f(X) & f(X^2) & & f(X^n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & \alpha^2 & \dots & (-1)^n\alpha^n \\ 0 & 1 & -\binom{2}{1}\alpha & \dots & (-1)^{n-1}\binom{n}{1}\alpha^{n-1} \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -\binom{n}{n-1}\alpha \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ \vdots \\ X^{n-1} \\ X^n \end{array}.$$

4. Prenons $\alpha = 1$. Alors si on note $A = (a_{i,j})$ et $A^{-1} = (b_{i,j})$, on a

$$a_{i,j} = \binom{j-1}{i-1} \text{ et } b_{i,j} = (-1)^{j-i}\binom{j-1}{i-1}.$$

Le coefficient $(p+1, q+1)$ de $AA^{-1} = I_{n+1}$ est nul (car $p \neq q$), et donc

$$0 = \sum_{k=1}^{n+1} [A]_{p+1,k}\left[A^{-1}\right]_{k,q+1} = \sum_{k=1}^{n+1}\binom{k-1}{p}(-1)^{q+1-k}\binom{q}{k-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{k}{p}(-1)^{q-k}\binom{q}{k}.$$

Et puisque $\binom{k}{p}$ est nul si $k \leqslant p$, et de même $\binom{q}{k} = 0$ si $k \geqslant q$, il reste donc

$$\sum_{k=p}^{q}(-1)^{q-k}\binom{k}{p}\binom{q}{k} = 0$$

et donc $\displaystyle\sum_{k=p}^{q}(-1)^{k}\binom{k}{p}\binom{q}{k} = 0$.

> **Subtilité**
> Le k-ième élément de la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$ n'est pas X^k mais X^{k-1}, ce qui oblige toujours à faire attention aux décalages d'indices dans les formules (et qui explique ici les $i-1$.)

Solution de l'exercice 25.4

Notons $f \in \mathscr{L}(\mathbf{K}^n)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A.
Alors A est inversible si et seulement si f est un isomorphisme. Mais f étant un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, c'est le cas si et seulement si f est injectif.
Soit si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbf{K}^n}\}$. Soit encore si et seulement si $f(x) = 0_{\mathbf{K}^n} \Rightarrow x = 0_{\mathbf{K}^n}$.
Ce qui matriciellement se traduit par $AX = 0 \Rightarrow AX = 0$.

Solution de l'exercice 25.5

1. La linéarité ne pose pas de difficultés.
Il s'agit de ne pas oublier de vérifier que φ est bien à valeurs dans $\mathbf{R}_3[X]$, ce qui n'est pas totalement évident, car si P est de degré 3, $\deg((3X+1)P) = \deg(1-X^2)P' = 4$.
Si $\deg P < 3$, on a bien $\deg((3X+1)P) \leqslant 3$ et $\deg((1-X^2)P') \leqslant 3$, donc $\varphi(P) \in \mathbf{R}_3[X]$.
En revanche, si $\deg P = 3$, on peut a priori uniquement affirmer que $\varphi(P) \in \mathbf{R}_4[X]$.
Notons alors $\lambda \in \mathbf{R}^*$ le coefficient dominant de P.
Alors le coefficient de degré 4 de $(3X+1)P$ est 3λ, et celui de P' est 3λ, et donc le coefficient de degré 4 de $(1-X^2)P'$ est -3λ, de sorte que le coefficient de degré 4 de $\varphi(P)$ est nul.
Donc on a bien $\varphi(P) \in \mathbf{R}_3[X]$, et donc φ est un endomorphisme de $\mathbf{R}_3[X]$.

> **Détails**
> Le terme de degré 2 de P' est la dérivée de λX^3.

2. On a $\varphi(1) = 3X+1$, $\varphi(X) = 3X^2+X+(1-X^2) = 2X^2+X+1$, $\varphi(X^2) = 3X^3+X^2+2X(1-X^2) = X^3+X^2+2X$, et enfin $\varphi(X^3) = X^3+3X^2$.

Donc la matrice de φ dans la base canonique est
$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) & \varphi(X^3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{array} \end{array}.$$

3. Un polynôme $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ est dans $\operatorname{Ker}\varphi$ si et seulement si

$$\varphi(P) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(\varphi)\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(P) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \operatorname{Ker} A \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Après résolution du système, on trouve $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Vect}(X^3 - X^2 - X + 1)$.

Notons alors $\dim \operatorname{Ker}\varphi = 1$, donc par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Im}\varphi = 4 - 1 = 3$.
Or, on a $\varphi(X^3 - X^2 - X + 1) = 0 \Leftrightarrow \varphi(X^3) - \varphi(X^2) - \varphi(X) + \varphi(1) = 0$.
Donc $\varphi(X^3) \in \operatorname{Vect}(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2))$, et par conséquent,

$$\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Vect}(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2), \varphi(X^3)) = \operatorname{Vect}(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2)).$$

Et donc étant génératrice et de cardinal $3 = \dim \operatorname{Im}\varphi$, la famille $\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2)$ est une base de $\operatorname{Im}\varphi$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.6

Notons tout de suite qu'une suite strictement croissante (sous-entendu, pour l'inclusion) $F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n$ de sous-espaces vectoriels de E vérifie forcément $\dim F_i = i$.
Supposons donc qu'une telle suite de sous-espaces stables par f existe.
Alors $\dim F_1 = 1$. Soit donc e_1 un vecteur non nul de F_1, qui forme donc une base de F_1.
Alors $f(e_1) \in F_1$, donc il existe $a_{1,1} \in \mathbf{K}$ tel que $f(e_1) = a_{1,1}e_1$.
Puisque e_1 forme une famille libre de F_2, on peut le compléter en une base (e_1, e_2) de F_2.
Alors $f(e_2) \in F_2$, de sorte qu'il existe deux scalaires $a_{1,2}$ et $a_{2,2}$ tels que $f(e_2) = a_{1,2}e_1 + a_{2,2}e_2$.
Puis (e_1, e_2) est une famille libre de F_2, qu'on peut donc compléter en une base (e_1, e_2, e_3) de F_3, et $f(e_3)$ est combinaison linéaire de e_1, e_2, e_3. Etc.
De proche en proche, on prouve donc que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, il existe des scalaires $a_{1,j}, \dots, a_{j,j}$ tels que $f(e_j) = \sum_{i=1}^{j} a_{i,j}e_j$.
Si de plus on pose $a_{i,j} = 0$ si $i > j$, alors la matrice de f dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ est $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, qui est donc triangulaire supérieure[2].

[2] Car $a_{i,j} = 0$ pour $i > j$: c'est la **définition** de matrice triangulaire

Inversement, soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E dans laquelle la matrice de f, notons la $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est triangulaire supérieure.
Posons alors $F_0 = \{0_E\}$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $F_i = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i)$.
On a alors bien une suite strictement croissante de sous-espaces vectoriels de E.
Reste à prouver que ceux-ci sont stables par f.
Soit donc $i \in [\![1, n]\!]$ et soit $j \in [\![1, i]\!]$.
Alors $f(e_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,j}e_i = \sum_{k=1}^{j} a_{i,j}e_i \in F_i$.
Donc F_i est stable par f.

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.7

C'est le nombre de ses coefficient diagonaux non nuls.
En effet, si D est une matrice diagonale dont tous les coefficients sont non nuls, alors nous savons qu'elle est inversible, et donc de rang n.

En revanche, si elle possède r coefficients nuls, par échanges de lignes, on peut les amener sur les dernières lignes, de manière à obtenir une matrice échelonnée , qui aura donc $n - r$ pivots.

Danger !
Une matrice diagonale n'est pas toujours échelonnée !

Peut-être plus convaincant : soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base[3] de $\mathbf{K}^n$ et soit $f \in \mathscr{L}(\mathbf{K}^n)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
Alors $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \mathrm{Vect}(\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_n e_n) = \mathrm{Vect}(\lambda_i e_i \mid \lambda_i \neq 0)$.
Or, la famille des $\lambda_i e_i$, $\lambda_i \neq 0$ est libre puisque la famille de e_i l'est aussi.
Donc le rang de f est le nombre de coefficients diagonaux non nuls de D.

[3] Disons la base canonique.

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.8

Nous ne détaillons pas les calculs, qui sont toujours effectués grâce à la méthode du pivot.

1. A est de rang 3.
2. B est non nulle, et toutes ses colonnes sont colinéaires, donc $\mathrm{rg}(B) = 1$.
3. C est de rang 2. Notons qu'on a pas nécessairement besoin de faire un pivot pour cela : les deux dernières colonnes de C ne sont pas colinéaires, donc le rang de C est supérieur ou égal à 2, et la première colonne est égale à la seconde moins la moitié de la troisième, donc la famille des vecteurs colonnes de C est liée, et donc $\mathrm{rg}(C) < 3$.
4. D est de rang 3.
5. À l'aide de l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - iL_1$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & i & -i & 1 \\ 0 & 1-i & 0 & 1-i \\ 0 & 1+i & 0 & 1+i \end{pmatrix}$, qui n'est pas échelonnée[4], mais qui est clairement de rang 2.
Donc E est de rang 2.

[4] Même s'il n'y aurait qu'une opération à faire pour y arriver.

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.9

Notons $C_1, \dots, C_{n+1}$ les colonnes de M.
Puisque $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ est non nul, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_i \neq 0$.

Alors l'espace engendré par les n premières colonnes de M est une droite vectorielle de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbf{R})$, engendrée par C_i. En effet, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on a $C_j = \frac{x_j}{x_i} C_i$.
Par conséquent, l'espace vectoriel engendré par les n premières colonnes de M est de dimension 1.
De plus, la dernière colonne n'est pas dans cet espace vectoriel car elle n'est pas colinéaire à C_i.
On en déduit que la $i^{\text{ème}}$ colonne de M et sa dernière colonne forment une famille libre, et donc une base de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de M. Ainsi, $\operatorname{rg}(M) = 2$.

Définition
Ici pas de pivot, mais un retour à la définition du rang de M : c'est le rang de la famille des vecteurs colonnes de M.

Notons que $N = \begin{pmatrix} x_1x_1 & x_1x_2 & \dots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2x_2 & \dots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \dots & x_nx_n \end{pmatrix}$.

En particulier, toutes les colonnes de N sont colinéaires à $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ qui n'est pas nul. Alors N est non nulle à son tour, car si $x_i \neq 0$, alors le coefficient (i,i) de N, qui est x_i^2 est non nul.

Rédaction ✎
Rappelons qu'une matrice dont toutes les colonnes sont proportionnelles est de rang 1 **si elle est non nulle.** Il n'est donc pas inutile de préciser que N est non nulle.

Solution de l'exercice 25.10

Échelonnons A par opérations sur les lignes :

$$A \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - a^2L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1-a^3 \\ 0 & 1-a^3 & a-a^4 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1-a^3 & a-a^4 \\ 0 & 0 & 1-a^3 \end{pmatrix}.$$

Donc déjà, si $a^3 \neq 1$, A est échelonnée, avec trois pivots non nuls, donc de rang 3.
En revanche, si $a^3 = 1$, alors l'un de ses coefficient diagonaux est nul, donc n'est pas inversible, et donc de rang inférieur ou égal à 2.

Et si $a^3 = 1$, soit si $a \in \mathbf{U}_3$, alors la matrice échelonnée obtenue ci-dessus est $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc A est de rang 1.

Alternative
Les trois colonnes sont proportionnelles :
$C_2 = aC_1,\ C_3 = aC_2 = a^2C_1$.

- Si $a = b = 0$, $B = 0$, et donc $\operatorname{rg}(B) = 0$.
- Si $b = 0$ et $a \neq 0$, alors $B = aI_n$ est de rang n.
- Si $b \neq 0$ et $a = 0$, alors en faisant «remonter» la dernière ligne, c'est-à-dire en réalisant successivement les opérations $L_n \leftrightarrow L_{n-1}$, $L_{n-1} \leftrightarrow L_{n-2}$, etc, on obtient λI_n, qui est de rang n, donc $\operatorname{rg}(B) = n$.
- Enfin, si $ab \neq 0$. Alors, en réalisant successivement les opérations

$$L_n \leftarrow aL_n - bL_1, L_n \leftarrow aL_n + b_2^2, \dots, L_n \leftarrow aL_n + (-1)^{n-1}b^{n-1}L_{n-1}$$

on obtient la matrice $\begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & b \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a^n - (-1)^n b^n \end{pmatrix}$.
Donc si $a^n = (-1)^n b^n$, $\operatorname{rg}(B) = n-1$ et sinon $\operatorname{rg}(B) = n$.

Solution de l'exercice 25.11

Choisissons de travailler plutôt avec des endomorphismes, et soient donc f et g les endomorphismes de $\mathbf{R}^3$ dont les matrices respectives dans la base canonique sont A et B.
Alors $AB = 0_3 \Leftrightarrow f \circ g = 0_{\mathcal{L}(\mathbf{R}^3)}$.
Donc en particulier, $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$.
Si $\operatorname{rg} B = \operatorname{rg} g \leqslant 1$, il n'y a rien à dire.
Si $\operatorname{rg} B = \operatorname{rg} g \geqslant 2$, alors $\dim \operatorname{Ker} f \geqslant 2$.
Et donc par le théorème du rang, $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(f) = 3 - \dim \operatorname{Ker} f \leqslant 1$.
Dans tous les cas, on a bien l'un des deux rangs qui est inférieur ou égal à 1

Solution de l'exercice 25.12

Voici une propriété qui est bien plus facile à comprendre en termes d'applications linéaires.
Soient donc $f \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^q, \mathbf{K}^p)$ les applications linéaires dont les matrices

dans les bases canoniques sont A et B.
Alors AB est la matrice de $f \circ g$ dans les bases canoniques de $\mathbf{K}^q$ et $\mathbf{K}^n$.
Puisque $\operatorname{Im} f \circ g \subset \operatorname{Im} f$, on a $rg(AB) = \operatorname{rg}(f \circ g) \leqslant \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg}(A)$.

Par ailleurs, une application linéaire ne peut pas augmenter la dimension, et on a $\operatorname{Im}(g \circ f) = g(\operatorname{Im} f)$.
Et donc $\operatorname{rg}(g \circ f) = \dim g(\operatorname{Im} f) \leqslant \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg}(f)$.

Solution de l'exercice 25.13

Écrivons la matrice de cette famille dans la base canonique de $\mathbf{R}_3[X]$. Il s'agit de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Échelonnons alors cette matrice :

$$A \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}}{\iff} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftrightarrow L_1}{\iff} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_2}}{\iff} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_3}{\iff} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est de rang 4, donc A aussi.
Et par conséquent, A est inversible, et donc la famille considérée est une base de $\mathbf{R}_3[X]$.

Solution de l'exercice 25.14

1. Écrivons la matrice de la famille $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$. Il s'agit de $P = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$.

   On vérifie aisément que cette matrice est inversible, donc $\mathscr{B}'$ est une base et P est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

   De plus, $P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

2. D'après la formule de changement de base, la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$ est

$$M = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   On constate que $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et donc $M^4 = I_3$.
   On en déduit[5] que $A^4 = PM^4P^{-1} = PP^{-1} = I_3$.

Danger ! Attention au sens : on a écrit les vecteurs de $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$, on a donc la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

[5] Sans faire le calcul : on sait que A^4 est semblable à $M^4 = I_3$, et la seule matrice semblable à I_3 est I_3 elle-même.

Solution de l'exercice 25.15

1. La matrice de passage de la famille $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{B}'$ est $M = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   Un calcul de rang prouve qu'elle est de rang 3, donc inversible, et donc que $\mathscr{B}'$ est une base et alors $M = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$.

   Soit à présent $x = ae_1 + be_2 + ce_3 \in \mathbf{R}^3$. Alors les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$ sont $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$, et elles sont égales aux coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ si et seulement si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$.

   Donc si et seulement si $M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = a \\ a + 2b = b \\ b + 3c = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (a, b, c) \in$ $\operatorname{Vect}(1, -1, 2)$.
   Donc il existe bien de tels vecteurs, et ce sont tous les $\lambda(e_1 - e_2 + 2e_3)$.

2. Sur le même principe, un tel vecteur existe si et seulement si il existe $\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})\setminus\{0_{n,1}\}$

tel que $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} \Leftrightarrow (P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} - I_n)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} = 0_{n,1}$.
Donc si et seulement si $\operatorname{Ker}(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} - I_n) \neq \{0_{n,1}\}$.
Par le théorème du rang matriciel, c'est le cas si et seulement si $\operatorname{rg}(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} - I_n) < n$, soit si et seulement si $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} - I_n$ n'est pas inversible.

Solution de l'exercice 25.16

1. Une base adaptée à la somme directe est, par définition, une base de la forme $(e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_{n-r})$ où $(e_1, \dots, e_r)$ est une base de F (avec $r = \dim F$) et $(f_1, \dots, f_{n-r})$ est une base de G (où $n = \dim E$).
Puisque e_1 est dans F, $p(e_1) = e_1$. et plus généralement $p(e_i) = e_i$, $\forall i \in [\![1, r]\!]$.
Et puisque $G = \operatorname{Ker} p$, $p(f_1) = \cdots = p(f_{n-r}) = 0_E$.
Donc la matrice de p dans la base $(e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_{n-r})$ est

> **Détails**
> Les éléments de $F = \operatorname{Im} p$ sont précisément les points fixes de p.

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} p(e_1) & \dots & p(e_r) & p(f_1) & \dots & p(f_{n-r}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_r \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{n-r} \end{array} = J_r = \operatorname{Diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{r \text{ fois}}, 0, \dots, 0)$$

2. La trace de p est la trace de sa matrice dans n'importe quelle base. En particulier, la trace de sa matrice dans une base adaptée à la somme directe, c'est-à-dire la trace de J_r, qui vaut r.
Or, le rang de p est égal au rang de J_r, qui a r pivots.
Donc $\operatorname{tr}(p) = r = \operatorname{rg}(p)$.

3.a. Il est clair que F est un hyperplan[6], donc de dimension 2, et que G est de dimension 1.
Puisque $(-1, 1, 1)$ n'est pas dans F, $F \cap G = \{0\}$ et donc F et G sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.
On sait que dans une base adaptée à la somme directe, la matrice de p est $\operatorname{Diag}(1, 1, 0)$.
Après calculs, une base de F est $(1, 0, 2), (0, 1, 2)$.
Donc une base adaptée à la somme directe est $\mathcal{C} = (1, 0, 2), (0, 1, 2), (-1, 1, 1)$.
On a alors la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{C}$

[6] Car noyau d'une forme linéaire non nulle.

$$P_{\mathcal{B}_{can}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Par la formule de changement de base

> **Vérification**
> Un bon moyen de vérifier son résultat est de s'assurer que cette matrice vérifie $A^2 = A$, signe que c'est bien une matrice de projecteur !

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(p) = P_{\mathcal{B}_{can}}^{\mathcal{C}} \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(p) P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}_{can}} = P_{\mathcal{B}_{can}}^{\mathcal{C}} \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(p) \left(P_{\mathcal{B}_{can}}^{\mathcal{C}}\right)^{-1}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.b. On sait ensuite que $q = \operatorname{id}_{\mathbf{R}^3} - p$, donc

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(q) = I_3 - \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(p) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.c. On sait que $s = p - q$, ou $s = 2p - \operatorname{id}_{\mathbf{R}^3}$. Et donc

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(s) = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.17

1. A et B n'ont pas même trace, donc ne peuvent être semblables.
2. A et B ont même trace (2) et même rang (2). Soit donc f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est A.
Posons alors $e_1 = (1/2, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$. La famille (e_1, e_2) est libre (car formée de deux éléments non colinéaires) et donc est une base de $\mathbf{R}^2$.
On a $f(e_1) = f(1/2, 0) = \frac{1}{2} f(1, 0) = \frac{1}{2}(1, 0) = e_1$. Et $f(e_2) = f(0, 1) = (1, 1) = 2e_1 + e_2$.
Donc la matrice de f dans la base (e_1, e_2) est B.
Par conséquent, A et B représentent toutes deux f dans deux bases différentes : elles sont semblables.
3. A et B ont même rang, mais n'ont pas la même trace : elles ne sont donc pas semblables.
4. A et B ont même trace et même rang. Toutefois, $A = 2I_3$, et donc la seule matrice semblable à A est A. On en déduit que A et B ne sont pas semblables.

⚠ Attention !
Deux matrices semblables ont même rang et même trace, mais si elles ont même rang et même trace, cela ne suffit pas à garantir qu'elles sont semblables !

Précision
Si P est la matrice de passage de la base canonique à la base (e_1, e_2), alors, par la formule de changement de base, on a

$$B = P^{-1}AP.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.18

Analysons un peu la situation : nous voulons prouver l'existence d'une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}.$$

Soit telle que $u(e_1) = e_2$, $u(e_2) = e_3$, et $e_3 \in \operatorname{Ker} u$.
En particulier, on doit avoir $u^2(e_1) \neq 0_E$.

Prenons donc e_1 un vecteur tel que $u^2(e_1) \neq 0_E$, et notons $e_2 = u(e_1)$ et $e_3 = u^2(e_1)$.
Alors il est classique[7] que (e_1, e_2, e_3) est libre, et donc est une base de E.
La matrice de u dans cette base est alors bien la matrice cherchée.

[7] Voir l'exercice 17 du TD21.

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.19

Si f est de rang 1, par le théorème du rang, son noyau est de dimension $n-1$.
Soit donc $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de $\operatorname{Ker} f$, et complétons-là à l'aide d'un vecteur e_n en une base de E.
Alors la matrice de f dans cette base est de la forme

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(e_1) & \dots & f(e_{n-1}) & f(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \alpha_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ e_n \end{array}.$$

Mais puisque $\operatorname{tr}(f) = \operatorname{tr}(A) = 1$, alors $\alpha_n = 1$.
Et il vient alors

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \alpha_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \alpha_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \alpha_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

Donc $f^2 = f$, de sorte que f est un projecteur.

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.20

1. Voir l'exercice 15 : dans toute base adaptée à la somme directe $\operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$, la matrice de p est $\mathrm{Diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{\mathrm{rg}(p) \text{ fois}}, 0, \dots, 0)$.
2. Cette fois, dans une base adaptée à la somme directe $\operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$, la matrice de s est de la forme $\mathrm{Diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{r \text{ fois}}, -1, \dots, -1)$ où $r = \dim \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$.

Donc sa trace est $\mathrm{tr}(s) = \underbrace{1+\cdots+1}_{r \text{ fois}} - (\underbrace{1+\cdots+1}_{\dim E - r \text{ fois}})$.
Mais notons qu'alors $\dim E - r = \dim E - \dim \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) = \dim \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.
Et donc $\mathrm{tr}(s) = \dim \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) - \dim(s + \mathrm{id}_E)$.

3. Il est clair que f est une symétrie, puisque $f^2 = \mathrm{id}$.
De plus, on a $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \mid f(A) - A = 0\} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \mid {}^tA = A\} = \mathcal{S}_n(\mathbf{K})$.
Et de même, on a $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}) = \mathcal{A}_n(\mathbf{K})$, l'ensemble des matrices antisymétriques.
Donc nous savons que $\mathrm{tr}(f) = \dim \mathcal{S}_n(\mathbf{K}) - \dim \mathcal{A}_n(\mathbf{K})$.

Pour calculer la trace de f, il nous faudrait sa matrice dans une base de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Mais nous connaissons une telle base : il s'agit de la base canonique $\mathcal{B} = (E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a $f(E_{i,j}) = E_{j,i}$.
Par conséquent, la coordonnée de $f(E_{i,j})$ suivant $E_{i,j}$ vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon.
Autrement dit, le coefficient diagonal de $\mathcal{B}$ dans sa colonne correspondant à $f(E_{i,j})$ vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon.
Et donc $\mathrm{tr}(f) = n$.
Puisque de plus $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ sont supplémentaires, il vient

$$\begin{cases} \dim \mathcal{S}_n(\mathbf{K}) + \dim \mathcal{A}_n(\mathbf{K}) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) = n^2 \\ \dim \mathcal{S}_n(\mathbf{K}) - \dim \mathcal{A}_n(\mathbf{K}) = n \end{cases}$$

ce qui après résolution nous donne

$$\dim \mathcal{S}_n(\mathbf{K}) = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \dim \mathcal{A}_n(\mathbf{K}) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Détails
Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors les coefficients $a_{i,j}$ de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ sont définis par

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i.$$

Et donc le coefficient diagonal $a_{i,i}$ est la coordonnée suivant e_i de l'écriture de $f(e_i)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Solution de l'exercice 25.21

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A.
Alors si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = T$, on doit avoir

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

Il nous faut donc trouver trois vecteurs e_1, e_2 et e_3 tels que $f(e_1) = 2e_1, f(e_2) = e_2$ et $f(e_3) = e_2 + e_3$.
Or, $f(x,y,z) = 2(x,y,z)$ si et seulement si

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y - z = 2x \\ x + y = 2y \\ -x - 3y = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y + z \\ x = y \\ x + 3y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = -2y \end{cases}$$

Ainsi, on peut prendre $e_1 = (1, 1, -2)$.

De même, la résolution de $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ nous montre qu'on peut prendre $e_2 = (0, 1, -3)$.

Et alors, on a $f(x,y,z) = (x,y,z) + e_2$ si et seulement si

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ x + y = y + 1 \\ -x - 3y = z - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ z = 2 - 3y \end{cases}$$

On peut par exemple prendre $e_3 = (1, 1, -1)$.

Il reste donc à vérifier que (e_1, e_2, e_3) forme bien une base de $\mathbf{R}^3$. Pour cela, utilisons la matrice de (e_1, e_2, e_3) dans la base canonique, qui est

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(e_1, e_2, e_3) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_3 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Un calcul de pivot prouve que cette matrice est inversible, d'inverse $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

En particulier, (e_1, e_2, e_3) est une base $\mathscr{B}$, et alors, par construction

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}.$$

Les matrices A et T représentant toutes les deux l'endomorphisme f dans deux bases de $\mathbf{R}^3$, elles sont semblables.
Plus précisément, par la formule de changement de base,

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(f) = P_{\mathscr{B}_{can}}^{\mathscr{B}} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(f) \left(P_{\mathscr{B}_{can}}^{\mathscr{B}}\right)^{-1}.$$

De plus, $P_{\mathscr{B}_{can}}^{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ et $\left(P_{\mathscr{B}_{can}}^{\mathscr{B}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Notons que $T = D + N$ où $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a alors $DN = DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Puisque D et N commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$T^n = (N + D)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k}.$$

Or on a $D^2 = 0$, et donc $D^k = 0$ pour tout $k \geqslant 2$. Il ne reste donc que les termes correspondants à $k = 0$ et $k = 1$ dans la somme, de sorte que

$$T^n = \binom{n}{0} N^0 D^n + \binom{n}{1} N D^{n-1} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et alors

$$\begin{aligned} A^n &= (PTP^{-1})^n = PT^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 3(1 - 2^n) & 1 - 2^n \\ 2^{n+1} - n - 2 & 3n + 4 - 3 \cdot 2^n & n + 1 - 2^n \\ -2^{n+2} + 4 + 3n & 3(2^{n+1} - 3n - 2) & 2^{n+1} - 3n - 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.22

Soient A et B deux matrices semblables, et soit $P \in GL_n(\mathbf{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$.
Alors pour $\lambda \in \mathbf{K}$, on a

$$A - \lambda I_n = P^{-1}BP - \lambda I_n = P^{-1}BP - P^{-1}\lambda I_n P = P^{-1}(B - \lambda I_n)P.$$

Donc $A-\lambda I_n$ et $B-\lambda I_n$ sont semblables , et par conséquent ont même rang.

Pour $\lambda = 1$, on a $A-\lambda I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui est de rang 1.

Alors que $B - I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ qui est de rang 2. Donc A et B ne sont pas semblables[8].

Mieux

Non seulement elles sont semblables, mais on peut prendre la même matrice de passage P que pour la relation de similitude entre A et B.

[8] Et ce alors qu'elles ont même trace et même rang.

Solution de l'exercice 25.23

1. La matrice M ne peut être inversible, puisque sinon M^2 le serait[9], ce qui n'est pas le cas.
Donc $\dim \operatorname{Ker} M \geqslant 1$. Or, $\operatorname{Ker} M \subset \operatorname{Ker} M^2$, et puisque M^2 est de rang 2, par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} M^2 = 1$.
Donc $1 \leqslant \dim \operatorname{Ker} M \leqslant \dim \operatorname{Ker} M^2 = 1$, de sorte que nécessairement $\dim \operatorname{Ker} M = 1$.
Puisque $\operatorname{Ker} M \subset \operatorname{Ker} M^2$ et que ces espaces ont même dimension, ils sont égaux.
Par le théorème du rang, on a alors $\dim \operatorname{Im} M = \dim \operatorname{Im} M^2$.
Or $\operatorname{Im} M^2 \subset \operatorname{Im} M$, d'où l'égalité.

[9] Car produit de matrices inversibles.

2. On a clairement $\operatorname{Ker} M^2 = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\operatorname{Ker} M = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Or, pour toute matrice 3×3, $M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est rien d'autre que la première colonne de M.
Donc la première colonne de M est nulle.
De même, $\operatorname{Im} M = \operatorname{Im} M^2 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, l'ensemble des vecteurs colonnes dont la dernière coordonnée est nulle.
Donc toutes les colonnes de M sont dans cet espace, et donc ont leur dernière coordonnée nulle.
Donc la dernière ligne de M est nulle.
Par conséquent, M est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Mais alors $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M^2 = \begin{pmatrix} 0 & ac & ad \\ 0 & c^2 & cd \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Donc $c = 0$, et alors $ac = 1$ n'est pas possible.
En conclusion, il n'existe pas de matrice M comme indiqué.

Solution de l'exercice 25.24

1. Pour $\lambda \in \mathbf{K}$, $D - \lambda I_n = \operatorname{Diag}(\lambda_1 - \lambda, \dots, \lambda_n - \lambda)$.
Elle est non inversible si et seulement si elle possède un coefficient diagonal nul.
Soit si et seulement si l'un des $\lambda_i - \lambda$ est nul.

Remarque

Ce résultat a été prouvé directement sur les matrices, mais vous il n'est pas inintéressant d'essayer de le réinterpréter en termes d'endomorphismes.

2. Matriciellement, il s'agit de prouver que la matrice de f dans la base canonique[10] est semblable à une matrice diagonale.
Notons A cette matrice : après calculs, on a

$$A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \end{array}.$$

[10] Ou en fait dans n'importe quelle base.

Supposons que D soit la matrice de f dans une autre base $\mathscr{B}$, alors quel que soit le réel λ, $D - \lambda I_3$ est la matrice de $f - \lambda \mathrm{id}$ dans la base $\mathscr{B}$.
Et donc est semblable à $A - \lambda I_3$ qui est la matrice de $f - \lambda \mathrm{id}$ dans la base canonique.
Donc $A - \lambda I_3$ est inversible si et seulement si $D - \lambda I_3$ l'est.
Or, un raisonnement similaire à la première question[11] prouve que $A - \lambda I_3$ n'est **pas inversible** si et seulement si $\lambda \in \{1, 2, 5\}$.
Donc les coefficients diagonaux de D sont nécessairement parmi 1, 2 et 5.
Or, si $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$, $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ si et seulement si pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, $f(e_i) = \lambda_i e_i$.

[11] Le critère d'inversibilité est le même pour les triangulaires et les diagonales.

Vers la spé

Les λ tels que $A - \lambda I_n$ ne soit pas inversible sont appelés valeurs propres de A et seront intensivement étudiés en spé. Le raisonnement que nous venons de tenir prouver que pour une matrice triangulaire, les valeurs propres sont les coefficients diagonaux.

Cherchons donc s'il existe des vecteurs tels que $f(x)=x$, $f(x)=2x$ ou $f(x)=6x$.
Soit donc $P=a+bX+cX^2\in\mathbf{R}_2[X]$. Alors

$$f(P)=P\Leftrightarrow A\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+4c=a\\2b+2c=b\\6c=c\end{cases}\Leftrightarrow b=c=0\Leftrightarrow P\in\mathrm{Vect}(1).$$

De même, on prouve que $f(P)=2P\Leftrightarrow P\in\mathrm{Vect}(X-1)$ et

$$f(P)=5P\Leftrightarrow P\in\mathrm{Vect}(7+4X+6X^2).$$

Posons donc $P_1=1$, $P_2=X-1$ et $P_3=6X^2+4X+7$, de sorte que (P_1,P_2,P_3) est libre car formée de polynômes de degrés deux à deux distincts, et donc par cardinal, est une base de $\mathbf{R}_2[X]$.
Alors la matrice de f dans cette base est $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$, qui est bien une matrice diagonale.

Alternative : plus théorique[12]
Puisque $A-\lambda I_3$ n'est pas inversible pour $\lambda\in\{1,2,5\}$, le noyau de $f-\lambda\mathrm{id}$ n'est pas réduit au vecteur nul.
Et donc il existe $P\in\mathbf{R}_2[X]$ tel que $f(P)-\lambda P=0\Leftrightarrow f(P)=\lambda P$.
Autrement dit, sans faire de calculs, et sans avoir de système à résoudre, on a l'existence d'une famille (P_1,P_2,P_3) de polynômes non nuls tels que $f(P_1)=P_1$, $f(P_2)=2P_3$ et $f(P_3)=5P_3$.
Reste à prouver qu'une telle famille est libre.
Soient donc α,β,γ des réels tels que $\alpha P_1+\beta P_2+\gamma P_3=0$.
Alors en appliquant f, il vient $\alpha P_1+2\beta P_2+5\gamma P_3=0$.
Par soustraction de ces deux relations, $\beta P_2+4\gamma P_3=0$.
En appliquant de nouveau f, $2\beta P_2+20\gamma P_3=0$, ce qui combinée à la relation $\beta P_2=-4\gamma P_3$ nous donne $\gamma P_3=0$, et donc[13] $\gamma=0$.
Puis en remontant, on arrive à $\beta=\alpha=0$.
La conclusion est la même que dans la première solution : on a une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.

[12] Et plus proche de ce qui se fera en spé.

[13] Et là il était important d'avoir $P_3\neq 0$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.25

Commençons par noter que vous connaissez déjà une telle application dans le cas $n=2$, il s'agit du déterminant.
Et dans ce cas, on retrouve un résultat déjà prouvé dans le chapitre de matrices : une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

> **Patience...**
> Nous généraliserons bientôt le déterminant à des matrices $n\times n$.

Remarquons que $I_n^2=I_n$, et donc $f(I_n)=f(I_n^2)=f(I_n)f(I_n)=f(I_n)^2$.
Donc $f(I_n)^2-f(I_n)=0$, autrement dit, $f(I_n)$ est une racine de X^2-X.
Mais ce polynôme possède 0 et 1 comme racines, et étant de degré 2, ce sont les seules.
Donc $f(I_n)=0$ ou $f(I_n)=1$.
Si on avait $f(I_n)=0$, alors pour tout $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $f(A)=f(AI_n)=f(A)\times 0=0$, contredisant le fait que f est non constante.
Donc $f(I_n)=1$.
De même, $f(0_n)\in\{0,1\}$, et si on avait $f(0_n)=1$, alors pour tout $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$,

> **Remarque**
> Je ne parle de polynôme que pour insister sur le fait que $x^2=x\Rightarrow x\in\{0,1\}$ est valable dans tout corps ! Dans $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$ vous le savez bien.

$$f(0_n)=f(A\times 0_n)=f(A)f(0_n)=f(A)$$

donc f serait constante égale à 1. Donc $f(0_n)=0$.

Si A est inversible, alors $f(A)f(A^{-1})=f(AA^{-1})=f(I_n)=1$, et donc $f(A)$ est inversible[14].

[14] D'inverse $f(A^{-1})$.

Inversement, si A n'est pas inversible, alors elle est de rang $r\in[\![0,n-1]\!]$.
Et on sait alors que A est équivalente à toute matrice de rang r.

► Si $r = n-1$, considérons alors

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors J est échelonnée, de rang $n-1$, et on constate facilement que

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puis en calculant J^3, la «sur-diagonale» de 1 se décale encore d'un cran vers le haut, etc, jusqu'à J^{n-1} qui possède seulement son coefficient en haut à droite non nul, et donc $J^n = 0$.

Classique

J est l'archétype de la matrice nilpotente, et si vous avez un jour besoin d'une matrice nilpotente, il est bon de penser à celle-ci.
En fait, toute matrice triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux nuls est nilpotente.

Normalement le fait de faire le produit «à la main» doit vous en convaincre.
Si cela ne suffit pas, il est possible d'introduire l'endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ canoniquement associé à J.
Si on note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{K}^n$, alors on a

$$f(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 1 \\ e_{i-1} & \text{si } i > 1 \end{cases}$$

On prouve alors[15] que pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, f^k est donné par

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ f^k(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leqslant k \\ e_{i-k} & \text{sinon} \end{cases}$$

[15] Par récurrence sur k.

Et donc en particulier, pour tout i, $f^n(e_i) = 0$, et donc $f^n = 0$, de sorte que $J^n = 0$.

Anyway : J est nilpotente, avec $J^n = 0$.
Donc $0 = f(J^n) = f(J)^n$, et par conséquent $f(J) = 0$.
Or A est équivalente à J, donc il existe $P, Q \in GL_n(\mathbf{K})$ telles que $A = PJQ$. Et donc $f(A) = f(P)f(J)f(Q) = 0$.
► Le cas général s'en déduit facilement, en notant que J^k est de rang $n-1-k$. Et en particulier, J^{n-1-r} est nilpotente de rang r.
Par conséquent, elle est équivalente à A, et donc $f(A) = f(P)f(J)^{n-1-r}f(Q) = 0$.
Donc si A n'est pas inversible, $f(A) = 0$.

Nous avons donc bien prouvé l'équivalence A est inversible si et seulement si $f(A) \neq 0$.

Solution de l'exercice 25.26

Le système possède des solutions si et seulement si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est dans $\operatorname{Im}(A)$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Il est aisé de constater que A est de rang 2 puisque sa dernière colonne est la somme des deux autres.

Donc $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

On a alors $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \operatorname{Im}(A)$ si et seulement si il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ tels que

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \lambda + \mu \\ b = \lambda \\ c = 2\lambda + \mu \end{cases}$$

Soit si et seulement si ce dernier système[16] possède des solutions. Mais en utilisant la méthode du pivot, on arrive au système échelonné suivant :

[16] D'inconnues λ et μ.

$$\begin{cases} \lambda = b \\ \mu = a - b \\ 0 = c - a - b \end{cases}$$

Donc le système possède des solutions si et seulement si $c - a - b = 0$.
Dans ce cas, les solutions sont une infinité, et mieux : $\operatorname{Ker} A$, l'ensemble des solutions du système homogène associé est de dimension 1.
Commentaires *: nous dirons bientôt que l'ensemble des solutions, quand il est non vide, est un sous-espace affine de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$, de dimension 1.*
Cela signifie grosso modo que les solutions ne vont dépendre que d'un seul paramètre.

Remarque
Nous venons donc de trouver une équation de l'hyperplan $\operatorname{Im}(A)$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.27

1. Il est clair que φ est injectif, et $\mathbf{C}^3$ et $\mathbf{C}_2[X]$ ayant mêmes dimensions, φ est un isomorphisme.
2. La première équation s'écrit encore $P_{x,y,z}(a) = u_1$, la seconde $P_{x,y,z} = u_2$ et la dernière $P_{x,y,z}(c) = u_3$.

   Donc (x, y, z) est solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si $\begin{cases} P_{x,y,z}(a) = u_1 \\ P_{x,y,z}(b) = u_2 \\ P_{x,y,z}(c) = u_3 \end{cases}$.
3. Puisque a, b, c sont deux à deux distincts, les résultats sur l'interpolation de Lagrange garantissent qu'il existe un unique polynôme de degré au plus 2 qui prend respectivement les valeurs u_1, u_2, u_3 en a, b, c.
   Et ce polynôme est

$$u_1 \frac{(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)} + u_2 \frac{(X-a)(X-c)}{(b-a)(b-c)} + u_3 \frac{(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

Remarque
Et ceci est vrai sans condition sur (u_1, u_2, u_3).

En développant, et en identifiant les coefficients (x est le coefficient constant, y le coefficient en X, etc), on obtient comme unique solution de $(\mathcal{S})$

$$\begin{aligned} x &= \frac{u_1 bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{u_2 ac}{(b-a)(b-c)} + \frac{u_3 ab}{(c-a)(c-b)} \\ y &= \frac{-u_1(b+c)}{(a-b)(a-c)} - \frac{u_2(a+c)}{(b-a)(b-c)} - \frac{u_3(a+b)}{(c-a)(c-b)} \\ z &= \frac{u_1}{(a-b)(a-c)} + \frac{u_2}{(b-a)(b-c)} + \frac{u_3}{(c-a)(c-b)}. \end{aligned}$$

En théorie il était possible d'obtenir cette solution en résolvant le système classiquement, par la méthode du pivot. Ne vous privez pas si ça vous fait envie, mais je passe mon tour !