TD 24 : Fonctions convexes

► Généralités

Exercice 24.1 Soient f et g deux fonctions convexes sur I. Prouver que $f+g$ est convexe, et que pour tout $\lambda \in [0,1]$, $(1-\lambda)f + \lambda g$ est encore convexe. F

Exercice 24.2 Soient $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, convexes, avec g croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe. PD

Exercice 24.3 Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbf{R}$ et $f : I \to J$ une bijection convexe. PD
Que dire de la convexité de f^{-1} ?

Exercice 24.4 PD

1. Soit I un intervalle, et soient $f_1, \dots, f_n$ des fonctions convexes sur I. Montrer que la fonction $g = \max(f_1, \dots, f_n)$ est convexe sur I.
2. En déduire que la fonction valeur absolue est convexe sur $\mathbf{R}$.

Exercice 24.5 Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ dérivable, concave et telle que $f(0) \geqslant 0$. PD
Prouver que pour tous $x, y \in \mathbf{R}_+$, $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$.

Exercice 24.6 Montrer qu'une fonction convexe et majorée sur $\mathbf{R}$ est constante. AD

Exercice 24.7 Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ de degré impair. À quelle condition $x \mapsto P(x)$ est-elle convexe sur $\mathbf{R}$? F

► Inégalités de convexité

Exercice 24.8 Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x$. F

Exercice 24.9 **Inégalité arithmético-harmonique** PD
Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}_+^*$. Prouver que

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Exercice 24.10 Montrer que pour tous $(x,y) \in]1, +\infty[^2$, $\sqrt{\ln x \ln y} \leqslant \ln \dfrac{x+y}{2}$. PD

Exercice 24.11 Soient α, β, γ les angles (non orientés) d'un triangle. Montrer que AD

$$\frac{1}{1+\sin\alpha} + \frac{1}{1+\sin\beta} + \frac{1}{1+\sin\gamma} \geqslant \frac{6}{2+\sqrt{3}}.$$

Exercice 24.12 AD

1. Étudier la convexité de $f : x \mapsto \ln(1+e^x)$ sur $\mathbf{R}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}_+^*$, $1 + \left(\displaystyle\prod_{k=1}^n x_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\displaystyle\prod_{k=1}^n (1+x_k)\right)^{1/n}$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour tous $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbf{R}_+^*$,

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n (a_k+b_k)\right)^{1/n}.$$

Exercice 24.13 **Inégalité de Cauchy-Schwarz** AD

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ des réels strictement positifs. Prouver que $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)^2 \leqslant \left(\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\left(\displaystyle\sum_{k=1}^n y_k^2\right)$, puis que la même inégalité reste valable pour $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ des réels (non nécessairement positifs).

▸ Comportement des fonctions convexes

Exercice 24.14 Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction convexe sur un intervalle I, et soient $a < b$ deux points de I. Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leqslant \max(f(a), f(b))$. PD
Autrement dit, sur tout segment $[a, b]$ inclus dans I, f possède un maximum sur $[a, b]$, atteint en l'une de ses bornes.

Exercice 24.15 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ convexe. PD

1. On suppose que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Montrer que f est à valeurs positives.
2. On suppose que $\mathscr{C}_f$ possède une asymptote D au voisinage de $+\infty$. Déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ et D.

Exercice 24.16 AD

1. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction convexe strictement croissante.
   Prouver que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction convexe et majorée. Montrer que f est constante.

Exercice 24.17 PD

1. Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction convexe et positive. Montrer que si $f(a) = f(b) = 0$, alors f est identiquement nulle.
2. En déduire qu'une fonction convexe qui possède un minimum atteint ce minimum soit en un seul point, soit en une infinité de points.
3. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ convexe et périodique. Montrer que f est constante.

Exercice 24.18 Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction convexe, avec I un intervalle ouvert. Montrer que si f admet un minimum local en $a \in I$, alors il s'agit en fait d'un minimum global. PD

Exercice 24.19 Soit $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ une fonction convexe admettant une limite finie en $+\infty$. AD

1. Montrer que f est décroissante.
2. On suppose de plus f dérivable.
   (a) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.
   (b) Justifier que le résultat n'est plus valable si on enlève l'hypothèse de convexité, c'est-à-dire qu'une fonction dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, possédant une limite finie en $+\infty$ n'a pas forcément une dérivée de limite nulle en $+\infty$.

Exercice 24.20 Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et soit $f : I \to \mathbf{R}$ continue. Prouver que f est convexe si et seulement si pour tout $(x, y) \in I^2$, $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leqslant \dfrac{f(x) + f(y)}{2}$. D

Exercice 24.21 (Oral X PC) D
Soit f une fonction convexe sur $\mathbf{R}$. On suppose que f n'est pas affine. Prouver que pour tout $a \in \mathbf{R}$, $f(x) + f(a - x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

Correction des exercices du TD 24

Solution de l'exercice 24.1

Pour tout $a, b \in I$ et tout $\lambda \in [0,1]$,

$$(f+g)\left((1-\lambda)a+\lambda b\right) = f\left((1-\lambda)a+\lambda b\right) + g\left((1-\lambda)a+\lambda b\right)$$
$$\leqslant (1-\lambda)f(a)+\lambda f(b) + (1-\lambda)g(a)+\lambda g(b) \leqslant (1-\lambda)(f+g)(a)+\lambda(f+g)(b).$$

On prouve sans difficultés que pour tout $\lambda \geqslant 0$, λf est encore convexe.
Et donc pour $\lambda \in [0,1]$, $1-\lambda \geqslant 0$, si bien que $(1-\lambda)f$ et λg sont convexes, donc $(1-\lambda)f+\lambda g$ est convexe.

Danger ! Ceci est faux si $\lambda < 0$, car on change alors le sens de l'inégalité.

Solution de l'exercice 24.2

Soient $x < y$ deux réels, et soit $\lambda \in [0,1]$.
Alors $f((1-\lambda)x+\lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)$.
Et donc

$$g(f((1-\lambda)x+\lambda y)) \leqslant g\big((1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)\big) \qquad \text{Croissance de } g.$$
$$\leqslant (1-\lambda)g(f(x))+\lambda g(f(y)). \qquad \text{Convexité de } g.$$

Donc $g \circ f$ est convexe.

Solution de l'exercice 24.3

Puisque I est ouvert et que f est convexe, elle est continue sur I.
Et donc elle est strictement monotone.

Rappel Une fonction continue sur un intervalle est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

Si elle est strictement croissante, soient alors $x, y \in J$ et $\lambda \in [0,1]$. Alors

$$f\left((1-\lambda)f^{-1}(x)+\lambda f^{-1}(y)\right) \leqslant (1-\lambda)f\left(f^{-1}(x)\right)+\lambda f\left(f^{-1}(y)\right) \leqslant (1-\lambda)x+\lambda y.$$

Et donc par stricte croissance de f^{-1},

$$(1-\lambda)f^{-1}(x)+\lambda f^{-1}(y) \leqslant f^{-1}\left((1-\lambda)x+\lambda y\right).$$

Donc f^{-1} est concave.

Le raisonnement est le même si f est strictement décroissante, sauf qu'alors f^{-1} est strictement décroissante, et donc

$$(1-\lambda)f^{-1}(x)+\lambda f^{-1}(y) \geqslant f^{-1}\left((1-\lambda)x+\lambda y\right)$$

si bien que f^{-1} est également convexe.

Un exemple de ces deux cas est $x \mapsto e^x$, qui est convexe et croissante, et donc la bijection réciproque ln est donc concave.
Et $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est convexe et décroissante, dont la bijection réciproque $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est encore convexe.

Solution de l'exercice 24.4

1. Soient $a, b \in I$ et $\lambda \in [0,1]$.
Alors il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $g((1-\lambda)a+\lambda b) = f_i((1-\lambda)a+\lambda b)$.
Par convexité de f_i, $f_i((1-\lambda)a+\lambda b) \leqslant (1-\lambda)f_i(a)+\lambda f_i(b)$.
Mais $f_i(a) \leqslant g(a)$, si bien que $(1-\lambda)f_i(a) \leqslant (1-\lambda)g(a)$. Et de même $\lambda f_i(b) \leqslant \lambda g(b)$, et donc
$$g((1-\lambda)a+\lambda b) \leqslant (1-\lambda)g(a)+\lambda g(b).$$
Donc g est convexe.
2. On a, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|x| = \max(-x, x)$.
Or les deux fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$ sont affines, donc convexes.
Et donc par la question précédente, $x \mapsto |x|$ est convexe.

Remarque Bien entendu, la convexité de $x \mapsto |x|$ peut se montrer directement à l'aide de l'inégalité triangulaire.

Solution de l'exercice 24.5

Pour x fixé, posons $\varphi(y) = f(x+y) - f(x) - f(y)$.
Alors φ est dérivable et $\varphi'(y) = f'(x+y) - f'(y) \leqslant 0$ puisque par concavité de f, f' est décroissante.
Donc φ est décroissante, et $\varphi(0) = -f(0) \leqslant 0$, si bien que pour tout $y \in \mathbf{R}_+$,

$$\varphi(y) \leqslant 0 \Leftrightarrow f(x+y) \leqslant f(x) + f(y).$$

Solution de l'exercice 24.6

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ convexe et majorée.
Soient alors $a < b$ deux réels. Par l'inégalité des pentes, pour $x < a$ et $y > b$, on a

$$\frac{f(a)-f(x)}{a-x} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(y)-f(b)}{y-b}.$$

Supposons $f(b) > f(a)$, de sorte que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} > 0$.
Alors pour $y > b$, on a $f(y) \geqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(y-b) + f(b) \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, contredisant le fait que f est majorée.
Et si $f(a) > f(b)$, alors pour $x < a$, on a

$$f(a) - f(x) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-x) \Leftrightarrow f(x) \geqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

contredisant là aussi le fait que f est majorée.
Et donc pour tous $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, $f(a) = f(b)$, si bien que f est constante.

Solution de l'exercice 24.7

Si $\deg P \geqslant 3$ alors P'' est de degré impair, et donc n'est pas de signe constant[1].
Et donc P n'est pas convexe.

[1] Les limites en $\pm\infty$ sont de signes opposés.

Et si $\deg P = 1$, alors bien entendu, P est convexe, comme toute fonctions affine.

Solution de l'exercice 24.8

La fonction sin est concave[2] sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ puisque sa dérivée seconde y est négative.
L'équation de sa tangente en 0 est $y = x$, si bien que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \leqslant x$.
Et par ailleurs, la corde joignant les points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses 0 et $\frac{\pi}{2}$ a pour équation $y = \dfrac{2}{\pi}x$, si bien que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{2}{\pi}x \leqslant \sin x$.

[2] Et donc en dessous de ses tangentes et au dessus de ses cordes.

Solution de l'exercice 24.9

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est convexe sur $\mathbf{R}_+^*$, puisque sa dérivée, $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ y est croissante.
Donc par l'inégalité de Jensen[3]

[3] Appliquée avec $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \dfrac{1}{n}$.

$$f\left(\frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_n)\right) \leqslant \frac{1}{n}f(x_1) + \cdots + \frac{1}{n}f(x_n) \Leftrightarrow \frac{n}{x_1+\cdots+x_n} \leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right).$$

En passant à l'inverse, il vient donc

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \leqslant \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}.$$

Solution de l'exercice 24.10

Par concavité de la fonction ln, on a, pour tout $x, y > 1$,

$$\ln\frac{x+y}{2} \geqslant \frac{1}{2}\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(y).$$

Mais pour tous réels positifs α et β, on a $2\sqrt{\alpha}\sqrt{b} \leqslant \alpha + \beta$.
Et donc $\sqrt{\ln x \ln y} \leqslant \dfrac{1}{2}(\ln x + \ln y) \leqslant \ln\dfrac{x+y}{2}$.

Rappel
Cette inégalité classique découle de

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0.$$

Alternative : la fonction $x \mapsto \ln(\ln(x))$ est concave sur $]1, +\infty[$ puisque sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ qui est décroissante.
Donc pour $x, y \in]1, +\infty[$,

$$\ln\left(\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \geqslant \frac{1}{2}\ln(\ln(x)) + \frac{1}{2}\ln(\ln(y)).$$

Par croissance de l'exponentielle,

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant e^{\frac{1}{2}\ln(\ln(x)+\ln(y))} \geqslant e^{\ln\left(\sqrt{\ln x}\right)+\ln\left(\sqrt{\ln y}\right)} \geqslant \sqrt{\ln(x)\ln(y)}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 24.11

Soit f la fonction définie sur $[0, \pi[$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+\sin x}$.
Alors f est évidemment dérivable, et

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \ f'(x) = -\frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}.$$

Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $x \mapsto (1+\sin x)^2$ est croissante (et donc son inverse est décroissante) et positive, et $x \mapsto \cos(x)$ est décroissante et positive.
Et donc le quotient $x \mapsto \dfrac{\cos x}{(1+\sin x)^2}$ est décroissant. Et donc f' est décroissante.

> ⚠ Attention !
> La positivité mentionnée ci-dessus est indispensable, sans hypothèses de signe, le produit de fonctions décroissantes n'est pas forcément décroissant.

En revanche, le raisonnement ci-dessus ne vaut plus forcément sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.
Mais sur cet intervalle, $x \mapsto -\cos(x)$ est croissante et positive, et $x \mapsto (1+\sin x)^2$ est décroissante et positive, donc d'inverse croissante.
Et donc par produit, f' est croissante.
Et ainsi, f est convexe sur $[0, \pi[$.

On a donc en particulier,

$$f\left(\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{3}\gamma\right) \leqslant \frac{1}{3}f(\alpha) + \frac{1}{3}f(\beta) + \frac{1}{3}f(\gamma).$$

Or $\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = \dfrac{\pi}{3}$, et donc

$$\frac{1}{1+\sin\frac{\pi}{3}} \leqslant \frac{1}{3}\frac{1}{1+\sin\alpha} + \frac{1}{3}\frac{1}{1+\sin\beta} + \frac{1}{3}\frac{1}{1+\sin\gamma}.$$

Soit encore

$$\frac{3}{1+\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{6}{2+\sqrt{3}} \geqslant \frac{1}{1+\sin\alpha} + \frac{1}{1+\sin\beta} + \frac{1}{1+\sin\gamma}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 24.12

1. f est dérivable, avec $f' : x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^x} = 1 - \dfrac{1}{1+e^x}$ qui est donc croissante.
   Donc f est convexe.
2. Par l'inégalité de Jensen, toujours en prenant $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}$, il vient

   > Détails
   > C'est Jensen appliquée aux réels $\ln(x_k)$, et non directement aux x_k.

$$f\left(\frac{\ln(x_1)+\cdots+\ln(x_n)}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\ln(x_k)).$$

Soit encore

$$\ln\left(1 + e^{\frac{1}{n}(\ln(x_1)+\cdots+\ln(x_n))}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+e^{\ln(x_k)}\right).$$

Donc

$$\ln\left(1 + \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}\right) \leqslant \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right).$$

Par croissance de l'exponentielle, on a donc

$$1 + \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}.$$

3. Appliquons l'inégalité précédente aux $x_k = \dfrac{b_k}{a_k}$. Il vient alors

$$1+\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{b_k}{a_k}\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{b_k}{a_k}\right)\right)^{1/n}.$$

En multipliant les deux membres de l'inégalité par $\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n}$, il vient

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n}+\left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_k)\right)^{1/n}.$$

Solution de l'exercice 24.13

La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbf{R}_+^*$.
Soient $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n$ des réels strictement positifs.
Posons alors, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i = \dfrac{x_i^2}{x_1^2+\cdots+x_n^2}$, si bien que les λ_i sont positifs et que $\lambda_1+\cdots+\lambda_n = 1$.
Posons également $z_i = \dfrac{y_i}{x_i}$.
On a donc, par l'inégalité de Jensen, appliquée à $z_1,\dots,z_n$,

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i z_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\lambda_i z_i^2.$$

Soit encore

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{y_ix_i}{x_1^2+\cdots+x_n^2}\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{x_1^2+\cdots+x_n^2}\frac{y_i^2}{x_i^2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x_1^2+\cdots+x_n^2}\right)^2\left(\sum_{i=1}^{n}y_ix_i\right)^2 \leqslant \left(\frac{1}{x_1^2+\cdots+x_n^2}\right)\sum_{i=1}^{n}y_i^2.$$

Après multiplication par $\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^2$, il vient $\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)$.

Si $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n$ sont positifs, mais que certains des x_i ou des y_i sont nuls, quitte à renuméroter, on peut supposer que pour $i \in [\![1,p]\!]$, $x_iy_i \neq 0$, et que pour $i \in [\![p+1,n]\!]$, $x_i = 0$ ou $y_i = 0$. Alors

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{p}x_iy_i\right)^2\\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{p}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{p}y_i\right)^2\\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right).\end{aligned}$$

C'est le cas traité précédemment.

Dans le cas où $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n$ sont des réels de signe quelconque, mais non nul, on a[4]

$$\left|\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|x_i||y_i|$$

si bien que

$$\left(\left|\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right|\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i||y_i|\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2\right) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right).$$

[4] Par l'inégalité triangulaire.

Solution de l'exercice 24.14

Le résultat est graphiquement assez intuitif : sur $[a,b]$, $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\Delta_{a,b}$ la corde joignant a à b.

La fonction affine correspondante possède un maximum atteint soit en a soit en b (suivant le signe de $\tau(a,b)$, et f coïncide avec cette fonction affine en ces deux points. Donc nécessairement f possède un maximum en a ou en b.
Essayons de l'écrire à l'aide de l'inégalité des pentes.

Soit $c \in]a,b[$. Supposons que $f(a) \leqslant f(b)$.
Alors par l'inégalité des pentes, $0 \leqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}$.
Et donc en particulier, $f(b)-f(c) \geqslant 0 \Leftrightarrow f(b) \geqslant f(c)$.
Et si $f(b) \leqslant f(a)$, toujours par l'inégalité des pentes,

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant 0$$

et donc $f(c)-f(a) \leqslant 0 \Leftrightarrow f(c) \leqslant f(a)$.
Ainsi, pour tout $c \in]a,b[$, $f(c) \leqslant \max(f(a), f(b))$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 24.15

1. Supposons par l'absurde qu'il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $f(a) < 0$.
Alors pour $a < b < x$, on a, par l'inégalité des pentes,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Mais lorsque $x \to +\infty$, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Et donc pour tout $b > a$, $f(b)-f(a) \geqslant 0 \Leftrightarrow f(b) \leqslant f(a) < 0$.
Et donc $\lim\limits_{b\to+\infty} f(b) \leqslant f(a) < 0$, ce qui est absurde.
Donc f est à valeurs positives.

2. Notons $y = ax+b$ une équation de D.
Alors $g : x \mapsto f(x)-(ax+b)$ est encore convexe, puisque somme[5] de fonctions convexes (en effet, une fonction affine est toujours convexe).
Par définition d'une asymptote, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, si bien que g est à valeurs positives par la question 1 : pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) \geqslant ax+b$, donc $\mathscr{C}_f$ est au dessus de D.

[5] Voir l'exercice 1.

SOLUTION DE L'EXERCICE 24.16

1. Soit $x > 1$. Alors par convexité de f on a $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \geqslant \dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}$, soit encore

$$f(x) \geqslant x(f(1)-f(0)) + f(0).$$

Puisque $f(1)-f(0) > 0$ par stricte croissance de f, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Remarque
Cette inégalité signifie juste que sur $]1,+\infty[$, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\Delta_{0,1}$.

2. Supposons par l'absurde f non constante. Alors il existe $a < b$ tels que $f(a) \neq f(b)$.
► **Si** $f(b) > f(a)$: alors comme à la question précédente, pour $x > b$, on a

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Leftrightarrow f(x) \geqslant (x-a)\underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{>0} + f(a)$$

si bien que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, contredisant le fait que f est majorée.
► **Si** $f(b) < f(a)$: alors pour $x < a$, on a

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Leftrightarrow f(x) \geqslant (x-a)\underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{<0} + f(a)$$

⚠ Attention !
Ici $x-a < 0$, donc le sens de l'inégalité a changé.

si bien que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, contredisant le fait que f est majorée.

Et donc une fonction convexe sur $\mathbf{R}$ et majorée est nécessairement constante.

SOLUTION DE L'EXERCICE 24.17

1. Soit $c \in [a,b]$. Alors il existe $\lambda \in [0,1]$ tel que $c = (1-\lambda)a + \lambda b$.
Et alors $0 \leqslant f(c) = f((1-\lambda)a + \lambda b) \leqslant (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b) = 0$.
Et donc $f(c) = 0$. Ceci étant vrai pour tout $c \in [a,b]$, f est la fonction nulle sur $[a,b]$.

2. Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction convexe sur un intervalle I possédant un minimum m.
Supposons qu'il existe deux réels distincts $a < b$ tels que $f(a) = f(b) = m$.
Alors la fonction g définie sur $[a,b]$ par $g(x) = f(x) - m$ est positive, toujours convexe, et $g(a) = g(b) = 0$.
Donc elle est nulle sur $[a,b]$, si bien que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) = m$.
Et ainsi, le minimum de f est atteint en tous les points du segment $[a,b]$, qui sont donc en nombre infini.

Autrement dit
On suppose que f atteint son minimum en deux points au moins.

3. Si f est convexe et T-périodique sur $\mathbf{R}$, alors elle est continue, car $\mathbf{R}$ est un intervalle ouvert.
Donc elle possède un minimum m, et $g = f + m$ est encore convexe, et à valeurs positives.
Soit alors $a \in \mathbf{R}$ tel que $f(a) = m$. Alors pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $g(a - kT) = g(a + kT) = 0$, si bien que g est nulle sur $[a - kT, a + kT]$.
Et ceci étant vrai pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, g est nulle sur $\mathbf{R} = \displaystyle\bigcap_{k \in \mathbf{N}^*} [a - kT, a + kT]$.
Et donc f est constante égale à m.

Solution de l'exercice 24.18

Supposons donc que f possède un minimum local en a, et soit $\eta > 0$ tel que $[a-\eta, a+\eta] \subset I$ et $\forall x \in [a-\eta, a+\eta]$, $f(x) \geqslant f(a)$.
Soit alors $x > a + \eta$. Par l'inégalité des pentes,

$$\frac{f(a+\eta) - f(a)}{a + \eta - a} \leqslant \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Mais $f(a+\eta) - f(a) \geqslant 0$, et donc $f(x) - f(a) \geqslant 0$, si bien que $f(x) \geqslant f(a)$.
Et de même, si $x < a - \eta$, alors toujours par l'inégalité des pentes,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant \frac{f(a-\eta) - f(a)}{a - \eta - a}.$$

Mais $f(a-\eta) - f(a) \geqslant 0$, et $a - \eta - a < 0$, si bien que $\dfrac{f(a-\eta) - f(a)}{a - \eta - a} \leqslant 0$.
Et donc $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant 0$ et donc $f(x) - f(a) \geqslant 0 \Leftrightarrow f(x) \geqslant f(a)$.
On a donc bien, pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant f(a)$, donc f admet un minimum global en a.

Remarque
Le fait que I soit ouvert garanti qu'on puisse trouver η suffisamment petit pour que $]a-\eta, a+\eta[\subset I$.

Solution de l'exercice 24.19

1. Soient $x < y$ deux réels strictement positifs, et soit $z \geqslant y$.
Alors par l'inégalité des pentes,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Mais lorsque $z \to +\infty$, $f(z) - f(y)$ admet une limite finie, et $z - y$ tend vers $+\infty$, si bien que par passage à la limite dans l'inégalité précédente,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant 0 \Leftrightarrow f(y) - f(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow f(y) \leqslant f(x).$$

Et donc f est décroissante.

2.a. Puisque f est décroissante, sa dérivée est négative sur $\mathbf{R}_+^*$.
Par ailleurs, par convexité de f, cette dérivée est croissante. Et donc étant croissante et majorée, par le théorème de la limite monotone, elle admet une limite finie $\ell \leqslant 0$ en $+\infty$.
Alors pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f'(x) \leqslant \ell$.
D'autre part, pour $x < y$ deux réels strictement positifs, par le théorème des accroissements finis, il existe $c_{x,y} \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c_{x,y}) \leqslant \ell$.
Mais lorsque $y \to +\infty$, par le même raisonnement que précédemment, $\displaystyle\lim_{y \to +\infty} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = 0$.
Et donc $0 \leqslant \ell$. Puisque nous savons déjà que $\ell \leqslant 0$, nécessairement $\ell = 0$.

Graphiquement
Le théorème des accroissements finis nous dit que la pente d'une corde est une valeur prise par la dérivée, donc a même coefficient directeur qu'une tangente.

2.b. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\cos(x^3)}{x}$ est un contre-exemple.
En effet, elle tend bien vers 0 en $+\infty$, car produit d'une fonction bornée par une fonction de limite nulle.
Mais sa dérivée, qui est $f' : x \mapsto -3x\sin(x^3) - \dfrac{\cos(x^3)}{x^2}$ n'admet pas de limite puisque $x\sin(x^3)$ n'a pas de limite en $+\infty$ alors que $\dfrac{\cos(x^3)}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

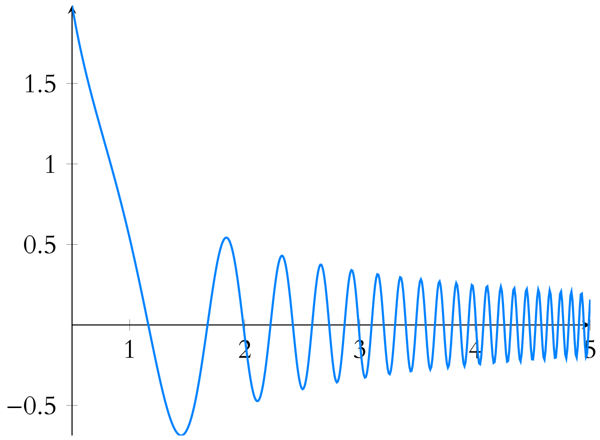

FIGURE 24.1 – La fonction $x \mapsto \frac{\cos(x^3)}{x}$ tend vers 0, mais les oscillations étant de «plus en plus rapides», la dérivée n'a pas de limite.

SOLUTION DE L'EXERCICE 24.20

Un sens est clair, si f est convexe, alors pour $x, y \in I$ et $\lambda = \frac{1}{2}$,

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Pour la réciproque, notons que pour $x, y, z, t \in I$, on a

$$f\left(\frac{x+y+z+t}{4}\right) = f\left(\frac{1}{2}\frac{x+y}{2} + \frac{1}{2}\frac{z+t}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}f\left(\frac{x+y}{2}\right)+\frac{1}{2}f\left(\frac{z+t}{2}\right) \leqslant \frac{1}{4}\left(f(x)+f(y)+f(z)+f(t)\right).$$

Une récurrence sans difficultés prouve que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, quels que soient les réels $x_1, \dots, x_{2^n} \in I$,

$$f\left(\frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{2^n} x_i\right) \leqslant \frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

En particulier, pour $x, y \in I$, et $p \in [\![0, 2^n]\!]$, en prenant $x_1 = \cdots = x^p = x$ et $x_{p+1} = \cdots = x_{2^n} = y$, on obtient

$$f\left(\frac{p}{2^n}x + \frac{2^n-p}{2^n}y\right) \leqslant \frac{p}{2^n}f(x) + \left(1-\frac{p}{2^n}\right)f(y).$$

Autrement dit, c'est bien la définition de fonction convexe, mais seulement pour $\lambda \in E = \left\{\frac{p}{2^n}, n \in \mathbf{N}, p \in [\![0, 2^n]\!]\right\}$.

> **Terminologie**
> De tels nombres sont appelés des entiers dyadiques.

C'est là qu'entre en jeu la continuité de f, puisque E est dense dans $[0,1]$.
En effet, si $\lambda \in [0,1]$, posons $u_n = \dfrac{\lfloor \lambda 2^n \rfloor}{2^n}$, qui est bien un élément de E.
Alors $2^n\lambda - 1 < \lfloor 2^n\lambda \rfloor \leqslant 2^n\lambda$, si bien que $\lambda - \dfrac{1}{2^n} < u_n \leqslant \lambda$, et donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lambda$.
Soient donc $x, y \in I$, et $\lambda \in [0,1]$, avec (u_n) comme ci-dessus.
On a alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(u_n x + (1-u_n)y) \leqslant u_n f(x) + (1-u_n)f(y)$.
Mais puisque $u_n x + (1-u_n)y \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (1-\lambda)x + \lambda y$, par caractérisation séquentielle de la continuité,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lim_{n\to+\infty} f(u_n x + (1-u_n)y).$$

Et donc par passage à la limite,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Et donc f est convexe.

Solution de l'exercice 24.21

Soit $a \in \mathbf{R}$ fixé.
Puisque f est convexe, alors τ_a est croissante, et puisque f n'est pas affine, τ_a n'est pas constante.
Donc il existe $u < v$ tels que $\tau_a(u) < \tau_a(v)$.

Par ailleurs, pour x suffisamment grand, on a à la fois $x \geqslant v$ et $a - x \leqslant u$.
On a alors $\tau_a(a-x) \leqslant \tau_a(u)$ et $\tau_a(v) \leqslant \tau_a(x)$.
Ce qui s'écrit encore $\dfrac{f(a) - f(a-x)}{x} \leqslant \tau_a(u) \Leftrightarrow f(a-x) \geqslant f(a) - x\tau_a(u)$.
Et $f(x) \geqslant (x-a)\tau_a(v) + f(a)$.

Si on somme ces deux inégalités, il reste donc

$$f(x) + f(a-x) \geqslant x\underbrace{(\tau_a(v) - \tau_a(u))}_{>0} + 2f(a) - a\tau_a(v) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$