TD 23 : Dérivabilité

▸ Généralités, dérivées successives

Exercice 23.1 Déterminer le domaine de dérivabilité des fonctions $f : x \mapsto x|x|$ et $g : x \mapsto \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leqslant -1 \\ (x+1)^3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$ F

Exercice 23.2 Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que la fonction $g : x \mapsto \begin{cases} f(2x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ f(2x-1) & \text{si } \frac{1}{2} < x \leqslant 1 \end{cases}$ soit dérivable sur $[0,1]$. PD

Exercice 23.3 Montrer que la dérivée d'une fonction dérivable paire (resp. impaire, resp. périodique) est impaire (resp. paire, resp. périodique). F

Exercice 23.4 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable en a. Déterminer $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+2h) - f(a-h)}{h}$ et $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{xf(a) - af(x)}{x-a}$. PD

Exercice 23.5 Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}_+^*$, on pose $f_n(x) = x^{n-1}\ln(x)$. Calculer $f_n^{(n)}$. PD

Exercice 23.6 Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 1 + 2x}{3}$. AD

1. Prouver que f réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.
2. Prouver que f^{-1} possède un développement limité à tout ordre au voisinage de 0.
3. Déterminer $DL_2(0)(f^{-1})$.

Exercice 23.7 Soit $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x)$. AD

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbf{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$.
   Préciser le degré, la parité et le coefficient dominant de P.
2. Déterminer les limites de $f^{(n)}$ en $\pm\infty$.
3. Prouver par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$ que P_n est scindé sur $\mathbf{R}$, et que ses racines sont toutes simples.

▸ Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Exercice 23.8 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et périodique. Prouver que f est lipschitzienne. PD

Exercice 23.9 À l'aide du théorème des accroissements finis, déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}$. PD

Exercice 23.10 Soit $n \geqslant 1$, soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et soit f une fonction n fois dérivable sur I, qui s'annule en $n+1$ points distincts de I. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur I. PD

Exercice 23.11 Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction n fois dérivable telle que $f(a) = f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = f(b) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$. PD

Exercice 23.12 Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme scindé. Montrer que P' est scindé. AD

Exercice 23.13 **Théorème de Darboux** AD

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$, et soit $f \in \mathscr{D}(I, \mathbf{R})$. On souhaite prouver que $f'(I)$ est un intervalle.

1. Prouver le résultat si f est de classe $\mathscr{C}^1$.
2. On suppose à présent que $a < b$ sont deux points de I, et que y est strictement compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$. On note g la fonction définie sur I par $g(x) = f(x) - xy$.
   (a) Montrer que g n'est pas monotone sur I.
   (b) En déduire que g n'est pas injective sur I.
   (c) Conclure.

Exercice 23.14 **Règle de l'Hôpital** AD

Soient f et g deux fonctions continues sur $[0,a]$, dérivables sur $]0,a[$, avec $f(0) = g(0) = 0$. On suppose que g et g' ne s'annulent pas sur $]0,a[$

1. Pour tout $x \in]0, a]$, montrer qu'il existe $c \in]0, x]$ tel que $g'(c)f(x) = f'(c)g(x)$.
2. Montrer que si $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe dans $\overline{\mathbf{R}}$, alors $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ existe aussi, et que ces limites sont égales.
3. **Applications** : calculer, sans développements limités, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{1 - \cos x}$, et retrouver $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$.

Exercice 23.15 Montrer que pour $P \in \mathbf{R}[X]$ non nul, l'équation $P(x) = e^x$ possède au plus $\deg P + 1$ solutions.

Exercice 23.16 Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ dérivable. Prouver que si $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$. AD

Exercice 23.17 Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme scindé à racines simples. Montrer que P ne peut avoir deux coefficients consécutifs nuls. AD

Exercice 23.18 **Une généralisation du théorème de Rolle** AD

Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ continue sur $\mathbf{R}_+$ et dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$. On suppose que $f(0) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Prouver qu'il existe $c \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $f'(c) = 0$.

Application ($\star$) : soit $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme scindé. Montrer que pour $\lambda \in \mathbf{R}$, $P' + \lambda P$ est scindé.

Exercice 23.19 F

1. Prouver que pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $|\operatorname{Arctan}(x) - \operatorname{Arctan}(y)| \leqslant |x - y|$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|1 - \cos(x)| \leqslant |x|$.

Exercice 23.20 **Sommes de Riemann (Banque CCINP 47)** D

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $R_n(f) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$.
2. Déterminer la limite de la suite (x_n) définie par $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{3n^2 + k^2}$.

Exercice 23.21 Soit $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ une fonction n fois dérivable ($n \geqslant 1$). D

1. Prouver à l'aide d'un exemple que même si f admet une limite finie en $+\infty$, il se peut que f' n'admette pas de limite en $+\infty$.
2. Prouver que si $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
3. Prouver que si f et $f^{(n)}$ admettent des limites finies en $+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(n)}(x) = 0$.

Exercice 23.22 **(Oral ENS Ulm)** TD

Soit $n \in \mathbf{N}$ et soient $\omega_1, \dots, \omega_n$ des réels non nuls et $a_1, \dots, a_n$ des réels. Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \cos(\omega_i x)$ s'annule une infinité de fois.

Exercice 23.23 **Oral ENS** TD

Soient a, b, c trois réels strictement positifs deux à deux distincts. Déterminer toutes les fonctions f de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ telles que $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(ax) + f(bx) + f(cx) = 0$.

▸ Prolongements $\mathscr{C}^1/\mathscr{C}^k$

Exercice 23.24 Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que la fonction $f_n : x \mapsto \begin{cases} x^{n+1} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbf{R}$, mais pas $n+1$ fois dérivable. F

Exercice 23.25 Montrer que la fonction f définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $x \mapsto x^3 \ln x$ se prolonge en une fonction $\tilde{f}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$. Quelle est la valeur maximale de k telle que $\tilde{f}$ soit de classe $\mathscr{C}^k$? PD

Exercice 23.26 Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$. AD

1. Montrer que f se prolonge en une fonction $\tilde{f}$ continue sur $\mathbf{R}_+$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$ et que pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe $P_n \in \mathbf{R}[X]$ tel que
$$\forall x > 0,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}.$$
3. En déduire que $\tilde{f}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+$.

CORRECTION DES EXERCICES DU TD 23

SOLUTION DE L'EXERCICE 23.1

Notons $f : x \mapsto x|x|$.
Puisque la valeur absolue est dérivable sur $\mathbf{R}^*$, par produit de fonctions dérivables, f est dérivable sur $\mathbf{R}^*$.
Par contre, le fait que la valeur absolue ne soit pas dérivable en 0 ne prouve en rien[1] que f ne l'est pas.
Soit donc $x \neq 0$. Alors $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = |x| \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$.
Donc f est dérivable en 0, avec $f'(0) = 0$, et donc elle est dérivable sur $\mathbf{R}$ tout entier.

[1] Ai-je mentionné en cours un théorème qui dirait quelque chose comme «le produit de fonctions non dérivables n'est pas dérivable» ? Pas que je sache...

De même, il est clair que g est dérivable sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$, car les fonctions $x \mapsto x + 1$ et $x \mapsto (x+1)^3$ le sont.
Pour $x \neq -1$, on a $\dfrac{g(x) - g(-1)}{x + 1} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant -1 \\ (x+1)^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$.
La limite à gauche de ce taux d'accroissement vaut alors 1, mais la limite à droite vaut 0.
Donc g n'est pas dérivable en -1.

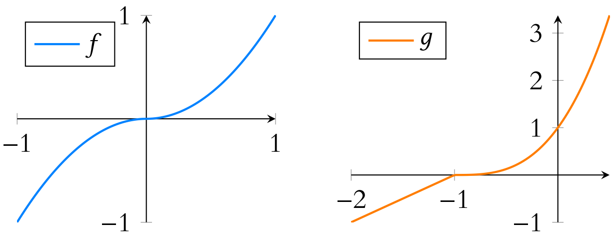


FIGURE 23.1 – Les fonctions f et g.

SOLUTION DE L'EXERCICE 23.2

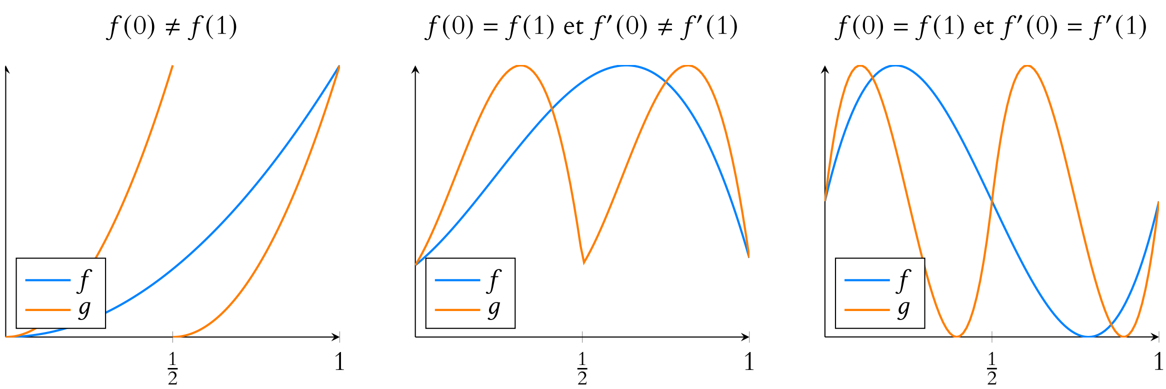


FIGURE 23.2 – Les 3 cas que nous allons distinguer.

Notons déjà que g est dérivable sur $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$ par composition de fonctions qui le sont.
D'autre part, on a $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} g(x) = f(1)$ et $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} g(x) = f(0)$, donc g est continue en $\frac{1}{2}$ si et seulement si $f(0) = f(1)$.

Rappel
Une fonction dérivable est nécessairement continue, donc la continuité de g est une condition nécessaire (mais pas suffisante) à sa dérivabilité.

Supposons à présent que cette condition est vérifiée, et donc que g est continue en $\frac{1}{2}$.
Alors pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $g(x) = f(2x)$, et donc $g_{|\left[0, \frac{1}{2}\right]}$ est dérivable car composée de fonctions qui le sont, de dérivée égale à $x \mapsto 2f'(2x)$.
Et donc en particulier, g est dérivable à gauche en $\frac{1}{2}$ avec $g'g\left(\frac{1}{2}\right) = 2f'(1)$.

Subtilité
Puisqu'on ne considère que la restriction de g à gauche de $\frac{1}{2}$, on n'en déduit rien sur la dérivabilité à droite de g en $\frac{1}{2}$.

Puisque $g\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) = f(0)$, on a pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $g(x) = f(2x-1)$ (cette relation n'était a priori vraie que pour $x > \frac{1}{2}$, et c'est vraiment la continuité qui nous permet d'affirmer qu'elle encore pour $x = \frac{1}{2}$).
Et donc comme ci-dessus, g est dérivable à droite en $\frac{1}{2}$ avec $g'_d\left(\frac{1}{2}\right) = f'(0)$.

En conclusion, g est dérivable en $\frac{1}{2}$ si et seulement si $g'_g\left(\frac{1}{2}\right) = g'_d\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow f'(1) = f'(0)$.

Solution de l'exercice 23.3

Soit f une fonction paire et dérivable sur un intervalle[2] I.
Alors, pour tout $x \in I$, $f(x) = f(-x)$.
En dérivant cette relation, il vient : pour tout $x \in I$, $f'(x) = -f'(-x)$, et donc f' est impaire.
De même, si f est impaire, alors $f(x) = -f(-x)$ ce qui après dérivation nous donne $f'(x) = f'(-x)$, donc f' est paire.
Enfin, si f est T-périodique, alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = f(x+T)$, de sorte que $f'(x) = f'(x+T)$, et donc f' est T-périodique.

[2] Nécessairement symétrique.

Solution de l'exercice 23.4

Pour $h \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}\frac{f(a+2h)-f(a-h)}{h} &= \frac{f(a+2h)-f(a)}{h} + \frac{f(a)-f(a-h)}{h} = 2\frac{f(a+2h)-f(a)}{h} + \frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\\ &\underset{h\to 0}{\longrightarrow} 2f'(a)+f'(a) = 3f'(a).\end{aligned}$$

Pour la seconde limite, on a

$$\frac{xf(a)-af(x)}{x-a} = \frac{(x-a)f(a)+af(a)-af(x)}{x-a} = f(a) - a\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)-af'(a).$$

On notera qu'une alternative facile, et peut-être un moins «bidouille» est de passer par les développements limités d'ordre 1 de f.

Solution de l'exercice 23.5

La formule de Leibniz est toute indiquée, puisque les fonctions $g_n : x \mapsto x^{n-1}$ et ln sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ (et donc $\mathscr{C}^n$) sur $\mathbf{R}_+^*$.
On a alors, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$g_n^{(k)} : x \mapsto \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}x^{n-1-k} \text{ et } g_n^{(n)}(x) = 0.$$

Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $\ln^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}$, et une récurrence rapide prouver que pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}_+^*$,

$$\ln(k)(x) = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{x^k}.$$

Donc par la formule de Leibniz,

$$\begin{aligned}f_n^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}g_n^{(k)}(x)\ln^{(n-k)}(x)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}x^{n-1-k}\frac{(-1)^{n-k-1}(n-k-1)!}{x^{n-k}}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(-1)^{n-k-1}\frac{(n-1)!}{x}\\ &= \frac{(n-1)!}{x}\left(\binom{n}{n} - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\right)\\ &= \frac{(n-1)!}{x}\left(1-(1-1)^n\right) = \frac{(n-1)!}{x}.\end{aligned}$$

Le terme $k = n$ est nul car $g_n^{(n)}$ l'est.

SOLUTION DE L'EXERCICE 23.6

1. C'est le théorème de la bijection : f est continue, strictement croissante car somme de fonctions qui le sont, et on a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Donc f réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.
2. Puisque f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$, et que sa dérivée, qui est $x \mapsto \frac{e^x+2}{3}$ ne s'y annule pas, f^{-1} est aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$. Et donc par la formule de Taylor-Young, pour tout $n \in \mathbf{N}$, f^{-1} possède un développement limité d'ordre n en 0.
3. Puisque f^{-1} possède un développement limité d'ordre 2, notons-le

$$f^{-1}(x) \underset{x\to 0}{=} c + bx + ax^2 + o(x).$$

Alors, puisque $f(0) = 0$, on a aussi $f^{-1}(0) = 0$, si bien que $c = 0$.
Il reste donc $f^{-1}(x) \underset{x\to 0}{=} bx + cx^2 + o(x^2)$.
Par ailleurs, le développement limité de f en 0 est

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^2}{6} + o(x^2).$$

Or, on a $x = f^{-1}(f(x))$, et donc

$$x \underset{x\to 0}{=} bf(x) + cf(x)^2 + o(f(x))^2 \underset{x\to 0}{=} bx + \left(c + \frac{b}{6}\right)x^2 + o(x^2).$$

Par unicité du DL de x, on a donc $b = 1$ et $\frac{b}{6} + c = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{1}{6}$.
Et donc le $DL_2(0)$ de f^{-1} est $f^{-1}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{6} + o\left(x^2\right)$.

Méthode
Si nous choisissons de calculer le DL de $f^{-1}(f(x))$ plutôt que celui de $f(f-1(x))$ c'est car cette deuxième option a l'inconvénient de faire apparaitre des c^2, ou des cb, du fait qu'on doit élever au carré le DL de f^{-1}.
S'il n'y a pas là d'obstacle insurmontable, les calculs sont plus faciles avec $f^{-1}(f(x))$, car cette situation ne s'y produit pas.

SOLUTION DE L'EXERCICE 23.7

1. Notons que nous savons déjà que Arctan est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ puisque dérivable et que sa dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
Procédons alors par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$, en prouvant $\mathscr{P}(n)$: «il existe $P_n \in \mathbf{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{\left(1+x^2\right)^n}$».
Pour $n = 1$, il suffit de prendre P_1 le polynôme constant égal à 1.
Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, et soit $P_n \in \mathbf{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbf{R}$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{\left(1+x^2\right)^n}$.
Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{P_n'(x)\left(1+x^2\right)^n - 2nx\left(1+x^2\right)^{n-1}P_n(x)}{\left(1x^2\right)^{2n}} = \frac{P_n'(x)\left(1+x^2\right) - 2nxP_n(x)}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}.$$

Et donc en posant $P_{n+1} = \left(1+X^2\right)P_n' - 2nXP_n$, on a bien un polynôme tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{P_{n+1}(x)}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}$.
Donc par le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.
Notons que l'unicité d'un tel polynôme est automatique, puisque si on dispose de deux polynômes P_n et Q_n tels que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{P_n(x)}{\left(1+x^2\right)^n} = \frac{Q_n(x)}{\left(1+x^2\right)^n}$$

alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $P_n(x) = Q_n(x)$, et donc P_n et Q_n sont deux polynômes qui coïncident en une infinité de nombres, et donc sont égaux.

La relation $P_{n+1} = \left(1+X^2\right)P_n' - 2nXP_n$, ne nous permet pas de déterminer immédiatement le degré de P_n puisque $\left(1+X^2\right)P_n'$ et nXP_n sont de même degré, et donc pour déterminer le degré de la somme, il nous faut en savoir davantage sur les coefficients dominants .

Détails
Si ces coefficients dominants s'annulent, alors le degré de P_{n+1} sera strictement inférieur à celui de XP_n.

On a $P_1 = 1$, puis $P_2 = -2X$, $P_3 = -2(1+X^2) + 8X^2 = 6X^2 - 2$,
$P_4 = 12X(1+X^2) - 36X^3 + 12X = -24X^3 + 24X$.
Il semble donc légitime de conjecturer que le degré de P_n est $n-1$ et que son coefficient dominant vaut $(-1)^{n-1}n!$
Cette conjecture se prouver alors par récurrence[3] : supposons que $P_n = (-1)^{n-1}n!X^{n-1} + Q_n$ avec $\deg Q < n-1$. Alors

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= \left((-1)^{n-1}n!(n-1)X^{n-2} + Q_n'\right)\left(1+X^2\right) - 2nX\left((-1)^{n-1}n!X^{n-1} + Q_n\right) \\ &= (-1)^{n-1}n!(n-1-2n)X^n + \underbrace{(1+X^2)Q_n' - 2nXQ_n}_{\in \mathbf{R}_{n-1}[X]} \\ &= (-1)^n(n+1)!X^n + Q_{n+1}. \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est bien de degré n, avec un coefficient dominant égal à $(-1)^n(n+1)!$, donc par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, P_n est de degré n, de coefficient dominant $(-1)^{n-1}n!$

[3] Déjà largement initialisée.

Enfin, sur le même principe, on prouve que P_n est pair si n est impair, et impair si P_n est pair.
Pour le prouver, il suffit de noter que P_n' a une parité opposée à celle de P_n (voir l'exercice 3), et donc $(1+X^2)P_n'$ aussi.
Et de même, XP_n est le produit de P_n par un polynôme impair, donc est de parité opposée à celle de P_n.

2. Puisque $\deg n-1 \ = n-1 < 2n$, $P_n(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} o\left(\left(1+x^2\right)^n\right)$, et donc $\lim\limits_{n\to\pm\infty} f^{(n)}(x) = 0$.

3. Il s'agit donc de prouver que P_n possède exactement $n-1$ racines.
Procédons par récurrence sur $n \geqslant 1$, en prouvant : $\mathscr{P}(n)$: «P_n s'annule $n-1$ fois sur $\mathbf{R}$».
Pour $n = 1$, il n'y a rien à dire.
Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Notons que $P_n(x) = 0 \Leftrightarrow f^{(n)}(x) = 0$.
Notons alors $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1}$ les réels pour lesquels $f^{(n)}(x_i) = 0$.
Alors par le théorème de Rolle, pour tout $i \in [\![1, n-2]\!]$, il existe $y_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $f^{(n+1)}(y_i) = 0$.
Par ailleurs, puisque $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f^{(n)}(x) = 0$, une généralisation du théorème de Rolle (cf exercice 18) nous dit qu'il existe $y_0 \in]-\infty, x_0[$ et $y_{n-1} \in]x_{n-1}, +\infty[$ tels que $f^{(n+1)}(y_0) = f^{(n+1)}(y_{n-1}) = 0$.
Et donc f^{n+1} s'annule au moins n fois, de sorte que P_{n+1} possède au moins $n+1$ racines.
Par le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, et puisque $\deg P_n = n-1$, P_n est scindé dans $\mathbf{R}$, et toutes ses racines sont simples.

Solution de l'exercice 23.8

Notons T une période de f. Alors f' est également T-périodique.
Puisque f est $\mathscr{C}^1$, alors f' est continue sur $[0, T]$, et donc[4] $|f'|$ est bornée.
Notons $M \in \mathbf{R}$ tel que $\forall x \in [0, T]$, $|f'(x)| \leqslant M$.
Alors, par périodicité, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|f'(x)| \leqslant M$.
Et donc par l'inégalité des accroissements finis, f est M-lipschitzienne sur $\mathbf{R}$.

[4] C'est le théorème des bornes atteintes.

Solution de l'exercice 23.9

La fonction $f : t \mapsto te^{1/t}$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$.
En particulier, pour $x > 0$, elle est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$, donc il existe $t_x \in]x, x+1[$ tel que $(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} = f'(t_x)(x+1-x) = f'(t_x)$.
Mais $f'(t) = e^{1/t} - \dfrac{1}{t}e^{\frac{1}{t}} = \dfrac{t-1}{t}e^{\frac{1}{t}}$.
On constate alors que $f'(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Et alors, pour $x > 0$, $t_x \geqslant x$, de sorte que $\lim\limits_{x\to+\infty} t_x = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(t_x) = 1$.
On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} = 1$.

Solution de l'exercice 23.10

Prouvons le résultat par récurrence sur n, et notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété «si f est n fois dérivable sur I et s'annule au moins n fois sur I, alors $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur I.»
Si $n = 1$, et si $a < b$ sont deux éléments de I tels que $f(a) = f(b)$, alors par le théorème de Rolle[5], il existe $c \in]a, b[\subset I$ tel que $f'(c) = 0$.

[5] Qui s'applique puisque f est dérivable.

Donc f' s'annule au moins une fois sur I.
Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, et soit alors f une fonction $n+1$ fois dérivable sur I, et soient $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1}$ des points de I tels que $f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_{n+1})$.
Alors, en appliquant le théorème de Rolle sur chacun des intervalles $[a_i, a_{i+1}]$, f' s'annule au moins une fois sur chacun des $]a_i, a_{i+1}[$, et donc en n points distincts.
Mais f' est n fois dérivable. Donc par l'hypothèse de récurrence $(f')^{(n)} = f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur I.
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, et donc par le principe de récurrence, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Solution de l'exercice 23.11

Puisque $f(a) = f(b)$, et que f est dérivable sur $[a,b]$, alors par le théorème de Rolle, il existe $c_1 \in]a,b[$ tel que $f'(c_1) = 0$.
Mais alors $f'(a) = f'(c_1)$, et f' est dérivable sur $]a,b[$, donc il existe $c_2 \in]a, c_1[$ tel que $f''(c_2) = 0$.
Puis de proche en proche, on prouve que pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, il existe $c_i \in]a, c_{i-1}[\subset I$ tel que $f^{(i)}(c_i) = 0$.
Et donc au final, il existe $c_n \in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c_n) = 0$.

Solution de l'exercice 23.12

Ceci a été fait en cours, dans le cas d'un polynôme scindé à racines simples seulement.

Supposons donc que P soit un polynôme de degré $n \geqslant 1$, scindé, de la forme $P = \alpha \displaystyle\prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_i)^{m_i}$, où $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_p$ sont les racines **distinctes** de P.
Par le théorème de Rolle, P' possède une racine dans $]\alpha_1, \alpha_2[$, une dans $]\alpha_2, \alpha_3[, \dots$, une dans $]\alpha_{p-1}, \alpha_p[$, soient déjà $p-1$ racines.
Donc si $p = n$, c'est-à-dire si toutes les racines de P sont simples, nous avons autant de racines que le degré de P', qui est donc scindé[6]
En revanche, si P possède des racines multiples, il nous manque des racines de P'.
Mais si α_i est une racine de P de multiplicité $m_i \geqslant 2$, alors α_i est racine de P' de multiplicité $m_i - 1$.

Puisque P est scindé, $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} m_i = n$.

Et donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} (m_i - 1) = n - p$.
Ainsi, comptées avec multiplicités, P' possède déjà $n-p$ racines parmi $\alpha_1, \dots, \alpha_p$.
D'autre part, nous avons déjà trouvé $p-1$ racines distinctes (entre elles et distinctes des α_i) grâce au théorème de Rolle.
Soit, avec multiplicités, au moins $n - p + p - 1 = n - 1$ racines de P'.
Mais P' étant de degré $n-1$, nous avons là toutes les racines, et donc P' est scindé.

[6] Et à racines simples.

Remarque
Dans cette somme, les racines simples de P n'apportent rien puisqu'alors $m_i - 1 = 0$.

Solution de l'exercice 23.13

1. Si f est de classe $\mathscr{C}^1$, alors f' est continue, et donc par le théorème des valeurs intermédiaires, $f'(I)$ est un intervalle.

2.a. La fonction g est dérivable sur I, et sa dérivée est $g' : x \mapsto f'(x) - y$.
On a donc $g'(a) = f'(a) - y$ et $g'(b) = f'(b) - y$ de signes opposés. Donc g n'est pas monotone sur I.

2.b. La fonction g est continue sur l'intervalle I. Or, nous savons qu'une fonction continue sur un intervalle est injective si et seulement si elle est strictement monotone sur cet intervalle. Donc g n'est pas injective.

2.c. Puisque g n'est pas injective sur I, il existe deux points $c < d$ de I tels que $g(c) = g(d)$.
Mais g est continue sur $[c,d]$, dérivable sur $]c,d[$, et donc par le théorème de Rolle, il existe $\lambda \in]c,d[\subset I$ tel que $g'(\lambda) = 0 \Leftrightarrow f'(\lambda) = y$.
Ainsi, $y \in f'(I)$, et donc $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbf{R}$.

TVI
Une formulation possible du TVI est la suivante : l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Rappel
Un intervalle est un ensemble qui, dès qu'il contient deux réels a et b, contient tous les réels compris entre a et b.

Solution de l'exercice 23.14

1. Appliquons le théorème de Rolle à la fonction $\varphi : t \mapsto g(t)f(x) - f(t)g(x)$.
Celle-ci est en effet continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$, avec $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(x) = f(x)g(x) - f(x)g(x) = 0$.
Donc il existe $c \in]0,x[$ tel que $\varphi'(c) = 0 \Leftrightarrow g'(c)f(x) = f'(c)g(x)$.

2. Soit $x \in]0, a[$. Par la question 1, il existe $c_x \in]0, x[$ tel que $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$.
Or, $0 \leqslant c_x \leqslant x$, donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to 0} c_x = 0$.
Et donc par composition de limites, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

3. Bien entendu, les développements limités nous permettent de calculer ces limites. L'avantage de ce théorème est qu'il est facile à énoncer et abordable sans développements limités.
Mais dans la pratique, si nous disposons des développements limités, alors la règle de l'Hôpital n'est pas vraiment utile. Appliquons la règle de l'Hôpital à $f(x) = e^x - 1 - x$ et $g(x) = 1 - \cos x$, qui satisfont bien aux hypothèses ci-dessus, par exemple avec $a = 1$.
Alors $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{e^x - 1}{\sin x}$.
À l'aide des équivalents usuels, $\dfrac{e^x - 1}{\sin x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.
Donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{1 - \cos(x)} = 1$.
Notons que ceci prouve que $e^x - 1 - x \underset{x\to 0}{\sim} 1 - \cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$.
Pour la seconde question[7], il s'agit de prouver que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$.
Mais par la règle de l'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2}.$$

Remarque Une alternative aurait été d'appliquer une seconde fois la règle de L'Hôpital.

[7] Vous avez reconnu là le développement limité à l'ordre 2 de $\ln(1+x)$.

Solution de l'exercice 23.15

Notons $d = \deg P$ et supposons par l'absurde qu'il existe strictement plus de $d+1$ solutions à l'équation $P(x) = e^x$, et choisissons $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{d+2}$ des solutions distinctes de cette équation.
Autrement dit, les λ_i sont des points où la fonction $f : x \mapsto e^x - P(x)$ s'annule.
Par applications répétées du théorème de Rolle, f' s'annule au moins $d+1$ fois, donc f'' s'annule au moins d fois, etc, $f^{(d+1)}$ s'annule au moins une fois.
Mais puisque $P^{(d+1)} = 0$, il reste $f^{(d+1)} : x \mapsto e^x$, dont il est bien connu qu'elle ne s'annule pas.

Ainsi, l'équation $P(x) = e^x$ possède au plus $d+1$ solutions.
Bien entendu il peut y en avoir strictement moins, par exemple si $P = -X^{2n} - 1$, qui ne prend que des valeurs négatives.
Et il existe toujours des polynômes réalisant cette borne. En effet, pour $\lambda_0, \dots, \lambda_d$ des réels deux à deux distincts, si on note $L_0, \dots, L_d$ les polynômes de Lagrange associés, alors $P = \sum_{i=0}^{d} e^{\lambda_i} L_i$ est un polynôme de degré au plus d tel que pour tout $i \in [\![0, d]\!]$, $P(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$.

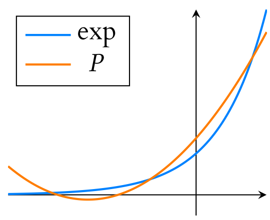


Figure 23.3– Un polynôme de degré 2 qui rencontre 3 fois l'exponentielle.

Solution de l'exercice 23.16

La tentation est grande de dire que puisque $f'(a) > 0$, f est croissante au moins sur un petit voisinage de a.
Malheureusement, rien ne nous permet d'affirmer ceci. Si on avait la continuité de f', alors on pourrait affirmer que f' reste positive sur un petit voisinage de a, et donc que f est croissante sur un tel voisinage. Mais ici f est seulement supposée dérivable, et pas $\mathscr{C}^1$.
Inspirons nous plutôt de la preuve du théorème de Rolle.

Puisque f est dérivable sur $[a, b]$, elle y est continue. Donc par le théorème des bornes atteintes elle admet un maximum M sur $[a, b]$.
Ce maximum ne peut pas être atteint en a puisqu'on aurait alors, pour tout $x \in]a, b]$, $f(x) \leqslant f(a)$, et donc $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant 0$, de sorte que par passage à la limite, $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Remarque On utilise ici le fait que $f'(a) = f'_d(a)$ puisque a est la borne de gauche de $[a, b]$.

Ceci contredit le fait que $f'(a) > 0$.
De la même manière, le maximum de f sur $[a, b]$ ne peut pas être atteint en b, car on aurait alors pour tout $x \in [a, b[$, $\dfrac{f(x) - f(b)}{x - b} \geqslant 0$ et donc $f'(b) \geqslant 0$.

Ainsi f atteint son maximum en un point c intérieur à $[a, b]$, qui est alors nécessairement un point critique de f, et donc $f'(c) = 0$.

Solution de l'exercice 23.17

Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ de degré $n \geqslant 1$, scindé à racines simples, et soient $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ ses racines.
Alors, par le théorème de Rolle, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, P' possède une racine dans $]\lambda_i, \lambda_{i+1}[$, soit en tout $n - 1 = \deg P'$ racines distinctes.
Donc P' est scindé, et ses racines sont encore simples .
En itérant, on prouve donc que $P'', P^{(3)}, \ldots, P^{(n-1)}$ sont scindé à racines simples. Notons que $P^{(n)}$ étant constant, par définition il n'est pas scindé.

Rappel
Un polynôme qui possède autant de racines que son degré (c'est-à-dire le nombre maximal de racines) ne peut avoir que des racines simples, faute de quoi, le nombre de racines comptées avec multiplicité excéderait le degré.

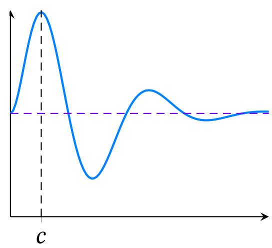
Rappelons que par la formule de Taylor appliquée en 0, les coefficients de P sont donnés par $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$.
Si P possède deux coefficients consécutifs nuls, alors il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $P^{(k)}(0) = P^{(k+1)}(0) = 0$.
Et donc 0 est racine double de $P^{(k)}$, ce qui contredit le fait que toutes ses racines sont simples.

Solution de l'exercice 23.18

Quitte à retirer une constante à f, ce qui ne change rien à sa dérivée, on peut supposer que $f(0) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
Si f est constante sur $\mathbf{R}_+$, il n'y a rien à dire.
Supposons donc que f n'est pas constante, et supposons[8] qu'elle prenne une valeur strictement positive et soit $a \in \mathbf{R}_+$ tel que $f(a) > 0$.
Inspirons nous de la preuve de Rolle, qui prouve l'existence d'un point critique de f en prouvant l'existence d'un maximum.
Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, en prenant $\varepsilon = \dfrac{f(a)}{2}$, il existe $A \in \mathbf{R}_+$ tel que pour $x \geqslant A$, $|f(x)| < \dfrac{f(a)}{2}$.
Soit alors M le maximum[9] de f sur le **segment** $[0, A]$. Alors $M \geqslant f(a)$, et donc pour $x \geqslant A$, $f(x) \leqslant M$.
On en déduit donc que M est le maximum de f sur $\mathbf{R}_+$ tout entier, atteint en un point c de $\mathbf{R}_+^*$.
En particulier, f possède un maximum local en c, et donc $f'(c) = 0$.
Remarque *: il est bien entendu possible de généraliser plus largement. Une version assez générale serait la suivante : si f est dérivable sur $]a, b[$, avec $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$, et que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to b} f(x)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

[8] Quitte à changer f en son opposé.

[9] Un tel maximum existe par le théorème des bornes atteintes.



Application : Soit $\lambda \in \mathbf{R}^*$ (le cas $\lambda = 0$ est l'exercice 12), et considérons l'application $\varphi_\lambda : t \mapsto P(t)e^{\lambda t}$.
Sa dérivée est $\varphi'_\lambda : t \mapsto (P' + \lambda P)e^{\lambda t}$, qui s'annule uniquement en les zéros de $P' + \lambda P$.
Comme dans l'exercice 12, notons $n = \deg P$ et $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_p$ les racines des P, alors elles annulent φ_λ.
Donc par Rolle, φ'_λ s'annule une fois sur chacun des intervalles $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$.
Ceci nous donne donc $p - 1$ racines distinctes de $P' + \lambda P$.
De plus, les racines de multiplicité $m \geqslant 2$ de P sont racines de multiplicité $m - 1 > 0$ de P', et donc sont racines de multiplicité $m - 1$ de $P + \lambda P' + \lambda P$.
Donc avec multiplicité, on a déjà $n - 1$ racines de $P' + \lambda P$.
La différence avec l'exercice 12 réside dans le fait que $P' + \lambda P$ est de degré n, donc il nous manque encore une racine.
Mais $\varphi_\lambda(\alpha_n) = 0 = \lim\limits_{x \to +\infty} \varphi_\lambda(x)$.
Donc par la généralisation de Rolle, il existe $c \in]\alpha_n, +\infty[$ tel que $\varphi'_\lambda(c) = 0 \Leftrightarrow P'(c) + \lambda P(c) = 0$.
Cette racine est nécessairement distincte de toutes celles obtenues précédemment, donc on a n racines de $P' + \lambda P$ comptées avec multiplicité, donc $P' + \lambda P$ est bien scindé.

Solution de l'exercice 23.19

1. La dérivée de la fonction Arctan est $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.
Or, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $0 \leqslant \dfrac{1}{1+t^2} \leqslant 1$.
Donc $\sup_{t\in\mathbf{R}} |\operatorname{Arctan}'(t)| \leqslant 1$.
Et donc par l'inégalité des accroissements finis, pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$,
$$|\operatorname{Arctan}(x) - \operatorname{Arctan}(y)| \leqslant |x-y|.$$

Sup/max
Il n'y a aucune difficulté à constater que ce sup est en fait un maximum atteint uniquement en 0.

2. De même, la fonction cos est 1-lipschitzienne, et donc $\forall x \in \mathbf{R}$,
$$|\cos(x) - 1| = |\cos(x) - \cos(0)| \leqslant |x-0| \leqslant |x|.$$

Solution de l'exercice 23.20

Non seulement, l'exercice est difficile pour l'instant, mais en plus il sera plutôt perturbant quand nous aurons défini proprement l'intégrale, puisqu'il s'agira d'un résultat de cours. Malgré tout, la question est posée chaque année aux CCINP.

1. Notons que $\dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right) = \displaystyle\int_{(k-1)/n}^{k/n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)\,dt$.
D'autre part, d'après la relation de Chasles, $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t)\,,dt$.
Donc
$$R_n(f) - \int_0^1 f(t)\,dt = \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)/n}^{k/n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t)\right)\,dt.$$
À l'aide des inégalités triangulaires[10], il vient donc
$$\left|R_n(f) - \int_0^1 f(t)\,dt\right| \leqslant \sum_{k=1}^n \left|\int_{(k-1)/n}^{k/n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t)\right)\,dt\right| \leqslant \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)/n}^{k/n} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t)\right|\,dt.$$
Puisque f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, f' est continue, donc bornée.
Notons alors $M = \max\limits_{[0,1]} |f'|$.
Par l'inégalité des accroissements finis, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, et tout $x \in \left[\dfrac{k-1}{n}, \dfrac{k}{n}\right]$
$$\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leqslant M\left(\frac{k}{n} - x\right) \leqslant \frac{M}{n}.$$
On en déduit donc que
$$\left|R_n(f) - \int_0^1 f(t)\,dt\right| \leqslant \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \frac{M}{n}\,dt \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{M}{n^2} \leqslant \frac{M}{n}.$$
Ainsi, par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$.

[10] Pour les sommes, puis pour les intégrales, ce qui est légitime puisqu'ici les bornes de l'intégrale sont bien à l'endroit.

Rappel
L'intégrale d'une constante (ici $\frac{M}{n}$) sur un segment est égale à la valeur de la constante multipliée par la longueur du segment d'intégration (ici $\frac{1}{n}$).

2. Tel que donné dans l'énoncé, x_n n'a pas la forme de la question 1, mais il suffit de factoriser par $\frac{1}{n}$:
$$x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{3+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$
où f est la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{3+x^2}$.
On a donc $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{3+x^2}$.
Dès lors, ce n'est plus qu'un simple exercice de calcul d'intégrale.
$$\int_0^1 \frac{dx}{3+x^2} = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6}.$$

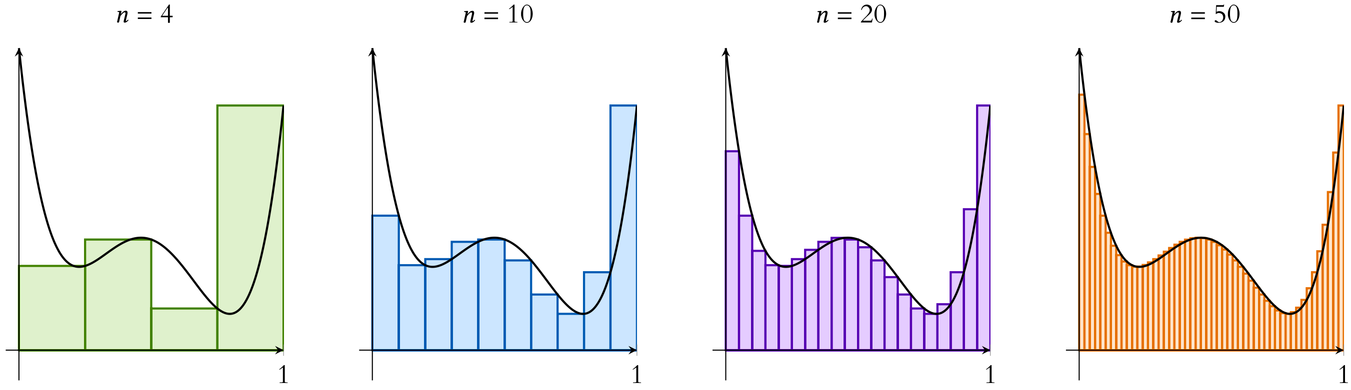


Figure 23.4 – La convergence de $R_n(f)$ vers l'intégrale de f se comprend bien graphiquement.

Solution de l'exercice 23.21

1. Considérons la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\cos(x^2)}{x}$. Alors elle possède évidemment une limite nulle en $+\infty$, car produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0.
Par ailleurs, f est dérivable car produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$.
On a alors, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = -\dfrac{-2x^2\sin(x^2) - \cos(x^2)}{x^2} = -\sin(x^2) - \dfrac{\cos(x^2)}{x^2}$.
Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{\cos(x^2)}{x^2} = 0$, mais $-\sin(x^2)$ n'admet pas de limite en $+\infty$, donc f' n'admet pas de limite en $+\infty$.
2. Supposons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$.
Alors il existe $A \in \mathbf{R}$ tel que pour $x \geqslant A$, $f'(x) \geqslant 1$.
Et alors, par l'inégalité des accroissements finis, pour $x > A$, il existe $c_x \in]A, x[$ tel que $f(x) - f(A) = f'(c_x)(x - A) \geqslant x - A$.
Et donc $f(x) \geqslant f(A) + (x - A) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
3. Supposons que $f^{(n)}$ admette une limite non nulle en $+\infty$. Par exemple[11] supposons cette limite ℓ strictement positive.
Alors il existe $A \in \mathbf{R}$ tel que pour $x \geqslant A$, $f^{(n)}(x) > \frac{\ell}{2}$.
Et alors, comme précédemment, pour $x \geqslant A$, $f^{(n-1)}(x) \geqslant f^{(n-1)}(A) + \frac{\ell}{2}(x - A) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(n-1)}(x) = +\infty$.
En appliquant alors plusieurs fois le résultat de la question 1 à $f^{(n-2)}, f^{(n-3)}, \dots, f$, il vient alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, ce qui est absurde.
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(n)}(x) = 0$.

[11] Quitte à changer f en $-f$.

Solution de l'exercice 23.22

On peut bien évidemment supposer que les a_i sont tous non nuls, et quitte à les renuméroter[12], on peut également supposer que $\omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_n$.
Et par parité du cosinus, on peut même supposer que tous les ω_i sont strictement positifs.

[12] Et à regrouper des termes si besoin.

Un premier cas est facile à traiter : celui où il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $|a_i| > \sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |a_j|$.

Alors pour $k \in \mathbf{Z}$, on a

$$f\left(\frac{2k\pi}{\omega_i}\right) = a_i + \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} a_j \cos\left(\frac{2k\pi}{\omega_i}\omega_j\right).$$

Mais

$$\left|\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} a_j \cos\left(\frac{2k\pi}{\omega_i}\omega_j\right)\right| \leqslant \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |a_j| < |a_i|.$$

Donc $f\left(\dfrac{2k\pi}{\omega_i}\right)$ est du signe de a_i.
Et de même, $f\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{\omega_i}\right) = -a_i + \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} aj \cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{\omega_i}\omega_j\right)$ est du signe de $-a_i$.
Donc par le théorème de Rolle, f s'annule entre $\dfrac{2k\pi}{\omega_i}$ et $\dfrac{(2k+1)\pi}{\omega_i}$.
Ceci étant vrai pour tout $k \in \mathbf{Z}$, f s'annule une infinité de fois.

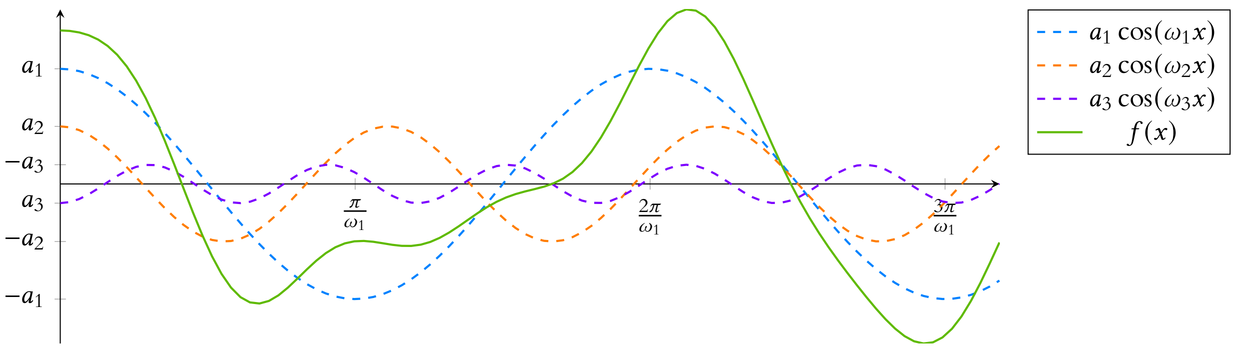


Figure 23.5 – Le cas $n = 3$, lorsque $|a_3| > |a_1| + |a_2|$.

Dans le cas où aucun des coefficients ne l'emporte sur les autres, intégrons f.
En effet, par le théorème de Rolle, si une primitive de f s'annule une infinité de fois, alors f s'annulera aussi une infinité de fois.

Une primitive de f est $x \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\omega_i}\sin(\omega_i x)$.
Nous pourrions tenir le même raisonnement que précédemment, mais pour garder des sommes de cosinus, intégrons $4k$ fois, et considérons $F_k : x \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\omega_i^{4k}}\cos(\omega_i x)$.
Puisque les ω_i sont deux à deux distincts, avec $\omega_1 < \cdots < \omega_n$, pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $\dfrac{1}{\omega_i^{4k}} \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\omega_1^{4k}}\right)$.
Et donc $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} \frac{|a_i|}{\omega_i^{4k}} \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\frac{|a_1|}{\omega_1^{4k}}\right)$.
Par conséquent, il existe $k_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $k \geqslant k_0$,

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=2}^{n} \frac{|a_i|}{\omega_i^{4k}}}{\frac{|a_1|}{\omega_1^{4k}}} < 1 \Leftrightarrow \sum_{i=2}^{n} \frac{|a_i|}{\omega_i^{4k}} < \frac{|a_1|}{\omega_1^{4k}}.$$

Et donc par le premier cas traité précédemment, F_{4k_0} s'annule une fois sur chacun des intervalles de la forme $\left]\dfrac{2\ell\pi}{\omega_1}, \dfrac{(2\ell+1)\pi}{\omega_1}\right[$, $\ell \in \mathbf{Z}$.
Mais alors F'_{4k_0} s'annule une infinité de fois par le théorème de Rolle.
Puis F''_{4k_0}, s'annule une infinité de fois, etc.
Et donc $F_{4k_0}^{(4k_0)} = f$ s'annule une infinité de fois.

Rolle vs. infini

Si on veut être un peu plus précis pour prouver, avec Rolle, que si une fonction g s'annule une infinité de fois, alors sa dérivée aussi, mieux vaut, comme nous l'avons fait pour les polynômes, raisonner avec un nombre fini de points d'annulation. Par exemple, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on peut considérer $n+1$ réels en lesquels g s'annule, et les ordonner par ordre croissant. Puis à l'aide d'applications soigneuses de Rolle, en déduire que g' s'annule au moins n fois. Et ceci étant vrai pour tout n, g s'annule une infinité de fois.

Solution de l'exercice 23.23

La fonction nulle est évidemment solution, et nous allons prouver qu'il s'agit en fait de la seule.
Quitte à échanger a, b et c, supposons $0 < a < b < c$.
Soit f une fonction solution du problème, et soit $n \in \mathbf{N}$. Alors en dérivant n fois la relation $f(ax) + f(bx) + f(cx) = 0$, on obtient, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$a^n f^{(n)}(ax) + b^n f^{(n)}(bx) + c^n f^{(n)}(cx) = 0.$$

Et donc pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\frac{a^n}{c^n} f^{(n)}\left(\frac{ax}{c}\right) + \frac{b^n}{c^n} f^{(n)}\left(\frac{bx}{c}\right) + f^{(n)}(x) = 0.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^n}{c^n} + \frac{b^n}{c^n} = 0$, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $\frac{a^n}{c^n} + \frac{b^n}{c^n} < 1$.
Soit donc $t > 0$, et soit $M_t = \max\limits_{u\in[-t,t]} |f^{(n)}(u)|$, qui existe par le théorème des bornes atteintes appliqué à la fonction $f^{(n)}$, continue[13] sur le segment $[-t,t]$.
Alors, pour tout $x \in [-t,t]$,

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{a^n}{c^n}\left|f^{(n)}\left(\frac{ax}{c}\right)\right| + \frac{b^n}{c^n}\left|f^{(n)}\left(\frac{bx}{c}\right)\right| \leqslant \left(\frac{a^n}{c^n} + \frac{b^n}{c^n}\right) M_t$$

puisque $\frac{ax}{c} \in [-t,t]$ et $\frac{bx}{c} \in [-t,t]$.
Puisque $\frac{a^n}{c^n} + \frac{b^n}{c^n} < 1$, ceci n'est possible[14] que pour $M_t = 0$.
Donc $f^{(n)}$ est nulle sur $[-t,t]$, et ceci étant vrai pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, $f^{(n)}$ est nulle.
Ceci implique donc que $f^{(n-1)}$ est constante, donc $f^{(n-2)}$ est affine, etc, f est polynomiale de degré au plus $n-1$.

[13] Car f est $\mathscr{C}^\infty$.

[14] Prendre un x en lequel $|f^{(n)}|$ est maximale.

À retenir
Une fonction dont la dérivée $n^{\text{ème}}$ est la fonction nulle est polynomiale de degré au plus n.

Reste à trouver quelles sont les fonctions polynomiales qui satisfont la condition.
Soit donc $f : x \mapsto a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ une fonction polynomiale solution du problème.
Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(ax) + f(bx) + f(cx) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\left(a^k + b^k + c^k\right)x^k = 0$.
Ainsi, $x \mapsto f(ax) + f(bx) + f(cx)$ est encore polynomiale, et par hypothèse, elle est nulle sur $\mathbf{R}$.
Donc ses coefficients sont tous nuls, de sorte que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $a_k\underbrace{\left(a^k + b^k + c^k\right)}_{>0} = 0$,
et donc $a_k = 0$.
Et donc la fonction nulle est bien la seule fonction qui satisfait les conditions de l'énoncé.

Solution de l'exercice 23.24

Il est clair que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^*$, avec pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, et tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!}x^{n+1-k} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

De plus, il est clair que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 0$, donc f est continue en 0.
Puisque $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^-} f'(x) = 0$, par le théorème de la limite de la dérivée, f est dérivable en 0, avec $f'(0) = 0$, et f' continue en 0.
Et puisque f' est continue sur $\mathbf{R}^*$, elle l'est sur $\mathbf{R}$, et donc f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$.

Remarque
On applique en fait deux fois ce théorème : une fois à droite de 0 et une fois à gauche de 0.
Ce qui nous donne la dérivabilité à droite et à gauche de f en 0.

Prouvons alors par récurrence sur $k \in [\![0,n-1]\!]$ que f est $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbf{R}$, avec $f^{(k)}(0) = 0$.
Pour $k = 0$ et $k = 1$, c'est déjà fait.
Supposons donc que pour $k \in [\![0,n-1]\!]$, f soit de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbf{R}$, avec $f^{(k)}(0) = 0$.
Alors $f^{(k)}$ est continue sur $\mathbf{R}$, dérivable sur $\mathbf{R}^*$, avec $\lim\limits_{x\to0} f^{(k+1)}(x) = 0$.
Donc par le théorème de la limite de la dérivée appliqué à $f^{(k)}$, $f^{(k)}$ est dérivable en 0, avec $f^{(k+1)}(0) = 0$, et $f^{(k+1)}$ continue en 0.
Puisque $f^{(k+1)}$ est déjà continue sur $\mathbf{R}^*$, elle est continue sur $\mathbf{R}$, et donc f est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ sur $\mathbf{R}$.

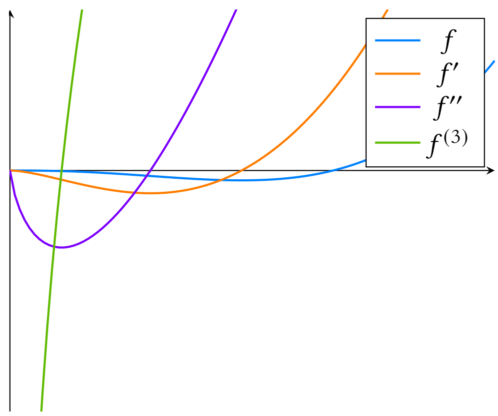
On obtient alors, par récurrence, $f^{(n)}(x) = \begin{cases} (n+1)!x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Et donc $\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \begin{cases} (n+1)! & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$, qui n'admet donc pas de limite en 0, si bien que $f^{(n)}$ n'est pas dérivable en 0.
Et donc f n'est pas $(n+1)$ fois dérivable sur $\mathbf{R}$.

Alternative : notons g la restriction de f à $\mathbf{R}^*$, qui n'est donc pas définie en 0.
Alors comme précédemment, g est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbf{R}^*$, et pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ et tout $x \in \mathbf{R}^*$, $g^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)$.
En particulier, $g, g', g'', \dots, g^{(n)}$ admettent des limites finies, égale à 0, en 0.
Donc par le théorème de prolongement $\mathscr{C}^n$, le prolongement par continuité de g à $\mathbf{R}$, qui est est égal à f, est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbf{R}$, et ses n premières dérivées sont nulles en 0.
Et donc f est $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbf{R}_+$, et on prouve comme ci-dessus qu'elle n'est pas $n+1$ fois dérivable, car $f^{(n)}$ n'est pas dérivable en 0.

Solution de l'exercice 23.25

La fonction f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$ car produit de fonctions qui le sont.
On a alors $f'(x) = x^2 + 3x^2\ln(x)$, $f''(x) = 2x + 6x\ln(x) + 3x$ et $f^{(3)}(x) = 11 + 6\ln(x)$.
En particulier, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f''(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} f^{(3)}(x) = -\infty$.
Donc par le théorème de prolongement $\mathscr{C}^2$, la fonction f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$, et le prolongement ainsi obtenu est $\mathscr{C}^2$.
Et la limite de $f^{(3)}$ en 0 étant infinie, ce prolongement ne saurait être de classe $\mathscr{C}^3$, car si c'était le cas, on aurait $\lim\limits_{x\to 0} f^{(3)}(x) = f^{(3)}(0)$.



Solution de l'exercice 23.26

1. f est continue sur $\mathbf{R}_+^*$, et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$.
Donc f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbf{R}_+$ en posant

$$\widetilde{f} = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

2. La fonction f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$ car composée de fonctions $\mathscr{C}^\infty$.
Montrons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ qu'il existe $P_n \in \mathbf{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}.$$

Pour $n = 0$, c'est évident, il suffit de poser $P_0 = 1$.
Supposons donc que P_n existe. Alors en dérivant $f^{(n)}$, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$,

$$f^{(n+1)}(x) = -\frac{1}{x^2}P_n'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3}P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}.$$

Si on pose $P_{n+1}(X) = -X^2P_n' + 2X^3P_n \in \mathbf{R}[X]$, alors on a bien $f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}$.
Par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

3. Il s'agit d'appliquer le théorème de prolongement $\mathscr{C}^\infty$.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et soit a_dX^d le monôme de plus haut degré de P_n.
Alors[15] $P_n\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{a_d}{x^d}$.

[15] Un polynôme est équivalent en $+\infty$ à son terme de plus haut degré.

Et donc $f^{(n)}(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{a_d}{x^d} e^{-1/x^2}$.

Procédons alors au changement de variable $X = \dfrac{1}{x^2}$, de sorte que $X \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$. Alors

$$\frac{1}{x^d} e^{-1/x^2} = X^{d/2} e^{-X} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissances comparées.
Donc $f^{(n)}(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.
Par le théorème de prolongement $\mathscr{C}^\infty$ (qui s'applique car les limites des dérivées sont finies), $\widetilde{f}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+$, et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.

Remarque

Il se produit là un phénomène qui ne peut pas se produire pour les polynômes (because of Taylor) : une fonction non nulle dont toutes les dérivées en un point sont nulles.